arXiv:2303.06948v1 [math.GR] 13 Mar 2023

高崎 quandles 的 quandle 环分解

DILPREET KAUR 和 PUSHPENDRA SINGH

摘要。设 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 和 T_n 表示阶为 n的 Takasaki quandle。本文给出了 quandle 环 $K[T_n]$ 作为右单理想直和的分解。该分解等价于 Takasaki quandles 的正则表示[的分18] 解。

1. 引言

quandle 是一种代数系统，由一个集合及其上的二元运算构成，并满足从定向链环图上的 Reidemeister 变换导出的三个公理。Joyce [DJ82] 和 Matveev [SM82] 独立提出了 quandles 的概念，用于构造纽结与链环的不变量。然而，这一概念可追溯至 Mituhisa Takasaki 的研究，他将其命名为 Kei [MT43]，这是一种称为对合 quandle 的特殊 quandle。

从拓扑学角度对 quandles 的研究十分广泛，重点是将其作为纽结理论中的不变量来研究。然而，鉴于其代数结构，近年来数学家开始从代数角度探索 quandles。在这方面，quandle 环的概念在 [BPS19], 中被引入，其定义类似于群环。人们注意到，与群环不同，quandle 环是非结合的（除非 quandle 是平凡的）。在 [BPS19]和 [BPS22], 中，作者讨论了 quandle 环的各种性质，例如 quandles 的子 quandle 与 quandle 环的理想之间的关系、quandle 环的幂结合性、零因子的存在性、整数 quandle 环的幂等元计算、交换子子代数等。

在论文 [BPS19], 中，作者还提出了各种开放问题，例如 quandle 环的同构问题。在这方面，[EFT19] 的作者给出了一个例子：对于具有某些特征的环，非同构 quandles 对应的 quandle 环却是同构的。他们还给出了在特定条件下，quandle 环同构时 quandles 之间关系的相关结果。此外， [EMSZ22] 研究了 quandle 代数的导子代数概念，并完整描述了二面体 quandles 的 quandle 代数的导子代数。quandle 表示的概念在 [EM18]中被引入，其定义类似于群表示。

本文研究 quandle 环的分解。这一概念由 [EFT19] 和 [KS22], 的作者进行研究，他们给出了二面体 quandles 的 quandle 环分解。本文将这一结果推广到一类更广泛的 quandle，即高崎 quandles。本文结构安排如下：第2 节回顾 quandle 和 quandle 环的定义与例子，并简要说明 quandle 环

印度理工学院焦特布尔分校 印度理工学院焦特布尔分校电子邮箱: dilpreetkaur@iitj.ac.in, singh.105@iitj.ac.in. 2010 数学主题分类20C15, 57M27, 17D99, 20C05.关键词和短语quandle 环、高崎 quandles、广义二面体群、表示和特征标。我们感谢 Mohamed Elhamdadi 提供的宝贵建议。第一作者谨此感谢 SERB 通过 MATRICS项目 MTR/2022/000231 提供的支持。

作为右单理想直和的分解。在第3 节，我们详细描述高崎 quandles 的内自同构群和轨道结构。在第4 节和第5节，我们讨论所得到的内自同构群的共轭类和表示论。在第6 节，我们完整描述高崎 quandles 的 quandle 环分解。

2. quandle 与 quandle 环的预备知识

定义 2.1. 集合 X 连同一个二元运算 $\triangleright$ 称为 *quandle*，若其满足以下公理：

- $x \triangleright x = x$ 对所有 $x \in X$。
- 对于任意一对 $x, y \in X$，存在唯一的 $z \in X$ 使得 $x = z \triangleright y$。
- $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$ 对所有 $x, y, z \in X$。

若省略第一条公理，则结构 $(X, \triangleright)$ 称为 *rack*。注意，最后两条公理可以合并并表述为：映射 $R_x : X \to X$ 定义为 $R_x(y) = y \triangleright x$ 是一个自同构。这些映射 R_x 称为右乘映射或对称。类似地，左乘映射定义为 $L_x(y) = x \triangleright y$。注意， L_x 不一定是双射。现在给出一些 quandles 的例子：

- 设 $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ 为一个集合， X 在满足对所有 $x_i, x_j \in X$均有 $x_i \triangleright x_j = x_i$ 的条件下构成一个 quandle。它称为阶为 n的平凡 quandle。
- 任意群 G 在运算 $g \triangleright h = hgh^{-1}$ 下都成为一个 quandle。这称为共轭 quandle，记作 $Conj(G)$。

- 群 G 关于运算 $g \triangleright h = hg^{-1}h$构成一个 quandle。特别地，若 G 是阿贝尔群，则这个 quandle 称为高崎架。
- 群 $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, \ldots n-1\}$ 连同运算 $a \triangleright b = 2b - a\,(mod\ n)$称为二面体 quandle，记作 $\mathcal{R}_n$。

- 设 G 为加法阿贝尔群，设 $\phi \in Aut(G)$。群 G 在二元运算 $a \triangleright b = \phi(a) + (id_G - \phi)b$下构成一个 quandle，称为 Alexander quandle。

对于每个 quandle X，所有对称在复合运算下生成一个群。这个群称为 X 的内自同构群，记作 $Inn(X)$。群 $Inn(X)$自然地作用于 quandle X，从而将其划分为互不相交的轨道之并。

如果 $Inn(X)$ 在 X 上的作用是传递的，则称 quandle X 为连通的。如果上述定义的所有左乘映射 L_x 都是双射，则称该 quandle 为拉丁幂等群胚。注意，每个拉丁幂等群胚都是连通 quandle。然而，也存在并非拉丁幂等群胚的连通 quandles。

在 [BPS19], 中，作者引入了 quandle 环的概念，它与群环类似。设 K 为一个环，且 $(X, \triangleright)$ 为一个 quandle。quandle 环 $K[X]$ 是由 quandle 元素构成的有限线性组合的集合，表示为 $\{\sum_i \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in K, x_i \in X\}$。在逐点加法下，它构成一个阿贝尔群。以下乘法使其具有环的结构：

$$\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) \cdot \left(\sum_j \beta_j x_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j \, (x_i \triangleright x_j)$$

一般而言，quandle 环 $K[X]$ 不是结合环，因为除非 X 是平凡 quandle，否则 quandle 运算不满足结合律。此外， $K[X]$ 没有乘法单位元。

在[EFT19], 中，作者讨论了 $K[X]$ 分解为右单理想。我们定义ρ : Inn(X) $\to$ GL$(K[X])$ 的映射 $\rho(R_x)(y) = y \triangleright x$ 对所有 $R_x \in \mathrm{Inn}(X)$ 以及 $y \in X$. 映射 ρ

是 Inn(X) 的一个表示，而将 $K[X]$ 分解为右单理想等价于将 ρ 分解为群 Inn(X) 的不可约表示。

设 X 是一个阶为 n 的 quandle，$\mathcal{S}_n$ 是 n 次对称群。假设 X 不是连通 quandle，且 $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots X_k$，其中 X_i 是内自同构群 Inn(X) 在 X 上作用的一个轨道。我们回顾 [EFT 19] 中的结果：映射 $\Phi : X \to \mathcal{S}_n$ 由 $\Phi(x) = R_x$ 定义，它限制为映射 $\Phi_i : X \to \mathcal{S}_{n_i}$，其中对所有 $1 \leq i \leq k$，$n_i = |X_i|$。我们将由 $\Phi_i(X)$ 生成的群记为 $Inn(X_i)$。在这种情况下，$K[X] = \oplus_{i=1}^{k} K[X_i]$，并且将 $K[X_i]$ 分解为右单理想等价于将其分解为内自同构群 Inn(X_i) 的不可约表示的直和。从现在起，模均指右模，并将基域固定为 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。

3. Inner Automorphism Groups and Orbits of Takasaki Quandles

设 H 是一个有限加法阿贝尔群。则 H 与二元运算 $a \triangleright b = 2b - a$ 一起构成一个称为高崎架的 quandle。我们将其记为 $(T, \triangleright)$。更具体地，根据有限生成阿贝尔群基本定理，群 H 同构于若干循环群的直积，即 $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_k}$。从现在起，在本节中，$H$ 表示一个与 $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ 同构的群。quandle 运算定义如下

$$(i_1, i_2, \dots, i_k) \triangleright (j_1, j_2, \dots, j_k) = (2j_1 - i_1 \ (mod\ n_1), 2j_2 - i_2 \ (mod\ n_2), \dots, 2j_k - i_k \ (mod\ n_k))$$

它在上述运算下构成 quandle $(T, \triangleright)$。我们采用以下记号：$e_0 = (0, 0, \dots, 0)$ 和 $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$，其中只有第 $i'th$ 个坐标为 1，其余坐标均为 0，它们是群 H 的元素。

引理 3.1。设 $(T, \triangleright)$ 是阿贝尔群 H 上的高崎架。那么，对所有 $j \in T$，右乘映射 R_j 都是对换的乘积。

证明。$R_j(i) = i \triangleright j = 2j - i$ 且 $R_j(2j - i) = (2j - i) \triangleright j = i$ 对所有 $i \in T$ 均成立。因此，R_j 是对换的乘积。□

关于高崎架的内自同构群，以下结果也曾针对奇数阶的高崎 quandles 在 [BDS17] 中提及。不过，为了完整起见，我们仍将其列出。我们先给出以下引理。

引理 3.2。设 $(T, \triangleright)$ 是阿贝尔群 H 上的高崎架。那么，当 n_i 为奇数时，$R_{e_i}R_{e_0}$ 的阶为 n_i；当 n_i 为偶数时，$R_{e_i}R_{e_0}$ 的阶为 $n_i/2$。

证明。设 n_i 为奇数。我们得到

$$\begin{aligned} R_{e_i}R_{e_0}(j_1, j_2, \dots, j_k) &= R_{e_i}(-j_1, -j_2, \dots, -j_k) \\ &= (j_1, j_2, \dots, 2 + j_i, \dots, j_k) \end{aligned}$$

现在将此复合 t 次，得到

$$(R_{e_i}R_{e_0})^t(j_1, j_2, \dots, j_k) = (j_1, j_2, \dots, 2t + j_i, \dots, j_k)$$

如果 n_i 为奇数，那么只有当 $t = n_i$ 时，$2t \equiv 0 \ (mod\ n_i)$ 才成立。因此，$R_{e_i}R_{e_0}$ 的阶为 n_i。如果 n_i 为偶数，那么 $R_{e_i}R_{e_0}$ 的阶等于 $n_i/2$。□

定义 3.3。设 H 为有限阿贝尔群。那么，群 $H \rtimes \mathbb{Z}_2$ 的下列表示

$$\{H, s \mid s^2, shs^{-1} = h^{-1}, \ h \in H\}$$

称为广义二面体群。我们将此群记作 $Dih(H)$。

引理 3.4。设 $(T, \triangleright)$ 是阿贝尔群 $G = \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_k} \times \mathbb{Z}_{n_{k+1}} \times \dots \times \mathbb{Z}_{n_{k+d}}$ 的高崎架，其中 $gcd(n_i, 2) = 2, \forall\ i = 1, 2, \dots k$ 且 $gcd(n_i, 2) = 1, \forall\ i = k+1, k+2, \dots, k+d$ 则 $Inn(T) \cong 2G \rtimes \mathbb{Z}_2$，其中 $2G = \{g + g \mid g \in G\}$ 是 G 的一个子群。

证明。由引理 3.1 和引理 3.2 可得，对于所有 $i = 1, 2, \ldots, k$， $|R_{e_0}| = 2$ 和 $|R_{e_i}R_{e_0}| = n_i/2$ 成立；对于所有 $i = k+1, \ldots, k+d$, $|R_{e_iR_{e_0}}| = n_i$ 成立。设 G 为由集合 $\{R_{e_i}R_{e_0};\ 1 \le i \le k+d\}$ 生成的群。注意到，对于所有 $i, j = 1, 2, \ldots, k+d$， $R_{e_i}R_{e_0}R_{e_j}R_{e_0} = R_{e_j}R_{e_0}R_{e_i}R_{e_0}$ 成立。因此， G 是阿贝尔群，且 $G \cong 2G \cong \mathbb{Z}_{n_1/2} \times \mathbb{Z}_{n_2/2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k/2} \times \mathbb{Z}_{n_{k+1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_{k+d}}$。现在我们证明，对于所有 $h \in \tilde{G}$， $R_{e_0}hR_{e_0} = h^{-1}$ 成立。只需对 $\tilde{G}$ 的生成元证明这一关系。再次利用引理 3.1，我们得到，对于所有 $1 \le i \le k+d$， $R_{e_0}(R_{e_i}R_{e_0})R_{e_0}{}^{-1} = (R_{e_i}R_{e_0})^{-1}$。由此得证。□

下面的引理给出了阿贝尔群 H 上高崎架 $(T, \triangleright)$ 的右乘映射 R_j 的一个有用表示。

引理 3.5。 任意右乘映射 $R_{(j_1,j_2,\ldots,j_k)}$ 都可以用 $Inn(T)$ 中的元素表示为

$$R_{(j_1,j_2,\ldots,j_k)} = \left(\prod_{i=1}^{k}(R_{e_i}R_{e_0})^{j_i}\right) R_{e_0}$$

证明。 令 $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in H$，经直接计算可得

$$\left(\prod_{i=1}^{k}(R_{e_i}R_{e_0})^{j_i}\right) R_{e_0}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \left(\prod_{i=1}^{k}(R_{e_i}R_{e_0})^{j_i}\right)(-a_1, -a_2, \ldots, -a_k)$$

现在考察 $k'th$ 坐标，可得

$$(R_{e_k}R_{e_0})^{j_k}(-a_1, -a_2, \ldots, -a_k) = (-a_1, -a_2, \ldots, 2j_k - a_k)$$

类似地，每个 $(R_{e_i}R_{e_0})^{j_i}$ 只改变 $i'th$ 坐标，因此可得

$$\begin{aligned}\left(\prod_{i=1}^{k}(R_{e_i}R_{e_0})^{j_i}\right) R_{e_0}(a_1, a_2, \ldots, a_k) &= (2j_1 - a_1, \ldots, 2j_k - a_k) \\ &= R_{(j_1,j_2,\ldots,j_k)}(a_1, a_2, \ldots, a_k)\end{aligned}$$

这就证明了结论。 □

现在我们给出 quandle 直积的定义：

定义 3.6. 设 $(X, \triangleright)$ 和 $(Y, *)$ 是两个 *quandle*，则集合 $X \times Y$ 与运算 $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \triangleright x_2, y_1 * y_2)$ 构成一个 *quandle*。这称为两个 *quandle* 的直积。

设 $\mathbb{Z}_m$ 和 $\mathbb{Z}_n$ 是循环群，并设 $\mathcal{R}_m$ 和 $\mathcal{R}_n$ 分别表示相应的二面体 quandles。于是我们注意到，$\mathcal{R}_m \times \mathcal{R}_n$ 是阿贝尔群 $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$ 对应的高崎架。因此，我们可以说，高崎 quandles 是二面体 quandle 的直积。回顾一下，群 $Inn(X)$ 对 quandle $(X, \triangleright)$ 的作用为 $R_j(i) = i \triangleright j$。现在我们讨论 quandle $(T, \triangleright)$ 在 $Inn(T)$ 作用下的轨道。我们回顾 [SK21] 中的一些结果，并对记号稍作调整。

引理 3.7。 *[SK21，引理 3。1]* 设 $\{Q_i\}_{i=1}^n$ 是一个 *quandles* 族，且 $Q = \prod_{i=1}^n Q_i$。那么 $X \subset Q$ 是 Q 的一个轨道，当且仅当 $X = \prod_{i=1}^n X_i$，其中 X_i 是 Q_i 对所有 $1 \le i \le n$ 均成立的一个轨道。

引理 3.8. *[SK21，命题 3.2]* 高崎架 $G = \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k} \times \mathbb{Z}_{n_{k+1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_{k+d}}$ 具有 $gcd(n_i, 2) = 2$， $\forall\, i = 1, 2, \ldots k$ 和 $gcd(n_i, 2) = 1$， $\forall\, i = k+1, k+2, \ldots\ldots, k+d$ 有 2^k 个轨道。

设 $(T,\triangleright)$ 是引理 3.8 中定义的高崎架。由引理 3.7 可知，高崎架 $(T,\triangleright)$ 的轨道恰好是 G 作为 quandles 的各个分量的轨道之积。对于每个 $1 \leq i \leq k$，偶分量 $\mathbb{Z}_{n_i}$ 有两个轨道，一个由偶数组成，另一个由奇数组成。我们分别称它们为偶轨道和奇轨道。对于每个 $k+1 \leq i \leq k+d$，奇分量 $\mathbb{Z}_{n_i}$ 只有一个轨道。我们称其为传递轨道。因此，由引理 3.7 可得 2^k 在 $(T,\triangleright)$ 上的作用的轨道。为使记号更清楚，我们讨论一个例子。

例 3.1. 令$(T, \triangleright)$ 为 $G = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ 的高崎架。我们知道，G 的每个循环分量都对应一个二面体 *quandle*。因此，$\mathcal{R}_4$ 有两个轨道 $\{0,2\}$ 和 $\{1,3\}$。类似地，$\mathcal{R}_6$ 有两个轨道 $\{0,2,4\}$ 和 $\{1,3,5\}$，而 $\mathcal{R}_3$ 有一个轨道 $\{0,1,2\}$。直积有四种构造方式，因此 $(T, \triangleright)$ 有四个轨道。我们分别用符号0，1，0 表示偶轨道、奇轨道和传递轨道。因此，四个轨道为

$X_{(0,0,0)} = \{$(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 2, 0), (0, 2, 1), (0, 2, 2), (0, 4, 0), (0, 4, 1), (0, 4, 2), (2, 0, 0), (2, 0, 1), (2, 0, 2), (2, 2, 0), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (2, 4, 0), (2, 4, 1), (2, 4, 2)$\}X_{(0,1,0)} = \{$(0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 3, 0), (0, 3, 1), (0, 3, 2), (0, 5, 0), (0, 5, 1), (0, 5, 2), (2, 1, 0), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 3, 0), (2, 3, 1), (2, 3, 2), (2, 5, 0), (2, 5, 1), (2, 5, 2)$\}X_{(1,0,0)} = \{$(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 2), (1, 2, 0), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 4, 0), (1, 4, 1), (1, 4, 2), (3, 0, 0), (3, 0, 1), (3, 0, 2), (3, 2, 0), (3, 2, 1), (3, 2, 2), (3, 4, 0), (3, 4, 1), (3, 4, 2)$\}X_{(1,1,0)} = \{$(1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 3, 0), (1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 5, 0), (1, 5, 1), (1, 5, 2), (3, 1, 0), (3, 1, 1), (3, 1, 2), (3, 3, 0), (3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 5, 0), (3, 5, 1), (3, 5, 2)$\}$

按照上述记号，由所有偶轨道和传递轨道的直积构成的轨道记为 $X_{(0....,0)}$。我们将下标视为二进制数并将其转换为十进制数，从现在起，用 X_i 表示任意一个轨道。特别地，我们用符号 X_0 表示轨道 $X_{(0....,0)}$。我们用 $T_j = R_j|_{X_0}$ 表示映射 R_j 在轨道 X_0 上的限制。

现在我们讨论由右乘映射在各轨道上的限制所生成的内自同构群的结构。

引理 3.9。 设 $(T,\triangleright)$ 是阿贝尔群 $G = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \ldots \mathbb{Z}_2} \times \underbrace{\mathbb{Z}_4 \times \ldots \times \mathbb{Z}_4}$上的高崎架，则$k$ 次 k' 次

$Inn(X_0) \cong \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \ldots \mathbb{Z}_2}_{k' \text{ times}}$.

证明。 我们注意到映射 $R_{e_0}|_{X_0}$ 变为恒等映射。证明的其余部分可由引理3.4直接得出。 □

引理 *3.10.* 设 $(T,\triangleright)$ 是阿贝尔群 $G = \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k} \times \mathbb{Z}_{n_{k+1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_{k+d}}$ 的高崎架，其中 $gcd(n_i, 2) = 2, \forall\, i = 1, 2, \ldots k$ 且 $gcd(n_i, 2) = 1, \forall\, i = k+1, k+2, \ldots, k+d$，但不包括引理 *3.9* 中的情形。则 $Inn(X_0) \cong Inn(T)$.

证明。 我们注意到，引理 3.4 的证明在 $R_j|_{X_0} = 2$ 对所有 $j \in T$的阶都成立，而这一点除引理3.9中讨论的情形外均成立。因此结论得证。 □

Lemma 3.11. 设 $(T, \triangleright)$ 是一个高崎架，且 X_i 是 T 的一个轨道。那么 $Inn(X_i) \cong Inn(X_0)$.

证明。 首先，对于二面体 quandle（$\mathcal{R}_n, \triangleright$），我们注意到，如果（$i, 2j-i$）是在映射 $R_j \in Inn(\mathcal{R}_n)$ 中的一个换位，那么（$i+1, 2j-i+1$）就是映射 R_{j+1} 中的一个换位。此外，如果 i 是映射 R_j 的一个不动点，那么 $i+1$ 就是映射 R_{j+1} 的一个不动点。现在，由于高崎架是二面体 quandle 的直积，因此这种平移发生在

高崎 quandles 的右乘映射的每个坐标中。因此，任意轨道 X_i 和限制映射 $R_j|_{X_i}$（其中 $R_j \in Inn(T)$）经改变记号后，分别可视为轨道 X_0 和映射 $R_j|_{X_0}$。因此， $Inn(X_i) \cong Inn(X_0)$。□

现在，为了分解 $K[T]$，我们需要了解广义二面体群的共轭类和表示论。我们将在接下来的章节中回顾这些内容。

4. Conjugacy Classes of Generalised Dihedral Group

设 G 是一个群，且 $x \in G$。则 x 的中心化子定义为

$$C_G(x) := \{g \in G \mid gxg^{-1} = x\}$$

我们知道， $C_G(x)$是 G的子群。 x 的共轭类的大小为 a s

$$|Cl(x)| = \frac{|G|}{|C_G(x)|}$$

回顾一下，广义二面体群 $H \rtimes \mathbb{Z}_2$，其中 H 是有限阿贝尔群，其有限表示如下

$$Dih(H) = \{H, s \mid s^2 = 1, shs^{-1} = h^{-1}, \forall\, h \in H\}$$

我们假设 $Dih(H)$是非阿贝尔群，即 H 不同构于初等阿贝尔2–群。现在我们计算群 $Dih(H)$的中心。

命题 4.1. 设 $Dih(H)$ 是广义二面体群 $H \rtimes \mathbb{Z}_2$，其中 $H = \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k} \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_d}$，其中 $gcd(n_i,2) = 2, \forall\, 1 \le i \le k$, $gcd(m_i, 2) = 1, \forall\, 1 \le i \le d$。令$\mathbb{Z}_{n_i} =< r_i >$，对 $1 \le i \le k$，且 $\mathbb{Z}_{m_i} =< r'_i >$，对 $1 \le i \le d$。则中心 $Z(Dih(H))$ 由下式给出

$$Z(Dih(H)) = \{{r_1}^{i_1}{r_2}^{i_2} \ldots {r_k}^{i_k} \mid i_j = n_j/2 \text{ or } i_j = 0,\ 1 \le j \le k\}$$

证明。 我们找出 $Dih(H)$ 中共轭类为单元素集的所有元素。根据 $Dih(H)$ 的表示，我们可知 $Dih(H)$ 的所有元素都是 $\{h, sh \mid h \in H\}$。又有$sh \notin Z(Dih(H))$，与 $h'^2 \neq 1$一样，我们得到 $sh'shsh' = sh'^2h \neq sh$，这意味着 $|Cl(sh)| > 1$。此外，我们还有

$$|Cl(h)| = |Dih(H) : C_{Dih(H)}(h)| \le |Dih(H) : H| \le 2$$

注意到 $shs^{-1} = h^{-1}$ 和 $shsh = 1$，因此对于所有 $g \in Dih(H)$，都有 $g^{-1} \in Cl(g)$。这意味着对于所有 $h \in H$，都有$Cl(h) = \{h, h^{-1}\}$。因此， $|Cl(h)| = 1$ 当且仅当 $h = h^{-1}$。由此得证。□

命题 4.2。 设 $Dih(H)$ 为采用上述记号的广义二面体群。那么对于 $h \in H$，有

$$C_{Dih(H)}(sh) =< sh, Z(Dih(H)) >$$

证明。 设 $h' \in H$ 且 $h' \in C_{Dih(H)}(sh)$。那么 $h'sh = shh'$，由此得到 $h'^{-1} = h'$。现在命题 4.1 推出 $h' \in Z(Dih(H))$。这证明了 $Z(Dih(H)) \subset C_{Dih(H)}(sh)$。

设 $g = sh' \in C_{Dih(H)}(sh)$ 其中 $h' \in H$。那么得到 $h'^{-1}h = h^{-1}h'$。由命题4.1，可推出 $h^{-1}h' \in Z(Dih(H))$。因此得到 $g = shk$ 对于某个 $k \in Z(Dih(H))$。证明完毕。□

由命题4.2，我们得到

$$|C_{Dih(H)}(sh)| = 2^{k+1}$$

因此

$$|Cl(sh)| = \frac{|Dih(H)|}{2^{k+1}}$$

因此， $Dih(H)$ 有 2^k 个单元素共轭类、 $|(|H| - 2^k)/2|$ 个含两个元素的共轭类，以及 2^k 个含 $|Dih(H)|/2^{k+1}$ 个元素的共轭类。

5. 广义二面体群的不可约表示

本节讨论广义二面体群的不可约表示 $Dih(H)$。由于 $Dih(H) = H \rtimes \mathbb{Z}_2$，因此我们将 H 的不可约表示诱导到 $Dih(H)$上。我们使用 Clifford 理论来检验诱导表示的不可约性。更多详情请参见 [SST09]。

定义 5.1。 诱导表示：设 K 是 G 的子群，且 (ϕ, V) 是 K 的一个表示。从 (ϕ, V) 诱导得到的 G 的表示 (ρ, W) 定义如下：

$$W = \bigoplus_{i=1}^{n} g_i V$$

其中，集合 $\{g_1, g_2, \dots g_n\}$ 是 G 中 K 的一组完整陪集代表元。我们记 $\rho = Ind_K^G \phi$，并且

$$Dim\ Ind_K^G \phi = (Dim\ V) \cdot |G/K|$$

G 在 W 上的作用定义如下；只需在 W的每个直和项上定义此作用。设 $g \in G$、 $h \in K$ 和 $v \in V$，则对于某个置换 $\sigma \in S_n$，有 $g.g_i = g_{\sigma(i)} h$ ，且作用为

$$g \cdot (g_i v) = g_{\sigma(i)} hv$$

ˆ 现在我们讨论诱导表示的不可约性。设 K 表示 K的不可约表示集合。设 $\sigma \in K$ 和 $g \in G$。那么， σ 的 g-共轭表示是由下式定义的表示 ${}^g\sigma \in K$：

$${}^g\sigma(h) = \sigma(g^{-1} h g)$$

对于所有 $h \in K$。子群

$$I_G(\sigma) = \{g \in G : {}^g\sigma \sim \sigma\}$$

ˆ G 的 $\sigma \in K$称为惯性群。容易观察到， $I_G(\sigma)$包含 K .

若 K 是 G 的指数为二的子群，则可定义 G关于 K 的交错表示，即一维表示 ε： $G \to \mathbb{C}^*$，定义如下:

$$\varepsilon(g) = \begin{cases} 1 & \text{if } g \in K \\ -1 & otherwise \end{cases}$$

ˆ 与 K类似，设 G 表示群 G的不可约表示集合。定义 e

$$\hat{G}(\sigma) = \{\theta \in \hat{G} \ : \ \sigma \preceq Res_K^G \theta\} = \{\theta \in \hat{G} \ : \ \theta \preceq Ind_K^G \sigma\}$$

ˆ其中 $\sigma \in K$。现在我们有如下定理

定理 5.2. *[SST09，定理 3。1]* 设 K 是 G的指数为二的子群。那么

(1). 若 $I_G(\sigma) = K$，则 $\theta := Ind_K^G(\sigma) \in \hat{}G$， $\theta \otimes \varepsilon = \theta$。*(2).* 若 $I_G(\sigma) = G$，则对于 $\theta \in \hat{}G(\sigma)$，有 $Ind_K^G(\sigma) = \theta \oplus (\theta \otimes \varepsilon)$，其中 $\theta \not\sim \theta \otimes \varepsilon$。7

现在，我们应用这一理论，从 H 的不可约表示中得到 $Dih(H)$ 的诱导表示。对于 H，我们考虑两种情形。

情形(i)。设 $H = \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ 是阿贝尔群，具有 $gcd(n_i, 2) = 1$，且对所有 $1 \leq i \leq k$ 都有 $\mathbb{Z}_{n_i} =< r_i >$。设 $\phi_{i_j} \colon \mathbb{Z}_{n_i} \to \mathbb{C}^*$ 是 $\mathbb{Z}_{n_i}$ 的不可约表示，对所有 $0 \leq i_j \leq n_j - 1$ 均成立。H 的一个不可约表示如下给出

$$\phi_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)} : \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k} \to \mathbb{C}^*$$

给定为

$$\phi_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)}(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \phi_{i_1}(m_1) \ldots \phi_{i_k}(m_k)$$

其中，对所有 $1 \leq i \leq k$，都有 $m_i \in \mathbb{Z}_{n_i}$。

更具体地说，我们可以写成

$$\phi_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)}(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \prod_{j=1}^{k} \omega_{n_j}^{m_j i_j}$$

其中 $0 \leq i_j \leq n_j - 1$、$1 \leq j \leq k$ 和 $\omega_{n_j} = e^{\mathrm{i}2\pi/n_j}$。我们注意到，$H$ 只有一个不可约表示，即具有实特征标值的平凡表示。H 的其余不可约表示均具有复值特征标。我们分别将这些表示称为 H 的实不可约表示和复不可约表示。

回顾一下，$Dih(H) := \{H, s \mid s^2, shs^{-1} = h^{-1}, \forall\, h \in H\}$ 是广义二面体群的有限表示。设 $\{1, s\}$ 是 H 在 $Dih(H)$ 中的陪集代表元集合。令$\phi_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)}$ 表示 H 的不可约表示。利用诱导理论，可得 $Dih(H)$ 的诱导表示$\rho_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)}$ 如下

$$\rho_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)}(r_j) = \begin{pmatrix} {\omega_{n_j}}^{i_j} & 0 \\ 0 & {\omega_{n_j}}^{-i_j} \end{pmatrix} \qquad \rho_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq i_j \leq n_j - 1$ 和 $1 \leq j \leq k$。等价地，作为实表示，我们有如下结论

$$\rho_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)}(r_j) = \begin{pmatrix} cos(2\pi i_j/n_j) & -sin(2\pi i_j/n_j) \\ sin(2\pi i_j/n_j) & cos(2\pi i_j/n_j) \end{pmatrix} \qquad \rho_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

其中 $0 \leq i_j \leq n_j - 1$ 和 $1 \leq j \leq k$。

令 $\overline{\phi}$ 表示群 H 的 ϕ 的复共轭表示，定义为 $\overline{\phi}(h) = \phi(h)$，其中 $h \in H$。那么我们有如下关于阿贝尔群的结果。

引理 5.3。 *[BS11，例 4。2]* 设 H 是一个阿贝尔群，ϕ 是 H的一个不可约表示。那么 $\phi(h^{-1}) = \overline{\phi}(h)$ 对所有 $h \in H$ 均成立。

命题 5.4。 设 $Dih(H) = H \rtimes \mathbb{Z}_2$ 是广义二面体群。那么

(1) 若 ϕ 是 H 的实不可约表示，则 $I_{Dih(H)}(\phi) = Dih(H)$。*(2)* 若 ϕ 是 H 的复不可约表示，则 $I_{Dih(H)}(\phi) = H$。

证明。 由于 H 是阿贝尔群，ϕ 是一维表示。根据定义，我们有$H \subset I_{Dih(H)}(\phi)$。只需检验 $s \in I_{Dih(H)}(\phi)$是否成立。我们得到

$${}^s\phi(h) = \phi(shs^{-1}) = \phi(h^{-1}) = \overline{\phi(h)}$$

其中最后一个等式由引理 5.3 得出。若 ϕ 是实表示，则 $\phi(h) = \phi(h)$。这意味着 $\overline{s \in I_{Dih(H)}(\phi)}$，因此 $I_{Dih(H)}(\phi) = Dih(H)$。

若 ϕ 是复不可约表示，则 $\phi(h) \neq \phi(h)$，因此 $s \notin \overline{I_{Dih(H)}(\phi)}$。这意味着 $I_{Dih(H)}(\phi) = H$。□

设 ϕ 是 H的平凡表示。根据命题5.4 以及定理5.2，可得 $Ind_H^{Dih(H)}\phi$ 分解为 $Dih(H)$的两个一维不可约表示。我们将它们记作 ρ_{triv} 和ρ_{sign}，其中

$$\rho_{triv}(g) = 1 \quad \forall\, g \in Dih(H)$$

and

$$\rho_{sign}(g) = \begin{cases} 1 & \text{if } g \in H \\ -1 & \text{if } g \in sH \end{cases}$$

现在还剩下 $|H| - 1$ 个由 H 的非平凡不可约表示诱导而来的 $Dih(H)$ 的二维不可约表示。不过，其中有些表示彼此等价。我们用下面的定理来判定这些 $Dih(H)$ 的诱导表示中哪些彼此等价。

定理 *5.5.* *[SST09，推论 2.1]* 设 K 是 G 的正规子群。那么，$Ind_K^G\sigma$ 是不可约表示，当且仅当 $I_G(\sigma) = K$。此外，若 $\sigma, \sigma_1 \in \hat{K}$ 且 $I_G(\sigma) = I_G(\sigma_1) = K$，则 $Ind_K^G(\sigma) \sim Ind_K^G(\sigma_1)$ 当且仅当 σ 和 σ_1 共轭（即存在 $g \in G$ 使得 $\sigma_1 = {}^g\sigma$）。

现在我们给出关于 $Dih(H)$ 的以下命题。

命题 5.6. 设 $Dih(H)$ 为广义二面体群。设 ϕ 是 H 的复不可约表示。那么 ϕ 和 $\overline{\phi}$ 是共轭表示。

证明。 我们计算 ${}^s\phi(h) = \phi(shs^{-1}) = \phi(h^{-1}) = \overline{\phi(h)} = \overline{\phi}(h)$。因此，$\phi$ 和 $\overline{\phi}$ 是 H 的共轭表示。□

作为定理 5.5 和命题 5.6的推论，我们得到广义二面体群$Dih(H)$ 有 $(|H| - 1)/2$ 个互不等价的二维不可约表示。我们将这些 $Dih(H)$ 的互不等价的二维表示记为 ψ_j 其中 $1 \leq j \leq (|H| - 1)/2$。

情形（二）。设 $H = \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \mathbb{Z}_{n_k} \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \ldots \mathbb{Z}_{m_d}$ 是一个阿贝尔群，其中 $gcd(n_i, 2) = 2$ 对于 $1 \leq i \leq k$ 成立，且 $gcd(m_j, 2) = 1$ 对于 $1 \leq j \leq d$ 成立。
在这种情况下，每个 $\mathbb{Z}_{n_i}$ 都有两个实不可约表示，对应于 $1 \leq i \leq k$。因此，群 H 有 2^k个实不可约表示。现在采用与奇数情形相同的方法，可得群 $Dih(H)$ 有 2^{k+1} 个一维不等价不可约表示，以及 $(|H| - 2^k)/2$ 个二次不等价不可约表示。注意，在这 2^{k+1} 个一维表示中，有 2^k 个表示将 s 映射到 -1，其余 2^k 个表示将 s 映射到 1。

我们还需要以下定理，摘自 [JL01]，用于将 $K[T]$ 分解为右单理想的直和。

定理 5.7。 *[JL01，定理 14。17]*。设 χ_1，……，χ_k是 G的完备不可约特征标集。若 ψ 是 G的任意特征标，则

$$\psi = d_1\chi_1 + \ldots + d_k\chi_k$$

对于某些非负整数 d_1，d_2、……、d_k。此外，

$$d_i = < \psi, \chi_i > \quad for\ 1 \leq i \leq k, and$$

$$< \psi, \psi > = \sum_{i=1}^{k} {d_i}^2$$

6. 高崎 quandles 的 quandle 环的分解

本节讨论高崎 quandles 的 quandle 环的分解。本节分为三个部分。首先讨论奇数阶阿贝尔群 H 的高崎架:

6.1. 当 H 是奇数阶阿贝尔群时。 设 $(T, \triangleright)$ 是阿贝尔群 $H = \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ 的高崎 quandle，其中 $gcd(n_i,2) = 1, \forall\, i = 1,2,\ldots k$。我们注意到 T 本身是 $Inn(T)$ 作用下的一个轨道。

令 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}.$。我们将 T 与 $\{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{|T|-1}\} \subseteq K[T]$ 等同，则 T 可视为 $K[T]$ 的一组基。显然，由 $v_{triv} = \sum_{i=0}^{|T|-1} v_i$ 生成的模是 $K[T]$ 上的单模。我们将此模记作 V_{triv}.

回忆一下，$Inn(T)$ 是由右乘映射 $R_j, j \in T$ 生成的内自同构群。考虑表示 ρ_T: Inn$(T) \to$GL$(K[T])$, 其定义为 $\rho(R_j)(v_i) = v_{i \triangleright j}$，对所有 $R_j \in$Inn(T) 均成立。设 χ_T 为与 ρ_T 相关联的特征。我们将 $Inn(T)$ 与 $Dih(H) := \{H, s \mid s^2 = 1, shs^{-1} = h^{-1}$ 等同； $h \in H\}$ 其中 $< R_{e_i} R_{e_0} \mid 1 \leq i \leq k >$ 被视为由集合 $\{r_i \mid 1 \leq i \leq k\}$ 和 R_{e_0} 生成、满足 s 的阿贝尔群 H。

引理 6.1. 采用上文讨论的相同记号，我们有

$$\chi_T(g) = \begin{cases} |H| & \text{if } g = 1 \\ 1 & \text{if } g \notin H \\ 0 & \text{if } g \in H \end{cases}$$

证明。设 r_i 是 H 的 $\mathbb{Z}_{n_i}$ 分量的生成元。群 $Dih(H)$ 有 $(|H| + 3)/2$ 个共轭类，即

$$\{1\}, \quad \{r_1^{i_1} \ldots r_k^{i_k}, r_1^{-i_1} \ldots r_k^{-i_k} \mid 1 \leq i_j \leq (n_j - 1)/2;\ j = 1, 2, \ldots, k\}; \quad \{hs; h \in H\}$$

利用引理3.4 和引理 3.5的证明,

$$\chi_T(1) = |H|, \quad \chi_T(h) = 0, \quad \chi_T(hs) = 1$$

对所有 $h \in H$。 □

集合 $\{\psi_j \mid 1 \leq j \leq (|H| - 1)/2\}$ 是 $Dih(H)$ 的一组完备的不等价二次不可约表示，且令 V_j 表示与 ψ_j 对应的单模。

引理 6.2. 设 $k = (|H| - 1)/2$。那么对于满足 $1 \leq j \leq k$, 的每个整数 j，表示 ψ_j 在 ρ_T 的分解中出现，重数为1。

证明。令 χ_j 表示与不可约表示 ψ_j 对应的特征，该表示属于 $Dih(H)$。回忆一下，χ_T 是与 ρ_T 相关的特征。对于 $1 \leq j \leq k$，利用引理 6.1 以及第 5节，我们计算得

$$\langle \chi_T, \chi_j \rangle = \frac{1}{2|H|} \sum_{g \in Dih(H)} \chi_T(g)\chi_j(g) = 1.$$

现在由定理5.7即可得到结论。 □

定理 6.3。 设 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}.$ 设 T 是阿贝尔群 $H = \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ 对应的高崎架，且 gcd $(n_i,\ 2)\ = 1\, \forall\, i = 1,\ 2,\ \ldots k$。那么

$$K[T] = V_{triv} \oplus \bigoplus_{j=1}^{(|H|-1)/2} V_j.$$

证明。 由引理 6.2可知，若 $\psi_j: Dih(H) \to \mathrm{GL}(V_j)$ 是一个二次不可约表示，则 V_j 是一个重数为 $K[T]$-模，重数为 1。 我们将此模记为 V_j.

由于 H 是一个奇数阶阿贝尔群，因此 $H \rtimes \mathbb{Z}_2$ 有 $(|H|-1)/2$ 个二次不等价不可约表示 ψ_j。因此， $K[T]$ 有 $(|H|-1)/2$ 个不同的简单$K[T]$-模 V_j，其中 $1 \le j \le (|H|-1)/2.$。令 V_{triv}为由 v_{triv}. 生成的一维 $K[T]$-模。根据维数计数，我们得到

$$K[T] = V_{triv} \oplus \bigoplus_{j=1}^{(|H|-1)/2} V_j.$$

□

6.2. 当 H 是偶数阶阿贝尔群时。令 $(T, \triangleright)$ 为阿贝尔群 $H = \mathbb{Z}_{2n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{2n_k} \times \mathbb{Z}_{2n'_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{2n'_{k'}} \times \mathbb{Z}_{m'_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m'_{d'}}$ 对应的高崎架，其中 $gcd(n_i, 2) = 2, \forall\ 1 \le i \le k$ 和 $gcd(n'_i, 2) = 1, \forall\ 1 \le i \le k'$ 和 $gcd(m'_i, 2) = 1, \forall\ 1 \le i \le d'$，但 $H = \mathbb{Z}_2 \times \ldots \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \ldots \times \mathbb{Z}_4$ 的情形除外。 $\underbrace{\qquad}_{\text{k 次}}$ $\underbrace{\qquad}_{\text{k' 次}}$

令 X_0 表示由阿贝尔群 H 的各个循环分量所形成的二面体 quandles 的偶轨道取直积后得到的轨道。于是根据引理 3.10，我们有$Inn(X_0) = (\mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k} \times \mathbb{Z}_{m_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m_d}) \rtimes \mathbb{Z}_2$其中 $gcd(n_i, 2) = 2$对 $1 \le i \le k$成立，且 $gcd(m_i, 2) = 1$ 对 $1 \le i \le d$成立。其中 $d = d' + k'$。令 $H = 2H$。我们观察到$Inn(X_0) \cong Dih(H)$。

回顾一下， $Inn(X_0)$是由右乘映射 $T_j, j \in T$生成的内自同构群，其中 $T_j = R_j|_{X_0}$。现在我们将 $K[X_0]$分解为右单理想的直和。考虑表示 $\rho_{X_0}: Inn(X_0) \to GL(K[X_0])$，其定义为 $\rho(T_j)(v_i) = v_{i \triangleright j}$ ，对所有 $T_j \in Inn(X_0)$ 均成立。令 χ_{X_0} 为与 ρ_{X_0} 相关联的特征。

令 Z 为右乘映射的集合 $T_{(a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_{k'}, c_1, c_2, \ldots, c_{d'})}$，其中坐标具有以下性质

$$= \begin{cases} 0 \le a_i < n_i, gcd(a_i, 2) = 2 \text{ or } 0 & \text{for } 1 \le i \le k \\ 0 \le b_i < n'_i, & \text{for } 1 \le i \le k' \\ 0 \le c_i < m'_i, & \text{for } 1 \le i \le d' \end{cases}$$

我们将 $Inn(X_0)$ 认作 $Dih(\tilde{H}) := \{\tilde{H}, s \mid s^2 = 1, shs^{-1} = h^{-1};\ h \in \tilde{H}\}$，其中 $< T_{e_i} T_{e_0} \mid 1 \le i \le k + d >$ 被认作由集合 $\{r_i \mid 1 \le i \le k + d\}$ 和 T_{e_0} 生成的阿贝尔群 H，且满足 s。我们注意到，在群 $Inn(X_0)$ 的元素中，只有集合 Z 的元素具有属于轨道 X_0 的不动点。集合 Z 的大小为 $|T|/(2^{2k+k'}) = |Dih(\tilde{H})|/2^{k+1}$。由第 4 节可知，群 $Dih(\tilde{H})$ 有一些大小为 $|Dih(\tilde{H})|/2^{k+1}$ 的共轭类。

引理 6.4。 采用与上文相同的记号，我们有

$$\chi_{X_0}(g) = \begin{cases} |X_0| & if\ g = 1 \\ 2^k & if\ g \in Cl(s) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

证明。 映射 T_{e_0}有一个不动点：$(\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_k, 0, \ldots\ldots 0, 0, \ldots\ldots, 0)$ 其中 $\varepsilon_i = 0$ 或 n_i 对于 $1 \le i \le k$。因此 T_{e_0} 有 2^k 个不动点。注意 $T_{e_0} \in Z$。我们知道，特征在共轭类上为常数。因此集合 Z 是映射 T_{e_0}的共轭类。证明的其余部分与引理 6.1类似。

□

注记 6.5。 高崎架 $(T, \triangleright)$ 的轨道结构 3.11 引理告诉我们，对于任意轨道 X_i 在 T中，上述引理对集合 Z的相应版本同样成立。

我们知道，群 $Dih(\tilde{H})$ 有 2^{k+1} 个两两不等价的一维不可约表示。回想一下，在这些 2^{k+1} 个一维表示中，有 2^k 个表示Φ_j满足 $\Phi_j(s) = -1$，而 2^k 个表示 ϕ_j满足 $\phi_j(s) = 1$。令 $\{\phi_j \mid 1 \leq j \leq 2^k\}$~为后面这些 $Dih(H)$ 的一维不等价不可约表示所成的集合，并令 U_j表示相应的单模。

引理 6.6。 设 $l = 2^k$。那么，对于每个满足 $1 \leq j \leq l$ 的 整数 j，表示 ϕ_j 以重数 1 出现于 ρ_{X_0} 的分解中。

~证明。 令 χ_j 表示与不可约表示 ϕ_j 相关联的特征，该表示属于 $Dih(H)$。回想一下，χ_{X_0} 是与 ρ_{X_0}相关联的特征。对于 $1 \leq j \leq l$， 利用引理 6.4 和第 5 节，我们计算得

$$\langle \chi_{X_0}, \chi_j \rangle = \frac{1}{2|\tilde{H}|} \sum_{g \in Dih(\tilde{H})} \chi_{X_0}(g)\chi_j(g) = 1.$$

现在结论由定理5.7得出。 □

现在设 $\{\psi_j \mid 1 \leq j \leq (|\tilde{H}| - 2^k)/2\}$ 是 $Dih(H)$ 的一组完备的、两两不等价的二次不可约表示，其中 V_j 表示相应的单模。

引理 6.7。 设 $k = (|\tilde{H}| - 2^k)/2$。那么对于每个满足 $1 \leq j \leq k$, 的整数 j，表示 ψ_j在 ρ_{X_0} 的分解中出现，重数为 1。

~证明。 令 χ'_j 表示与 ψ_j 的不可约表示相关联的特征，该表示属于 $Dih(H)$。回忆一下，χ_{X_0} 是与 ρ_{X_0}相关联的特征。对于 $1 \leq j \leq k$，利用引理 6.4 和第5节，我们计算得

$$\langle \chi_{X_0}, \chi'_j \rangle = \frac{1}{2|\tilde{H}|} \sum_{g \in Dih(\tilde{H})} \chi_{X_0}(g)\chi'_j(g) = 1.$$

现在结论由定理5.7得出。 □

引理6.8。 设 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$. 令 T表示如上定义的偶数阶高崎架，且 X_0是它的偶轨道。那么

$$K[X_0] = \bigoplus_{j=1}^{2^k} U_j \oplus \bigoplus_{j=1}^{(|\tilde{H}|-2^k)/2} V_j$$

~证明。 由引理 6.6可知，若 ϕ_j: $Dih(H) \to \mathrm{GL}(U_j)$是满足引理 6.6条件的一维不可约表示，则 U_j 是一个重数为 $K[X_0]$的简单 -模 1。

~同理由引理 6.7可知，若 ψ_j: $Dih(H) \to \mathrm{GL}(V_j)$是一个二2维不可约表示，则 V_j 是一个重数为 $K[X_0]$的简单 -模 1。

现在通过维数计算，我们得到

$$K[X_0] = \bigoplus_{j=1}^{2^k} U_j \oplus \bigoplus_{j=1}^{(|\tilde{H}|-2^k)/2} V_j$$

□

由注 6.5可知， $K[X_i]$ 的分解与$K[X_0]$ 的分解相似，其中 T的任意轨道均可作为 X_i 。令$U_{i,\ j}$ 表示与表示 ϕ_j 对应的简单 $K[X_i]$-模，其中该表示适用于 $1 \leq j \leq 2^k$ 和$V_{i,\ j}$ 表示与表示 ψ_j 对应的简单 $K[X_i]$-模，其中该表示适用于 $1 \leq j \leq (|\tilde{H}| - 2^k)/2$。我们有以下定理

定理 6.9。 设 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。设 $(T, \triangleright)$ 为阿贝尔群 $H = \mathbb{Z}_{2n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{2n_k} \times \mathbb{Z}_{2n'_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{2n'_{k'}} \times \mathbb{Z}_{m'_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{m'_{d'}}$上的高崎架。其中 $gcd(n_i, 2) = 2$，当 $1 \leq i \leq k$ 时； $gcd(n'_i, 2) = 1$，当 $1 \leq i \leq k'$ 时；以及 $gcd(m'_i, 2) = 1$，当 $1 \leq i \leq d'$时。于是

$$K[T] = \bigoplus_{i=1}^{2^{k+k'}} \left(\bigoplus_{j=1}^{2^k} U_{i,j} \oplus \bigoplus_{j=1}^{(|\tilde{H}|-2^k)/2} V_{i,j} \right)$$

证明。 此定理的证明由注 6.5 和引理 6.8可得。 □

6.3. **特殊情形**。 现在我们讨论 quandle 环 $K[T]$，其中 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$，且 T是群 $H = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \ldots \mathbb{Z}_2}_{\text{k 次}} \times \underbrace{\mathbb{Z}_4 \times \ldots \times \mathbb{Z}_4}_{\text{k' 次}}$.

上文定义的高崎架有 $2^{k+k'}$ 个大小为 $2^{k'}$ 的轨道。回顾一下， X_0 表示由阿贝尔群 H 的每个循环分量所形成的二面体 quandle 的偶轨道取直积得到的轨道。令 ρ_{X_0}： $Inn(X_0) \to K[X_0]$ 为 $Inn(X_0)$ 的表示。令 χ_{X_0} 为与 ρ_{X_0} 相关联的特征。

引理 6.10。 沿用上文的记号，我们有

$$\chi_{X_0}(g) = \begin{cases} |X_0| & if\ g = 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

证明。 由于 $T_j = R_j|_{X_0}$。我们看到，当 $i'th$ 是 H 的分量且为 $\mathbb{Z}_2$时， $T_{e_0} = 1$ 和 $T_{e_i} T_{e_0} = 1$。否则， $T_{e_i} T_{e_0}$ 是一个没有不动点的二阶元素。同样，我们可以说，每个非单位元素都是一个没有不动点的二阶元素。因此结论成立。□

在这种情况下 $Inn(X_0)$ 是阿贝尔群 $\underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \ldots \mathbb{Z}_2}_{\text{k' 次}}$。因此 $Inn(X_0)$ 有 $2^{k'}$ 个不可约且不等价的一维表示。设集合 $\{\psi_j \mid 1 \leq j \leq 2^{k'}\}$ 是 $Inn(X_0)$ 的一维不等价不可约表示的完全集。注意，$|X_0| = |Inn(X_0|$。

引理 6.11。 设 $l = 2^{k'}$。那么对于每个满足 $1 \leq j \leq l$ 的整数 j，表示 ψ_j 在 ρ_{X_0} 的分解中出现，重数为 1。

证明。 令 χ_j 表示与不可约表示 ψ_j 对应的特征，该表示属于 $Inn(X_0)$。回顾一下， χ_{X_0} 是与 ρ_{X_0}对应的特征。对于 $1 \leq j \leq l$，利用引理 6.10 和第 5节，我们计算得

$$\langle \chi_{X_0}, \chi_j \rangle = \frac{1}{2^{k'}} \sum_{g \in \mathrm{Inn}(X_0)} \chi_{X_0}(g) \chi_j(g) = 1.$$

由定理5.7即可得到该结果。 □

现在有如下定理

定理 6.12。 设 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$.设 T 为阿贝尔群的高崎架

$$H = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \ldots \mathbb{Z}_2}_{k\ times} \times \underbrace{\mathbb{Z}_4 \times \ldots \times \mathbb{Z}_4}_{k'\ times}$$

Then

$$K[T] = \bigoplus_{i=1}^{2^{k+k'}} \left(\bigoplus_{j=1}^{2^{k'}} U_{i,j} \right).$$

证明。 设 X_i 是 T的任意轨道。设$U_{i,j}$ 表示与表示 $K[X_i]$对应的简单 ψ_j 的表示 $Inn(X_i)$ 对于 $1 \leq j \leq 2^{k'}$。对于 $i = 0$，利用引理 6.11，可得

$$K[X_0] = \bigoplus_{j=1}^{2^{k'}} U_{0,j}$$

按照上述偶数情形的论证， $K[X_i]$ 的分解与 $K[X_0]$的分解类似。由于 T 有 $2^{k+k'}$ 个轨道，我们得到

$$K[T] = \bigoplus_{i=1}^{2^{k+k'}} \left(\bigoplus_{j=1}^{2^{k'}} U_{i,j} \right).$$

□

参考文献

[BPS19] Valeriy G. Bardakov、Inder Bir S. Passi 和 Mahender Singh，quandle 环，J. Algebra Appl. 18 (2019)，第 8 期，1950157，23。MR3977818 ↑1, ↑2[EFT19] Mohamed Elhamdadi、Neranga Fernando 和 Boris Tsvelikhovskiy，quandle 的环论方面，J. Algebra 526 (2019)，166–187。MR 3915329 ↑1, ↑2, ↑3[SK21] A. Saki、D. Kiani，Takasaki quandle 子 quandle 的格，Communications in Algebra 49:1,99-113.↑4[JL01] Gordon James 和 Martin Liebeck，群的表示与特征标，第二版，Cambridge University Press，纽约，2001。MR 1864147 ↑9[SST09] Tullio Ceccherini Silberstein、Fabio Scarabotti 和 Filippo Tolli，Clifford 理论及其应用，J Math Sci 156, 29-43 (2009)↑7, ↑9[BS11] Benjamin Steinberg，有限群表示论：入门方法。德国，Springer New York 2011。 ↑8[DJ82] David Joyce，纽结的一个分类不变量：纽结 quandle，J. Pure Appl. Alg 23 (1982) 37-65 ↑1[SM82] Sergei Matveev，纽结理论中的分配群胚，Mat. Sb. (N.S.), 119(161):1(9) (1982), 78-88 ↑1[EM18] Mohamed Elhamdadi、El-kaˈıoum M. Moutuou，有限稳定 rack 与 rack 表示，Communications in Algebra. 46.11 (2018) 4787–4802. ↑1[KS22] Dilpreet Kaur、Pushpendra Singh，二面体 quandle 的 quandle 环分解，arXiv 预印本，arXiv:2206.03162(2022.) ↑1[MT43] Mituhisa Takasaki，对称变换的抽象，Tohoku Math. J. 49, 145-207 (1942) ↑1[BPS22] Valeriy G. Bardakov、Inder Bir S. Passi 和 Mahender Singh，quandle 环中的零因子与幂等元，Osaka J. Math. 59 (2022), 611-637 ↑1[EMSZ22] Mohamed Elhamdadi、Abdenacer Makhlouf、Sergei Silvestrov、Emanuele Zappala，quandle 代数的导子问题，Internat. J. Algebra Comput. 32 (2022) 985-1007. ↑1[BDS17] Valeriy G. Bardakov、Pinka Dey 和 Mahender Singh，由群导出的 quandles 的自同构群，Montash. Math. 184 (2017) 519-530. ↑3