arXiv:2303.06843v1 [math.CT] 13 Mar 2023

关于（余）倾斜对象的刻画

SIMION BREAZ

摘要。我们证明，在具有余积的三角范畴中，一个对象 U 是倾斜对象，当且仅当它是该范畴的（弱）生成元，正交类 $U^{\perp_{>0}}$ 包含 U，且 $U^{\perp_{>0}}$ 对直和封闭。该证明可以对偶化，从而得到具有积的三角范畴中余倾斜对象的刻画。

1. 引言

设 $\mathcal{D}$ 是一个具有直和的三角范畴。若 $U \in \mathcal{D}$ 和 n 是整数，我们记 $U^{\perp_{>n}} = \{X \in \mathcal{D} \mid \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U, X[p]) = 0$，对所有 $p > n\}$ 均成立。类 $U^{\perp_{\leq n}}$、${}^{\perp_{>n}}U$、${}^{\perp_{\leq n}}U$ 以同样方式定义。在 $\mathcal{D}$ 中，t-结构是满足以下条件的一对子范畴 $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$：$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = 0$（即，对所有$U \in \mathcal{U}$和 $V \in \mathcal{V}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U, V) = 0$），$\mathcal{U}[1] \subseteq \mathcal{U}$，$\mathcal{V}[-1] \subseteq \mathcal{V}$；并且对每个对象 $X \in \mathcal{D}$，存在一个三角 $U \to X \to V \to U[1]$，其中 $U \in \mathcal{U}$ 且 $V \in \mathcal{V}$。在这些条件下，我们有 $\mathcal{V} = \mathcal{U}^{\perp_0}$ 和 $\mathcal{U} = {}^{\perp_0}\mathcal{V}$。

若对象 $U \in \mathcal{D}$ 满足 $(U^{\perp_{>0}}, U^{\perp_{\leq 0}})$ 是一个 t-结构，则称其为 倾斜 对象。对偶地，若 U 满足 $({}^{\perp_{\leq 0}}U, {}^{\perp_{>0}}U)$ 是一个 t- 结构，则称其为 余 *silting* 对象。关于这些对象的综述，请参阅 [1]。

根据上述定义，很容易看出，若 U 是倾斜对象，则它具有以下性质：

(S1) $U \in U^{\perp_{>0}}$，(S2) $U^{\perp_{>0}}$ 对直和封闭，(S3) $U^{\perp_{\mathbb{Z}}} = 0$。

对于许多性质良好的范畴，对象 U 是倾斜对象，当且仅当它满足 (S1)、(S2) 和 (S3)。这一刻画的证明通常基于这样一个事实：在这些范畴中，类 $U^{\perp_{\leq 0}}$ 是某个 t-结构的余心，例如 [15, 命题 4.13]。事实上，这一证明可以推广到良生成三角范畴，因为根据 [11]，在良生成三角范畴中，我们总能得到形如 $(\overline{\langle U \rangle}^{[-\infty,0]}, U^{\perp_{\leq 0}})$ 的 t-结构，其中 $\overline{\langle U \rangle}^{[-\infty,0]}$ 是包含 U 的最小子范畴，并且对正移位、余积和扩张封闭（因此，在满足假设 (S1) 和 (S2) 时，我们有 $\overline{\langle S \rangle}^{[-\infty,0]} \subseteq U^{\perp_{>0}}$）。

Neeman 在 [11] 中给出的证明基于这样一个事实：良生成范畴满足 Brown表示定理。由于尚不清楚这些范畴是否也满足对偶的 Brown 表示定理，因此无法将上述证明对偶化，以获得关于余倾斜对象的类似结果。然而，

日期：2023年3月14日。2010 数学主题分类。18G80, 18E40。关键词和短语。三角范畴、t-结构、倾斜对象、余倾斜对象。

当 ${}^{\perp_{>0}}U$ 已经是某个 t-结构的余心时，这样的刻画是已知的，例如，对于紧生成范畴中的纯内射对象（参见 [2] 和 [7]）。

本文的主要目的是通过一种可对偶化的证明，说明在所有具有余积的三角范畴中，对象 U 是倾斜对象，当且仅当它满足条件 (S1)、(S2) 和 (S3)。因此，我们还得出结论：在具有积的三角范畴中，对象 U 是余silting，当且仅当

(C1) $U \in {}^{\perp_{>0}}U$，(C2) ${}^{\perp_{>0}}U$ 对直积封闭，
(C3) ${}^{\perp_{\mathbb{Z}}}U = 0$。

这些都是定理 2.2 的推论。定理 2.2 中，我们假设存在一个余完备前 *aisles* 子范畴（即它对直和、扩张和正移位封闭，参见 [11, 定义 1.1]） $\mathcal{A}$，使得 $U \in \mathcal{A}$，并且对于某个正整数 n，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U, \mathcal{A}[n]) = 0$。此外，在这种情况下，我们可以用以下假设替代条件 (S1) 和 (S2)：

(S1.5) $\mathrm{Add}(U) \subseteq U^{\perp_{>0}}$,
其中，Add(U)表示由 U的多个副本作直和所得对象的所有直和项所构成的类。

当 $\mathcal{A}$ 已经是某个 t-结构的心时，定理 2.2 的一个版本已在 [13, 定理 2]中得到证明。若 $\mathcal{A}$ 是由倾斜对象V诱导的心，我们称 U 为 n-V-*intermediate*。文献中对这类对象已有研究，尤其是在 $\mathcal{D}$ 为某个环的导出范畴且 $\mathcal{A}$ 为标准 t-结构的心时（见 [3] , [16]）。一个常用的事实（例如，见 [1, 引理 5.4]）是：在 Brown表示定理成立的情况下，存在一个 co-t-结构（$\mathcal{X}, V^{\perp_{>0}}$）。关于这一 co-t-结构的其他应用实例，参见 [8]。我们将在第3节介绍三角范畴中带余积的 n-V-中间 silting 对象的一些刻画，这些刻画无需借助 co-t-结构的存在性即可得到。证明也可以对偶化，从而得到关于余倾斜对象的类似结论。

以下， $\mathcal{D}$ 将是一个三角范畴。本文中使用的所有三角都是特 distinguished 三角。若 $\mathcal{D}$ 中的 $A \xrightarrow{\alpha} B \to X \to A[1]$ 是一个三角，那么态射 $B \to X$ 称为 α的锥。我们也将锥一词用于对象 X （它在同构意义下唯一）。关于三角范畴中的其他性质，请参阅 [10]。

2. 具有直和（积）的范畴中（余）倾斜的刻画

若 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 是来自 $\mathcal{D}$ 的类，则

$$\mathcal{X} * \mathcal{Y} = \{Z \in \mathcal{D} \mid \text{there exists a triangle } X \to Z \to Y \to X[1] \text{ with } X \in \mathcal{X} \text{ and } Y \in \mathcal{Y}\}.$$

我们回顾 $*$的一些基本性质。

引理 2.1. 以下陈述成立：
1) 运算 $*$ 是结合的。2) 如果 $A \xrightarrow{\alpha} B \to X \to A[1]$、 $B \xrightarrow{\beta} C \to Y \to B[1]$ 和 $A \xrightarrow{\beta\alpha} C \to Z \to A[1]$ 是三角，那么 $Z \in X * Y$。

3) 如果 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{Y}$ 对直和封闭，那么 $\mathcal{X}*\mathcal{Y}$ 对直和封闭。4) [9, 命题 2。7] 如果 $\mathcal{X}$ 对有限直和及直和项封闭，并且 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{X},\mathcal{X}[i])=0$ 对所有 $i=1,n$ 成立，那么 $\mathcal{X}*\cdots*\mathcal{X}[n]$ 对直和项封闭。

若 $\mathcal{D}$ 是一个具有余积的三角范畴，则 $\mathcal{D}$ 的全子范畴 $\mathcal{A}$ 若在扩张、直和、直和项及正移位（$\mathcal{A}[1]\subseteq\mathcal{A}$）下封闭，则称为余完备前心。因此，若 A、$B\in\mathcal{A}$ 和 $A\to B\to C\to A[1]$ 构成一个三角，则 $C\in\mathcal{A}$。

本节的主要目的是证明以下

定理 2.2. 设 $\mathcal{D}$ 是一个具有余积的三角范畴。假设 $U\in\mathcal{D}$ 是一个满足以下条件的对象：

(S1.5) $\mathrm{Add}(U)\subseteq U^{\perp_{>0}}$，并且

(S3) $U^{\perp_{\mathbb{Z}}}=0$。

假设 $\mathcal{D}$ 中存在一个余完备前心 $\mathcal{A}$，满足以下性质：

(1) $U\in\mathcal{A}$，并且(2) 存在一个正整数 n，使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U,\mathcal{A}[n])=0$。

那么 U 是一个倾斜对象。

证明遵循 [5, 定理 3.11] 和 [14,定理 2.3] 证明中的主要思路。回顾一下，由于 $\mathcal{D}$ 是一个具有直和的加性范畴，对于任意一对对象 K、$X\in\mathcal{D}$，典范态射 $f: K^{(I)}\to X$，其中$I=\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(K,X)$，是一个 $\mathrm{Add}(K)$-预覆盖。这意味着对于每个 $M\in\mathrm{Add}(K)$，态射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(M,f)$ 都是满射。我们需要以下

构造 2.3. 设 U 是 $\mathcal{D}$ 中的一个对象。若 $X\in\mathcal{D}$，我们按以下方式归纳地构造一个态射序列 $f_k: X_k\to X_{k+1}$：

(i) $X_0=X$；*(ii)* 若已构造出 X_k，则 $f_k: X_k\to X_{k+1}$ 将是一个 *Add*$(U[k])$-预覆盖 $U[k]^{(I_k)}\to X_k$ 的锥（它将该预覆盖补成一个三角）。

对于每个 $i>k$，我们考虑态射 $f_{ki}: X_k\to X_i$，它是由态射 f_k、.....、f_{i-1}复合得到的。此外，$f_{ii}: X_i\to X_i$、$i\geq 0$ 将是恒等映射。我们将 f_{ki} 的锥记作 S_{ki}。

我们有以下性质：

引理 2.4. 设 U 是 $\mathcal{D}$ 中的一个对象，使得 $\mathrm{Add}(U)\subseteq U^{\perp_{>0}}$。对于构造 *2.3* 中构造的对象，我们有以下性质：

(a) 若 $k\geq 0$，则对所有 $j=0,\ k$，有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U[j],\ X_{k+1})=0$；(b) 若 $k\leq i$，则 $S_{ki}\in\mathrm{Add}(U[k+1])*\cdots*\mathrm{Add}(U[i])$。

证明。(a) 对所有 $k\geq 0$，在阿贝尔群的正合序列中

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U[k],U[k]^{(I_k)})\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U[k],X_k)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U[k],X_{k+1})\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U[k],U[k+1]^{(I_k)}),$$

第一个态射是满射，因此第三个态射为零。但最后一个群也等于零。由此可得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U[k],X_{k+1})=0$。

因此，性质 (a) 对于 $k=0$ 成立。我们将对 k 使用归纳法。假设 (a) 对 $k-1$ 成立，即对于所有 $j=0,k-1$，都有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U[j],X_k)=0$，我们可以使用正合序列

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U[j],X_k)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U[j],X_{k+1})\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U[j],U[k+1]^{(I_k)})$$

从而得出，对所有 $j=0$、$k-1$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U[j],X_{k+1})=0$。利用我们在证明第一部分中已经证明的结果，可得 (a) 对 k 成立。

(b) 由引理 2.1 得出。 □

命题 2.5。设 U 是 $\mathcal{D}$ 中的一个对象。假设存在 $\mathcal{D}$ 中的全子范畴 $\mathcal{A}$，它是余完备前 *aisles* $\mathcal{A}$，使得

1) $U\in\mathcal{A}$,

2) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U,\mathcal{A}[n])=0$ *for some positive integer* n,

并且 U 满足条件

(S1.5) $\mathrm{Add}(U)\subseteq U^{\perp_{>0}}$.

那么，对每个 $X\in\mathcal{D}$，都存在一个三角 $Y\to X\to Z\to Y[1]$，使得 (a) $Z\in U^{\perp_{\leq 0}}$, (b) $Y\in U^{\perp_{>0}}$, (c) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, U^{\perp_{\leq 0}})=0$。

证明。设 $X\in\mathcal{D}$。我们考虑构造 2.3 中的态射系。对于 $k,j\geq 0$，我们将 X_k 的一个副本记为 $X_k^{(j)}$，将恒等态射记为 $u_k^{(j)}:X_k^{(j)}\to X_k^{(i+1)}$，并将态射 f_{ki} 记为 $f_{ki}^{(j)}:X_k^{(j)}\to X_i$。我们有等式 $f_if_{ki}^{(i)}=f_{k\ i+1\ ()}^{(i+1)}u_k^{(i)}$。

设 $k\geq 0$。利用 [18, 命题 4.23]，我们注意到存在一个交换图

$$\begin{array}{ccccc}
\oplus_{i\geq k}X_k^{(i)} & \xrightarrow{1-\oplus_{i\geq k}u_k^{(i)}} & \oplus_{i\geq k}X_k^{(i)} & \longrightarrow & X_k\\
\downarrow{\scriptstyle \oplus_{i\geq k}f_{ki}^{(i)}} & & \downarrow{\scriptstyle \oplus_{i\geq k}f_{ki}^{(i)}} & & \downarrow\\
\oplus_{i\geq k}X_i & \xrightarrow{1-\oplus_{i\geq k}f_i} & \oplus_{i\geq k}X_i & \longrightarrow & Z\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\oplus_{i\geq k}S_{ki} & \longrightarrow & \oplus_{i\geq k}S_{ki} & \longrightarrow & C_k
\end{array}$$

使得所有行和列都是三角。注意，除同构外，Z 不依赖于 k，因为它是序列 $(f_i)_{i\geq 0}$ 的同伦余极限。

断言 1. 假设 $k>n$ 是一个整数，且 $0\leq\ell\leq k-n$。那么

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U,C_k[-\ell])=0.$$

对于每个 $i\geq k$，我们都有 $S_{ki}\in\mathrm{Add}(U[k+1])*\cdots*\mathrm{Add}(U[i])\subseteq\mathcal{A}[k+1]$（回忆一下 $S_{kk}=0$）。由此可知，对于每个满足 $0\leq\ell\leq k-n$ 的 ℓ，都有 $\oplus_{i\geq k}S_{ki}[-\ell]\in\mathcal{A}[n]$，因此 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U,\oplus_{i\geq k}S_{ki}[-\ell])=0$。此外，$\oplus_{i\geq k}S_{ki}[-\ell+1]\in\mathcal{A}[n]$，因为 $\mathcal{A}$ 在正移位下封闭。因此，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U,\oplus_{i\geq k}S_{ki}[-\ell+1])=0$。由此可知该断言成立。

断言 2。$\oplus_{i\geq 0}S_{0i}[-1]\in U^{\perp_{>0}}$。

与前面一样，对每个 $i \geq n$，我们都有 $S_{ni} \in \mathcal{A}[n+1]$，因此 $\oplus_{i\geq n} S_{ni} \in \mathcal{A}[n+1]$。由于 $\mathcal{A}[n]$ 对正移位封闭，可得

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U, \oplus_{i\geq n} S_{ni}[-1][p+1]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U, \oplus_{i\geq n} S_{ni}[p]) = 0 \text{ for all } p \geq 0,$$

因此 $\oplus_{i\geq n} S_{ni}[-1] \in U^{\perp_{>0}}$。

此外，对每个 $i \geq n$，我们都有一个三角

$$S_{0n} \to S_{0i} \to S_{ni} \to S_{0n}[1].$$

这些三角的直和诱导出一个三角

$$\oplus_{i\geq n} S_{0n} \to \oplus_{i\geq n} S_{0i} \to \oplus_{i\geq n} S_{ni} \to \oplus_{i\geq 0} S_{0n}[1].$$

注意，对每个 $i > 0$，我们都有

$$S_{0i}[-1] \in \mathrm{Add}(U) * \cdots * \mathrm{Add}(U[i-1]),$$

并且该类在直和下封闭。此外，由于所有类 $\mathrm{Add}(U), \ldots, \mathrm{Add}(U[i-1])$ 都包含于 $U^{\perp_{>0}}$ 中，我们得到

$$\mathrm{Add}(U) * \cdots * \mathrm{Add}(U[i-1]) \subseteq U^{\perp_{>0}}.$$

特别地，对于 $i = n$，可得

$$\oplus_{i\geq n} S_{0n}[-1] \in \mathrm{Add}(U) * \cdots * \mathrm{Add}(U[n-1]) \subseteq U^{\perp_{>0}},$$

利用上述三角，我们得到 $\oplus_{i\geq n} S_{0i}[-1] \in U^{\perp_{>0}}$。

由于 $S_{00} = 0$，我们还有 $\oplus_{0\leq i<n} S_{0i}[-1] \in U^{\perp_{>0}}$，因此断言的证明完成。

我们将证明 Z 满足条件 (a)，且 $Y = C_0[-1]$ 满足条件 (b) 和 (c)。 (b)

若考虑一个整数 $\ell \geq 0$，并取 $k = n+1+\ell$，则应用引理 2.4 可得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U, X_k[-\ell]) = 0$。由三角

$$X_k \to Z \to C_k \to X_k[1]$$

以及断言 1，我们得出 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U, Z[-\ell]) = 0$。由于 ℓ 是任意选取的，因此可得 $Z \in U^{\perp_{\leq 0}}$。

由断言 2 可知，$Y = C_0[-1]$ 满足 (b)。对于性质 (c)，我们首先注意到 $U, U[1], \ldots, U[i] \in {}^{\perp_0}(U^{\perp_{\leq 0}})$。类 ${}^{\perp_0}(U^{\perp_{\leq 0}})$ 对直和、直和项和扩张封闭。由于

$$S_{0i} \in \mathrm{Add}(U[1]) * \cdots * \mathrm{Add}(U[i]),$$

我们得到等式

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\oplus_{i\geq 0} S_{0i}, U^{\perp_{\leq 0}}) = 0$$

and

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\oplus_{i\geq 0} S_{0i}[-1], U^{\perp_{\leq 0}}) = 0.$$

利用证明开头所给交换图中的下方三角，可得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, U^{\perp_{\leq 0}}) = 0$。□

为了完成定理 2.2 的证明，我们只需利用 (S3) 注意到 $U^{\perp_{>0}} \cap U^{\perp_{\leq 0}} = 0$，并应用以下

引理 2.6. 设 $\mathcal{D}$ 为一个三角范畴。若 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 是 $\mathcal{D}$中的子范畴，满足 $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = 0$、$\mathcal{U}[1] \subseteq \mathcal{U}$、$\mathcal{V}[-1] \subseteq \mathcal{V}$，并且对每个 $X \in \mathcal{D}$，都存在一个三角 $U \to X \to V \to U[1]$，使得 $U \in \mathcal{U}$、$V \in \mathcal{V}$，且 $\mathrm{Hom}(U, \mathcal{V}) = 0$，那么$(U, V)$ 是一个 t-结构。

证明. 设 $X \in \mathcal{U}$，并考虑前面所述的三角 $U \to X \to V \to U[1]$。于是$V \in \mathcal{V} \cap \mathcal{U}$，因此 $V = 0$。由此$U \cong X$，所以 $\mathrm{Hom}(X, \mathcal{V}) = 0$。□

现在，我们可以证明，具有余积的三角范畴中的倾斜对象由条件 (S1)、(S2) 和 (S3) 刻画。

推论 2.7。 假设 $\mathcal{D}$ 是一个具有余积的三角范畴。对象$U \in \mathcal{D}$ 是倾斜对象，当且仅当满足以下条件：

(S1) $U \in U^{\perp_{>0}}$; (S2) $U^{\perp_{>0}}$ 对直和封闭；(S3) $U^{\perp_{\mathbb{Z}}} = 0$。

证明。 在定理 2.2 中，我们取 $\mathcal{A} = U^{\perp_{>0}}$。由于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U, U^{\perp_{>0}}[1]) = 0$，结论成立。□

正如我们已经指出的，上述所有证明都可以对偶化，从而得到具有积的三角范畴中余倾斜对象的类似结果。为方便读者，我们陈述主要的对偶结果。这里，$\mathrm{Prod}(U)$ 表示由 U 的若干副本的直积中的所有直和项构成的类。

定理 2.8。 设 $\mathcal{D}$ 是一个具有积的三角范畴。假设 $U \in \mathcal{D}$ 是一个满足以下条件的对象：

(C1.5) $\mathrm{Prod}(U) \subseteq {}^{\perp_{>0}}U$, *and*
(C3) ${}^{\perp_{\mathbb{Z}}}U = 0$.

假设存在一个完备预余心 $\mathcal{B}$（即，$\mathcal{B}$ 对扩张、直积、直和项和负移位封闭），位于 $\mathcal{D}$ 中，并具有以下性质：

(1) $U \in \mathcal{B}$，并且(2) 存在一个正整数 n，使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{B}[-n], U) = 0$。那么 U 是一个余倾斜对象。

推论 2.9。 假设 $\mathcal{D}$ 是一个具有余积的三角范畴。对象$U \in \mathcal{D}$ 是余*silting*，当且仅当以下条件成立：

(C1) $U \in {}^{\perp_{>0}}U$，(C2) ${}^{\perp_{>0}}U$ 对直积封闭，(C3) ${}^{\perp_{\mathbb{Z}}}U = 0$。

3. 中间 silting 对象

在本节中，我们假设 $\mathcal{D}$ 具有余积，且 V 是一个倾斜对象。设 n 为正整数，我们称倾斜对象 $U \in \mathcal{D}$ 是n-V-中间 的，当且仅当

$$V[n] \in U^{\perp_{>0}} \text{ and } U \in V^{\perp_{>0}}.$$

例如，在 [3]和 [16] 中研究的 R-模的有界silting复形，与（无界）导出范畴 $\mathrm{D}(R)$ 中的 n-R-中间 silting 对象一致。它们也出现在 [13, 定理 2]中。在定理 3.4 中，我们将给出一种刻画，扩展 [16] 和 [4]中提出的对倾斜模及有界silting复形的刻画。这些证明可以对偶化，从而扩展 [4] 和 [17]中针对余倾斜模和余倾斜复形证明的类似结果。

若 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{D}$ 中的对象类，我们称 $X \in \mathcal{D}$ 的-维数 （分别为 $\mathcal{C}$-余维数 ）至多为 n，并记为 $\dim_{\mathcal{C}} X \leq n$、（$\operatorname{codim}_{\mathcal{C}} X \leq n$），前提是存在一个三角序列

$$X_{i+1} \to C_i \to X_i \to X_{i+1}[1] \text{ with } 0 \leq i < n$$

$$(\text{respectively } X_i \to C_i \to X_{i+1} \to X_i[1] \text{ with } 0 \leq i < n)$$

在 $\mathcal{D}$ 中，使得 $C_i \in \mathcal{C}$、 $X_0 = X$ 和 $X_{n+1} \in \mathcal{C}$。若存在正整数 n，使得 $\dim_{\mathcal{C}} X \leq n$ （分别为 $\operatorname{codim}_{\mathcal{C}} X \leq n$），则记 $\dim_{\mathcal{C}} X < \infty$（$\operatorname{codim}_{\mathcal{C}} X < \infty$）。

引理 3.1。 [1, 引理 3.8] 设 $\mathcal{C}$ 是三角范畴 $\mathcal{D}$ 中的一个类，且 X 是来自 $\mathcal{D}$ 的一个对象。那么

i) 维数$_{\mathcal{C}} X \leq n$ 当且仅当 $X \in \mathcal{C} * \mathcal{C}[1] * \cdots * \mathcal{C}[n]$; ii) 余维$_{\mathcal{C}} X \leq n$ 当且仅当 $X \in \mathcal{C}[-n] * \mathcal{C}[-n+1] * \cdots * \mathcal{C}$, 当且仅当 维数 $_{\mathcal{C}} X[n] \leq n$; iii) 维数 $_{\mathcal{C}} X \leq n$ 当且仅当 余维 $_{\mathcal{C}[n]} X \leq n$。

注记 3.2. 由于直和保持 $\mathcal{D}$ 中三角的正合性，若假设 $\mathcal{C}$ 对（有限）直和封闭，那么 $\mathcal{C}$ 的余维至多为 n 的对象类对（有限）直和封闭。此外，若 $\mathcal{C} = \operatorname{add}\mathcal{C}$ 且 $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{C}, \mathcal{C}[1]) = 0$，我们可以利用引理 2.1 观察到， $\mathcal{C}$ 的余维至多为 n 的对象类对直和项封闭。

引理 3.3. 设 U 和 V 是 $\mathcal{D}$ 中的对象。

(i) 若 余维$_{\operatorname{Add}(U)} V \leq n$，则 $U^{\perp_{>0}} \subseteq V^{\perp_{>0}}$。(ii) 若 维数$_{\operatorname{Add} V} U \leq n$，则 $V^{\perp_{>0}}[n] \subseteq U^{\perp_{>0}}$ （或者等价地， $V^{\perp_{>0}} \subseteq U^{\perp_{>n}}$）。

证明。 (i) 我们有如下三角：

$$\begin{aligned} &V \to U_0 \to K_1 \to V[1], \\ &K_1 \to U_1 \to K_2 \to K_1[1], \\ &\cdots \\ &K_{n-1} \to U_{n-1} \to K_n \to K_{n-1} \end{aligned}$$

使得 $U_0, \ldots, U_{n-1}, K_n \in \operatorname{Add}(U)$。

若 $X \in U^{\perp_{>0}}$，我们考察长正合列

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(K_n, X[1]) \to &\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(U_{n-1}, X[1]) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(K_{n-1}, X[1]) \to \\ &\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(K_n, X[2]) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(U_{n-1}, X[2]) \to \ldots, \\ &\cdots \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(K_2, X[1]) \to &\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(U_1, X[1]) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(K_1, X[1]) \to \\ &\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(K_2, X[2]) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(U_1, X[2]) \to \ldots, \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(K_1, X[1]) \to &\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(U_0, X[1]) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(V, X[1]) \to \\ &\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(K_1, X[2]) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(U_0, X[2]) \to \ldots, \end{aligned}$$

从而归纳地得出，对所有 $0 \leq i < n$，都有 $X \in K_i^{\perp_{>0}}$，其中 $K_0 = V$。

(ii) 这可以用同样的方法证明，也可以结合引理 3.1 使用 (i)。

□

我们称对象 X 是 n-V-由 表示的，如果对每个 $0 \leq i < n$，都存在一个三角 $N_{i+1} \to U_i \to N_i \to N_{i+1}[1]$，使得 $N_0 = X$；对于所有 $i > 0$，我们有 $N_i \in V^{\perp_{>0}}$；并且所有 U_i 都来自 Add(U)。我们用 Pres$_V^n(U)$ 表示 $\mathcal{D}$ 中所有由 U 作 n-V-表示的对象构成的类。如果 $U \in V^{\perp_{>0}}$，那么只需验证 $N_n \in V^{\perp_{>0}}$，即可得出对于所有 $i = 1$、n，都有 $N_i \in V^{\perp_{>0}}$。

定理 3.4. 设 V 是倾斜的。对于对象$U \in \mathcal{D}$ 和正整数 n，以下条件等价：

a) U 是一个 n-V-中间缠结对象；

b) (I1) $U^{\perp_{>0}} \subseteq V^{\perp_{>0}}$,(I2) $V^{\perp_{>0}}[n] \subseteq U^{\perp_{>0}}$,(S1.5) Add($U$) $\subseteq U^{\perp_{>0}}$;c) (I2) $V^{\perp_{>0}}[n] \subseteq U^{\perp_{>0}}$,(I3) $U \in V^{\perp_{>0}}$,(S1.5) Add(U) $\subseteq U^{\perp_{>0}}$,(S3) $U^{\perp_{\mathbb{Z}}} = 0$;d) (I3) $U \in V^{\perp_{>0}}$,(I4) Pres$_V^n(U) = U^{\perp_{>0}}$;e) (I5) $\dim_{\mathrm{Add}V} U \leq n$,(I6) $\mathrm{codim}_{\mathrm{Add}(U)} V \leq n$,(S1.5) Add($U$) $\subseteq U^{\perp_{>0}}$。

在这些条件下，U 是一个倾斜对象。

证明。 a)⇒b) 由于 U 是一个倾斜对象，条件 (I3) 自动满足。此外，$U^{\perp_{>0}}$是包含 U 的最小余完备前 aisles，因此 (I1) 成立。类似地，我们使用 $V[n] \in U^{\perp_{>0}}$ 来得到 (I2)。

b)⇒c) 我们只需证明 (S3)。设 $X \in U^{\perp_{\mathbb{Z}}}$。那么对于所有整数 i，都有 $X[i] \in U^{\perp_{>0}}$。由 (I1) 可知，对于所有 $i \in \mathbb{Z}$，都有 $X[i] \in V^{\perp_{>0}}$，因此 $X \in V^{\perp_{\mathbb{Z}}} = 0$。

c)⇒a) 只需证明 U 是一个倾斜对象，因此我们将对 $\mathcal{A} = V^{\perp_{>0}}$应用定理 2.2。

c)⇒d) 对于 (I4)，我们提醒，任取 $X \in \mathcal{D}$，都有一个三角

$$Y \to U^{(I)} \xrightarrow{f} X \to Y[1]$$

使得 f是 U 的 Add-预覆盖，且对应于 X。特别地，Hom(U, f) 是满射。若 $X \in U^{\perp_{>0}}$，则由 (I3) 可得 $Y \in U^{\perp_{>0}}$。于是，对所有 $k \geq 0$，都有 $X \in$Pres$_U^k(U)$。由 (I1)，我们得到对所有 $k \geq 0$，$^k_U(U) \subseteq ^k_V(U)$，因此

$$U^{\perp_{>0}} \subseteq \bigcap_{k>0} \mathrm{Pres}_V^k(U) \subseteq \mathrm{Pres}_V^n(U).$$

反过来，设 $X \in$Pres$_V^n(U)$。我们考虑一个三角族

$$N_{i+1} \to U_i \to N_i,\ 0 \leq i \leq n,$$

使得 $N_0 = X$，对于所有 $i > 0$，我们都有 $N_i \in V^{\perp_{>0}}$，且所有 U_i都来自 Add(U)。由条件 (I2) 可知 $N_n \in U^{\perp_{>n}}$。因此，对于每个 $k > 0$

且对于每个 $0 \leq i \leq n$，我们都有

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U, X[k]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U, N_i[i+k]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(U, N_n[n+k]) = 0,$$

因此 $X \in U^{\perp_{>0}}$。

d)⇒b) 由 $\mathsf{Add}(U) \subseteq \mathsf{Pres}^n_V(U)$，我们得到条件 (S1.5)。此外，由 (I3) 可知 $\mathsf{Add}(U) \subseteq V^{\perp_{>0}}$。

设 $X \in U^{\perp_{>0}} = \mathsf{Pres}^n_V(U)$。存在一个三角 $Y \to M \to X \to Y[1]$，使得 $M \in \mathsf{Add}(U) \subseteq V^{\perp_{>0}}$ 且 $Y \in V^{\perp_{>0}}$。由于 $V^{\perp_{>0}}$ 在正移位和扩张下封闭，我们得到 $X \in V^{\perp_{>0}}$。由此可知 $U^{\perp_{>0}} \subseteq V^{\perp_{>0}}$，因此条件 (I1) 得到满足。

为了证明 (I2)，我们取一个对象 $X \in V^{\perp_{>0}}$，并考虑三角序列

$$X[k-1] \to 0 \to X[k] \xrightarrow{=} X[k],\ 1 \leq k < n,$$

我们记为 $X[k] = N_{n-k}$和 $X[k-1] = N_{n-k+1}$，从而得出 $X[n] \in \mathsf{Pres}^n_V(U)$。于是 $V^{\perp_{>0}}[n] \subseteq U^{\perp_{>0}}$，证明完成。

d)⇒e) 从 c)⇒d) 的证明可知，对于所有 $k \geq 0$，都有 $U^{\perp_{>0}} \subseteq \mathsf{Pres}^k_U(U)$。此外，由 (I2) 可知 $V^{\perp_{>0}}[n] \subseteq U^{\perp_{>0}}$。因此 $V[n] \in U^{\perp_{>0}} \subseteq \mathsf{Pres}^n_U(U)$，并且存在一个三角序列

$$N_{i+1} \to U_i \to N_i \to N_{i+1}[1],\ 0 \leq i < n,$$

使得 $N_0 = V[n]$；对于所有 $i > 0$，我们都有 $N_i \in U^{\perp_{>0}}$，且所有 U_i 都来自 $\mathsf{Add}(U)$。我们将证明 $N_n \in \mathsf{Add}(U)$。

令 $X \in U^{\perp_{>0}}$。由于 $U^{\perp_{>0}} \subseteq V^{\perp_{>0}}$，我们得到 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(V[-1], X) = 0$。对于每个$p > 0$，我们都有 $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(U_i[-p], X) = 0$，因此

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(N_{i+1}[-p], X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(N_i[-p-1], X)$$

对所有 $0 \leq i < n$。我们得到以下同构序列

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(N_n[-1], X) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(N_{n-1}[-2], X) \cong \ldots \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(N_0[-n-1], X)\\ &= \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(V[-1], X) = 0.\end{aligned}$$

由此可得，对所有 $X \in U^{\perp_{>0}}$，$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(N_n[-1], X) = 0$。此外，我们还有 $N_n \in U^{\perp_{>0}}$，因此可以应用 [1, 命题 4.8]，得出 $N_n \in \mathsf{Add}(U)$。于是 $\mathrm{dim}_{\mathrm{Add}(U)} V[n] \leq n$，从而 $\mathrm{codim}_{\mathrm{Add}(U)} V \leq n$。

要证明 (I6)，只需注意到 U 是倾斜对象，且 $V[n]$ 是一个 n-U-中间倾斜对象。因此，我们可以应用刚才对n-V-中间倾斜对象 U所证明的结论。

e)⇒b) 这可通过应用引理 3.3 得到。 □

若 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{D}$中的对象类，我们用 $\mathsf{thick}(\mathcal{C})$ 表示包含 $\mathcal{C}$ 且对移位、扩张和直和项封闭的$\mathcal{D}$ 的最小子范畴。

推论 3.5。 假设 V 是倾斜的。对于对象U，以下条件等价：

(i) 存在整数 ℓ 和 n, $n \geq 0$，使得 $U[\ell]$ 是一个倾斜的 n-V-中间对象；(ii) $\mathrm{Add}(U) \subseteq U^{\perp_{>0}}$，且$\mathrm{thick}\,\mathrm{Add}(U) = \mathrm{thick}\,\mathrm{Add}(V)$。

证明。 (i)⇒(ii) 这由定理 3.4 和 [12, 引理 3.16] 得出。

(ii)⇒(i) 由 (ii) 可知，类 $\mathsf{Add}(U)$ 在 $\mathsf{Add}(V)$ 中是倾斜的。由[1, 命题 4.3] 可知，存在 ℓ，使得 $V \in \mathsf{Add}(U)[-\ell]$ ∗

$\cdots * \mathrm{Add}(U)[\ell]$，因此 $V \in \mathrm{codim}_{\mathrm{Add}(U)[-\ell]} V < \infty$（或者，$V[\ell] \in U^{\perp_{>0}}$）。类似的论证可确保我们可以选择 ℓ，使得 $\dim_{\mathrm{Add}V} U[-\ell] < \infty$，并且可以应用定理 3.4 得到结论。□

注记 3.6。本节中的所有结果都可以对偶化。更确切地说，若 $\mathcal{D}$是一个具有直积的范畴，且 V 是一个余倾斜对象，我们称 U为一个 n-V-中间余倾斜对象，如果 U 满足定理 2.8 对 $\mathcal{B} = {}^{\perp_{>0}}V$ 的假设。定理 3.4 可以对偶化，从而得到对这些对象的刻画。此外，推论 3.5 也可以对偶化。

致谢。我谨向米哈尔·赫尔贝克致谢。第 2 节中的结果得益于我们之间的讨论。

S. Breaz 的研究由研究、创新与数字化部、CNCS/CCCDI–UEFISCDI 提供资助，项目编号为 PN-III- P4-ID-PCE-2020-0454，属于 PNCDI III。

参考文献

[1] L. Angeleri Hügel，倾斜对象，《伦敦数学会会报》51 (2019), 658–690. [2] L. Angeleri Hügel, F. Marks, J. Vitória，倾斜理论中的挠对，《太平洋数学杂志》291 (2017), 257–278. [3] L. Angeleri Hügel, F. Marks, J. Vitória. 倾斜模，《国际数学研究通知》2016, 1251–1284.[4] S. Bazzoni，n余倾斜模和 n倾斜模的一种刻画，《代数杂志》273 (2004), 359–372.[5] S. Breaz, M. Hrbek, C.-G. Modoi，交换环的倾斜、余silting 及其扩张，arXiv:2204.01374 [math.AC]. [6] M. Hrbek，交换环导出范畴中的紧生成 t-结构，《数学杂志》295 (2020), 47–72. [7] M. Hrbek, J. Hu, R. Zhu，仿射概形茎上紧生成 t-结构的粘合，预印本 arXiv:2101.09966[math.AC]. [8] O. Iyama, P. Jørgensen, D. Yang，中间余 t-结构、二项倾斜对象、τ 倾斜模及挠类，《代数与数论》8 (2014), 2413–2431. [9] O. Iyama, D. Yang，三角范畴的倾斜约化与 Calabi–Yau 约化，《美国数学会汇刊》370 (2018), 7861–7898. [10] A. Neeman，《三角范畴》，《数学年刊研究丛书》148，新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社，2001. [11] A. Neeman，由对象生成的 t 结构，《美国数学会汇刊》374 (2021), 8161–8175.[12] P. Nicolás, M. Saorín，广义倾斜理论，《应用范畴结构》，《应用范畴结构》26 (2018), 309–368. [13] P. Nicolás, M. Saorín, A. Zvonareva，具有余积的三角范畴中的倾斜理论，《纯粹与应用代数杂志》223 (2019), 2273–2319. [14] L. Positselski, J, Šťovíček, 倾斜—余倾斜对应，《国际数学研究通知》2021 (2021), 191–276. [15] C. Psaroudakis 和 J. Vitória，倾斜理论中的实现函子，《数学杂志》288 (2018), 965–1028.[16] J. Wei，半倾斜复形，《以色列数学杂志》194 (2013), 871–893. [17] P. Zhang, J. Wei. 余倾斜复形与 AIR-余倾斜模，《代数杂志》491 (2017), 1–31.[18]***，Stacks 项目：导出范畴，在线获取：https://stacks.math.columbia.edu/

巴比什-博雅伊大学，数学与计算机科学学院，数学系，罗马尼亚克卢日-纳波卡市米哈伊尔·科格尔尼恰努街1号，邮编400084电子邮件地址：bodo@math.ubbcluj.ro, simion.breaz@ubbcluj.ro