arXiv:2303.06850v1 [math.FA] 13 Mar 2023

关于富斯滕伯格集的新旧结果

´ ´ ´范爱华、埃尔韦·凯夫莱克和马蒂娜·凯夫莱克

Abstract. 本文是对 [21] 的补充，综述了关于富斯滕伯格集 $S = \{2^m 3^n$ 的研究： $n \geq 0$、$m \geq 0\}$ 及其随机版本 T。我们还介绍了一些新结果。例如，我们证明 T 几乎必然包含一个正下密度子集，该子集是 4 3-Rider 集。我们还证明，当不满足 Bourgain 条件时，一类随机整数集是 Sidon 集；这推广了 Kahane-Katznelson 的一个结果。本文最后列出了一些关于 S 和 T 的开放问题。

这篇综述补充了一些新结果，旨在介绍这个看似无害的整数富斯滕伯格集

$$S = \{2^j \times 3^k : j, k \in \mathbb{N}_0\} =: \{s_1 < s_2 < \cdots < s_n < \cdots\},$$

及其随机对应物 T，我们将在本文稍后讨论它。集合 S 在 $\mathbb{N}$ 中的分布，早在上世纪初就已由拉马努金和哈代研究过 [30]。更一般地，若 $\{q_1, \ldots, q_s\}$ 是由互素数组成的有限集，我们用 $S(q_1, \ldots, q_s)$ 表示由这些 $q_j's$ 生成的乘法半群；当 $\{q_1, \ldots, q_s\}$ 是前 s 个素数时，我们得到数论学家所称的 s-光滑数 [24]。在 $s = 1$ 的极端情形下，该集合退化为一个典型的哈达玛集，它在遍历理论和调和分析中具有许多良好性质（众所周知）。自然会想要探究，当转向具有 $s \geq 2$ 的 $S(q_1, \ldots, q_s)$ 以及其他稀疏性较弱的集合时，哪些性质仍然成立。

我们特别关注半群 $S(2, 3) =: S$，即 2-光滑数的集合。由于它与 Furstenberg 于 20 世纪 60 年代提出的著名度量猜想有关，这个集合也称为 Furstenberg 集 [25], ，我们将在第 1.4 小节回顾该猜想。这个猜想及其他问题源于试图明确表达这样一种直觉：“以 2 和 3 为底的展开看起来截然不同！”请注意，2 和 3 可以替换为乘法独立基数 a 和 b（即 $\log a / \log b \notin \mathbb{Q}$）。

本研究旨在探讨 S 及其随机类比对象 T的动力学性质与调和分析性质。本文主要基于我们此前发表的论文 [21]。此外，我们也借此机会详细阐述在 [21]中遗漏或未能提及的一些改进和新思考。因此，在某种程度上，本文可视为对 [21]的补充。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 37A44, 43A46, 60G46.*Key words and phrases.* Furstenberg 集，随机 Furstenberg 集，Sidon 集，Khintchin 类，均匀分布，Hartman 分布。

我们将采用经典记号：令 $\mathbb{T}=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 与 $[0,1)$ 对应， $\|x\|:=d(x,\mathbb{Z})$, $x=\{x\}+[x]$; $e_n(x)=e(nx):=e^{2i\pi nx}$ 表示 $n\in\mathbb{Z}$和 $x\in\mathbb{T}$。我们用 m 表示 $\mathbb{T}$上的勒贝格测度。 $|E|$ 表示有限集 E的基数。 $u\lesssim v$ 表示对某个常数 $C>0$ 有 $u\le Cv$ 。我们还采用哈代记号 $\asymp$ 和 $\sim$、朗道记号 o 和 O [29,p.7]，以及英语惯例 $\mathbb{N}=\{1,2,\dots,\}$。我们用 $a\wedge b$ 表示正整数 a、 b的最大公约数。回顾一下，哈达玛集 $E=(\lambda_n)\subset\mathbb{N}$ 是指满足条件 $\lambda_{n+1}/\lambda_n\ge r$ 的集合，其中 $r>1$ ，且对所有 $n\ge 1$均成立。

1. Historical introduction and motivations

人们似乎早已了解 Furstenberg 集 S 的非稀疏性。我们先提及哈代和拉马努金的贡献，随后介绍相关的重要结果。

1.1. 拉马努金等人。1913年，拉马努金在致哈代的第一封信中（参见 [30], 第五章），未作解释便断言

$$|S_N|:=|S\cap[1,N]|=\frac{\log 2N\times\log 3N}{2\log 2\log 3}+\frac{1}{2}.$$

哈代将这个公式理解为一种近似，并指出没有证据表明拉马努金认为它有多精确。 [30] 的第五章专门讨论了这个格点型问题。在1921年和1922年发表的两篇论文中，哈代和李特尔伍德研究了这个问题，并证明了以下估计

$$|S_N|=\frac{\log 2N\times\log 3N}{2\log 2\log 3}+o(\log N/\log\log N). \tag{1}$$

奥斯特罗夫斯基用不同的方法得到了相当类似的结果。估计式（1）意味着

$$|S_N|=\frac{1}{2\log 2\log 3}\log^2 N+\frac{\log 6}{2\log 2\log 3}\log N+o(\log N),$$

取 $N=s_n$，我们可以很容易地推出（参见 [21]）

$$s_n\sim\exp(C\sqrt{n})/\sqrt{6},\quad \text{with } C=\sqrt{2\log 2\log 3}. \tag{2}$$

因此我们看到， S 具有中等稀疏性，其增长速度既是次指数级的，又是超多项式级的。在 [21], 中，我们利用丢番图逼近和偏差，证明了（1）中余项的一个更精确估计。我们将在第2节中回到这个问题。

1.2. 数字 $\alpha=\log 2/\log 3=0.631\cdots$ 的对数。本研究的一个引人之处在于数字 $\alpha:=\log 2/\log 3$ 及其丢番图性质所~~发~~挥的作用。这个超越数是丢番图数（非刘维尔数），这意味着存在某个 $C>0$ 和 $\rho\ge 1$

$$\|q\alpha\|\ge Cq^{-\rho}\text{ for all }\ q\in\mathbb{N}.$$

这样的参数 ρ 是 α的无理性指数，因此称为ρ-丢番图数。关于 α对应的 ρ 的一个较好取值，G. Rhin 利用 Pad´e 逼近 [61]证明了 $\rho \leq$7.616...；Wang 和 Wu 将这一估计改进为 $\rho \leq 4.11633052....$ [74]。

Tijdeman [71, 72], 针对更一般的 $S = S(q_1, \ldots, q_s)$，证明了以下不等式，其中 A、B 是仅依赖于q_1、...、q_s的正常数：

$$s_n/(\log s_n)^A \lesssim s_{n+1} - s_n \lesssim s_n/(\log s_n)^B.$$

他的证明用到了 Baker 关于对数线性形式的结果。

对于特殊情形 $S = S(2, 3)$，我们得到了这些不等式的一种改进形式，其中的 A 和 B 可用 α [21] 的任意无理性指数 ρ 显式表示（另见定理 2.1）。对 $|S_N|$ 的估计将有助于考察 S 是否为 Khintchin 集，这是 S 动力学方面的问题之一（见第 3 节）。

1.3. S的两个组合性质。

- G. 2 的幂或 3 的幂组成的递增序列按斯图姆序律排列。更确切地说，两个相邻的 3 的幂之间有一个或两个 2 的幂，而通过将一个 2 的幂编码为 1、两个 2 的幂编码为 2，得到取值于字母表 $\{1, 2\}$ 的序列 u

$$u := 1\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 2\ 1\ 2\ 2\ 1\ 2\cdots,$$

它是与 α 相关联的特征斯图姆序列（等价定义见 [1] 第 143 页）。事实上，$u_n = 1$ 意味着存在 $k < j$使得 $3^k < 2^j < 3^{k+1}$，其中 $j + k = n$. 因此，$k \log 3 < j \log 2 <$(k + 1) 3 的对数，换言之 $0 < j\alpha - k < 1$；由于 $k = n - j$，我们得到$0 < j(1 + \alpha) - n < 1$，于是 $0 < j - n\beta < \beta$，其中 $\beta := 1/(1 + \alpha)$，其连分数展开为 $[0; 1, \alpha_1, \alpha_2, \cdots]$。最后，

$$u_n = 1 \Longleftrightarrow \{n\beta\} \in]1 - \beta, 1),$$

这是斜率为 $\alpha \in$ (0,1) 的特征斯图姆序列的等价描述之一。

- log2 log3 的连分数展开与 S有关。关于α 的渐近分数，以下观察及更多内容可见 [4]。下面是序列 S的前几项：

$$\boxed{2, 3, 2^2}\ 2 \times 3\ \boxed{2^3, 3^2}\ 2^2 \times 3,\ 2^4,\ 2 \times 3^2,\ 2^3 \times 3\ \boxed{3^3, 2^5}\ 2^2 \times 3^2,$$
$$2^4 \times 3,\ 2 \times 3^3,\ 2^6,\ 2^3 \times 3^2,\ 3^4,\ 2^5 \times 3,\ 2^2 \times 3^3,\ 2^7, 2^4 \times 3^2,\ 2 \times 3^4,$$
$$2^6 \times 3,\ 2^3 \times 3^3\ \boxed{3^5, 2^8}\ 2^5 \times 3^2,\ 2^2 \times 3^4,\ 2^7 \times 3,\ 2^4 \times 3^3,\ 2^9,\ 2 \times 3^5,$$
$$2^6 \times 3^2,\ 2^3 \times 3^4,\ 3^6,\ 2^8 \times 3,\ 2^5 \times 3^3,\ 2^2 \times 3^5,\ 2^{10},\ 2^7 \times 3^2,\ 2^4 \times 3^4,$$
$$2^9 \times 3,\ 2 \times 3^6,\ 2^6 \times 3^3,\ 2^3 \times 3^5\ \boxed{2^{11}, 3^7}\ \ldots\ \boxed{2^{19}, 3^{12}}\ \ldots\ \boxed{3^{19}, 2^{30}}\ \cdots$$

我们将序列 S中任意一对连续项（3^p， 2^q）或（2^q， 3^p）称为纯对；这些对恰好给出 α的法里近似（p/q），因为对于任意 $q' < q$，都有 $|q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|$。因此，若 p/q现在是 α的一个渐近分数，则根据奇偶性，（3^p， 2^q）或（2^q， 3^p）是 S中的纯对。我们很容易辨认出 α的前几个渐近分数为1， $1/2$， $2/3$， $5/8$， $12/19$，.....，由此

$$\alpha = [0; 1\ 1\ 1\ 2\ 2\ \cdots].$$

鉴于第 1.2 小节，关于 α 是否可能是一个劣可逼近数（即部分商有界）的开放问题变得相关，因为此时 $\rho = 1$ 是可容许的。

1.4. Furstenberg 猜想与 S的动力学性质。对 S 的研究受到 Furstenberg 一个著名但至今仍未解决的猜想的启发，具体如下：圆周群 $\mathbb{T}$上的连续（即无原子）概率博雷尔测度 μ，若具有 $\times 2 \times 3$-不变性，则必等于勒贝格测度 m。用傅里叶变换的术语来说，Furstenberg 猜想表述如下

$$(C) \quad \widehat{\mu}(2n) = \widehat{\mu}(3n) = \widehat{\mu}(n) \ \text{ for every } n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \mu = m.$$

这个猜想与半群 S的动力系统有关，例如，对于各种 $x \in \mathbb{T}$，轨道 $(s_n x)$ 的分布。令 $\Lambda = (\lambda_n) \subset \mathbb{Z}$；回顾一下， x 的 Λ-轨道是由 $\mathbb{T}$构成的序列 $(\lambda_n x)$。

定义 1.1. 如果序列 $(\lambda_n x)$ 模 1 均匀分布，我们就称 x 为 Λ-正规数。

根据 H. Weyl 定理，这意味着

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e(h\lambda_n x) \to 0 \text{ for every integer } h \neq 0. \tag{3}$$

已知，对于任意递增序列 $E = (\lambda_n) \subset \mathbb{N}$，式 (3) 对几乎所有 $x \in \mathbb{T}$ ([43]) 都成立，因此有如下记号：

定义 1.2. 用 $W(\Lambda)$ 表示非 Λ-正规数构成的零测集。

当 $\Lambda = (q^n)$ 对某个 $q \geq 2$ 成立时， x 的 Λ-轨道就是 x 在 q-移位 $\sigma_q : = x \mapsto qx$ 对 $\mathbb{T}$ 的作用下的轨道，我们称之为 q-正规数。在这种情况下，任意轨道 $O_q(x) := (\sigma_q^n x)$ 都可以用 x 的 q 进制展开来描述。因此，很容易构造出不可数集 x ，其中的元素具有非稠密轨道，并且存在相对于勒贝格测度奇异的连续 q-不变概率测度，例如伯努利测度。非 q-正规数构成的集合 $W(q)$ 的豪斯多夫维数为 1（更一般地，对于任何代替 (q^n) 的疏疏序列（Hadamard 序列），这一结论也成立；参见 [18, 20]）。反过来，根据伯克霍夫定理，对于任意 q-不变遍历测度 μ，几乎每个轨道都是 μ-分布的。

Furstenberg 证明，在 [25] 中，对于每个 $x \notin \mathbb{Q}$， $s_n x$ 都是稠密的；这是 S 与稀疏序列之间一个显著的初步差异。在他的

论文末尾，他声称 $W(S)$ 是不可数的，并指出其中包含一个适当的刘维尔数族。这是关于他的猜想的第一个成果。

事实上，若将 $W(S)$ 缩减为 $\mathbb{Q}$，富斯滕伯格猜想便成立。确实，若猜想不成立，则存在一个定义在 $\mathbb{T}$ 上的连续概率测度 μ，满足 $\times 2 \times 3$-不变，且对某个 $a \in \mathbb{Z}^*$ 有 $\widehat{\mu}(a) \neq 0$。于是我们得到矛盾：

$$0 \neq |\widehat{\mu}(a)| = \limsup \Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \widehat{\mu}(as_n)\Big| \leq \limsup \int_{\mathbb{T}} \Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e(-as_n x)\Big| d\mu(x)$$

$$\leq \int_{\mathbb{T}} \limsup \Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e(-as_n x)\Big| d\mu(x) \leq \mu(\mathbb{Q}) = 0.$$

此外，在 90 年代，Bergelson 曾询问 S 是否可能是一个回归集，他所依据的是 [10, 69] 中发展起来的动力学分类。我们将在第 4.2.3 节证明，事实并非如此。

另一种动力学分类更适用于集合 S，其渊源可追溯至 Hartman [31]。我们简要回顾他所引入的定义。

定义 1.3。若存在定义在 $\mathbb{T}$ 上的连续测度 μ，使得 $\inf_{n\in E} |\widehat{\mu}(n)| > 0$，则称 $E \subset \mathbb{Z}$ 为 Ka 集。（这里“Ka”代表 R. Kaufman。）

Hartman 指出，对于任意 Ka 集 E，$W(E)$ 都是不可数的：$= (n_k)$。事实上，若非如此，则对于除一个可数集外的所有 t，都有 $\lim_N \frac{1}{N}\sum_{k\leq N} e(n_k t) \to 0$。如上所述，这将导致

$$\lim_N \frac{1}{N}\sum_{k\leq N} \widehat{\nu}(n_k) \to 0 \tag{4}$$

对于每个连续测度 ν。然而，存在一个连续测度 μ，使得 $|\widehat{\mu}(n_k)| > \delta$，因为 E 是一个 Ka 集；而连续测度 $\nu = \mu * \tilde{\mu}(\tilde{\mu}(A) := \mu(-A))$ 又满足 $\widehat{\nu}(n_k) > \delta^2$ 和 (4)，由此产生矛盾。

后来，R. Lyons [50], 在研究该猜想的部分答案时，问 S 是否可能是一个 Ka 集（他猜测情况相反），因为若能推翻该猜想，就可推出这一点。Badea 和 Grivaux [2] 给出了肯定答案，从而再次证明了 $W(S)$ 的不可数性。

显然，$W(S)$ 的大小或形状与该猜想有关。[21], 考虑到 Hadamard 情形，我们证明了 $W(S)$ 相当大，因为它的豪斯多夫维数为 > 0.45（最近，S. Usuki [73] 已将其改进为 $\dim_H(W(S)) = 1$），而且分布相当均匀；为此，我们构造了一个支集在 $W(S)$ 上的 Rajchman 测度。

1.5. Khintchin 类。回顾一下，对于任意递增序列 $E = (\lambda_n) \subset \mathbb{N}$，$(\lambda_n x)$ 几乎必然均匀分布。因此，对于

每个黎曼可积函数 f，我们有

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\lambda_n x) \to \int_{\mathbb{T}} f dm \quad a.e. \tag{5}$$

Khinchin 猜想，对于 L^∞-函数 [41]，这一结论成立。Marstrand [52],通过反驳这一猜想，证明了对于 $E=\mathbb{N}$，(5) 不成立；他取 $f=\mathbf{1}_O \in L^\infty(\mathbb{T})$，其中 O 是某个精心选取的开集。这促使我们将 $E=(\lambda_n)\subset\mathbb{N}$ 的 Khinchin 类定义为

$$\mathcal{K}_E := \left\{ f\in L^1(\mathbb{T}) : \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\lambda_n x) \to \int_{\mathbb{T}} f dm \quad \text{a.e.} \right\} \tag{6}$$

对于 Furstenberg 集 S，Marstrand 还在 [52] 证明了 $\mathcal{K}_S$ 包含$L^\infty(\mathbb{T})$；后来，Nair [54] 得到了 $\mathcal{K}_S = L^1(\mathbb{T})$。

在 [21] 中，我们给出了包含关系 $\mathcal{K}_S \supset L\log^+ L$ 的一个初等证明。对可积性的轻微限制源于以下原因：我们需要某个极大函数可积，这与 Man´e 的著作 [51]（推论 1.6，第 96 页）中的一个错误结论相矛盾；我们将给出一个简单的反例（定理 3.4）。事实上，利用经典的 Birkhoff 遍历定理，我们证明了一个结果，它复现了 Marstrand 的结果，几乎得到 Nair 的结果，并推广到 $\times 2\times 3$-不变概率测度（见定理 3.2）。这表明，连续且奇异的 $\times 2\times 3$-不变测度（若存在，则是 Furstenberg 猜想的反例）必定由 $W(S)$ 承载。

1.6. 调和分析中的稀疏性。整数稀疏集在调和分析中作为谱发挥着基础性作用。下面给出一个一般性定义。若 $X\subset L^1(\mathbb{T})$ 是一个巴拿赫空间，且 $E\subset\mathbb{Z}$ 是整数的一个子集，我们定义

$$X_E = \{f\in X : \widehat{f}(n)=0 \text{ for } n\notin E\}.$$

看来，X_E中的函数，即傅里叶谱包含于薄集 E 的 X 中的函数，比 X 中的一般函数具有更好的性质（极端情形 $E=\emptyset$ 下，我们有 $X_E=\{0\}$）。下面列出一些稀疏性的具体例子：

(1) 每个 $f\in L^2_E$ 都满足 $\|f\|_q \le C_q\|f\|_2$，其中某个 $2<q<\infty$存在。于是我们称 E 为 $\Lambda(q)$ 集（简称 $L^2_E\subset L^q$）。(2) 每个 $f\in L^\infty_E$都满足 $\sum_n |\widehat{f}(n)|<\infty$。于是我们称 E 为 Sidon 集（简称 $L^\infty_E\subset A(\mathbb{T})$，维纳代数）。(3) 每个 $f\in L^\infty_E$都满足 $\sum_n |\widehat{f}(n)|^p<\infty$，其中某个固定的 $1\le p<2$存在。于是我们称 E 为 p-Sidon 集（$L^\infty_E\subset A_p(\mathbb{T})$）。

众所周知，Hadamard 稀疏集具备所有这些性质（对于 $p=1$ 以及所有 $q<\infty$）。Furstenberg 集 $E=S$的稀疏性较弱，从调和分析的角度来看，是一个值得研究的对象。与人们已经充分了解的和集 $\{2^j+3^k\}$ [45] 相比，关于 S 的这些性质似乎鲜为人知（我们可以说，特征

在 $\mathbb{T}$ 上比乘积更能消化整数的和！）。然而，在 20 世纪 70 年代，Gundy 和 Varopoulos [28] 证明，对于所有 $q > 2$，集合 S 是 $\Lambda(q)$（甚至还有更多性质）。我们通过仔细分析常数及其对参数 s的依赖，在 [21] 给出了当 $S = S(q_1, \ldots, q_s)$ 时的证明。该证明使用鞅的平方函数和 Burkholder 不等式。

在这项关于稀疏集E的研究中，组合学以一种引人入胜的方式再度显现；尤其是，基数 $|E_N| := |E \cap [1, N]|$的增长速率揭示了一种主要工具 [21]，，它立即推出 S 不是 Sidon 集，甚至对于 $p < 4/3$，它也不是 p-Sidon 集；我们将在下文回到这一点。另一种较难运用的度量工具，是枚举 E中的关系：若 $E := (n_j)$，则 $\sum \epsilon_j n_j = 0$ 与 $\epsilon_j \in \{0, \pm 1\}$。这要归功于 Riesz 乘积的运用，而我们离不开它。当 $E = S$时，我们再次面临加法性质与乘法性质之间的冲突。

1.7. Furstenberg 集的随机版本。为了理解 S 的哪些性质取决于其算术结构，哪些取决于其稀疏性，我们在 [21] 中平行地考察了 S的一个随机版本 T：设 (δ_k) 是一个满足 $0 \le \delta_k < 1$ 和 $\sum \delta_k = \infty$的数列，并设 $(\xi_k)_{k \ge 1}$ 是一列取值为 0 或 1 的独立随机变量，其期望为$\mathbb{E}(\xi_k) =: \delta_k$；令

$$R = R(\omega) = \{k : \xi_k(\omega) = 1\}.$$

这是一个整数随机集。Furstenberg 集的随机版本 T 对应于特殊选择 $\delta_k = \log k/k$。事实上，几乎必然有 T与 S具有相同的增长速度：其中 $T_N := T \cap [1, N]$,

$$|T_N| \sim \mathbb{E}(|T_N|) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\log k}{k} \sim \int_1^N \frac{\log t}{t} dt = \frac{\log^2 N}{2},$$

其中，第一个“∼”是一种非常规的大数定律（归一化因子为 $\mathbb{E}(|T_N|$，它与 n不成比例）。证明这一大数定律见 [3]。

现在，我们失去了初始集合 S的算术性质，因此需要考察 T还具有哪些性质，或是否具有其他性质。下面给出一些结果。

1. T几乎必然是 Hartman-分布的（$W(T) = \mathbb{Q}$），参见 Bourgain[11]。更一般地，只要 $\delta_k \downarrow$ 且$m_N/\log N \to \infty$，随机集 R 就满足这一性质，其中 $m_N = \sum_{k=1}^{N} \delta_k$。[23] 指出，$\delta_k$ 的单调性条件可以弱化为 $\sum_{n=1}^{N} |\delta_n - \delta_{n+1}| = o(m_N)$。本文证明了 Bourgain 的结果的逆命题（推广了 Kahane 和 Katznelson 的一个结果）：若 $\delta_k \downarrow$且 $m_N = O(\log N)$，则 R几乎必然是 Sidon 集，因此不是 Hartman-分布的（见定理 5.12）。

2. T 对每个 $p > 4/3$ [21]几乎必然是 p-Rider 集。我们无法证明对 S 也有相同结论，但将在此证明 S 是 $3/2$-Rider 集（见定理 4.9 和定理 4.10）。

3. T 几乎必然包含一个下密度为正的子集 T'，该子集对每个 $2 < p < \infty$ [48] 都是Λ(*p*)。我们猜想，T 本身对每个$p < \infty$ 都是 Λ(*p*)。

下表很有意义。

确定性集合 S	随机集 T
S的弱稀疏性	类似的稀疏性 T
$W(S) = 1$的豪斯多夫维数	$W(T) = \mathbb{Q}$
$W(S)$ 支持一个 Rajchman 测度	$W(T) = \mathbb{Q}$
S 是一个 Ka 集	T 不是 Ka 集
S 是 Bohr 闭的	T 是 Bohr 稠密的
$\mathcal{K}_S = L^1$	“每个” $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{N}}$ 几乎处处包含于 $\mathcal{K}_T$
S 是 Λ(*p*)	T 的一个大子集是 Λ(*p*)。
S 是 $p = 3/2$ 的 p-Rider 集， 那么 $4/3 < p < 3/2$ 呢?	T 是 $p > 4/3$ 的 p-Rider 集， 但不是 $p < 4/3$ 的 p-Rider 集。

2. Arithmetical aspects

容易证明，$|S_N| =: |S \cap [1, N]| \asymp (\log N)^2$，因此增长速度为 $s_n \asymp \exp(\sqrt{n})$。要进一步推进，需要精确估计，也需要做更多工作。更一般地，对于 $S(q_1, \ldots, q_s)$，由互素整数 $q_1, \ldots, q_s$ 生成的乘法半群，Marstrand [52, p.545] 给出了以下渐近估计

$$|S(q_1, \ldots, q_s) \cap [1, n]| = K_s (\log n)^s + O((\log n)^{s-1}) \quad \text{as} \quad n \to \infty, \tag{7}$$

其中

$$K_s = \frac{1}{s!} \prod_{j=1}^{s} \frac{1}{\log q_j}$$

它是单纯形 $\{x = (x_j) \in \mathbb{R}^s : \sum_1^s \lambda_j x_j \le 1,\ x_j \ge 0\}$ 的体积，其中 $\lambda_j = \log q_j$。

我们在 [21], 当 S 的情形下，首先通过利用数 $\alpha = \log 2 / \log 3$ 的丢番图逼近性质以及序列 $(n\alpha)$ 的偏差，改进了哈代的余项，即 $o(\log N / \log \log N)$。

根据 Gelfond [26], $\log a \log b$要么是有理数（$a = N^p, b = N^q$），要么是超越数，因此 α 确实是超越数。但它不是刘维尔数，这意味着存在 $\delta > 0$ 和 $\rho < \infty$，使得

$$\forall q \in \mathbb{N}, \qquad \|q\alpha\| \geq \delta q^{-\rho}$$

这样的参数 $\rho \geq 1$称为 α 的无理性指数，而 α 则称为 ρ-丢番图数。关于 α 的一个良好 ρ，正如引言中所述，G. Rhin [61] 得到了 $\rho \leq 7.616...$，多年后 Wang 和 Wu [74]得到了改进的估计 $\rho \leq 4.11633052....$。基于这一估计，证明了以下结果。

定理 2.1（[21]）。假设 α 是 ρ-丢番图数；设 $\delta := \frac{\rho}{\rho+1}$。那么

$$|S_N| = \frac{1}{2\log 2 \log 3} \log^2 N + \frac{\log 6}{2\log 2 \log 3} \log N + O((\log N)^\delta). \tag{8}$$

否则

$$|S_N| = \frac{\log 2N \times \log 3N}{2\log 2 \log 3} + O((\log N)^\delta).$$

我们可以取 $\rho = 4.11633052....$ 和 $\delta := 0.80454645\cdots$

在我们的情形 $S = S(2,3)$ 中，我们可以改进 Tijdeman 关于 $S(q_1, \ldots, q_s)$ 的不等式；这里的显式常数再次取决于 α 的无理性指数 ρ。

定理 2.2（[21]）。我们有（其中 $2r = 1/(\rho+1)$）

$$\frac{1}{(\log s_n)^\rho} \lesssim \frac{s_{n+1} - s_n}{s_n} \lesssim \frac{1}{n^r} \lesssim \frac{1}{(\log s_n)^{2r}}. \tag{9}$$

我们可以取 $\rho \sim 4.116$ 和 $2r \sim 0.1954$。特别地，$s_{n+1} - s_n \to \infty$ 和 $s_{n+1}/s_n \to 1$。

注。1. 不等式 (9) 中的右侧不等式可以加强到什么程度？这是 Tijdeman 提出的问题，他指出 $\log s_n$ 是最佳可能的。我们可以对 (9) 作一点补充：对于与 α 的逼近相关的无穷多对 (s_n, s_{n+1})，有

$$\frac{s_{n+1} - s_n}{s_n} \leq \frac{2\log 2 \log 3}{\log s_n}.$$

这归因于渐近分数 [21] 的最佳逼近性质。
2. 接下来要做的就是找出这些数对。如果 α 是劣可逼近数，那么这些数对出现时具有有界间隙，而且可以进一步改进这些不等式。如果不是，[4] 中的作者指出，S 包含任意长的等比数列区间：对于无穷多个 n，存在 $a_n := 2^{-q_n}3^{p_n} \in \mathbb{Q}$ 和 $j := j_n \geq 1$，使得 $s_{k+1}/s_k = a_n$ 对于 $j \leq k \leq j+n-1$成立。

3. Dynamical aspects

现在我们转而讨论序列 S 的动力系统，以及对 S轨道的描述，也就是对于 $x \in \mathbb{T}$的 $\{s_n x\}$ 。有限轨道确实存在，而且可以加以描述。Furstenberg 已进行了拓扑研究，并证明了以下刚性结果。

定理 3.1（[25]）。 $\mathbb{T}$ 中任意无限的闭子集，若在 S 作用下保持不变，则必为 $\mathbb{T}$ 本身。

特别地，每个无限的 S-轨道在 $\mathbb{T}$ 中都是稠密的。这个非常有趣的结果揭示了 S 作用与 q-移位丰富的动力系统（$q \geq 2$）之间的深刻差异；后者存在无限的非稠密轨道。要进一步探究，我们需要更细致地分析点 $s_n x$ 的分布。若对于任意$0 \leq a < b < 1$，数列 $(u_k) \subset \mathbb{T}$ 均匀分布，则称该数列均匀分布。

$$\frac{1}{N}|\{1 \leq k \leq N,\ u_k \in [a,b)\}| \to b - a;$$

H. Weyl 提出的一个非常有用的判据断言：(u_k) 均匀分布，当且仅当对于每个 $h \neq 0$,

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leq k \leq N} e(h u_k) \to 0.$$

我们还将用到以下定义。

定义 3.1. 整数序列 $E := (n_k)$ 若满足

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leq k \leq N} e(n_k x) \to 0 \quad \forall x \in \mathbb{T},\ x \neq 0.$$

零测集 $W(E)$ 中的 $x \in \mathbb{T}$ 使得 $(n_k x)$ 不均匀分布。注意，“E 是 Hartman-分布的”意为“$W(E) = \mathbb{Q}$”。

3.1. Khintchin 类。考虑任意一个递增整数序列 $E = \{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{N}$。众所周知，$(\lambda_n x)$ 几乎处处均匀分布。因此，对于每个黎曼可积函数 f，我们有

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\lambda_n x) \to \int_{\mathbb{T}} f dm \quad a.e. \tag{10}$$

Marstrand [52] 证明，当 $E = \{\lambda_n\} = \mathbb{N}$ 时，存在有界函数 $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ 使得 (10) 不成立。我们将集合$E = \{\lambda_n\} \subset \mathbb{N}$ 的欣钦类定义为使 (10) 成立的那些勒贝格可积函数所组成的类。

Marstrand [52] 证明了

$$\mathcal{K}_S \supset L^\infty(\mathbb{T}) \tag{11}$$

后来 Nair [54] 证明了 $\mathcal{K}_S = L^1(\mathbb{T})$。因此，Khintchin 类$\mathcal{K}_S$ 已被完全确定，但 $\mathcal{K}_{\mathbb{N}}$ 的确定尚未完成。Koksma [42] 证明了以下关于 $E = \mathbb{N}$的判据：

$$\sum_{|k|\geq 3} |\widehat{f}(k)|^2 \big(\log\log|k|\big)^3 < \infty \Longrightarrow f \in \mathcal{K}_{\mathbb{N}}.$$

对于 $E = \{q^n\}$ 和整数 $q \geq 2$，根据 Birkhoff 遍历定理，我们有 $\mathcal{K}_E = L^1(\mathbb{T})$。但对于一般的稀疏集 E，$\mathcal{K}_E$ 的确定尚属未知。在许多情况下，稀疏序列具有良好的性质。序列 $\{\lambda_n\} = \{2^{2^n}\}$ 非常稀疏，但 J. Rosenblatt [65] 证明，存在 $f \in L^\infty$ 使得 (10) 不成立，换言之，$\mathcal{K}_{\{2^{2^n}\}} \not\supset L^\infty$。对于任意 Hadamard 稀疏序列 $\Lambda = \{\lambda_n\}$，Cuny 和 Fan [15, 的定理 C（第 2728] 页）推出

$$\sum_{n>N} |\widehat{f}(n)|^2 = O\Big(\frac{1}{\log^{1+\epsilon} N}\Big) \Longleftrightarrow \omega_{f,2}(\delta) = O\Big(\frac{1}{|\log\delta|^{1/2+\epsilon/2}}\Big) \Longrightarrow f \in \mathcal{K}_\Lambda$$

其中 $\omega_{f,\,2}(t)$ 表示 f 定义的 L^2-连续模

$$\omega_{f,2}(t) = \sup_{|t|\leq\delta} \|f(\cdot) - f(\cdot - t)\|_2.$$

实际上，关于 $\omega_{f,\,2}(\delta)$ 的上述条件（假设 $\int f = 0$）意味着 $\{f(\lambda_n x)\}$ 是一个收敛系统，也就是说

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n f(\lambda_n x) \ \text{ converges a.e.}$$

且指数 $1/2$ 是最优的 [15, 命题 5.2]。

Nair 对 $\mathcal{K}_S = L^1(\mathbb{T})$ 的证明基于 Bewley 提出的可容群作用遍历定理 [7]。利用经典遍历定理，可以给出 Marstrand 的结果 $\mathcal{K}_S \supset L^\infty(\mathbb{T})$ 的一个简单证明，甚至可以几乎证明 Nair 的结果，并将其推广到一类 $\times 2 \times 3$-不变概率测度。结果表述如下。

定理 3.2（[21]）。设 μ 是一个 $\times 2 \times 3$ 不变概率测度，且对两个移位之一是遍历的。若 $f \in L\log^+ L$，则，

$$A_N f(x) := \frac{1}{N} \sum_{n\leq N} f(s_n x) \to \int f d\mu \quad \mu\text{-}a.e.$$

因此，如果存在一种“Furstenberg-奇异”测度 μ，即连续的、S-不变且 $\mu \neq m$，那么它必定支集于 $W(S)$（事实上，根据 Rudolph [68] 的一个结果，μ 是零维的）：确实，我们可以利用 S 遍历分解，进一步假设 μ 是 S-遍历的；现在选取 $a \neq 0$，使得 $\widehat{\mu}(a) \neq 0$，并令 $f = e_a$ 应用定理 3.2：$\frac{1}{N}\sum_{n\leq N} e(as_n x) \to \widehat{\mu}(a)$ μ-几乎处处成立，而这样的 $x's$ 属于 $W(S)$。

定理 3.2 证明中的一个关键步骤，是下面这个对 Birkhoff 遍历定理的推广。

定理 3.3（[21]）。设（$X,\mathcal{B},\mu,T$）是一个保测动力系统。设（f_n）是一个可积函数序列。假设

(1) $f_n \to 0$ 几乎处处成立，且 $\|f_n\|_1 \to 0$；(2) $\sup_n |f_n|$ 可积。

那么几乎处处有

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n(T^{N-n}x) \to 0.$$

Ma˜n´e 在 [51, 第 96–97] 页声称，即使不假设 $\sup_n |f_n|$ 可积，也能得到相同的结论。他的证明存在一个漏洞。我们在此说明，在一般情形下，这个额外假设是必不可少的，不能省略。为此，我们详细介绍一个由 F. Rodriguez-Hertz 提出的反例（L. Flaminio [22] 好意告知我们）。其背后的思路是"收缩目标"。我们将给出一个完整而初等的证明。

定理 3.4. 设 $(X,\mathcal{B}(X)\ \mu,T)$ 为伯努利系统，其中 $X=\{0,1\}^{\mathbb{N}}$，μ 是对称伯努利测度，$T:\ X\to X$ 为由 $T((x_i))=(x_{i+1})$ 定义的左移位。设 (λ_n) 是一个正整数的非递减序列，且令 $E_n=\{x:\ x_1=\cdots=x_{\lambda_n}=0\}$，这是一个长度为$\lambda_n$的柱集。假设

$$\sum \frac{1}{2^{\lambda_n}}=\infty, \qquad \frac{n}{2^{\lambda_n}}\to 0.$$

（其中一种取法是 $\lambda_n=[\log(n\log\ n)/\log\ 2]$）。由 $f_n=n1_{E_n}$ 定义的函数序列 (f_n) 满足定理 3.3 中的条件 (1)，但是

$$a.s \quad \overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{2N-1} f_n(T^{2N-n}x)\geq 1/2.$$

证明。首先注意到 $E_n\downarrow\{0^\infty\}$。由此可得，对于所有 $x\neq 0^\infty$，$f_n(x)\to 0$。另一方面，$\|f_n\|_1=n\mu(E_n)=n/2^{\lambda_n}\to 0.$。因此，条件 (1) 得以满足。

为了证明所述不等式，我们将使用以下形式的 Borel-Cantelli 引理 [60, p.368]。设 (A_n) 为一个事件序列。若满足以下条件，则有 $\mu(\limsup A_n)=1$：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu(A_k)=\infty, \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\sum_{1\leq k,l\leq n}\mu(A_k\cap A_l)}{\left(\sum_{1\leq k\leq n}\mu(A_k)\right)^2}=1. \tag{12}$$

注意到

$$\frac{1}{2N}\sum_{n=0}^{2N-1} f_n(T^{2N-n}x)\geq\frac{1}{2N}f_N(T^Nx)=\frac{1}{2N}N1_{E_N}(T^Nx)=\frac{1}{2}1_{A_N}(x)$$

其中

$$A_N=\{x: x_{N+1}=\cdots=x_{N+\lambda_N}=0\}=T^{-N}(E_N).$$

我们只需验证 A_N's 满足条件 (12)，即可应用 Borel-Cantelli 引理。首先，$\sum \mu(A_n) = \sum \mu(E_n) = \sum 2^{-\lambda_n} = \infty$。其次，令

$$J_n = \{(k,l) : 1 \le k, l \le n,\ \mu(A_k \cap A_l) \ne \mu(A_k)\mu(A_l)\}.$$

由于 $\mu(A_k \cap A_l) = \mu(A_k)\mu(A_l)$ 对于 $(k,l) \notin J_n$，我们得到

(13)
$$\sum_{1\le k,l\le n} \mu(A_k \cap A_l) = \sum_{(k,l)\in J_n} [\mu(A_k \cap A_l) - \mu(A_k)\mu(A_l)] + \sum_{1\le k,l\le n} \mu(A_k)\mu(A_l).$$

现在假设 $1 \le k, l \le n$ 和 $l \ge k$ （ $k \ge l$ 的情形也可类似处理）。我们区分两种情形:

(i) 若 $l > k + \lambda_k$，则 $(k,l) \in J_n$，因为 A_k 和 A_l 相互独立，因此 $\mu(A_k \cap A_l) = \mu(A_k)\mu(A_l)$;

(ii) 若 $l \le k + \lambda_k$，则有 $A_k \cap A_l = \{x_{k+1} = \cdots = x_{l+\lambda_l} = 0\}$，从而

$$\mu(A_k \cap A_l) = \frac{1}{2^{l-k}} \cdot \frac{1}{2^{\lambda_l}} \le \frac{1}{2^{l-k}} \mu(A_k).$$

由 (i) 和 (ii) 可得

(14)
$$\sum_{(k,l)\in J_n} \mu(A_k \cap A_l) \le 2 \sum_{\substack{1\le k\le n,\\ k\le l\le k+\lambda_k}} \frac{1}{2^{l-k}} \mu(A_k) \le 4 \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = o\big(\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\big)^2.$$

类似地，我们有

$$\sum_{(k,l)\in J_n} \mu(A_k)\mu(A_l) = 2 \sum_{\substack{1\le k\le n,\\ k\le l\le k+\lambda_k}} \mu(A_k)\mu(A_l) \le 2 \sum_{1\le k\le n} \mu(A_k) \frac{\lambda_k}{2^{\lambda_k}}$$

$$= o\big(\sum_{1\le k\le n} \mu(A_k)\big). \tag{15}$$

因此，(12) 中的第二个条件由 (13)、(14) 和 (15) 以及 $\sum \mu(A_k) = \infty$ 这一事实推出。□

3.2. $W(S)$ 的维数及 $W(S)$ 上的 Rajchman 测度。前面的评论促使我们更仔细地考察 $W(S)$。我们可以证明:

定理 3.5（[21],[73]）。集合 $W(S)$ 满足:

(1) $\dim_H(W(S)) = 1$。(2) $W(S)$ 支持一个 Rajchman 概率测度 μ，更明确地说，$\widehat{\mu}(h) = O(1/\log\log|h|)$ 当 $h \to \infty$。

在 [21], 中，我们只证明了 $\dim_H(W(S)) \ge 0.451621$，但 Usuki [73], 最近运用与我们类似的方法，将这一估计改进为 $\dim_H W(S) = 1$。定理 3.5 的第二个断言表明，$W(S)$ 并没有那么多孔。刘维尔数的（不可数）集合 $\mathcal{L}$也是如此，尽管 $\dim_H(\mathcal{L}) = 0$ ([8])。相反，三进制坎托尔集 K （满足

$\dim_H(K)$ =~~3 的对数~~ $\log 3$ ）是多孔的：它不支持任何 Rajchman 测度（ Kahane- Salem [39]）。

现在，我们可以通过证明几乎不可能优于定理 3.5 中所述的衰减，来精确描述集合 $W(S)$ 的 M_0-性质。

定理 3.6. 对于任意支集位于 $W(S)$ 上的概率测度 μ ，只要 $\alpha > 1$，就 $\widehat{\mu}(h)$ 不能以 $1/(\log\log h)^\alpha$ 的速度衰减至 $h \to \infty$。

我们将依据下面 Davenport-Erd¨os-LeVeque 的经典判据来证明定理 3.6。

命题 3.7（参见 [12], 引理 1.8.）。设 $(\Omega\ \mathcal{A}, \mu)$ 是一个概率空间，且 (X_n) 是一列复值随机变量，并满足 $|X_n| \le 1$。则平均值 $Z_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$ 在 μ-几乎处处收敛到 0，条件是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\int_\Omega |Z_n|^2 d\mu < \infty.$$

定理 3.6的证明。我们将证明，若 $\widehat{\mu}(h) = O\big(1/(\log\log h)^\alpha\big)$ 对某个 $\alpha > 1$ 成立，则 $\mu(W(S)) = 0$，因此 μ 不可能支撑在 $W(S)$ 上。为此，我们只需证明，若 ℓ 是一个非零整数，则平均值$A_n^{(\ell)}(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n e(\ell s_j x)$ 几乎处处趋于 0，这意味着 $(s_n x)$ 关于 μ-几乎处处均匀分布。

我们可以假设 $\ell = 1$ （对所有 ℓ，证明都相同）。简记 $A_n^{(\ell)}$为 A_n。我们只需验证 $X_n(x) = e(s_n x)$ 满足命题 3.7 的假设，即可应用该命题。显然，展开 $|A_n|^2$ 可得

$$\int_{\mathbb{T}} |A_n|^2 d\mu = \frac{1}{n^2}\Big(n + \sum_{j\neq k, 1\le j,k\le n} \widehat{\mu}(s_k - s_j)\Big) \le \frac{1}{n^2}\Big(n + 2\sum_{1\le j<k\le n} |\widehat{\mu}(s_k - s_j)|\Big).$$

但我们知道，对于 $j < k$ 和某个数值常数 A，有$s_k - s_j \ge s_k - s_{k-1} \gtrsim s_k/(\log s_k)^A$ （参见定理 2.2），因此

$$\log\log(s_k - s_j) \gtrsim \log\log s_k \gtrsim \log(\sqrt{k}) \gtrsim \log k$$

于是 $|\widehat{\mu}(s_k - s_j)| \lesssim 1/(\log k)^\alpha$. 由此可得

$$\int_{\mathbb{T}} |A_n|^2 d\mu \lesssim \frac{1}{n^2}\big(n + \sum_{1\le j<k\le n} 1/(\log k)^\alpha\big) \lesssim \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=2}^n 1/(\log k)^\alpha \lesssim \frac{1}{(\log n)^\alpha}.$$

因此，命题 3.7 的假设成立。 □

定理 3.6 体现了圆周群上测度的不确定性原理： μ 的支集和谱不能同时太小。

4. Harmonic analysis of thin sets

4.1. 调和分析中的组合学。组合学在稀疏集的调和分析中发挥着基础作用，涉及独立性、稀疏性或算术关系等多个方面。累积函数

$N \to |E_N| := |E \cap [1, N]|$ 子集 $E \subset \mathbb{Z}$ 的累积函数反映了该集合的稀疏性，并为 E 具备我们所关注的某种调和性质提供必要条件，正如下文将回顾的那样。

定义4.1. 设 E 是一个正整数集， X 是圆周上的可积函数巴拿赫空间（例如 $X = L^p$、$1 < p < 2$）。如果任意函数 $f \in X$ 的傅里叶变换限制在 E 上后都是平方可和的，即

$$\widehat{f}_{|E} \in \ell^2.$$

那么，存在一个最小常数 $P(X, E) > 0$，称为这一对 (X, E) 的帕利常数，使得下述帕利型不等式成立：

$$\|\widehat{f}_{|E}\|_2 \le P(X, E)\|f\|_X, \quad \forall f \in X.$$

命题4.1（[67]）。以下结论成立。

1) E 是 H^1-帕利集，当且仅当 $|E \cap [N, 2N]| = O(1)$。

2) 若 E 是 p-Sidon 集，则 $|E_N| \le c(\log N)^{\frac{p}{2-p}}$。 3) 若 E 对 $p > 2$ 是 $\Lambda(p)$，则 $|E_N| \le 4\lambda_p(E)^2 N^{2/p}$。

作为 1) 的一个简单推论（这确实是定义的动机），集合$\{2^n\}$，更一般地说，哈达玛集，是 H^1-Paley 集。$|S_N|$的已知估计与 2) 和 3) 一起，得出了关于 S 的第一个否定性结果。

命题4.2。

(i) S 不是 Sidon 集，甚至更进一步，对于 $p < 4/3$， S 不是 p-Sidon 集。(ii) S 不是 H^1-Paley 集。

4.1.1. Sidon 集的拟独立性与皮西耶判据。

定义 4.2. 若对任意互异元素 $x_1, \dots, x_n \in E$ 以及任意 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$，关系 $\sum \varepsilon_k x_k = 0$ 均蕴含所有 $\varepsilon_k = 0$，则称集合 $E \subset \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 为拟独立集。

$\sum_k |\varepsilon_k|$ 称为关系的长度。因此，拟独立集是不含正长度关系的集合。

拟独立集是 Sidon 集的原型。由于 Sidon性质在有限并下保持不变（Drury 定理 [16]），人们猜想 Sidon 集可以表示为有限个拟独立集的并。沿着这一方向，Pisier [58] 通过以下刻画取得了突破。

定理 4.3（[58]）。 $E \subset \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ 是 Sidon 集，当且仅当存在$\delta > 0$，使得对于每个有限子集 $A \subset E$，都可以从 A 中提取出一个拟独立集 B，满足 $|B| \ge \delta|A|$。

稍后将出现 p-Sidon 集和 p-Rider 集的一个类似结果，并将加以应用。

4.1.2. 连续测度的谱。Furstenberg 的猜想实际上引出了关于 $\mathbb{T}$ 上连续测度及其谱的问题。借助 Wiener 判据（其中隐约可见不确定性原理），连续测度既可以用支集（实际上是湮灭集）来描述，也可以用傅里叶系数来描述。Russel Lyons（[49]）得到了如下新的刻画：

测度 $\mu \in M(\mathbb{T})$ 是连续的，当且仅当存在 $(n_k) \subset \mathbb{Z}, |n_k| \to \infty$ 使得对每个 $\ell \in \mathbb{Z}^*$，都有 $\widehat{\mu}(n_k \ell) \to 0$。

但一般而言，无法对这个序列 (n_k) 作出任何断言，因为它先验地依赖于 μ。在研究富斯滕伯格猜想的部分答案时，Lyons 于 [50] 询问 $S = (s_n)$ 是否可能成为这样一个普适序列，也就是说，对圆周群 $\mathbb{T}$ 上的每个连续测度 σ，是否都有 $\liminf |\widehat{\sigma}(s_k)| = 0$？

如果这一点成立，富斯滕伯格猜想便为真：若 μ 是连续的，那么对每个 $\ell \in \mathbb{Z}, \ell \neq 0$，都有 $\liminf |\widehat{\mu}(s_k \ell)| = 0$，因为 $T_\ell \mu$ 仍然是连续的；若进一步假设 μ 是 $\times 2 \times 3$-不变的，则有 $|\widehat{\mu}(\ell)| = \liminf |\widehat{\mu}(s_k \ell)| = 0$，并且$\mu$ 是勒贝格测度。但 S. Grivaux 和 C. Badea [2] 构造了一个连续测度，使得对于某个常数 $\delta > 0$，$\inf_{s \in S} |\widehat{\mu}(s)| \geq \delta$；换言之，

定理 4.4（[2]）。 S 是一个 Ka 集。

由于 Hartman 对 Drury 结果的改进版本 [31],，我们可以看出 Sidon 集也是 Ka 集。

Bergelson 等人从动力系统的角度（将其视为一种谱性质 [5]）研究了测度的一种限制性更强的性质；Eisner 和 Grivaux 则从算子论视角进行了研究（[17]）。

定义 4.3。若存在一个连续概率测度 μ，定义在 $\mathbb{T}$ 上，使得 $\lim_{k \to \infty} \widehat{\mu}(n_k) = 1$，则称子集 $E = (n_k) \subset \mathbb{Z}$ 为刚性集。

当然，刚性集都是 Ka 集，因此问题是： S 能否是一个刚性集?

4.2. 关于作为薄集的 S。

4.2.1. S 是 p-Paley， $1 < p < 2$。我们在本节开头提到， S 不可能是 H^1-Paley。以下结论证明于 [28]: (L^p, S) 是一个 Paley 对。这里给出一个朝此方向迈出的初步结果，该结果归功于 Gundy 和 Varopoulos（参见 [28]）。

定理 4.5（ [28]）。对于所有 $q > 2$，集合 S 是 $\Lambda(q)$，即对于任意 $f \in L^2_S$，$||f||_q \leq \lambda_q(S)||f||_2$。

证明使用了与一列 σ-子代数递减序列相对应的鞅平方函数，以及 Burkholder 不等式。

定理 4.6（[28]）。对于任意满足 $1 < p < 2$ 的 $g \in L^p$，有

$$\Big(\sum_{n \in S} |\widehat{g}(n)|^2 \Big)^{1/2} \leq C_q \|g\|_p$$

其中 $q>2$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，且 $C_q<\infty$。

此外，我们在 [21] 中证明了 $\lambda_q(S)\le Cq^{3/2}$，并且证明了 $C_q=P(L^p,S)\cdot q^2$。

4.2.2. S 4/3-Sidon 吗? 我们在本节开头提到，对于 $p<4/3$， S 不是 p-Sidon，而我们认为 S 是 $4/3$-Sidon。目前我们还不能确认这一点，但可以通过证明 S 是 $3/2$-Rider 集，得到这方面的一个部分结果。下面回顾一些事实。

若 $f=\sum a_k e_k$ 是三角多项式，且 (ε_k) 是 Rademacher 序列，则随机多项式 f_ω 按定义为

$$f_\omega=\sum \varepsilon_k(\omega)a_k e_k.$$

定义 4.4. 若 Λ 是 $\mathbb{N}$ 的子集，则称其为 p-Rider 集（$1\le p<2$），如果存在常数 C，使得对于每个 $f\in\mathcal{P}_\Lambda$，都有

$$\|\widehat{f}\|_p\le C[f]$$

其中 $[f]$ 表示由 f 定义的 Pisier 范数

$$[f]=\mathbb{E}(\|f_\omega\|_\infty).$$

1-Rider 性与 1-Sidon 性质相同，即 Sidon 性质（参见 [62]）。对于 $1<p<2$, p-Sidon 性质（即 $\|f\|_p\le C\|f\|_\infty$）蕴含 p-Rider 性，而反向结论尚未解决。不过，相较于 p-Sidon 性质，研究 p-Rider 性更为灵活。更多相关内容请参见 [21] 。

为了研究 S的 p-Rider 性，我们将用到 Rodrıguez-Piazza 的两个定理（[63], Lema 2.4，第 89 页；Teorema 2.3，第 85–86 页），这两个定理曾用于 [47]。陈述这些定理之前，我们需要引入以下记号。对于 $\mathbb{N}$的任意子集 Λ 以及 $n=1$、2、.....，我们先固定如下约定

$$\Lambda_n=\Lambda\cap[1,n]\text{ and }\Lambda_{I_n}=\Lambda\cap I_n\quad\text{where } I_n=[2^n,2^{n+1}[\subset\mathbb{N}.$$

对于有理数集 $\mathbb{N}$ 的有限子集 A，记作

$$\psi_A=\Big\|\sum_{k\in A}e_k\Big\|_{\psi_2}.$$

回忆一下， ψ_2 表示高斯 Orlicz 函数： $\psi_2(x)=e^{x^2}-1$，并且对于函数 f, 有 [46, p.44, vol.1]

$$\|f\|_{\psi_2}\asymp\sup_{q\ge2}\frac{\|f\|_q}{\sqrt{q}}. \tag{16}$$

下面的结果给出了给定有限集中最大准独立子集大小的下界。

定理 4.7（[64], p.89）。设 $A\subset\mathbb{N}$ 是一个有限集。我们可以找到 A 的一个准独立子集 E，其基数为

$$|E|\ge\delta\Big(\frac{|A|}{\psi_A}\Big)^2$$

其中 δ 是一个正常数。

以下是集合 $E \subset \mathbb{N}$ 为 p-Rider 集的充要条件，该条件涉及 E的任意有限子集中最大准独立子集的大小。

定理 4.8（[64], 第 85 页）。设 $1 \le p < 2$。子集 $E \subset \mathbb{N}$ 是 p-Rider 集，当且仅当对 E 的每个有限子集 A，都存在 A 的准独立子集 B，使得

$$|B| \ge \delta |A|^{\varepsilon}$$

其中 $0 < \varepsilon = \frac{2}{p} - 1 \le 1$，且 δ 是正常数。

$p = 1$ 的情形归功于 Pisier。注意，当 $p = 4/3$ 时，$\frac{2}{p} - 1 = 1/2$。我们先介绍一个一般性事实。

定理 4.9。设 $\Lambda \subset \mathbb{N}$。假设存在常数 $C > 0$ 和 $\alpha \ge 1/2$，使得

$$\forall q > 2,\ \forall f \in \mathcal{P}_\Lambda,\quad \|f\|_q \le C q^\alpha \|f\|_2.$$

那么，对 $p = \frac{\alpha}{2\alpha+1}$，$\Lambda$ 是 p-Rider集。

证明。设 A 是 Λ 的一个有限子集，且满足 $|A| = n$。我们断言

$$\|\sum_{j\in A} e_j\|_q \lesssim \min(q^\alpha \sqrt{n},\ n) \text{ for all } q \ge 2. \tag{17}$$

事实上，首先显然有 $\|\sum_{j\in A} e_j\|_q \le \|\sum_{j\in A} e_j\|_\infty = n$；其次，根据假设可得

$$\|\sum_{j\in A} e_j\|_q \lesssim q^\alpha \|\sum_{j\in A} e_j\|_2 = q^\alpha \sqrt{n}.$$

由 (17) 容易得到（分别讨论 $q \le n^{\frac{1}{2\alpha}}$、$q \ge n^{\frac{1}{2\alpha}}$ 的情形）

$$\psi_A \asymp \sup_{q\ge 2} \frac{1}{\sqrt{q}} \|\sum_{j\in A} e_j\|_q \lesssim n^{1-\frac{1}{4\alpha}},$$

利用公式 (16)。现在，定理 4.7 给出了 A 的一个拟独立子集 E，其基数为

$$|E| \gtrsim \left(\frac{n}{\psi_A}\right)^2 \gtrsim n^{\frac{1}{2\alpha}}.$$

最后，调整指数 p，使得

$$\frac{1}{2\alpha} = \frac{2}{p} - 1,$$

即 $p = \frac{4\alpha}{2\alpha+1}$。然后由定理 4.8 即可得出结论。 □

If $\alpha = 1/2$, we have $\frac{4\alpha}{2\alpha+1} = 1$, and Λ is a Sidon set.

Furstenberg 集 S 对于所有具有指定常数的 $q < \infty$，都是 $\Lambda(q)$ [21,定理 4.12])。这一结果使我们能够证明关于 S 的 p-Rider 性质的一个部分结果。之所以只是部分结果，是因为我们猜想 S 是 $4/3$-Rider

（甚至可能是 $4/3$-Sidon），但我们只证明了它的 $3/2$-Rider 性质。更一般地，我们猜想 $S(q_1,\dots,q_s)$（其中 q_j 各项是乘法独立的整数）是 $\frac{2s}{s+1}$-Rider（甚至可能是 $\frac{2s}{s+1}$-Sidon），而且这将是最优的。我们证明了关于 $S(q_1,\dots,q_s)$ 的以下部分结果。

定理 4.10. Furstenberg 集 S 是 $3/2$-Rider 集。更一般地，设$s \geq 2$，我们有

(1) 集合 $S(q_1,\dots,q_s)$ 是 $\frac{2s-1}{s}$-Rider 集。(2) 当 $p < \frac{2s}{s+1}$时，集合 $S(q_1,\dots,q_s)$ 不是 p-Rider 集。

证明。我们借助 [21, 定理 4.12]，该定理说明，定理 4.9 的假设对 $\Lambda = S(q_1,\dots,q_s)$ 在 $\alpha = s - 1/2$ 的条件下成立，从而得到

$$\frac{4\alpha}{2\alpha+1} = \frac{2s-1}{s}.$$

$S(q_1,\dots,q_s)$ 的乘法特征体现在该指数 α 的取值中。第二个断言来自 p-Rider 集的网格条件[21, 命题 3.2]: 若 Λ 是 p-Rider 集，则必有 $|\Lambda_N| \lesssim (\log N)^{p/(2-p)}$。但由 [21, 第 9] 页可知，$|\Lambda_N| \asymp (\log N)^s$。因此 $s \leq p/(2-p)$，也即 $p \geq \frac{2s}{s+1}$。□

4.2.3. S 与博尔拓扑。回顾一下，若 G 是一个局部紧阿贝尔群，其对偶群为 Γ，则 Γ 的博尔紧化 $\beta\Gamma$ 是G_d的对偶群，其中G_d是赋予离散拓扑的群 G。群 $\beta\Gamma$ 是 G上所有特征（连续或非连续）的集合；它是紧的，并且包含 Γ 作为稠密子群。当 $G = \mathbb{T}$ 且 $\Gamma = \mathbb{Z}$时，我们来描述这种拓扑。

定义 4.5. $\mathbb{Z}$ 上的博尔拓扑是一个群拓扑，其零点邻域有如下基:

$$V(x_1,\dots,x_k,\varepsilon) = \{n \in \mathbb{Z};\ |e(nx_j) - 1| < \varepsilon \ \ for\ 1 \leq j \leq k\}$$

其中 $\varepsilon > 0$ 且 $x_j \in \mathbb{R}$，称为（ $\mathbb{Z}$中 0 的）博尔邻域。

$\mathbb{Z}$ 上的博尔拓扑是使得 $\mathbb{T}$ 上离散测度的所有傅里叶变换连续的最粗拓扑。

下面的断言可由抽屉原理和同时丢番图逼近得出。

命题 4.11. 博尔邻域具有正的上密度。

我们关注 $\beta\mathbb{Z}$ 以及整数的某些子集，这些子集在 $\beta\mathbb{Z}$中稠密（即 Bohr 稠密）或不稠密。下面给出第一类例子。

命题 4.12. Hartman 分布集是 Bohr 稠密的。

这是定义的直接推论。Bohr 稠密性这一性质出现在对（相当大的）整数集进行动力学分类的研究中，这些整数集已由 Bergelson、Bourgain、Ruzsa 等许多人进行了深入研究（[6, 10, 69]）。我们提取出所需的主要推论:

Hartman $-$ 分布的 $\Longrightarrow$ 一致复发 $\Longrightarrow$ Bohr $-$稠密,

定义将在下文给出。

定义 4.6. 若对于每个动力系统 $(X,\mathcal{A},\mu,T)$ 及每个具有正测度的子集 $A\in\mathcal{A}$，都存在 $h\in E$ 使得 $\mu(A\cap T^{-h}A)>0$，则称集合 $E\subset\mathbb{Z}$ 为遍历集。

定义 4.7. 若 E 的每个平移都是遍历集，则称集合 $E\subset\mathbb{Z}$ 为一致复发集。

上述最后一个蕴含是否可逆，这个问题仍未解决。

回到 Furstenberg 集，我们证明

定理 4.13. 集合 $E:=S(p_1,\dots,p_r)$，尤其是 S，是 Bohr 闭的，因此不是遍历集。

证明。记 p^α 为 $p_1^{\alpha_1}\cdots p_r^{\alpha_r}$，并记 $\beta\geq\alpha$，若对所有 j都有 $\beta_j\geq\alpha_j$；记 $\beta>\alpha$，若对所有 j都有 $\beta_j>\alpha_j$。现在证明 $\mathbb{Z}\backslash E$ 在 Bohr 拓扑下是开集。事实上，取 $m\notin E$。我们分两种情况讨论。

- $m=0$。那么 $V=N\mathbb{Z}$ 是一个与 E 不相交的 0 的邻域，其中 N 有一个素因子 $p>p_r$。
- $m\neq 0$。记

$$m=p^\alpha n=:s_0\times n$$

其中 $s_0\in E$、$n\neq 0$、1 和 $n\wedge p_1p_2...p_r=1$。可以找到 $s=p^\beta\in E$，使得 $\beta>0$，并且使 β_j 足够大，从而有 $s>n-1$，这意味着 $n\neq 1$模 s。现在我们断言，m 的邻域

$$V:=V(m)=m+sp^\alpha\mathbb{Z},$$

满足 $V\cap E=\emptyset$。事实上，一个关系

$$p^\gamma=m+sp^\alpha k=p^\alpha(n+sk),$$

显然意味着 $\gamma\geq\alpha$。若 $\gamma=\alpha$，则 $n+sk=1$ 且 $n\equiv 1$ 模 s，这与 s 的选取相矛盾。因此，例如我们有 $\gamma_1>\alpha_1$。经 $p_1^{\alpha_1}$ 化简后，得到 $p_1|(n+sk)$，这仍然不可能：因为 $p_1|s$，所以 $(n+sk)\wedge p_1=n\wedge p_1=1$。□

Hartman 的第二种动力学分类涉及整数的小集合，似乎避开了这种 Bohr性质：

$$E\text{ Sidon or }E\text{ rigid}\Longrightarrow E\text{ Ka}-\text{set}\Longrightarrow W(E)\text{ uncountable.}$$

然而，Katznelson [40] 构造了一个 Bohr稠密Ka集，而 Griesmer[27] 构造了一个既刚性又 Bohr 稠密的集合。在 $\beta\mathbb{Z}$ 中存在一个稠密的 Sidon 集这一问题仍未解决。

5. A random version T of S

回顾一下，我们将 S 的一个随机版本 T 定义为

$$T = \{k \in \mathbb{N} : \xi_k = 1\}$$

其中，(ξ_k) 是由独立的 0-1 值独立随机变量组成的序列，满足 $\mathbb{E}(\xi_k) = \delta_k :=$ 对数$_k{}^k$。

5.1. 首批比较结果。下面给出一些关于随机版本 $T = (t_n)$ 的结果。首先，T 与 S 具有一些相同的稀疏性性质。

定理 5.1（[21]）。几乎必然，差集 $t_{n+1} - t_n$ 满足：

1) $\limsup_{n\to\infty} \dfrac{t_{n+1} - t_n}{(t_n/\log t_n)\,\log\log t_n} \le 2$;

2) $\liminf_{n\to\infty} \dfrac{t_{n+1} - t_n}{t_n/(\log t_n)^{3+\delta}} \ge 1 \quad \textit{for all } \delta > 0.$

特别是，该集合满足：T t_{n+1} 与 $t_n \to \infty$，$t_{n+1}/t_n \to 1$ 几乎必然。

下面给出 T 的一项动力学性质；Bourgain 研究的更一般随机集 R 也具有这一性质。令

$$m_N := \sum_{k=1}^{N} \delta_k.$$

定理 5.2（[11]）。若 $\delta_k \downarrow$ 且 $m_N/\log N \to \infty$，则相应的随机集 R 几乎必然是 Hartman 分布。特别地，T 就是如此。

R 的这一性质与 S 的情形形成鲜明对比。

现在来看 T 的一项调和分析性质，它优于 S 的相应性质。

定理 5.3（[48], [21]）。几乎必然，集合 T 是 $p > 4/3$ 的 p-Rider 集，而不是 $p < 4/3$ 的 p-Rider 集。

$p < 4/3$ 的情形是平凡的（网格条件）。我们不知道 T 是否是4/3-Rider 集，但在下一项中我们将朝这一结果迈进。

5.2. T' 的一个大子集 T 是 4/3-Rider 集。下文将证明 T'的一个大子集 T 具有4/3-Rider 性质和 $\Lambda(q)$性质。详细证明补全了 [48, 引理 3.3]中略显粗略的证明。我们不知道 T 本身是否具有 T'的这些性质。

我们先介绍一些记号。设 $E \subset \mathbb{N}$。对于 $E' \subset E$，E' 在 E 中的上密度定义为

$$\overline{d}(E', E) = \limsup_{N\to\infty} \frac{|E' \cap [1, N]|}{|E \cap [1, N]|}.$$

类似地，我们用 lim inf 定义下密度$\underline{d}(E', E)$。显然

$$0 \le \underline{d}(E', E) \le \overline{d}(E', E) \le 1.$$

显然，$\underline{d}(T', T) > 0$ 表明 T' 占据了 T的很大一部分。

定理 5.4. 几乎必然，随机集 T 包含一个具有正下密度的子集 T' ，使得

(1) T' 是一个$_{4\,3}$-Rider 集；(2) T'
对所有 $q<\infty$ 都是一个 $\Lambda(q)$-集。

证明定理 5.4 的关键在于下面的主要技术结果，该结果采用第3.2.2节的记号表述，其冗长证明的概要将在本小节末尾给出。

定理 5.5. 几乎必然，以下两个估计成立：
(1) $|T_{I_n}| \asymp n_\circ$ (2) $\psi_{T_{I_n}} \le C|T_{I_n}|^{1/2}$ ，其中 $C=C(\omega)$ 不依赖于 $n_\circ$

5.2.1. 定理 5.4 的证明。假设定理 5.5 成立，我们可以通过 [47] 的一个组合论证证明定理 5.4，现将其重述于此。首先，由定理 4.7 和定理 5.5 (2)，我们可以找到 T_{I_n} 的一个准独立子集 E_n ，其基数为

$$|E_n| \ge \delta\Big(\frac{|T_{I_n}|}{\psi_{T_{I_n}}}\Big)^2 \ge \delta'|T_{I_n}|.$$

现在令

$$T' := \bigcup_{n\ge 1} E_n.$$

注意， $T'_{I_n}=E_n$ 是一个大小与 $|T_{I_n}|$ 成正比的准独立子集。我们将看到，对于 T' 的任意有限子集，也存在类似的结果，但会有所损失。

我们首先注意到， T' 在 T 中具有正下密度。事实上，若给定 N 和 $2^n \le N < 2^{n+1}$，我们知道几乎必然有 $|T_N| \lesssim (\log N)^2$，而

$$|T'_N| \ge \sum_{k=1}^{n-1}|E_k| \ge \delta'\sum_{k=1}^{n-1}|T_{I_k}| \gtrsim \sum_{k=1}^{n-1} k \gtrsim n^2 \gtrsim (\log N)^2 \gtrsim |T_N|,$$

其中，对于第一个 $\gtrsim$ ，我们用到了定理 5.5 (1)。

现在设 $A\subset T'$ 是任意一个有限集。我们声称， A 包含一个大小为 $\gtrsim |A|^{1/2}$ 的准独立子集 E 。为此，我们令

$$J=\{n : A\cap E_n \ne \emptyset\} = \{n_1<n_2<\cdots<n_h\}$$

于是

$$A=\bigcup_{n\in J}(A\cap E_n).$$

我们通过区分以下两种情形，在 A 中寻找一个较大的准独立子集 B ，使得 $|B \gtrsim |A|^{1/2}$ ：

情形 I. 对某个 $n\in J$， $|A\cap E_n| \ge |A|^{1/2}$。那么，取 $B := A\cap E_n \subset E_n$。

情形 II. 对所有 $n\in J$， $|A\cap E_n| \le |A|^{1/2}$。于是， $h\ge |A|^{1/2}$。对每个 $j\le K$ ，在 $A\cap I_{n_{2j+1}}$ 中选取一点 $\mu_j := [(h-1)/2]$ ，并注意到 $\mu_{j+1}/\mu_j \ge 2$

使得 $B := \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_K\}$ 是一个基数为$\geq \delta'' h \geq \delta''|A|^{1/2}$的拟独立集。这就证明了我们的结论。

由于定理 4.8 的假设对 T' 成立，且 p 满足使得 $(2/p) - 1 = 1/2$，即 $p = 4/3$，因此定理 5.4 的第一部分得证。

现在我们转向定理 5.4 的第二部分。设 $f \in L^2_{T'}$ 和 $\widehat{\ }$，令 $f_n = \sum_{k \in E_n} f(k) e_k$。第 8] 章中的 Littlewood-Paley 定理 [53, 以及 L^q-范数关于 $q \geq 2$ 的凸性意味着

$$\|f\|_q \leq C_q \| \Big(\sum_n |f_n|^2 \Big)^{1/2} \|_q \leq C_q \Big(\sum_n \|f_n\|_q^2 \Big)^{1/2}$$

其中 $C_q \lesssim q^{3/2}$ [47]。但 E_n 是拟独立的，因此是 Sidon 集，其 Sidon 常数为 ≤ 8；于是， E_n 是一个 $\Lambda(q)$-集，满足 $\lambda_q(E_n) \leq C\sqrt{q}$，因此 $\|f_n\|_q \leq C\sqrt{q}\|f_n\|_2$ ，我们得到

$$\|f\|_q \lesssim C_q \sqrt{q} \Big(\sum_n \|f_n\|_2^2 \Big)^{1/2} = C_q \sqrt{q} \|f\|_2.$$

这意味着 T' 是一个 $\Lambda(q)$-集，且 $\lambda_q(T') \lesssim q^2$。 □

5.2.2. $\psi_{T_{I_n}} \leq C|T_{I_n}|^{1/2}$的证明。现在我们证明定理 5.5 的第二部分（第一部分很容易）。下文中， C_0、 C_1、 .....表示常数。我们先给出一个简单的插值引理——用 $\|f\|_\infty$ 和$\|f\|_2$估计 $\|f\|_{\psi_2}$。

引理 5.6。设 $f \in L^\infty$。那么

$$\|f\|_{\psi_2} \leq \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{\log(1 + \|f\|_\infty^2 / \|f\|_2^2)}}. \tag{18}$$

特别地，若 $f = \sum_{k \in A} c_k e_k$ ，其中 A 有限且 c_k 为标量，则有

$$\|f\|_{\psi_2} \leq \frac{\sum |c_k|}{\sqrt{\log\left(1 + \frac{(\sum |c_k|)^2}{\sum |c_k|^2}\right)}}. \tag{19}$$

证明。我们可以假设 $\|f\|_\infty = 1$。令 $\lambda = \|f\|_{\psi_2}$和 $\psi_1(x) = e^x - 1$。根据 λ 的定义、 ψ_1 的凸性，以及 $|f| \leq 1$和 $\psi_1(0) = 0$这些事实，我们有

$$1 = \int \psi_2(|f|/\lambda) = \int \psi_1(|f|^2/\lambda^2) \leq \psi_1(1/\lambda^2) \int |f|^2.$$

将此关系反演即可得到 (18)，因为 $\psi_1^{-1}(y) = \log(1 + y)$。

接下来，注意到 $x \mapsto x/\log(1+x)$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上递增。于是，由关系 $\|f\|_\infty \leq \sum_{k \in A} |c_k|$, $\|f\|_2^2 = \sum_{k \in A} |c_k|^2$. □ 可从 (18) 推出 (19)

下面将用到引理 5.6 的以下特例。

引理 5.7. 设 $f = \sum_{k\in I_n} a_k b_k e_k$，其中 a_k、b_k 为标量，且 $\sum |a_k|^2 \le 1$。则

$$\|f\|_{\psi_2} \le \frac{(\sum |b_k|^2)^{1/2}}{\sqrt{\log(1+(\sum |b_k|^2)^{1/2})}}. \tag{20}$$

此外，$\delta_k = {}^{k}$对数 k，

$$\|\sum_{I_n} \delta_k e_k\|_{\psi_2} \le C_0\sqrt{n}. \tag{21}$$

证明。将 $c_k = a_k b_k$ 和柯西-施瓦茨不等式应用于 (19)，并记住 $\sum |a_k|^2 \le 1$。$(\sum |c_k|)^2/\sum |c_k|^2$ 的最大值在 $\sum |a_k|^2 = 1$ 且 a_k 与 $|b_k|$ 成比例时取得，即 $a_k = |b_k|/\sqrt{\sum |b_k|^2}$。于是 $\sum |c_k| = \sqrt{\sum |b_k|^2}$，从而得到 (20)。

接下来，对于 (21)，我们注意到 $\sum_{k\in I_n} \delta_k \asymp 2^n \times (n/2^n) \asymp n$，类似地，$\sum_{k\in I_n} \delta_k^2 \asymp 2^n \times (n^2/4^n) \asymp (n^2/2^n)$，因此 $(\sum \delta_k)^2/\sum \delta_k^2 \asymp 2^n$。现在，由 (19) 得到

$$\|\sum_{I_n} \delta_k e_k\|_{\psi_2} \lesssim \frac{n}{\sqrt{\log 2^n}} \asymp \sqrt{n}.$$

□

我们将把上述引理应用于随机函数 $f = \sum_{k\in I_n} (\xi_k - \delta_k) e_k$，并将其视为巴拿赫空间 L^{ψ_2} 中的函数。为此，我们首先需要一个简单的对称化引理。

引理 5.8. 设 $\mathcal{X}$ 是一个巴拿赫空间，X 是一个取值于 $\mathcal{X}$ 且可积的随机变量，其对称化为 $X = X - X'$，其中 X' 是 X 的一个独立副本。设 $t > 2\,\mathbb{E}(\|X\|)$。则

$$\mathbb{P}(\|X\| > 2t) \le 2\mathbb{P}(\|\widetilde{X}\| > t). \tag{22}$$

证明。首先，由马尔可夫不等式可得

$$\mathbb{P}(\|X\| > t) \le \frac{\mathbb{E}(\|X\|)}{t} \le \frac{1}{2}.$$

~其次，由 $\|X\| > 2t$ 和 $\|X'\| \le t$ 可得 $\|X\| > t$，因此

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|\widetilde{X}\| > t) &\ge \mathbb{P}(\|X'\| \le t, \|X\| > 2t) \\ &= \mathbb{P}(\|X'\| \le t)\mathbb{P}(\|X\| > 2t) \ge \frac{1}{2}\mathbb{P}(\|X\| > 2t). \end{aligned}$$

于是得到 (22)。 □

~考虑 $(X_k)_{k\in I_n}$ 及其在 $X_k = \xi_k - \delta_k$ 下的对称化 $(X_k)_{k\in I_n}$。现在设

$$Z_n = \|\sum_{k\in I_n} X_k e_k\|_{\psi_2}, \quad \widehat{Z}_n = \|\sum_{k\in I_n} \widetilde{X}_k e_k\|_{\psi_2}.$$

由（21）可知

$$\psi_{T_{I_n}} := \|\sum_{k\in I_n}\xi_k e_k\|_{\psi_2} \le Z_n + \|\sum_{I_n}\delta_k e_k\|_{\psi_2} \le Z_n + C_0\sqrt{n}. \tag{23}$$

为了上界估计 Z_n，进而估计 Z_n，我们需要用到一个由多位作者独立证明的不等式，通常称为 Talagrand 关于 Lipschitz 函数的偏差不等式（参见例如 [9], [34, 推论 4，第 75], [70,定理 3]）。以下版本引自 [34]。

定理 5.9（[34], 第 75 页）。设 $f:\ \ell_2^n \to \mathbb{R}$ 是 Lipschitz 常数为 λ的凸函数。令

$$Z = f(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$$

其中 $(\varepsilon_j)_{1\le j\le n}$ 是一个 Rademacher 序列。于是有

$$\mathbb{P}\big(|Z - \mathbb{E}(Z)| > t\big) \le a\exp(-b\frac{t^2}{\lambda^2}) \quad for\ all\ t \ge 1$$

其中 a、b 为正的绝对常数。

作为推论，我们得到

定理 5.10. 设 $A \subset \mathbb{N}$ 为有限集。设 $(\varepsilon_j)_{j\in A}$ 为一列拉德马赫随机变量，且 $v = (v_j)_{j\in A}$ 为巴拿赫空间 $\mathcal{X}$ 中的向量，其弱矩σ 定义为

$$\sigma = \sigma(v) := \sup_{\varphi\in B_{\mathcal{X}^*}}\big(\sum_{j\in A}|\varphi(v_j)|^2\big)^{1/2} = \sup_{\sum|a_j|^2\le 1}\|\sum_{j\in A}a_j\, v_j\| \tag{24}$$

其中 $B_{\mathcal{X}^*}$ 是 $\mathcal{X}^*$ 的单位球。令 $Z = \|\sum_{j\in A}\varepsilon_j v_j\|$。那么，对所有 $t>0$，以下双边不等式成立，其中的绝对常数为 $a, b > 0$:

$$\mathbb{P}\big(|Z - \mathbb{E}(Z)| > t\big) \le a\exp\big(-b\frac{t^2}{\sigma^2}\big). \tag{25}$$

证明。我们将定理 5.9 应用于凸函数 $f(x) = \|\sum_{j\in A}x_j v_j\|$。只需注意到 f 的 Lipschitz 常数 λ 恰好等于 σ；根据 Hahn-Banach 定理，这一点很容易证明。□

为了运用这个定理，先注意以下结论会很方便。

引理 5.11. 对于 $Z_n = \|\sum_{k\in I_n}X_k e_k\|_{\psi_2}$，我们有

$$\mathbb{E}(Z_n) \le\ \mathbb{E}(\widehat{Z}_n) \le C_1\sqrt{n}.$$

证明。左侧不等式显然成立，因为 X_k 是中心化的 [33, 定理 2.6]。接下来，利用 $\widetilde{X}_k$ 的对称性、L^2-L^{ψ_2} Khintchine 不等式以及 Fubini 定理可得

$$\mathbb{E}(\widehat{Z}_n) \lesssim \big(\sum_{k\in I_n}V(X_k)\big)^{1/2} = \big(\sum_{k\in I_n}\delta_k(1-\delta_k)\big)^{1/2} \le C_1\sqrt{n}.$$

□

接下来我们断言

$$t > 2C_1\sqrt{n} \Longrightarrow \mathbb{P}(Z_n > 4t) \le \mathbb{P}\Big(\widehat{Z}_n - \mathbb{E}(\widehat{Z}_n) > t\Big). \tag{26}$$

事实上，由于 $t > 2C_1\sqrt{n} \ge 2\mathbb{E}(Z_n)$，关系 (22) 给出

$$\mathbb{P}(Z_n > 4t) \le 2\mathbb{P}(\widehat{Z}_n > 2t) \le 2\mathbb{P}(\widehat{Z}_n - \mathbb{E}(\widehat{Z}_n) > t)$$

^由于 $\mathbb{E}(Z_n) \le C_1\sqrt{n} \le t$。

因此，我们需要为 (26) 右端寻找上界。我们断言

$$\mathbb{P}\big(\widehat{Z}_n - \mathbb{E}(\widehat{Z}_n) > t\big) \le a\int_\Omega \exp\big(-b\frac{t^2}{\sigma_\omega^2}\big)d\omega \tag{27}$$

~其中 σ_ω 表示向量 $v_k = X_k(\omega)e_k$, $k \in I_n$ 在巴拿赫空间 $\mathcal{X} = L^{\psi_2}$中的弱矩。事实上，只需对变量 ε_k 和向量 $X_k v_k$应用定理 5.10，并使用对称化论证即可。

下面我们估计 σ_ω。为简便起见，我们将 $\sum_{k\in I_n}$简记为 $\sum$，将 $\prod_{k\in I_n}$ 简记为 $\prod$。首先，注意到引理 5.7 推出

$$\sigma_\omega \le \frac{(\sum |\widetilde{X}_k|^2)^{1/2}}{\sqrt{\log(1 + (\sum |\widetilde{X}_k|^2)^{1/2})}}. \tag{28}$$

其次，我们将证明

$$W_n := \sum_{k\in I_n} |\widetilde{X}_k|^2 = \sum |\xi_k - \xi_k'|^2 = O(n) \quad a.s.$$

方法是证明

$$\mathbb{P}(W_n \ge 5C_1 n) \le \exp(-C_1 n). \tag{29}$$

~ ~ ~事实上，由于 $|X_k| = |\xi_k - \xi_k| \le 1$ 只取 0 和 1 两个值，且 $P(|X_k| =1) = 2\delta_k(1 - \delta_k)$，由马尔可夫不等式可得

$$\mathbb{P}(W_n \ge 5C_1 n) \le e^{-5C_1 n}\prod \mathbb{E}(e^{|\widetilde{X}_k|^2})$$

But

$$\prod \mathbb{E}(e^{|\widetilde{X}_k|^2}) \le \prod \mathbb{E}(1 + 2|\widetilde{X}_k|^2) \le \prod(1 + 4\delta_k) \le e^{\sum 4\delta_k} \le e^{4C_1 n}.$$

至此，我们证明了（29）。

若 $W_n(\omega) < 5C_1 n$，根据 (28) 可得 $\sigma_\omega \le C_2\sqrt{n}/\log n$。结合 (29)，我们可以将 (27) 写成

$$\mathbb{P}\big(\widehat{Z}_n - \mathbb{E}(\widehat{Z}_n) > t\big) \le a\int_{W_n<5C_1 n} \exp\big(-b\frac{t^2}{\sigma_\omega^2}\big)d\omega + a\mathbb{P}(W_n \ge 5C_1 n)$$

$$\le a\exp(-b\frac{t^2}{C_2^2}\frac{\log n}{n}) + a\exp(-C_1 n). \tag{30}$$

取较大的 $t = t_n = C_3\sqrt{n}$，使得 C_3 满足 $bC_3^2/C_2^2 \geq 2$，根据 (26) 和 (5.2.2) 可得：

$$\sum \mathbb{P}(Z_n > 4t_n) \leq a \sum \left(n^{-2} + e^{-C_1 n}\right) < \infty.$$

现在，根据 Borel–Cantelli 引理，几乎必然存在一个整数 $n_0 = n_0(\omega)$，使得对所有 $n \geq n_0$，都有 $Z_n \leq 4t_n = 4C_3\sqrt{n}$。因此，由于我们也有 $|T_{I_n}| \asymp n$ 几乎必然成立，便得到

$$\psi_{T_{I_n}} \leq Z_n + C_0\sqrt{n} \leq (4C_3 + C_0)\sqrt{n} \leq C_4|T_{I_n}|^{1/2},$$

定理 5.5 的证明至此结束。 □

5.3. Bourgain 随机条件的锐性。设 R 是与伯努利序列 (ξ_k) 相关联的整数随机集，且满足 $\mathbb{E}(\xi_k) = \delta_k \downarrow$，并设 $m_N = \sum_{k=1}^{N} \delta_k$。我们在 [21, 定理 5.3] 中看到（Bourgain 的结果），如果 $m_N/\log N \to \infty$，那么 R 几乎必然是 H-分布的。顺便提一下，[32] 的一项结果有误：该结果声称，当 $m_N \to \infty$ 时也有相同结论。但这是不成立的：Kahane 和 Katznelson 的一项正确结果 [37,《定理 1》第 364] 页表明，若 $\delta_k = 1/k$，相应的 R 几乎必然是 Sidon 集，因此不是 Hartman-分布的。我们将在此证明某种逆命题：一方面，这表明 Bourgain 的结果相当锐利；另一方面，也改进了 [37], 中的定理 1。该定理是通过涉及乘法混沌理论的方法证明的。

定理 5.12. 假设 δ_k 递减且 $m_N = O(\log N)$。那么R 几乎必然是 Sidon 集，因此不是 Hartman-分布。

证明. 我们分两步进行。

步骤 1. 假设对于较大的 N，$m_N \leq c\log N$，其中某个 $c \leq 1/(24e)$。我们先回顾一个来自 [47] 的引理，该引理已在 [21]中使用过。

引理 5.13. 设 $n \geq 2$ 和 $A \geq 1$ 为正整数。令

$$\Omega_n(A) = \{\omega : R(\omega) \cap [A, \infty[\text{ contains at least a relation of length } n\}.$$

Then

$$\mathbb{P}(\Omega_n(A)) \leq \frac{B^n}{n^n} \sum_{j>A} \delta_j^2 m_j^{n-2}, \text{ with } B = 4e.$$

回顾 $R_k = R \cap [1, k]$, $k = 1,2, \ldots$. 我们将证明

引理 5.14. 设 $A_n = e^n$。那么（1）$\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(\Omega_n(A_n)) < 1$.（2）几乎必然地，$|R_{A_n}| \leq n$ 对于所有足够大的整数 n。

事实上，由于 $n\delta_n \leq \sum_{k=1}^{n} \delta_k \leq c\log n$，我们由引理 5.13 得到

$$\mathbb{P}(\Omega_n(A_n)) \leq \frac{B^n c^n}{n^n} \sum_{j>A_n} \frac{(\log j)^n}{j^2}.$$

令 $f_n(t) = (\log t)^n/t^2$。该函数在 $[A_n, \infty[$ 上递减，因为

$$f_n'(t) = \frac{(\log t)^{n-1}}{t^3}\big(n - 2\log t\big) \le 0$$

当 $t > A_n = e^n$ 时，然后

$$\sum_{j>A_n} f_n(j) \le \int_{A_n}^{\infty} \frac{(\log t)^n}{t^2} dt.$$

现在我们估计

$$I_n := \int_{A_n}^{\infty} \frac{(\log t)^n}{t^2} dt = \int_{\log A_n}^{\infty} x^n e^{-x} dx \le \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! \le n^n.$$

因此，将 n^n 化简后：

$$\mathbb{P}(\Omega_n(A_n)) \le 4(Bc)^n \le 4 \times 6^{-n},$$

并且 $\sum_{n\ge1} \mathbb{P}(\Omega_n(A_n)) \le 4/5 < 1$，这就证明了 (1)。

对于 (2)，根据伯恩斯坦偏差不等式和博雷尔-坎特利引理，我们知道几乎必然地（例如，对于 $\omega \in \Omega_1$），对 $n \ge n_0(\omega)$ 有：

$$|R(\omega) \cap [1, A_n]| \le 2\mathbb{E}(|R_{A_n}(\omega)|) = 2m_{A_n} \le 2c \log A_n \le n.$$

这意味着，对于 $\Omega_2 = \big(\Omega \setminus \cup_{n\ge1}\Omega_n(A_n)\big) \cap \Omega_1$，我们有 $\mathbb{P}(\Omega_2) > 0$，此外：若 $\omega \in \Omega_2$，则对于所有 n，我们有

$$R(\omega) \cap [A_n, \infty[\text{ contains no relation of length } \le n. \tag{31}$$

否则，$R(\omega) \cap [A_n, \infty[$ 将包含一个长度为 s 的关系，其中 $3 \le s \le n$；又由于 $A_n \ge A_s$，我们将有 $\omega \in \Omega_s(A_s)$，这与 $\omega \in \Omega_2$ 矛盾。

而且，当 n 足够大时，例如 $n \ge n_0(\omega)$，

$$|R(\omega) \cap [1, A_n]| \le n. \tag{32}$$

现在令 E 为 $R(\omega)$ 的一个有限子集，其基数为 $|E| = 2n$ 或 $2n+1$，且满足 $n \ge n_0(\omega)$。根据上面的 (32)，我们知道

$$|E \cap [1, A_n]| \le |R(\omega) \cap [1, A_n]| \le n.$$

因此

$$|E \cap [A_n, \infty[| \ge |E| - |E \cap [1, A_n]| \ge 2n - n = n.$$

但如果我们现在取

$$F \subset E \cap [A_n, \infty[\subset R(\omega) \cap [A_n, \infty[$$

基数为 n，根据定义（参见 31），我们可知 F 是拟独立的。由于 $|F| \ge (1/3)|E|$，且 E 是任意的，根据 Pisier 判据，这意味着 $R(\omega)$ 是 Sidon 集。总而言之，我们证明了 $R(\omega)$ 以正概率为 Sidon 集。由于对于 $R(\omega)$ 而言，Sidon 性显然是一种渐近性质，零一律表明 $R(\omega)$ 几乎必然是 Sidon 集。

步骤 2. 消去 ω, R 中的依赖性后，几乎必然得到有限个满足步骤 1 假设的集合 R_j 的并。由于有限个 Sidon 集

的并仍是 Sidon 集（Drury 定理），R 本身就是 Sidon 集，证明完毕。

为此，我们选取一个足够大的整数 M，使得 $C/M \le 1/(48e)$，并令

$$R_j = \{\xi_{kM+j} : k \ge 1\},\ j = 0, 1, \dots, M-1.$$

对于每个固定的 j，R_j 由均值为 δ_{kM+j} 的选择子组成。显然，由于 δ_k 递减，对于每个 $0 \le j \le M-1$，我们有

$$\sum_{k=1}^{N} \delta_{kM} \le \sum_{k=1}^{N} \delta_{kM-j}.$$

将这些不等式相加，得到

$$M \sum_{k=1}^{N} \delta_{kM} \le \sum_{j=0}^{M-1} \sum_{k=1}^{N} \delta_{kM-j} \le \sum_{l=1}^{NM} \delta_l$$

因此

$$\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(\xi_{kM}) = \sum_{k=1}^{N} \delta_{kM} \le \frac{1}{M} \sum_{l=1}^{NM} \delta_l \le \frac{C}{M} \log(NM) \le \frac{2C}{M} \log N$$

对于 $N \ge M$。由于 $2C/M \le 1/(24e)$，R_M 满足步骤 1 的假设，且几乎必然是 Sidon。我们对 R_j、$j = 0$、1、.....、$M-1$ 也做同样的处理，便得到所需结论。□

备注。即使（δ_n）是非递增的，条件 $m_N = O(\log N)$ 也比 Kahane-Katznelson 假设 $\delta_n = O(1/n)$ 更一般，以下示例可以说明这一点。首先，我们选择 $x_j = 2^{2^j}$ 使得

$$x_{j+1} = x_j^2,\ \ \log x_j \asymp 2^j,\ \ x_1 = 4.$$

然后我们定义

$$\delta_n = \begin{cases} 1 \quad \text{if} \quad 1 \le n \le 4, \\ \frac{\log x_{j+1}}{x_{j+1}} \quad \text{if} \quad x_j < n \le x_{j+1} \text{ with } j \ge 2. \end{cases}$$

注意到
(i) 序列 (δ_n) 显然是非递增的。(ii) 对于 $n = x_{j+1}$，假设 $\delta_n = O(1/n)$ 不成立。(iii) 最后，对于充分大的 N，设 n 满足 $x_n < N \le x_{n+1}$。那么

$$m_N = \sum_{k=1}^{N} \delta_k \lesssim \sum_{j=1}^{n} \left(x_{j+1} \frac{\log x_{j+1}}{x_{j+1}} \right) = \sum_{j=1}^{n} \log x_{j+1} \lesssim \sum_{j=1}^{n} 2^j \lesssim \log N.$$

6. Questions on S and T

问题 1. 定理 2.1 和定理 2.2 可以用同样的方式表述并证明，适用于 $S(q_1, q_2)$。但是，针对 $S(q_1, q_2, q_3)$，还需要付出一些努力。

问题 2. S 是刚性集吗?

问题 3. Sidon 集总是刚性集吗?

问题 4. Bohr 稠密集总是一致复发的吗?

问题 5. 是否存在 Bohr 稠密的 Sidon 集? 等价地说，是否存在非 Bohr 闭的 Sidon 集?

问题 6. Furstenberg 集 $S\ \frac{4}{3}$ 是 Rider 集（甚至是 $4\ 3$-Sidon）吗? 更一般地说， $S(q_1, \ldots, q_s)$ 是 $\frac{2s}{s+1}$-Rider 集（甚至是 $\frac{2s}{s+1}$-Sidon）吗?

问题 7. T 是 $4\ 3$-Rider 集吗?

问题 8. 一个简单的论证表明，在定理 5.12 中，我们可以将 $m_N = O(\log\ N)$ 替换为 $m_{N_j} = O(\log\ N_j)$，其中 (N_j) 是一个满足 $N_{j+1} = O(N_j)$ 的递增整数序列。但我们不知道 $\liminf_{N\to\infty} m_N/\log\ N < \infty$ 这一假设是否足够。

致谢。A. H. Fan 部分得到国家自然科学基金委员会资助（项目编号：11971192 和 12231013 ）。H. Queff´elec 和 M. Queff´elec 感谢 CEMPI 卓越实验室（ ANR-11-LABX-0007-01）的资助。

References

[1] P. Arnoux, *Sturmian sequences*。《动力系统、算术与组合学中的代换》，第143–198页，《数学讲义》第1794卷，施普林格，柏林，2002年。[2] C. Badea，S. Grivaux, *Kazhdan constants continuous probability measures with large* ，《赫尔维蒂数学评论》（），第1期，99 127-。[3] J. Barral 和 A. H. Fan *Fourier coefficients and rigidity sequences* 95 2020 *Covering numbers of different points in Dvoretzky covering*，《数学科学通报》第129卷，第4期，（ 2005），275-317。[4] A. B´erczes，A. Dujella，L. Hajdu，《数论杂志》（），–。[5] V. Bergelson，A. del Junco，M. Lemanczyk，J. Rosenblatt, *Some Diophantine properties of the sequence of S–units.* 138 2014 48 68 *Rigidity and non-recurrence along sequences.* 34 2014 1464 1502 《遍历理论与动力系统》（），–。[6] V. Bergelson，E. Lesigne， *Van der Corput sets in* $\mathbb{Z}^d$。《数学讨论》110（2008）1-49。[7] T. Bewley, *Extension of the Birkhoff and von Neumann ergodic theorems to semi-group actions* 7 1971 283 291 。《安娜莱斯·亨利·庞加莱研究所B辑》（新系列）（），-。[8] R. Blei， *Analysis in Integers and Fractional dimensions*，剑桥71，2001年。《数学档案》36（1998），307-316。[9] S. Boucheron，G. Lugosi，P. Massart, *On concentration of self-bounding functions*，《电子概率杂志》14（64）（2009），1884-1899。[10] J. Bourgain，关于复现集的 Ruzsa 问题，《以色列数学杂志》59（1987），150–166。[11] J. Bourgain, *On the maximal ergodic theorem for certain subsets of the integers*，《以色列数学杂志》61（1988），39-72。[12] Y. Bugeaud， *Distribution modulo one and diophantine approximation*，剑桥大学出版社，第193卷，2012年。[13] D. Burkholder， *Martingale transforms*，《数学统计年刊》37（1966），1494-1504。

[14] D. Burkholder, *Sharp inequalities for martingales*, 《阿斯特里斯克》157-158（1988），75-94。[15] Ch. Cuny 和 A. H. Fan, *Study of almost everywhere convergence of series by mean of martingale methods* 127 2017 8, 2725 2750 。《随机过程及其应用》（），第-期。[16] S. Drury, *Sur les ensembles de Sidon*, 《巴黎科学院报告》271卷（1970），162-3。[17] T. Eisner, S. Grivaux, *Hilbertian Jamison sequences and rigid dynamical systems.* 《泛函分析杂志》261（2011），2013–2052。[18] P. Erd .. *On the set of points of convergence of a lacunary trigonometric* os, S. J. *series and the equidistribution properties of related sequences* Taylor, , 《伦敦数学会会刊》7，598-615，1957年。[19] K. Falconer, *Fractal Geometry*, 约翰·威立父子公司（1990）。[20] A. H. Fan, *Lacunarité à la Hadamard et équirépartition*, 《数学讨论》66（1993），151-163。[21] A. H. Fan, H. Queff´elec, M. Queff´elec, *The Furstenberg set and its random version*, 《数学教学》即将出版。https://ems.press/journals/lem/articles/8188703（在线优先发表）[22] L. Flaminio, *Private communication*, 里尔大学，2022年12月。[23] A. H. Fan, D. Schneider, *Recurrence properties of sequences of integers*, 《中国科学：数学》53（2010）第3期，641-656。[24] E. Fouvry, G. Tenenbaum, *Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques* 63 1991 3, 449 494 , 《伦敦数学会会刊》（），第–期。[25] H. Furstenberg, *Disjointness in ergodic theory minimal sets and a problem in Dio-* , , , 《数学 *phantine approximation* 1 1967 1 49 系统理论》（），-。[26] A. Gelfond, *Méthodes élémentaires dans la théorie analytique des nombres*, 戈蒂耶-维拉尔出版社，1965年。[27] J. Griesmer, *Separatig Bohr's denseness from measurable recurrence*, 《离散分析》2021年，第9号论文，共2O页。[28] R. Gundy, N. Varopoulos, *A martingale that occurs in harmonic analysis*, 《数学档案》14（1976）第2期，179-187。[29] G. Hardy, E. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, 牛津，1968年。[30] G. H. Hardy, *Ramanujan, Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, 剑桥，1940年。[31] S. Hartman, *The method of Grothendieck-Ramirez and weak topologies in C(T)*, 《数学研究》44（1972），181–197。[32] Y. Huang, *Ergodic theorems for random sets with density zero*, 《遍历理论与动力系统》（1994），14，141–149。[33] J. Hoffmann-Jorgensen, *Sums of independent Banach-space valued random variables*, 《数学研究》44（1974），159–186。[34] B. Johnson, G. Schechtman, *Remarks on Talagrand's deviation inequality for Rademacher functions* , 《数学讲义》，Longhorn Notes，施普林格，柏林，1991年。[35] G. Johnson, G. Woodward, *On p-Sidon sets* 24, 161 167, , 《印第安纳 1974 大学数学杂志》-。[36] J. P. Kahane, *Some random series of functions*, 剑桥，1985年。[37] J. P. Kahane, Y. Katznelson, *Entiers aléatoires et analyse harmonique*, 《数学分析杂志》105（2008），363-378。[38] J. P. Kahane, Y. Katznelson, *Distribution uniforme de certaines suites d'entiers aléatoires dans le groupe de Bohr* 105 2008 379 382 , 《数学分析杂志》（），-。[39] J. P. Kahane, R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, 第二版，埃尔曼出版社，1994年。[40] Y. Katznelson, *Sequences of integers dense in the Bohr group.* , 《皇家理工学院学报》（1973），79–86。[41] A. Khinchin, *Ein Satz über Kettenbruche mit arithmetischen Anwendungen*, 《数学杂志》18（1923），289-306。

[42] J. F. Koksma, *A diophantine property of summable functions*, 《印度数学学会杂志》15（1951），87-96。[43] L. Kuipers, H. Niederreiter, *Uniform distribution of sequences*, 多佛出版社，第二版，2002。[44] P. Lef`evre, L. Rodriguez-Piazza, *p-Rider sets are q-Sidon sets*, PAMS 131（6）（2003），1829-1838。[45] J. Lopez, K. Ross, *Sidon sets.* 纯粹与应用数学讲义，第13卷，1975。[46] D. Li, H. Queff´elec, *Introduction to Banach spaces: Analysis and Probability*, 剑桥高等数学研究（2018）。[47] D. Li, H. Queff´elec, *Some new thin sets of integers in harmonic analysis*, 86 2002 105 138 L. Rodrıguez-Piazza, , 《数学分析杂志》（），-。[48] D. Li, H. Queff´elec, L. Rodr´ıguez-Piazza, *On some random thin sets of integers*, PAMS 136（2008），141-150。[49] R. Lyons, 口头交流。[50] R. Lyons, *On measures simultaneously 2- and 3-invariant.* 《以色列数学杂志》61（1988），219–224。[51] R. Ma˜n´e, *Ergodic theory and differentiable dynamics*, 施普林格出版社（1987）。[52] J. M. Marstrand, *On Khinchin's conjecture about strong uniform distribution*, 《伦敦数学会会刊》21（1970），540-556。[53] C. Muscalu 和 W. Schlag, *Classical and multilinear harmonic Analysis*, *Volume I*, 剑桥高等数学研究第137卷，2013。[54] R. Nair, *On strong uniform distribution*, 《算术学报》LVI（1990），183-192。[55] J. Neveu, *Martingales à temps discret*, Masson, 1971。[56] R.C. Paley, *On the lacunary coefficients of power series*, 《数学年刊》（第2辑）34（1933），第3期，615-616。[57] W. Philipp, *Empirical distribution functions and strong approximation theorems for dependent random variables. A problem of Baker in probabilistic number theory* , 《美国数学会汇刊》345（1994），705-727。[58] G. Pisier, *De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon*, 《数学分析与应用》，B辑，《数学进展补编研究》第7B卷，1981。[59] G. Pisier, *Martingales in Banach spaces*, 剑桥大学出版社，2016。[60] A. R´enyi, *Calcul des Probabilités*, Dunod, 1966。[61] G. Rhin, *Approximants de Padé et mesures effectives d'irrationalité*, 巴黎数论研讨会，1985-1986，155-164。数学进展丛书71，Birkhäuser Boston，波士顿，马萨诸塞州，1987。[62] D. Rider, *Randomly continuous functions and Sidon sets*, 《杜克数学杂志》42（1975），759-764。[63] L. Rodriguez-Piazza, *Caractérisation des ensembles p-Sidon p.s.*, 《巴黎科学院报告》I辑数学305（1987），237-240。[64] L. Rodriguez-Piazza, *Rango y propiedades de medidas vectoriales: Conjuntos p-Sidon p.s.* 1991 ，论文，塞维利亚大学，。[65] J. Rosenblatt, *Universally bad sequences in ergodic theory*, 载于：《几乎处处收敛II》。第二届国际会议论文集，埃文斯顿/伊利诺伊州（美国），1989，学术出版社，波士顿，马萨诸塞州，1991，第227–245页。[66] W. Rudin, *Fourier Analysis on groups*, 第二版，剑桥，1993。[67] W. Rudin, *Trigonometric series with gaps*, 《数学与力学杂志》9，203-227，1960。[68] D. J. Rudolph, $\times 2$ *and* $\times 3$ *invariant measures and entropy*, 《遍历理论与动力系统》10（1990），第2期，395–406。[69] I. Z. Ruzsa, 数列的均匀分布与其差之间的联系，《亚诺什·鲍雅伊数学学会论文集》，《经典数论专题》，布达佩斯，1981。

[70] M. Talagrand, *An isoperimetric theorem for the cube and the Khintchine-Kahane inequalities* 104 3 1988 1905 910 , 《美国数学会会刊》第（） （），–。[71] R. Tijdeman, *On integers with many small prime factors*, 《组合数学》26（1973），319–330。[72] R. Tijdeman, *On the maximal distance between integers composed of small primes*, 《组合数学》28（1974），159–162。[73] S. Usuki, $\times a \times b$ *empirical measures*, *the irregular set and entropy*, arXiv:2205. 06605 v 2 2022年7月21日。[74] L. Wang, Q. Wu, *On the irrationality measure of* 3 的对数, 《数论杂志》142（2014），264-273。[75] G. Woodward, *p-Sidon sets and a uniform property*, 《印第安纳大学数学杂志》25（6），第995-2003页，1976。[76] A. Zygmund, *Trigonometric series*, 第六版，剑桥，1993。

LAMFA, UMR 7352 CNRS, University of Picardie, 33 rue Saint Leu,80039 Amiens, France & School of mathematics and Statistics, Central China Normal University, 430079 Wuhan, China*Email address*: ai-hua.fan@u-picardie.fr

CNRS Laboratoire Paul Painlevé UMR 8524 & Labex CEMPI (ANR-LABX- „ 0007-01) Université de Lille Cité Scientifique Bât. M2 59655 Villeneuve , ,d'Ascq Cedex, FRANCE*Email address*: herve.queffelec@univ-lille.fr

CNRS Laboratoire Paul Painlevé UMR 8524 & Labex CEMPI (ANR-LABX- , 0007-01) Université de Lille Cité Scientifique Bât. M2 59655 Villeneuve „ , ,d'Ascq Cedex, FRANCE*Email address*: martine.queffelec@univ-lille.fr