arXiv:2303.06882v1 [math.FA] 13 Mar 2023

# 时变加权后移算子动力学

JING HOU[1] 和 YONGLU SHU[2]

Abstract. 我们研究时变加权后移算子 $(Tx)(t) = w(t)x(t+a)$ 在 $L_p(0,\infty)(1 \le p < \infty)$和 $C_0[0,\infty)$ 中的超循环性质和混沌性质。此外，我们还分析这些空间为复数空间时算子的谱结构。

## 1. INTRODUCTION

线性动力学是泛函分析的一个新分支，发展迅速。线性动力学的研究始于1929年，当时 Birkhoff 给出了 $H(\mathbb{C})$ [1] 中平移算子的超循环。随后，1952年，Maclane 发现 $H(\mathbb{C})$中的微分算子是超循环的 [2]。1969年，Rolewicz 展示了线性移位可以在巴拿赫空间中具有稠密轨道 [3]。然而，上述三篇论文并未引起数学家们的广泛关注。线性算子动力学的真正发展是在 Kaitai 于1984年发表学位论文[4] 之后。该论文讨论了线性算子不变子集的问题，并提出了超循环判据。自20世纪80年代以来，许多数学家受到上述零星例子的启发，研究热情高涨，并开始研究一般线性算子的动力学性质，参见[5], [6], [7]。

关于线性动力学的背景知识，可参阅书籍 [8] 或 [9] ；若要了解线性动力系统这一类别的丰富性及其在一般遍历理论中的潜在用途，可参阅论文 [10] 或 [11] 。若 T 是有界算子，则向量 $x \in X$的 $T$–轨道是集合 $orb(x,T) := \{T^n x\}_{n\in\mathbb{Z}_+}$。如果存在某个向量 $x \in X$，使得 $orb(x,T)$在 $X$中稠密，则称算子 $T$为 $hypercyclic$。这样的向量 $x$称为 $T$的超循环向量，而 $T$的所有超循环向量组成的集合记为 $HC(T)$。$Hypercyclic$ 具有稠密周期点集的线性算子称为 $chaotic$。在论文 [12], 中，令$A$ 为可分无限维巴拿赫空间 $X$上的无界算子。由于 $A$ 在 $X$上仅稠密定义，向量 $f$ 可能属于 $A$的定义域，但 $Af$ 却不属于$A$的定义域。为此，若存在一个属于 $A$ 定义域的向量 $f$，使得对每个整数 $n > 1$，向量 $A^n f$都属于 $A$的定义域，且轨道 $\{f, Af, A^2 f, A^3 f, \cdots\}$ 在$X$中稠密，则定义 $A$ 为 $hypercyclic$ 。 $Hypercyclic$ 具有稠密周期点集的无界算子称为 $chaotic$。

在 [3], S. Rolewicz 给出了巴拿赫空间$l_p(1 \le p < \infty)$ 上超循环有界线性算子的第一个例子，即 $c_0$ 加权后移算子：$T(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = w(x_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$，其中 $w \in \mathbb{F}(\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C})$ 任意。Rolewicz 的算子也恰好是混沌的。

2019年，Marat V. Markin 考虑了经典 Rolewicz 加权后移算子类别[13]的一种自然无界扩展。他证明了这类算子的混沌性，并描述了序列空间 $l_p(1 \le p < \infty)$ 和 $c_0$:$A(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (w^k x_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ 上 Rolewicz 型加权后移无界线性算子的谱结构，其中 $w \in \mathbb{R}$或 $w \in \mathbb{C}$ 任意，定义域为$D(A) = \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X | (w^k x_k + 1)_{k\in\mathbb{N}} \in X\}$ ，其中 $X = l_p(1 \le p < \infty)$ 或 $c_0$。

在 [14], John M. Jimenez 和 Marat V. Markinn 指出，在 $L_p(0,\infty)$ 和 $C_0[0,\infty)$ 中，有界加权后移算子 $(Tx)(t) = wx(t+a)$ $(w > 1$ 和 $a > 0)$ 及其无界对应算子 $(Tx)(t) = w^t x(t+a)$ 都是混沌的。结合 [14] 和 [15], , 一个自然的问题是：如果我们用 $w(t)$ 替换 $w^t$ 和 $w$ ，其动力学性质如何?

*Date*: 2023年3月14日。*Key words and phrases.* 超循环; 混沌; 谱。

我们可以定义带有变权 $w(t)$ 的移位算子 $T$： $Tx(t) = w(t)x(t+a)$。本文得到的主要定理如下：

定理 1.1。在（实数或复数）空间 $L_p(0,\infty)(1 \leq p < \infty)$ 中，有界时变权后向移位算子

$$Tx(t) := w(t)x(t+a),$$
$$T^n x(t) := \prod_{i=0}^{n-1} w(t+ia)x(t+na),$$

其中 w(t) 有界且 $|w(t)| > 1$，该算子是混沌的。此外，假设该空间是复数空间，

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| \leqslant \|w\|_\infty\}$$

$with$

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| < \|w\|_\infty\}\ and\ \sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| = \|w\|_\infty\}.$$

定理1.2。在（实数或复数）空间 $L_p(0,\infty)$ 中，我们可以定义无界时变加权后移算子 $T$

$$(Tx)(t) := w(t)x(t+a)$$
$$(T^n x)(t) := \prod_{i=0}^{n-1} w(t+ia)x(t+na),$$

其中 $x \in L_p(0,\infty)$ 和 $a > 0$，其定义域为 $D(T) := \{x \in L_p(0,\infty) |\int_0^\infty |w(t)x(t+a)|^p dt < +\infty\}$. 如果 $w(t)$ 满足以下条件：

(1)$w(t)$ 无界，且 (2)
$\lim_{t\to\infty} {}^{w}(t) = \infty$,

(3)$|w(t)| > b > 1$，（b 为常数）。
则 $T$ 是混沌的。此外，若空间为复数空间，则

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{C}.$$

定理 1.3。在（实数或复数）空间 $C_0[0,\infty)$ 中，我们可以定义无界时变加权后向移位算子 $T$

$$(Tx)(t) := w(t)x(t+a)$$
$$(T^n x)(t) := \prod_{i=0}^{n-1} w(t+ia)x(t+na),$$

其中 $x \in C_0[0,\infty)$ 和 $a > 0$，其定义域为

$$D(T) := \{x \in C_0[0,\infty) |\ \lim_{t\to\infty} |w(t)x(t+a) = 0\}.$$

若 $w(t)$ 满足以下条件：

(1) w(t) 连续， $w(0) = 1$ 且 $\lim_{t\to\infty} {}^{w}(t) = \infty$;

(2)$|w(t)| > b > 1$，（b 为常数），且

(3) $\max_{t\in[0,\infty)} \frac{|w\ t-{}^{w}(t)\ \ ((n-1)\ a)|}{} \to \infty$, $n \to \infty$,

那么 $T$ 是超循环的。

## 2. PRELIMINARY

在本节中，我们回顾一些广为人知的定义，更多详情请参阅[8] 或 [9] 。所有算子均指可分巴拿赫空间 $X$ 上范数为 $\|\cdot\|$的线性算子。

推论 2.1。（超循环性[8][9]）。设

$$T : X \to X$$

是巴拿赫空间$(X, \|\cdot\|)$上的有界算子。具有超循环向量的有界算子 $T$称为 $hypercyclic$。

非零向量 $x \in X$ 若其在 $T$作用下的轨道，便称为 $T$ 的 $hypercyclic$ ，

$$orb(x, T) = \{T^n x;\ n \geqslant 0\}$$

在 $X$中稠密。

推论 2.2。（混沌[8][9]）。对于 $T$，周期点是满足 $T^n x = x$ 的向量 $x \in X$，其中 $n \in \mathbb{N}$。若有界算子 $T$ 满足以下条件：
(i) $T$ 是超循环的；(ii)$T$ 有一个由周期
点构成的稠密集，则 $T$ 是混沌的。

推论 2.3。对于 $X$ 中定义域为 $D(T)$ 的算子 $T$，集合 $D(T^\infty)$ 按定义是所有 $D(T^n)$ 的交集：

$$D(T^\infty) := \bigcap_{n=0}^{\infty} D(T^n).$$

其中 $\|x\|_n := \sum_{j=0}^{n} \|T^j x\|$，适用于 $x \in D(T^\infty)$。

在 [16]，中，若 $T$ 是闭算子，则空间 $D(T^\infty)$ 在由半范数 $\|x\|_n$、$n = 0$、1、2、$\cdots$ 确定的拓扑下是可分弗雷歇空间。超循环性和混沌的概念可自然推广至无界算子，参见 [12] 和 [16]。

推论 2.4。（超循环性[12][16]）。设

$$T : D(T) \to X$$

是巴拿赫空间$(X, \|\cdot\|)$中的无界算子。拥有超循环向量的无界算子 $T$ 称为 $hypercyclic$。

非零向量 $x \in D(T^\infty)$称为 $hypercyclic$ ，如果它在 $T$下的轨道 $T$ ，

$$orb(x, T) = \{T^n x;\ n \geqslant 0\}$$

在 $X$中稠密。

推论 2.5。（混沌[12][16]）。对于 $T$，周期点是满足以下条件的向量 $x \in D(T^\infty)$：对某个 $n \in \mathbb{N}$， $T^n x = x$。若算子 $T$满足以下条件：
(i) $T$ 是超循环的；(ii)$T$ 具有周期点稠
密集，则 $T$ 是混沌的。

对于有界线性 算子、定理 2.6 是证明其超循环性的一个便捷工具 .

定理 2.6。（伯克霍夫传递定理[9]）。设可分巴拿赫空间 $T$ 上的有界线性算子 $(X, \|\cdot\|)$，对任意子集 $A$, $B$ 在 $X$中的,

$$N_T(A,B) := \{i \in \mathbb{N} |\ T^i(A) \cap B \neq \emptyset\}.$$

有界算子 $T$ 是超循环算子，当且仅当 $T$ 是拓扑传递的，也就是说，对于所有开集 $U$、 $V \neq \emptyset$，都有 $N_T(U, V) \neq \emptyset$。

我们发现，对于有界线性算子，我们使用上述定理；而对于无界线性算子，我们使用

定理 2.7。（超循环性的充分条件[12]）设 $(X, \|\cdot\|)$ 是可分的无限维巴拿赫空间，且 $(T, D(T))$ 是 $X$ 上的稠定线性算子，并且对于所有 $n \in \mathbb{N}$，算子 $T^n$ 都是闭的。

那么，如果存在.....，则称算子 $T$ 为超循环算子

$$\epsilon \subset D(T^\infty) := \bigcap_{n=1}^{\infty} D(T^n)$$

在 $(X, \|\cdot\|)$ 中稠密，且存在一个映射 $S: \epsilon \to \epsilon$，使得

(i) $TS = I$，（I 是作用在 $\epsilon$ 上的恒等映射）以及
(ii)$\forall x \in \epsilon$, $T^n x, S^n x \to 0$, $n \to \infty$，位于 $(X, \|\cdot\|)$ 中。

推论 2.8.（谱分类[17][18]）。复巴拿赫空间 $(X, \|\cdot\|)$ 中闭线性算子 (T,D(T)) 的谱 $\sigma(T)$ 是以下三个两两不相交集合的并:

$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ T - \lambda I$不是单射$\}$,
$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ T - \lambda I$是单射但不是满射，而 $R(T - \lambda I) \overline{\quad} = X\}$,
$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ T - \lambda I$是单射，且 $R(T \overline{- \lambda I)} \neq X\}$,
称为 $T$ 的点谱、连续谱和剩余谱。

## 3. Proof of Theorem 1.1

本节将证明定理 1.1。证明有界时变加权后向移位算子是超循环的工具是定理 2.6。

证明。设 $U, V \subset L_p(0,\infty)$ 是任意非空开集。由 $L_p(0,\infty)$ 中 $p$ 可积且最终为零的函数的稠密性，可得存在 $x \in U$ 和 $y \in V$。由于这些函数最终为零，我们可以找到一个充分大的 $N \in \mathbb{N}$ 使得

$$x(t) = 0 \text{ and } y(t) = 0,\ t \geqslant Na.$$

对于任意 $n \geqslant N$， $p$ 可积且最终为零的函数

$$z_n(t) := \begin{cases} x(t) & t \in [0, Na), \\ \big[\prod_{i=0}^{n-1} w(t - ia + na)\big]^{-1} y(t - an) & t \in [na, Na + na), \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

在 $L_p(0,\infty)$ 中。

注意，如果 $t \in [0, Na)$

$$\begin{aligned} T^n z_n(t) &= \prod_{i=0}^{n-1} w(t+ia) z_n(t+na) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} w(t+ia) [\prod_{i=0}^{n-1} w(t-ia)]^{-1} y(t) \\ &= y(t). \end{aligned}$$

如果 $t \geq Na$,

$$\begin{aligned} T^n z_n(t) &= \prod_{i=0}^{n-1} w(t+ia) z_n(t+na) \\ &= 0 \\ &= y(t). \end{aligned}$$

Then

$$T^n z_n(t) = y(t), t \geq 0.$$

由于 $w(t)$ 是有界函数，因此存在 $\exists\, m > 1$ ，使得 $|w(t)| \geq m$。于是

$$\begin{aligned} \|z_n - x\|_p &= \big( \int_0^{\infty} |z_n(t) - x(t)|^p dt \big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \big( \int_{na}^{Na+na} \big| \frac{1}{\prod_{i=0}^{n-1} w(t+ia-na)} y(t-na) \big|^p dt \big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \frac{1}{m^n} \|y\|_p \to 0, n \to \infty. \end{aligned}$$

因此，对所有充分大的 $n \in \mathbb{N}$， $z_n \in U$ 和 $T^n z_n = y \in V$ 均成立。因此， $T$ 是拓扑传递的。根据伯克霍夫传递定理， $T$ 是超循环的。

现在，我们将证明 T 有一个稠密的周期点集。由于由 $p$-可积且最终为零的函数所代表的等价类在 $L_p(0, \infty)$ 中稠密，只需用 T 的周期点逼近任意一个这样的等价类。

对于由一个在 $(0, Na)$ 上 $p$-可积的函数 $x(\cdot)$ 表示的任意 $x \in L_p(0, Na)$，以及 $\forall N \in \mathbb{N}$，以下在 $(0, \infty)$ 上 $p-$可积的函数

$$x_N(t) := \frac{1}{\prod_{i=1}^{kN} w(t-ia)} x(t-kNa), t \in D_k, \tag{3.1}$$

其中 $D_k = [kNa, (k+1)Na)$ $k \in Z_+$。由于

$$\begin{aligned} T^N x_N(t) &= \prod_{i=0}^{N-1} w(t+ia) x_N(t+Na) \\ &= \prod_{i=0}^{N-1} w(t+ia) \frac{1}{\prod_{i=1}^{kN} w(t+Na-ia)} x(t-(k-1)Na) \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{(k-1)N} w(t-ia)} x(t-(k-1)Na). \end{aligned}$$

Thus $T^N x_N(t) = x_N(t)$，那么我们可以得出 $x_N(T)$ 是 $T$ 的周期点，其周期为 $N$ .

现在我们可以证明 $x_N \in L_p(0,\infty)$。事实上，

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |x_N(t)|^p dt &= \int_0^\infty |[\prod_{i=1}^{kN} w(t-ia)]^{-1} x(t-kNa)|^p dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{D_k} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{kN} |w(t-ia)|^p} |x(t-kNa)|^p dt \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^{kNp}} \int_{D_k} |x(t-kNa)|^P dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m^{kNp}} \int_0^{Na} |x(t)|^p dt.\end{aligned}$$

由于 $m>1$ 且 $x(t) \in L_p(0,Na)$，那么 $\int_0^\infty |x(t)|^p dt < \infty$。因此 $x_N(t) \in L_p(0,\infty)$ .

现在，设 $\forall\ y \in L_p(0,\infty)$，则 $\exists\ n \in \mathbb{N},\ y(t) = 0,\ t > na.$ 。令 $y_N$ 为 $T$ 的任意周期 $N > n$的周期点，该点基于 (3.1) 中的 $y(\cdot)$ 定义。

因此，

$$\begin{aligned}\|y - y_N\|_p &= (\int_0^\infty |y(t) - y_N(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\int_{D_k} |y(t) - y_N(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\int_0^{Na} |y - y_N(t)|^p dt)^{\frac{1}{p}} + \sum_{k=1}^{\infty} (\int_{D_k} |y(t) - y_N(t)|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\int_{D_k} |y_N(t)|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m^{-kN} \|y\|_p \\ &= \frac{m^{-N}}{1-m^{-N}} \|y\|_p \to 0,\ N \to \infty.\end{aligned}$$

这意味着，T 的周期点集合 $Per(T)$ 在 $L_p(0,\infty)$ 中稠密，因此该算子是混沌的。

现在，sup 假设空间 $L_p(0,\infty)$ 是复数域上的空间，我们分析算子 $T$ 的谱 .

首先，我们证明 $\|T\| = \|w\|_\infty$。由于 $\|T\| \leqslant \|w\|_\infty$，我们可以得出

$$\begin{aligned}\|T\| = \sup_{\|x\|_p=1} \|Tx\|_p &= \|w\|_\infty \sup_{\|x\|_p=1} \left[\int_0^{+\infty} |x(t+a)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \|w\|_\infty \sup_{\|x\|_{p=1}} \left[\int_0^{+\infty} |x(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant \|w\|_\infty \sup_{\|x\|_{p=1}} \left[\int_0^{+\infty} |x(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \|w\|_\infty.\end{aligned}$$

我们可以发现，算子 $T$可分解为 $V$和 $\tau_a$的乘积，其中 $V\colon x(t) \mapsto w(t)x(t)$，且$\tau_a\colon x(t) \mapsto x(t+a)$。对于 $x \in L_p(0,+\infty)$，我们有

$$T\tau_{-a}x(t) = Tx(t-a) = w(t)x(t) = Vx(t),$$

于是 $T \cdot \tau_{-a} = V$。因此 $\|V\| = \|V\| \leqslant \|T\|\|\tau_{-a}\| = \|T\|$，其中 $\|\tau_{-a}\| = 1.$。然后我们可以得到 $\|T\| = \|w\|_\infty$。根据有界线性算子的盖尔范德谱半径定理，我们有

$$\sigma(T) \subseteqq \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| \leqslant \|w\|_\infty\}.$$

其次，我们证明

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| < \|w\|_\infty\}.$$

(i) 设 $\lambda \in \mathbb{C}$，其中 $|\lambda| < \|W\|$，且有一个非零等价类 $\forall y \in L_p(0,a)$。考虑函数

$$x(t) := \frac{\lambda^k}{w(t-a)w(t-2a)\cdots w(t-ka)} y(t-ka),$$

其中 $t \in [ka,(k+1)a)$ $k \in \mathbb{Z}_+$.

那么 $x \in D(T)$ 和 $Tx = \lambda x.$。事实上，由于

$$\frac{y(t-ka)}{w(t-a)w(t-2a)\cdots w(t-(k-1)a)} \in L_p(0,\infty) \setminus \{0\},$$

那么我们可以得到

$$x(t) \in L_p(0,\infty) \setminus \{0\}.$$

Also

$$\begin{aligned}(Tx)(t) &= w(t)x(t+a) \\ &= w(t)\frac{\lambda^k}{w(t)w(t-a)\cdots w(t-(k-1)a)} y(t-(k-1)a) \\ &= \lambda \frac{\lambda^{k-1}}{w(t-a)w(t-2a)\cdots w(t-(k-1)a)} y(t-(k-1)a) \\ &= \lambda x(t),\end{aligned}$$

这意味着

$$Tx = \lambda x.$$

这表明

$$\{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| < \|w\|_\infty\} \subset \sigma_p(T).$$

(ii) 反过来，我们证明

$$\sigma_p(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda < \|w\|_\infty|\}.$$

对于 $x \in D(T)\backslash\{0\}$，其中 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$满足 $Tx = \lambda x.$

Let

$$x_k(t) := x(t),\ t \in [ka, (k+1)a),\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

我们得到

$$\lambda x_{k-1}(t) = w(t)x_k(t+a),\ t \in [ka, (k+1)a),\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

因此

$$x_k(t) = \frac{\lambda^k}{w(t-a)w(t-2a)\cdots w(t-ka)} y(t-ka),\ t \in [ka, (k+1)a),\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

这意味着

$$0 < \int_0^a |x_k(t)|^p\ dt \leqslant \int_0^\infty |x_k(t)|^p\ dt < +\infty$$

and

$$\begin{aligned}
\infty > \int_0^\infty |x(t)|^p\ dt &= \sum_{k=0}^\infty \int_{ka}^{(k+1)a} \left| \frac{\lambda^k}{w(t-a)w(t-2a)\cdots w(t-ka)} y(t-ka) \right|^p\ dt \\
&\geqslant \sum_{k=0}^\infty \left( \frac{|\lambda|}{\|w\|_\infty} \right)^{kp} \int_{ka}^{(k+1)a} |y(t-ka)|^p\ dt \\
&= \sum_{k=0}^\infty \left( \frac{|\lambda|}{\|w\|_\infty} \right)^{kp} \int_0^a |y(t)|^p\ dt.
\end{aligned}$$

由于 $x \in L_p(0, a)$，我们必须满足

$$\sum_{k=0}^\infty \left( \frac{|\lambda|}{\|w\|_\infty} \right)^{kp} < +\infty$$

for

$$\sum_{k=0}^\infty \left( \frac{|\lambda|}{\|w\|_\infty} \right)^{kp} \int_0^a |y(t)|^p\ dt < +\infty.$$

因此我们可以推出

$$\lambda < \|w\|_\infty$$

and

$$\sigma_p(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| < \|w\|_\infty\}.$$

考虑到 $\sigma(T)$ 是 $\mathbb{C}$ 中的闭子集，我们得到

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| \leqslant \|w\|_\infty\}.$$

由于 $T - \lambda I$ 值域稠密，这表明

$$\sigma_r(T) = \emptyset.$$

容易证明

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| = \|w\|_\infty\},$$

由 $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$，其中 $\sigma_p(T)$ $\sigma_c(T)$ $\sigma_r(T)$ 两两不相交。证毕。 □

## 4. Proof of Theorem 1.2

在定理 1.2中，该算子是无界的。于是，如果我们证明无界时变权移位算子是超循环的，定理 2.6 将不会用到，而定理 2.7 将会用到。现在我们来证明定理1.2。

证明。首先，我们证明 T 是无界的。
考虑

$$x_n(t) := \chi_{[n,n+1]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [n, n+1], \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

$x_n \in D(T)$ 和 $\|x_n\|_p = 1, n \in \mathbb{N}$.

那么，对于所有充分大的 $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |Tx_n(t)|^p dt &= \int_0^\infty |w(t)x_n(t+a)|^p dt \\ &= \int_{n-a}^{n+1-a} |w(t)|^p dt \to \infty, \ n \to \infty. \end{aligned}$$

这意味着 $T$ 无界。

其次，我们将证明，对于每个 $l \in \mathbb{N}.$， $T^l$ 都是闭的。设序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足

$$D(T) \ni x_n \to x \in L_p(0,\infty), \ n \to \infty$$

and

$$T^l x_n \to y \in L_p(0,\infty), \ n \to \infty.$$

那么，函数序列 $(x_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(T^l x_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ 在 p-范数下收敛，因此在 $(0,\infty)$ 上依勒贝格测度收敛；由里斯定理，存在子序列 $(x_{n_k}(\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $(T^l x_{n_k}(\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$，使得

$$\begin{aligned} x_{n_k}(t) &\to x(t), \ k \to \infty, \ a.e. t \in (0,\infty), \\ T^l x_{n_k}(t) &\to y(t), \ k \to \infty, \ a.e. t \in (0,\infty). \end{aligned}$$

因此，

$$\prod_{i=0}^{l-1} w(t+ia) x_{n_k}(t+la) \to \prod_{i=0}^{l-1} w(t+ia) x(t+la), \ a.e. \ t \in (0,\infty).$$

根据 *Lebesgue* 测度的 *completeness*，我们推知：这意味着 $x \in D(T^l)$ 且 $T^l x = y$。由此可知， $T^l$ 是闭的。接下来，我们将证明 $T$ 是 *hypercyclic*.

令 $\epsilon$ 为由 p-可积且最终为零的函数表示的等价类集合。注意到

$$\epsilon \subseteq C^\infty(T).$$

考虑

$$\epsilon \ni x \mapsto (Sx) \in \varepsilon$$

其中 $Sx$ 表示为

$$(Sx)(t) := \begin{cases} \frac{1}{w(t-a)} x(t-a), & t > a, \\ 0, & otherwise. \end{cases}$$

由于 $Sx(\cdot)$最终为零，且

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |Sx(t)|^p\ dt &= \int_a^\infty |Sx(t)|^p\ dt \\ &= \int_a^\infty \left|\frac{1}{w(t-a)}x(t-a)\right|^p\ dt \\ &= \int_0^\infty \left|\frac{1}{w(t)}x(t)\right|^p\ dt \\ &\leqslant \int_0^\infty |x(t)|^p\ dt.\end{aligned}$$

因此，映射 $S:\epsilon\to\epsilon$ 是良定义的。

容易证明， $TS=I$。对于任意 $x\in\varepsilon$，我们知道

$$supp\ x=\{t\in(0,\infty)|x(t)\neq 0\}$$

由 $x\in C_0(0,\infty)$，可得

$$\exists\ N\in\mathbb{N},\ supp\ x\subseteq[0,Na].$$

根据 $T$ 的定义，对于任意 $n\geqslant N$，可得

$$T^nx=0.$$

因此，已证明 $\forall x\in\epsilon,\ S^nx\to 0,\ n\to\infty.$

接下来，我们将证明对所有 $x\in\epsilon$,

$$S^nx\to 0,\ n\to\infty.$$

当 $\forall x\in\epsilon$时，我们可以得出 $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$(S^nx)(t)=\begin{cases}\frac{1}{\prod_{i=1}^n w(t-ia)}x(t-na), & t>na,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned}\|S^nx\|_p^p &= \int_0^\infty |(S^nx)(t)|^p\ dt \\ &= \int_{na}^\infty \left|\frac{1}{\prod_{i=1}^n w(t-ia)}x(t-na)\right|^p\ dt \\ &\leqslant \int_{na}^\infty \left|\frac{1}{b^{np}}\right||x(t-na)|^p\ dt \\ &= \frac{1}{b^{np}}\int_0^\infty |x(t)|^p\ dt\to 0,\ n\to\infty,\end{aligned}$$

我们证明了对所有 $x\in\epsilon$,

$$S^nx\to 0,\ n\to\infty.$$

因此，根据定理 2.7，我们得到 $T$ 是 $hypercyclic$。

现在，我们将证明 $T$ 有一个稠密的周期点集。由于 $C_0(0,\infty)$ 在 $L_p(0,\infty)$ 中稠密，我们只需证明 $per(T)$ 在 $C_0(0,\infty)$ 中稠密。

首先，对于 $\forall x \in L_p(0, Na)$ 和 $\forall N \in \mathbb{N}$，我们可以用以下代表元定义 $x_N \in L_p(0, \infty)$

$$x_N(t) := \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{kN} w(t-ia)} x(t-kNa),\ t \in [kNa, (k+1)Na),\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

容易证明，$x_N \in per(T)$。

由于，满足

$$D_k := [kNa, (k+1)Na),\ k \in \mathbb{Z}_+,$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty |x_N(t)|^p dt &= \int_0^\infty |[\prod_{i=1}^{kN} w(t-ia)]^{-1} x(t-kNa)|^p dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{D_k} \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{kN} |w(t-ia)|^p} |x(t-kNa)|^p dt \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b^{kNp}} \int_{D_k} |x(t-kNa)|^P dt \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b^{kNp}} \int_0^{Na} |x(t)|^p dt.
\end{aligned}$$

由于 $b > 1$ 和 $x(t) \in L_p(0, Na)$，这意味着 $x_N \in L_p(0, \infty)$。因此，

$$\forall N \in \mathbb{N},\ x_N \in L_p(0, \infty).$$

如果 $y \in C_0(0, \infty)$，那么

$$\exists n \in \mathbb{N},\ y(t) = 0,\ t > na.$$

对于任意周期 $N \geqslant n$，我们定义了 $y_N$，其代表元如下

$$y_N(t) := \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{kN} w(t-ia)} y(t-kNa),\ t \in [kNa, (k+1)Na),\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

现在，我们证明

$$\|y - y_N\|_p^p \to 0,\ N \to \infty.$$

由于$|w(t)| > b > 1$，我们有

$$\begin{aligned}
\|y - y_N\|_p^p &= \int_0^\infty |y(t) - y_N(t)|^p\ dt \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D_k} \frac{1}{|\prod\limits_{i=1}^{kN} w(t-ia)|^p} |y(t-kNa)^p\ dt \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_{D_k} \frac{1}{b^{kNp}} |y(t-kNa)|^p\ dt \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b^{kNp}} \int_0^{Na} |y(t)|^p\ dt \to 0,\ N \to \infty.
\end{aligned}$$

我们已经证明，$per(T)$ 在 $L_p(0, \infty)$ 中稠密。这意味着算子 $T$ 是混沌的。现在，如果空间 $L_p(0, \infty)$ 是复数空间，我们就来分析 $T$ 的谱。

我们已经知道这一事实

$$\sigma_p(T) \subset \mathbb{C}.$$

因此，我们只需证明

$$\mathbb{C} \subset \sigma_p(T).$$

对于 $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ 以及非零的 $y \in L_p(0,a)$，我们定义

$$x(t) := \frac{\lambda^n}{\prod_{i=1}^{n} w(t-ia)} y(t-na),\ t \in [na,(n+1)a),\ n \in \mathbb{Z}_+.$$

由于

$$\int_0^\infty |x(t)|^p\ dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{D_n} \left| \frac{\lambda^n}{\prod_{i=1}^{n} w(t-ia)} y(t-na) \right|^p\ dt < \infty.$$

这意味着 $x \in L_p(0,\infty) \setminus \{0\}$ 并且

$$Tx = \lambda x.$$

因此 $\mathbb{C} \subset \sigma_p$，可得

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{C}.$$

□

现在我们将在 $L_p(0,\infty)$ $1 \leq p < \infty$ 中给出一个无界时变加权后移算子的例子。

例4.1。在（实数或复数）空间 $L_p(0,\infty)$ 中，我们定义无界加权后移算子 T:

$$(Tx)(t) := [a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_0] x(t+a)$$
$$(T^n x)(t) := \prod_{i=0}^{n-1} P_m(t+ia) x(t+na),$$

其中 $P_m(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_0,\ m > 1,\ a_i > 0,\ i = 0,1,2,\cdots,m$ 和 $a > 0$，其定义域为

$$D(T) = \left\{ x \in L_p(0,\infty) \middle|\ \int_0^\infty |P_m(t)x(t+a)|^p\ dt < \infty \right\},$$

是混沌的。

证明。我们首先证明 T 是无界的。

考虑

$$x_n(t) := \chi_{[n,n+1]}(t) = \begin{cases} 1,\ t \in [n,n+1], \\ 0,\ otherwise \end{cases}$$

作为类别 $x_n \in D(T)$ 的一个代表。我们可以发现

$$\|x_n\|_p = 1,\ n \in \mathbb{N}.$$

那么，由于 $a_i > 0,\ i = 1,2,\cdots,m$，对于所有充分大的 $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left[\int_0^\infty |Tx_n(t)|^p\ dt\right]^{\frac{1}{p}} &= \left[\int_0^\infty |P_m(t)x_n(t+a)|^p\ dt\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\int_{n-a}^{n+1-a} |P_m(t)|^p\ dt\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\geqslant P_m(n+1-a) \\ &= a_m(n+1-a)^m + a_{m-1}(n+1-a)^{m-1} + \cdots + a_0 \\ &\to \infty,\ n \to \infty,\end{aligned}$$

这意味着 $T$ 是无界的。

其次，　我们证明，对于每个 $l \in \mathbb{N}$，算子 $T^l$ 都是闭的。设 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足　　at

$$D(T^l) \ni x_n \to x \in L_p(0,\infty),\ n \to \infty,$$

and

$$T^l x_n \to y \in L_p(0,\infty),\ n \to \infty.$$

然后，由于函数序列 $(x_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ 和 $(T^l x_n(\cdot))_{n\in\mathbb{N}}$ 在 p-范数下收敛，根据里斯定理，存在子序列 $(x_{n_k}(\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $(T^l x_{n_k}(\cdot))_{k\in\mathbb{N}}$，使得

$$x_{n_k}(t) \to x(t),\ k \to \infty\ a.e.$$

and

$$T^l x_{n_k}(t) \to y(t),\ k \to \infty,\ a.e.$$

因此,

$$T^l x_{n_k}(t) = \prod_{i=0}^{l-1} P_m(t+ia)x_{n_k}(t+la) \to \prod_{i=0}^{l-1} P_m(t+ia)x(t+la),\ a.e.$$

根据勒贝格测度的完备性，我们可知

$$\prod_{i=0}^{l-1} P_m(t+ia)x(t+la) = y(t),\ a.e.$$

这意味着 $x \in D(T^l)$ 和 $T^l x = y.$ 因此，我们已经证明了 $T^l$ 的闭性。

令 $\epsilon$ 为由 p-可积且最终为零的函数表示的等价类集合。注意

$$\epsilon \subseteq C^\infty(T).$$

考虑,

$$\epsilon \ni x \mapsto Sx \in \epsilon,$$

其中类别 $Sx$ 由以下方式表示

$$(Sx)(t) := \begin{cases} \frac{1}{P_m(t-a)}x(t-a), & t > a, \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

那么 $Sx(\cdot)$最终为零，并且

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |Sx(t)|^p\ dt &= \int_a^\infty \left|\frac{1}{P_m(t-a)x(t-a)}\right|^p\ dt\\ &= \int_0^\infty \left|\frac{1}{P_m(t)}x(t)\right|^p\ dt\\ &\leqslant \int_0^\infty \frac{1}{|P_m(0)|^p}|x(t)|^p\ dt\\ &= \frac{1}{a_0}\int_0^\infty |x(t)|^p\ dt\\ &= \frac{1}{a_0}\|x\|_p^p < +\infty.\end{aligned}$$

因此，映射 $S:\epsilon\to\epsilon$ 定义良好。

现在，我们证明 $TS=I$。由于 $\forall x(t)\in\epsilon$，我们得到

$$\begin{aligned}TS(x(t)) &= T\left(\frac{1}{P_m(t-a)}x(t-a)\right)\\ &= P_m(t)\frac{1}{P_m(t)}x(t)\\ &= x(t).\end{aligned}$$

Thus

$$TS=I.$$

任取由 $x(\cdot)$ 表示的 $x\in\epsilon$，并令 $supp\ x$ 为 $x(\cdot)$ 的支撑，即 $\{t\in(0,\infty)|\ x(t)\neq 0\}$。由于 $x(\cdot)$ 最终为零，$\exists N\in\mathbb{N}$,

$$supp\ x\subseteq[0,Na].$$

我们很容易证明 $\forall x\in\epsilon$,

$$T^n x\to 0(n\to\infty).$$

根据 $T$ 的定义，$\forall n\geqslant\mathbb{N}$,

$$T^n x(t)=\prod_{i=0}^{n-1}P_m(t+ia)x(t+na)=0.$$

接下来，我们将证明

$$\forall x\in\epsilon,\ S^n x\to 0\ (n\to\infty).$$

当 $\forall x\in\epsilon$ 和 $\forall n\in\mathbb{N}$ 时，我们可以得出

$$(S^n x)(t)=\begin{cases}\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}P_m(t-ia)}x(t-na), & t>na,\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

由于

$$\frac{1}{|\prod_{i=1}^{n}P_m(na-ia)|^p}\to 0,\ n\to\infty,$$

我们有

$$\begin{aligned}\|S^n x\|_p^p &= \int_0^\infty |S^n x(t)|^p \, dt \\ &= \int_{na}^\infty \left| \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} P_m(na-ia)} x(t-na) \right|^p \, dt \\ &\leqslant \frac{1}{|\prod_{i=1}^{n} P_m(na-ia)|^p} \int_{na}^{+\infty} |x(t-na)|^p \, dt \\ &\leqslant \frac{1}{|\prod_{i=1}^{n} P_m(na-ia)|^p} \|x\|_p^p \\ &\to 0, \ n \to \infty.\end{aligned}$$

因此 ，根据超循环性的充分条件(), 算子 $T$ 是 $hypercycli$ $c.$

现在，我们要证明 $T$ 有一个由周期点组成的稠密集。由于

$$C_0(0,\infty) \subset L_p(0,\infty)$$

且 $C_0$ 在 $L_p$中稠密，我们只需证明 $per(T)$在 $C_0$中稠密。

事实上，对于任意 $x \in L_p(0, Na)$ 和 $\forall N \in \mathbb{N}$，我们定义如下表示的 $x_N \in L_p(0,\infty)$

$$x_N(t) := \frac{1}{\prod_{i=1}^{kN} P_m(t-ia)} x(t-kNa), \ t \in [kNa, (k+1)Na), \ k \in \mathbb{Z}_+.$$

由于

$$\begin{aligned}T^N x_N(t) &= \prod_{i=0}^{N-1} P_m(t+ia) \frac{1}{\prod_{i=1}^{kN} P_m(t+Na-ia)} x(t-kNa+Na) \\ &= \frac{1}{\prod_{i=Na+1}^{kN} P_m(t-ia)} x(t-kNa+Na) \\ &= \frac{1}{\prod_{i=1}^{(k-1)N} P_m(t-ia)} x(t-(k-1)Na) \\ &= x_N(t),\end{aligned}$$

$x_N(t)$ 是 $T$ 的周期点，周期为 $N$。

事实上，对于

$$D_k := [kNa, (k+1)Na), \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |x_N(t)|^p\ dt &= \sum_{k=0}^\infty \int_{D_k} \left| \frac{1}{\prod_{i=1}^{kN} P_m(t-ia)} x(t-kNa) \right|^p\ dt \\ &\leqslant \sum_{k=0}^\infty \int_{D_k} \left| \frac{1}{(a_0)^{kN}} \right|^p |x(t-kNa)|^p\ dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{a_0^{kNp}} \int_0^{Na} |x(t)|^p\ dt < \infty\end{aligned}$$

由 $a_0 > 1$ 和 $x \in L_p(0, Na)$。因此，对任意 $N \in \mathbb{N}$, $x_N \in L_p(0,\infty)$。

设 $y \in C_0(0,\infty)$，则

$$\exists n \in \mathbb{N},\ y(t) = 0,\ t > na.$$

设 $y_N$ 为 $T$ 的周期点，其周期为任意的 $N \geqslant n$ ，基于 (  ).

现在，我们证明 th 在 $per(T)$ 中稠密于 $C_0(0,\infty)$。由于根据 $a_0 > 1$ 和 $y \in L_p(0,\infty)$，我们有

$$\begin{aligned}\|y - y_N\|_P^P &= \int_0^\infty |y(t) - y_N(t)|^p\ dt \\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_{D_k} \left| \frac{1}{\prod_{i=1}^{kN} P_m(t-ia)} y(t-kNa) \right|^p\ dt \\ &\leqslant \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{a_0^{kNp}} \|y\|_p^p \to 0,\ N \to \infty.\end{aligned}$$

因此，这意味着 $T$的周期点集 $per(T)$ 在 $L_p(0,\infty)$ 中稠密，从而算子 $T$ 是混沌的。□

## 5. Proof of Theorem 1.3

在本节中，我们将证明定理 1.3。

证明。我们首先证明算子 $T$ 是无界的。考虑满足 $\|x_n\|_\infty = 1$ 的 $x_n \in D(T)$。

设函数

$$x_n = \begin{cases} 1, & t \in [0, na), \\ \frac{1}{w^2(t-na)}, & t \geqslant na \end{cases}$$

由于

$$\|Tx_n\|_\infty = \max_{t\geqslant 0} |w(t)x_n(t+a)| \geqslant \max_{t\geqslant (n-1)a} \left| \frac{w(t)}{w(t-(n-1)a)} \right| \to \infty,\ n \to \infty.$$

因此，算子 $T$ 是无界的。

接下来，我们将证明 $T^l$ 对于 $\forall m \in \mathbb{N}$ 是闭的。设数列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 满足

$$D(T^l) \ni x_n \to x \in C_0[0,\infty),\ n \to \infty,$$

and

$$T^l x_n \to y \in C_0[0,\infty),\ n \to \infty.$$

因此， $\forall\ t \geqslant 0$,

$$T^l x_n(t) = \prod_{i=0}^{l-1} x_n(t+la) \to \prod_{i=0}^{l-1} w(t+la)x(t+la),\ n \to \infty.$$

这意味着

$$\prod_{i=0}^{l-1} w(t+ia)x(t+la) = y(t),\ t \geqslant 0.$$

因此， $x \in D(T^l)$且 $T^l x = y$。所以 $T^l$ 是闭的。

设 $\varepsilon$ 是 $C_0[0,\infty)$中具有紧支撑的连续函数的稠密子集。

考虑

$$\epsilon \ni x \mapsto Sx \in \epsilon,$$

其中 $Sx$ 定义为

$$S(x)(t) = \begin{cases} \frac{x(0)}{a}t, & t < a, \\ \frac{1}{w(t-a)}x(t-a), & t \geqslant a. \end{cases}$$

映射 $S:\ \epsilon \to \epsilon$ 是良定义的，且 $\forall x \in \epsilon$,

$$TSx(t) = w(t)Sx(t+a) = w(t)\frac{x(t)}{w(t)} = Ix(t).$$

因此我们得到 $TS = I$。

现在，我们证明对于 $\forall x \in \epsilon$,

$$T^n x \to 0,\ n \to \infty.$$

事实上，设 $\forall x \in \epsilon$，则存在 $N \in \mathbb{N}$,

$$supp\ x \subset [0, Na].$$

根据 $T$ 的定义,

$$\forall n \geqslant N,\ T^n x = 0,$$

这意味着 $T^n \to 0,\ n \to \infty$.

接下来，我们将证明

$$S^n \to 0,\ n \to \infty.$$

归纳地，对任意 $n \in \mathbb{N}$,

$$(S^n)(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < (n-1)a, \\ \frac{1}{w(t-a)w(t-2a)\cdots w(t-na)}\frac{x(0)}{a}(t-(n-1)a), & (n-1)a \leqslant t < na, \\ \frac{1}{w(t-a)w(t-2a)\cdots w(t-na)}x(t-na), & t \geqslant na. \end{cases}$$

由于

$$\begin{aligned} \|S^n x\|_\infty &= \sup_{t \geqslant 0} |(S^n x)(t)| \\ &\leqslant \frac{1}{b^n}x(t-na) \to 0,\ n \to \infty. \end{aligned}$$

因此，由定理 2.7，我们知道 $T$ 是 $Hypercyclicity$。 □

我们发现， [14] 中给出的算子是我们论点的例子。

## References

[1] George David Birkhoff。关于整函数的一个初等定理的证明。 , : – 。 [2] Gerald R MacLane。导数序列与正规族。 *Journal d'Analyse Mathématique*, 2(1):72–87, 1952。[3] Stefan Rolewicz。关于元素的轨道。 *Studia Mathematica*, 32(1):17–22, 1969。[4] Carol Kitai。线性算子的闭不变集。1984。[5] Gilles Godefroy 和 Joel H Shapiro。具有稠密不变循环向量流形的算子。 *Journal of Functional Analysis* 98 2 229 269, 1991 , ( ): – 。[6] Karl-Goswin Grosse-Erdmann。泛族与超循环算子。 *Bulletin of the American Mathematical Society* 36 3 345 381, 1999 , ( ): – 。[7] Joel H Shapiro。线性算子动力学札记。 *Unpublished Lecture Notes (available at www. math. msu. edu/ shapiro)* 2001 , , 。[8] Fr´ed´eric Bayart 和 ´Etienne Matheron。 *Dynamics of linear operators*。第179卷。剑桥大学出版社，2009年。[9] Karl-G, Grosse-Erdmann 和 Alfred Peris Manguillot。 *Linear Chaos*。施普林格，2011年。[10] Eli Glasner 和 Benjamin Weiss。一种普适的超循环表示。 *Journal of Functional Analysis*, 268(11):3478– 3491, 2015。[11] Sophie Grivaux。依照 Glasner 和 Weiss 意义的普适超循环算子的若干新例子。 *Transactions of the American Mathematical Society* 369 11 7589 7629, 2017 , ( ): – 。[12] Juan B 、 es、Kit C Chan 和 Steven M Seubert。混沌无界微分算子。 , : – 。[13] Marat V Markin。 *Real Analysis: Measure and Integration*。Walter de Gruyter GmbH & Co KG，2019年。[14] John M Jimenez 和 Marat V Markin。函数空间中的线性混沌。 *Integral Equations and Operator Theory* 40 257 267, 2001 *Demonstratio Mathematica* 55 1 119 135, , ( ): – 。[15] Marat V Markin。Rolewicz 型无界算子的混沌性与谱结构。 *arXiv:1811.06640* 2018 *arXiv preprint* , 。[16] R DeLaubenfels、H Emamirad 和 K-G Grosse-Erdmann。无界算子半群的混沌。 *Nachrichten* 261 1 47 59, 2003 *Mathematische* , ( ): – 。[17] Nelson Dunford 和 Jacob T Schwartz。 *Linear operators, part 1: general theory*，第10卷。约翰·威立父子出版公司，1988年。[18] Marat V Markin。 *Elementary Operator Theory*。Walter de Gruyter GmbH & Co KG，2020年。

[1] College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing, 401331, P. R. China
*Email address*: Jing Hou@cqu.edu.cn

[2] College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing, 401331, P. R. China
*Email address*: shuyonglu@163.com