arXiv:2303.06952v2 [cs.LO] 7 Jun 2023

笛卡尔相干微分范畴

Thomas Ehrhard巴黎西岱大学、法国国家科学研究中心、法国国家信息与自动化研究院、IRIF，法国巴黎
F-75013Aymeric Walch巴黎西岱大学、法国国家科学研究中心、IRIF，法国巴黎 F-75013

2023年6月8日

摘要

我们将 Ehrhard 最近在范畴模型的线性逻辑背景下提出的相干微分思想推广到一般的笛卡尔范畴。其首要要素是一种可求和结构，它在范畴上诱导出部分左加性结构。对该可求和结构施加额外的函子性和自然性假设，便可实现微分学；该理论也可以用一种接近 Blute、Cockett 和 Seely 的笛卡尔微分范畴的形式体系来表述。我们证明，配备了自然微分概念的简单项语言可以很容易地在这样的范畴中得到解释。

目录

引言 **2**

1 左可求和结构 4
1.1 左预可求和结构 .41.2 左可求和结构 .61.3 与可求和结构的比较.7

2 微分 **8**
2.1 微分结构 .82.2 线性.92.3 微分单子.11

3 将公理解释为导数的性质 **12**

4 与笛卡尔积的相容性 **15**
4.1 笛卡尔积与可求和结构 .164.2 笛卡尔积与微分结构 .174.3 偏导数 .184.4 推广到任意有限积 .194.5 多线性态射 .20

5 线性逻辑模型的指数的 Kleisli 范畴 线性逻辑 2 **4**
5.1 线性环境中的相干微分 .25.2 概率相干空间的示例 .2 4
7

6 与笛卡尔微分范畴的联系 29
6.1 笛卡尔左加法范畴 .29
6.2 笛卡尔微分范畴 .29

7 一种一阶相干微分语言 30
7.1 项 .31
7.2 语义 .33
7.3 归约 .34

引言

本文是同一作者撰写的一篇论文的扩展版本，该论文标题相同，并已被*ACM/IEEE*计算机科学逻辑研讨会 2023 接收。特别是，会议版本中省略的所有证明均在本文中给出。

线性逻辑（LL）及其模型[1] 强烈表明，对证明进行微分应当是一种自然的运算，能够提取出它们最佳的"局部"线性近似。请记住，对于任意 E， F 巴拿赫空间， $f\colon\ E \to F$ 在 $x \in E$ 处可微，当且仅当存在U 的一个0 邻域 E，以及一个线性连续函数 $\varphi\colon\ E \to F$ 使得，对所有 $u \in U$

$$f(x+u) = f(x) + \varphi(u) + o(\|u\|)\,. \tag{1}$$

当 φ 存在时，它是唯一的，记作 $f'(x)$。当对所有 $x \in E$， $f'(x)$都存在时，函数 $f'\colon\ E \to \mathcal{L}(E,F)$（其中 $\mathcal{L}(E,F)$是由线性连续函数 $E \to F$构成的巴拿赫空间）称为 f的微分。这个函数本身也可能存在微分，依此类推。当所有这些迭代微分都存在时，就称 f 是光滑的；而 f的第n阶导数是一个函数 $f^{(n)}\colon\ E \to \mathcal{L}_n(E,F)$，其中 $\mathcal{L}_n(E,F)$是n重对称函数 $E^n \to F$所构成的空间。甚至可能出现这样的情况： f 在局部（甚至全局）可以通过泰勒公式 $f(x+u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)(u,\dots,u)$用其迭代导数表示；若这一关系在任意点 x处都局部成立，则称 f是解析的。

基于线性逻辑的范畴模型，其中态射是解析函数，微分 λ演算和微分线性逻辑为微分提供了逻辑和句法上的描述。类型为 $A \Rightarrow B$ 的程序可以转换为类型为 $A \Rightarrow (A \multimap B)$的程序。这为函数的有限近似提供了一种新方法：采用泰勒公式的句法版本。该方法已显示出其在研究 λ演算和线性逻辑中的重要性。微分与加法密切相关，这从其定义式（1）中便可看出。在将 f 的微分写成 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 个偏导数之和时，也能看到这种联系：

$$f'(x_1,\dots,x_n)\cdot(u_1,\dots,u_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i} u_i$$

当然，泰勒公式本身也体现了这一点。因此，直到最近，所有微分 λ演算和微分线性逻辑 [2,3] 的范畴模型都采用同态集具有交换幺半群结构的范畴；这两种形式体系都允许对相同类型的项或证明进行形式化且不受限制的加法运算。由于这种和唯一可用的操作性解释是非确定性选择，这些形式体系本质上具有非确定性。

最近，第一作者观察到[4] ，在所有系数均非负的情形下，微分会受到对加法使用方式的严格限制。例如，考虑函数 $[0,1] \to [0,1]$ ，它在 $[0,1)$ 上光滑，且其所有迭代

导数处处均为 ≥ 0[1]。如果 x、$u \in [0,1]$ 满足 $x+u \in [0,1]$，那么 $f(x)+f'(x)u \leq f(x+u) \in [0,1]$（即使 $f'(1)=\infty$，这也是有意义的；这种情况确实可能发生：取 $f(x)=1-\sqrt{1-x}$）。因此，若 S 是所有这类配对（x，u）组成的集合，并将它们称为可求和的，我们便可以~考虑函数 $\mathsf{D}(f)$：$(x,u) \mapsto (f(x), f'(x)u)$，将其视为映射 $S \to S$。[5] 将这一基本观察推广到广泛的线性逻辑范畴模型 $\mathcal{L}$，其中包括相干空间、概率相干空间等；在这些模型中，同态集上的加法仅部分定义。在这些可求和范畴中，S 成为一个带有附加结构的自函子 $\mathcal{L} \to \mathcal{L}$，该结构允许以非常一般的方式定义可求和性和（部分）和，并且最终会诱导出一个单子。随后，微分被公理化为此单子（类似于切范畴[6]的切丛单子）与范畴[2] $\mathcal{L}$的线性逻辑结构中的资源余单子 $!_$ 之间的一条分配律~。事实上，这条分配律使得可以将 S 延拓到 $\mathcal{L}_!$ $!_$ 的 Kleisli 范畴，而这一延拓 D：$\mathcal{L}_! \to \mathcal{L}_!$最终成为一个具备微分所需全部性质的单子。

众所周知，$\mathcal{L}_!$ 是一个笛卡尔闭范畴，而我们也可以不再拘泥于 $\mathcal{L}$ 的线性逻辑结构，而只考察其 Kleisli 范畴的结构。这正是微分理论的发展历程。它最初是在典型的线性逻辑框架中，借助加性范畴和微分范畴[2]公理化的。之后，它被拓展到笛卡尔范畴的框架中，采用左加性范畴和笛卡尔微分范畴（CDC）[3]。不出所料，前者的 Kleisli 范畴给出了后者的实例，但笛卡尔微分范畴涵盖了范围更广的模型。正如 [5], 所述，微分范畴可视为配备了微分运算的可求和范畴的一个特例（我们将这类范畴称为相干微分范畴），其中加法不受限制。自然地，我们可以探究是否存在一种笛卡尔相干微分范畴，它们是相干微分范畴的 Kleisli 范畴，并且将 CDC 推广到了偏定义情形。

我们对这个问题给出肯定的回答。我们在一个任意范畴中定义相干微分，其中的态射直观上可视为光滑态射。因此，我们从~一个范畴 $\mathcal{C}$ 开始，并为其配备一个映射[3] D：对象($\mathcal{C}$) $\to$ 对象($\mathcal{C}$)，以及一组态射~ ~π_0, X, π_1, X, $\sigma_X \in \mathcal{C}(\mathsf{D}(X)\ X)$（对每个 $X \in$ 对象($\mathcal{C}$)）。直观上，$\mathsf{D}(X)$ 是 X 中元素的可求和对所构成的对象，π_i 是显然的投影，而 σ 则计算和。我们假设 π_0, π_1 联合单态，这足以判定 ~ $f_0\ f_1 \in \mathcal{C}(X,Y)$ 何时可求和：当且仅当存在唯一必然的 $h \in \mathcal{C}(X, \mathsf{D}(Y))$ 使得 ~$\pi_i \circ h = f_i$，在这种情况下，我们定义 $f_0 + f_1 = \sigma \circ h$。在适当的假设下，这个非常简约的结构足以为 $\mathcal{C}$ 的同态集赋予偏交换幺半群结构，并且该结构与左复合相容[4]。

这种结构为微分提供了一个便利的框架：只需进一步为 ~D 赋予关于态射的函子作用，使得某些态射（可由π_0、π_1、σ定义）具有自然性。这就是相干微分范畴的概念，其公理与 CDC 的公理一一对应。与切范畴中的情形一样，[6, 7], 我们的~函子D 可以赋予单子结构。与 CDC 的加法框架~不同，我们的微分函子D 并非根据笛卡尔积定义，因此，当笛卡尔积存在时，理解它如何与笛卡尔积相互作用便十分重要：这通过笛卡尔相干微分范畴（CCDC）的概念加以形式化。~这种相容性可以通过强度来表达，借此可为D 赋予结构，使其成为交换单子。这由此导出一套令人满意的偏导数理论。我们

[1]这实际上意味着 f 是解析的。[2]顺便一提，它不必是一个完整的线性逻辑模型。[3]之后它会成为一个函子，甚至成为一个单子。[4]而且通常不在右侧，因为直观地说，并不假设 $\mathcal{C}$ 的态射是线性的。

给出一个基于概率相干空间的此类范畴的具体例子，并通过在 CCDC 中解释一种配备了微分概念的简单项语言，来说明我们的形式体系。

1 左可求和结构

本节我们引入左可求和结构这一概念，以便将 [5] 中引入的可求和结构概念推广到态射不一定可加的情形。

1.1 左预可求和结构

设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，其对象为 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，且对于任意 $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$，同态集为 $\mathcal{C}(X,Y)$。我们假设任意同态集 $\mathcal{C}(X,Y)$ 都包含一个特定态射 $0^{X,Y}$（通常省略 X 和 Y），使得对于任意 $f \in \mathcal{C}(Z,X)$，$0^{X,Y} \circ f = 0^{Z,Y}$。

定义 1。范畴 $\mathcal{C}$ 上的可求和配对结构是一个元组 $(\mathrm{D}, \pi_0, \pi_1, \sigma)$，其中：

- $\mathrm{D} : \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ 是对象上的一个映射（函数类）；
- $(\pi_0, X)_{X \in \text{对象}(\mathcal{C})}$，$(\pi_1, X)_{X \in \text{对象}(\mathcal{C})}$ 以及 $(\sigma_X)_{X \in \text{对象}(\mathcal{C})}$ 是 $\mathcal{C}(\mathrm{D}X, X)$ 中的态射族。对象 X 通常省略不写；
- π_0 和 π_1 是联合单态的：对于任意 $f, g \in \mathcal{C}(Y, \mathrm{D}X)$，若 $\pi_0 \circ f = \pi_0 \circ g$ 且 $\pi_1 \circ f = \pi_1 \circ g$，则 $f = g$。

在下文中，我们假设 $\mathcal{C}$ 配备了一个可求和配对结构 $(\mathrm{D}, \pi_0, \pi_1, \sigma)$。

定义 2。若存在 $h \in \mathcal{C}(X, \mathrm{D}Y)$ 使得 $\pi_i \circ h = f_i$，则称两个态射 $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(X,Y)$ 可求和。π_i 的联合单态性保证了当 h 存在时，它是唯一的。我们记作 $\langle f_0, f_1 \rangle := h$，并称其为和的见证。根据定义，$\pi_i \circ \langle f_0, f_1 \rangle = f_i$。于是我们记 $f_0 + f_1 := \sigma \circ \langle f_1, f_2 \rangle$。

注记 1. 更标准的记号写法是写成 π_1 和 π_2，而不是 π_0 和 π_1。我们这样处理的原因是，公式（1）在我们的框架中将通过使用一对 $\langle\!\langle f(x)\ f'(x) \cdot u \rangle\!\rangle$ 来形式化。也就是说，这对元素的左元素阶数为0，右元素的阶数为1。

记号 1. 我们用 $f_0 \boxplus f_1$ 表示 f_0 和 f_1 可求和这一性质。若一个包含二元和的代数表达式中，所涉及的每一对态射都可求和，则称该表达式定义良好。例如，$(f_0 + f_1) + f_2$ 在 $f_0 \boxplus f_1$ 且 $(f_0 + f_1) \boxplus f_2$ 时定义良好。

命题 1. 态射 π_0 和 π_1 可求和，其见证为 $\langle\!\langle \pi_0, \pi_1 \rangle\!\rangle$ = 恒等态射，和为 $\pi_0 + \pi_1 = \sigma$。

证明。 $\pi_i \circ$ 恒等态射 $= \pi_i$ 因此根据定义，$\pi_0 \boxplus \pi_1$ 以恒等态射为见证，和为 $\sigma \circ$ 恒等态射 $= \sigma$。 □

命题 2（和的左相容性）。对于任意的 $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(Y,Z)$ 和 $g \in \mathcal{C}(X,Y)$，若 $f_0 \boxplus f_1$，则 $(f_0 \circ g) \boxplus (f_1 \circ g)$，其见证为 $\langle\!\langle f_0 \circ g, f_1 \circ g \rangle\!\rangle = \langle\!\langle f_0, f_1 \rangle\!\rangle \circ g$。此外，$(f_0 \circ g) + (f_1 \circ g) = (f_0 + f_1) \circ g$。

证明。令 $w = f_0, f_1 \circ g$。于是 $\pi_i \circ w = f_i \circ g$，因此 w 是$f_0 \circ g$ 和 $f_1 \circ g$可求和性的见证。并且 $f_0 \circ g + f_1 \circ g := \sigma \circ w = (f_0 + f_1) \circ g$。 □

一个重要的态射类是可加态射，即加法与右侧的复合相容的态射。

定义 3. 态射 $h \in \mathcal{C}(Y, Z)$ 是可加的，当且仅当 $h \circ 0 = 0$，并且对于任意 $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(X, Y)$，若 $f_0 \boxplus f_1$，则 $h \circ f_0 \boxplus h \circ f_1$ 且 $h \circ (f_0 + f_1) = h \circ f_0 + h \circ f_1$。注意，恒等态射是可加的，且两个可加态射的复合仍是可加态射。

命题 3. 态射 h 满足 $h \circ 0 = 0$，当且仅当 $h \circ \pi_0 \boxplus h \circ \pi_1$ 的和为 $h \circ \sigma$。

证明。对于正向蕴含，回忆 $\pi_0 \boxplus \pi_1$ 的和为 σ。因此，由 h 的可加性，$h \circ \pi_0 \boxplus h \circ \pi_1$ 的和为 $h \circ \sigma$。对于反向蕴含，假设 $f_0 \boxplus f_1$。由于 $h \circ \pi_0 \boxplus h \circ \pi_1$，命题 2 保证 $h \circ f_0 = h \circ \pi_0 \circ f_0, f_1$ 和 $h \circ f_1 = h \circ \pi_1 \circ f_0, f_1$ 可求和，其和为 $(h \circ \pi_0 + h \circ \pi_1) \circ f_0, f_1 = h \circ \sigma \circ f_0, f_1 = h \circ (f_0 + f_1)$。 □

定义 4. 可求和配对结构 (D π_0, π_1, σ) 是一个左预可求和结构，当且仅当 π_0, π_1 和 σ 是可加的。

投影的可加性意味着，和对于运算 $_,_$ 本身具有良好的性质。

命题 4. 假设 π_0和 π_1是可加的。那么对于任意 $f_0, f_1, g_0, g_1 \in \mathcal{C}(X, Y)$，若 $f_0 \boxplus f_1$，$g_0 \boxplus g_1$ 且《f_0, f_1》$\boxplus$《g_0, g_1》，则 $f_0 \boxplus g_0$，$f_1 \boxplus g_1$，$(f_0 + g_0) \boxplus (f_1 + g_1)$ 且《f_0, f_1》+《g_0, g_1》=《$f_0 + g_0, f_1 + g_1$》。

证明。根据 $\pi_i, \pi_i \circ f_0, f_1 = f_i$ 和 $\pi_i \circ g_0, g_1 = g_i$ 的可加性，它们可求和，其和为 $f_i + g_i = \pi_i \circ (f_0, f_1 + g_0, g_1)$。由于 $\pi_0 \boxplus \pi_1$，由命题 2 可知 $f_0 + g_0, f_1 + g_1$ 可求和，见证为 $f_0, f_1 + g_0, g_1$。 □

σ 的可加性意味着，每当 $f_0, f_1 \boxplus g_0, f_1$ 时，都有 $\sigma \circ f_0, f_1 \boxplus \sigma \circ g_0, g_1$，并且

$$\sigma \circ (\langle\!\langle f_0, f_1 \rangle\!\rangle + \langle\!\langle g_0, g_1 \rangle\!\rangle) = (\sigma \circ \langle\!\langle f_0, f_1 \rangle\!\rangle) + (\sigma \circ \langle\!\langle g_0, g_1 \rangle\!\rangle)$$

假设投影的可加性，σ 的可加性$\langle\!\langle \langle\!\langle f_0, f_1 \rangle\!\rangle, \langle\!\langle g_0, g_1 \rangle\!\rangle \rangle\!\rangle$ 意味着，只要该对象存在，下面的两个和就定义良好（见记号 1），且

$$(f_0 + g_0) + (f_1 + g_1) = (f_0 + f_1) + (g_0 + g_1)\,. \tag{2}$$

命题 5. 态射 0 和0 可求和，其见证为0 ，其和为0。特别地，0是可加的。

证明。一方面，$\pi_i \circ 0 = 0$ 根据 π_i的可加性，$0 \boxplus 0$ 其见证为 0。另一方面，$\sigma \circ 0 = 0$ 根据 σ 的可加性，$0 + 0 = 0$。特别地，0 是可加的，这归功于命题 3，因为 $0 \circ \pi_0 = 0$ 和 $0 \circ \pi_1 = 0$ 均可求和，其见证为 0，且其和为$0 = 0 \circ \sigma$。 □

1.2 左可求和结构

~我们考虑一个范畴 $\mathcal{C}$，它配备了一个左预可求和结构 $(\mathrm{D}\ \pi_0, \pi_1, \sigma)$。本节的目标是使 $(\mathcal{C}(X,Y)\ +, 0)$ 成为一个偏交换幺半群。类似结构见于 [8]，近期也见于 [9],，那里讨论的是允许无限和的情形。我们的偏幺半群只有有限和[5]。更重要的是，我们所定义的范畴论可求和概念对我们至关重要，而这些著作并未从范畴论角度对其进行形式化。

定义 5. 若对于任意对象 X,~ ~ ~ π_1, $\pi_0 \in \mathcal{C}(\mathrm{D}X, X)$ 可求和，且其和为 σ，则称左预可求和结构是交换的。此时我们令 $\gamma = \pi_1, \pi_0 \in \mathcal{C}(\mathrm{D}X, \mathrm{D}X)$~，使得 $\pi_i \circ \gamma = \pi_{1-i}$。此性质称为（D-com）。

命题 6 (交换性)。左预可求和结构是交换的，当且仅当对于任意 f_0, $f_1 \in \mathcal{C}(X, Y)$，若 $f_0 \boxplus f_1$，则 $f_1 \boxplus f_0$ 且 $f_0 + f_1 = f_1 + f_0$。

证明。对于正向蕴含，假设 $f_0 \boxplus f_1$。于是 $\pi_i \circ \gamma \circ f_0, f_1 = \pi_{1-i} \circ f_0, f_1 = f_{1-i}$，因此 $f_1 \boxplus f_0$，其见证为 $\gamma \circ f_0, f_1$。此外，$f_1 + f_0 = \sigma \circ \gamma \circ f_0, f_1 = \sigma \circ f_0, f_1 = f_0 + f_1$。反过来，$\pi_0 \boxplus \pi_1$，故由交换性可得 $\pi_1 \boxplus \pi_0$ 和 $\pi_1 + \pi_0 = \pi_0 + \pi_1 = \sigma$。 □

定义 6. 若对任意~对象 X，$\mathrm{id}_X \boxplus 0$ 和 $0 \boxplus \mathrm{id}_X$ 的和等于 id_X，则左预可求和结构以 0 为幺元。我们~将这一性质称为（D-zero）。我们~定义 $\iota_0, \iota_1 \in \mathcal{C}(X, \mathrm{D}X)$ 为 $\iota_0 := \mathrm{id}_X, 0$ 和 $\iota_1 := 0, \mathrm{id}_X$。

命题 7 (0 的幺元性 0)。左预可求和结构以0 为幺元，当且仅当对任意态射 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$，$0 \boxplus f$、$f \boxplus 0$ 和 $f + 0 = 0 + f = f$。

证明。根据 ι_0的定义，$\pi_0 \circ \iota_0 \circ f = \mathrm{id} \circ f = f$ 和 $\pi_1 \circ \iota_0 \circ f = 0 \circ f = 0$。因此 $f \boxplus 0$，见证为 $\iota_0 \circ f$ 和 $f + 0 = \sigma \circ \iota_0 \circ f = \mathrm{id} \circ f = f$。对 $0 + f$ 和 ι_1也同样处理。反过来，我们对 id 应用 0 的中性元性质，得到 $\mathrm{id} \boxplus 0$ 和 $0 \boxplus \mathrm{id}$，其和为 id。 □

结合律并非那么简单，因为存在两种可能的概念。在 [9] 的无穷情形中也有类似情况，区别在于弱分割结合性与分割结合性。

定义 7 (弱结合性)。运算 $+$ 称为弱结合的，如果只要$(f_0 + f_1) + f_2$和 $f_0 + (f_1 + f_2)$有定义（回顾记号 1），就有$(f_0 + f_1) + f_2 = f_0 + (f_1 + f_2)$。

定义 8 (结合律)。运算 $+$ 称为结合的，如果只要 $(f_0 + f_1) + f_2$或 $f_0 + (f_1 + f_2)$ 有定义，另一个表达式也有定义，并且 $(f_0 + f_1) + f_2 = f_0 + (f_1 + f_2)$。

我们需要在加法满足结合律的偏定义情形下进行讨论：例如，第 2.1 节中就需要这一点来定义 $\theta = \langle\!\langle \pi_0 \circ \pi_0, \pi_0 \circ \pi_1 + \pi_1 \circ \pi_0 \rangle\!\rangle$。这种结合律似乎与某种态射正性有关。

例1。设当 $|x| + |y| \leq 1$ 时，x、$y \in [-1, 1]$ 可求和，其和为 $x + y$。那么 $+$弱结合，但不满足结合律。事实上，取 $x_0 = -\frac{1}{2}$、$x_1 = \frac{1}{2}$、$y_1 = 1$。此时 $(x_0 + x_1) + y_1$有定义，但 $x_0 + (x_1 + y_1)$没有定义，因为 $|x_1| + |y_1| = \frac{3}{2} > 1$。然而，在 $[0, 1]$ 上采用相同的定义，会得到一个满足结合律的运算。

[5]尽管在处理不动点时，仍需考虑将有限和延拓到无穷运算。

回顾方程（2）：只要 f_0, f_1, g_0, g_1 存在，表达式 $(f_0 + g_0) + (f_1 + g_1)$ 和 $(f_0 + f_1) + (g_0 + g_1)$ 就有定义且相等。取 $g_0 = 0$ 和 ~，并假设满足（D-zero），这意味着只要 $f_0, f_1, 0, g_1$ 存在，$(f_0 + f_1) + g_1$ 和 $f_0 + (f_1 + g_1)$ 就有定义且相等。取 $f_1 = 0$ 并假设满足（D-zero），这意味着只要 $f_0, 0, g_0, g_1$ 存在，$f_0 + (g_0 + g_1)$ 和 $(f_0 + g_0) + g_1$ 就有定义且相等。因此，若满足（D-zero），并且只要 $(f_0 + f_1) + g_1$ 有定义（分别地，$f_0 + (g_0 + g_1)$ 有定义），$f_0, f_1, 0, g_1$ 就存在（分别地，$f_0, 0, g_0, g_1$ 就存在），则结合律成立。这表明结合律可由以下公理推出。

~**定义 9.** 左预可求和结构 存在见证，如果对任意 f，$g \in \mathcal{C}(Y, \mathsf{D}X)$，~若 $\sigma \circ f \boxplus \sigma \circ g$ 则 $f \boxplus g$。我们称此性质为 （D-witness）。

~ ~ ~定理 *1.* 性质（*D-zero*）、（*D-com*）和（*D-witness*）使得对于任意对象 X, Y，$\mathcal{C}(X, Y)$ 具有偏交换幺半群的结构。也就是说，对于任意 $f, f_0, f_1, f_2 \in \mathcal{C}(X, Y)$:

- $f \boxplus 0$, $0 \boxplus f$ 和 $0 + f = f + 0 = f$;
- 若 $f_0 \boxplus f_1$，则 $f_1 \boxplus f_0$ 和 $f_0 + f_1 = f_1 + f_0$;
- 若 $(f_0 + f_1) + f_2$ 或 $f_0 + (f_1 + f_2)$ 有定义，则二者均有定义，且 $(f_0 + f_1) + f_2 = f_0 + (f_1 + f_2)$。

可以从这个二元和归纳地定义任意有限和的概念。空族总是可求和的，其和为 0。族 $(f_i)_{i \in I}$ 对于 $I \neq \emptyset$ 可求和，当且仅当存在 $\exists i_0 \in I$ 使得 $(f_i)^{i \in I/\{i_0\}}$ 可求和，且 $(\sum_{i \in I/\{i_0\}} f_i) \boxplus f_{i_0}$。于是定义 $\sum_{i \in I} f_i := \sum_{i \in I/\{i_0\}} f_i + f_{i_0}$。定理 2 所示的结论 [5] 保证了和的顺序选择无关紧要。

定理 2。 族 $(f_i)_{i \in I}$ 可求和，当且仅当对于所有划分[6] $I_1, \ldots, I_n$ *of* I，对于所有 $j \in [\![1, n]\!] := \{1, \ldots, n\}$，$(f_i)^{i \in I_j}$ 可求和，且 $(\sum_{i \in I_j} f_i)_{j \in [\![1, n]\!]}$ 可求和。此外，$\sum_{i \in I} f_i = \sum_{j \in [\![1, n]\!]} \sum_{i \in I_j} f_i$。*</output>*

~**定义 10.** 一个左可求和结构是一个左预可求和结构 $(\mathsf{D}, \pi_0, \pi_1, \sigma)$ ~ ~ ~，满足 (D-零)、(D-交换)和(D-见证)成立。

1.3 与可求和结构的比较

在线性逻辑的语境下，[5], 第一作者引入了预可求和结构的概念 $(\mathsf{S}, \pi_0, \pi_1, \sigma)$，它是一种可求和配对结构（回顾定义 1），其中 S 是一个函子，且 π_0、π_1、σ 均为自然变换。

定理 3. 以下各项等价

- $(\mathsf{S}, \pi_0, \pi_1, \sigma)$ 是一个左预可求和结构，并且每个态射都是可加的;
- $(\mathsf{S}, \pi_0, \pi_1, \sigma)$ 是一个预可求和结构/5/。

请记住，在 [5], 底层范畴 $\mathcal{C}$ 中，我们假设其在带基点集合的幺半范畴上富化，$\mathcal{C}(X, Y)$ 中的指定元素记作 0。特别地，$f \circ 0 = 0$ 始终成立。

[6] 在此我们允许某些 I_j 为空。

证明。设 $(\mathsf{S}\ \pi_0, \pi_1, \sigma)$ 是一个左预可求和结构，其中每个态射都是可加的。根据命题 3，对于任意 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$，我们可以定义 $\mathsf{S}f := f \circ \pi_0, f \circ \pi_1$，并且以下等式成立：$\pi_i \circ \mathsf{S}f = f \circ \pi_i$，$\sigma \circ \mathsf{S}f = f \circ \sigma$。此外，$\mathsf{S}$ 是一个函子：$\pi_i \circ \mathsf{Sid} = \mathsf{id} \circ \pi_i = \pi_i \circ \mathsf{id}$，且 $\pi_i \circ \mathsf{S}f \circ \mathsf{S}g = f \circ \pi_i \circ \mathsf{S}g = f \circ g \circ \pi_i = \pi_i \circ \mathsf{S}(f \circ g)$。因此，根据 π_i的联合单态性，$\mathsf{Sid} = \mathsf{id}$，且 $\mathsf{S}(f \circ g) = \mathsf{S}f \circ \mathsf{S}g$。那么，上文引入的等式 $\pi_i \circ \mathsf{S}f = f \circ \pi_i$和 $\sigma \circ \mathsf{S}f = f \circ \sigma$ 分别对应于 π_0、π_1 和 σ的自然性。

反过来，设 $(\mathsf{S}\ \pi_0, \pi_1, \sigma)$ 是 [5] 意义下的预可求和结构。π_0 和 π_1 的自然性保证，对于任意 f，$f \circ \pi_0 \boxplus f \circ \pi_1$，若有见证 $\mathsf{S}f$。σ 的自然性保证这两个态射的和为 $\sigma \circ \mathsf{S}f = f \circ \sigma$。最后，根据假设，$f \circ 0 = 0$。因此，根据命题 3，每个态射都是可加的。特别地，π_0, π_1 和 σ 都是可加的，所以 $(\mathsf{S}\ \pi_0, \pi_1, \sigma)$ 是一个左预可求和结构。 □

推论 1。 的可求和结构是 所有态射均可加的左可求和结构。

2 微分

2.1 微分结构

回顾公式（1）中的微分学主要思想。我们将其推广到部分可加情形：若对任意 u，当 $x \boxplus u$ 时，f 在 x 处可微，则 $f'(x) \cdot u$ 有定义，$f(x) \boxplus f'(x) \cdot u$，并且直观地说，$f(x + u) \simeq f(x) + f'(x) \cdot u$。因此，$f$ 的微分可以~视为一个函数 $\mathsf{D}f$，它将一对可求和元素 x, u 映射为一对~可求和元素 $\mathsf{D}f(x, u) = f(x)\ f'(x) \cdot u$。

~**定义 11。** 一个预微分结构 是一个左可求和结构 $(\mathsf{D}\ \pi_0, \pi_1, \sigma)$~ ~，并且对每个 $X, Y \in \mathsf{Obj}(\mathcal{C})$，都有一个算子 $\mathcal{C}(X, Y) \to \mathcal{C}(\mathsf{D}X, \mathsf{D}Y)$，也记作 ~ ~ ~D，且满足 $\pi_0 \circ \mathsf{D}f = f \circ \pi_0$。我们将 f的微分 定义为 $\mathsf{D}f := \pi_1 \circ \mathsf{D}f \in \mathcal{C}(\mathsf{D}X, Y)$。~根据我们的假设，$\mathsf{D}f = f \circ \pi_0, \mathsf{D}f$。

~此处我们不假设D 是一个函子；这将是链式法则。接着 ~等式 $\pi_0 \circ \mathsf{D}f = f \circ \pi_0$ 将表示 π_0 的自然性。我们还可以引入三个态射族 θ、l 和 c，它们的自然性将对应于一些微分公理。这与切范畴中的情形非常相似[7]，，区别在于函子 ~D 本身的结构[7]。

的可加性 σ确保 $\sigma \circ \pi_0 \boxplus \sigma \circ \pi_1$。也就是说，$(\pi_0 \circ \pi_0 + \pi_1 \circ \pi_0) \boxplus (\pi_0 \circ \pi_1 + \pi_1 \circ \pi_1)$。根据结合律，这意味着 $((\pi_0 \circ \pi_0 + \pi_1 \circ \pi_0) + \pi_0 \circ \pi_1) + \pi_1 \circ \pi_1$ 定义良好，因此 $(\pi_0 \circ \pi_0 + \pi_1 \circ \pi_0) + \pi_0 \circ \pi_1$ 定义良好。再次根据结合律，$\pi_0 \circ \pi_0 + (\pi_1 \circ \pi_0 + \pi_0 \circ \pi_1)$定义良好，因此下面的定义 12 是有意义的。

De ~ ~义 12。 对于任意对象 X，定义 $\theta \in \mathcal{C}(\mathsf{D}^2 X, \mathsf{D}X)$ 为 $\theta := \pi_0 \circ \pi_0, \pi_1 \circ \pi_0 + \pi_0 \circ \pi_1$。

~ ~由 (D-zero)，$(\pi_0 + 0) \boxplus (0 + \pi_1)$ 因此由 (D-witness)$\langle\!\langle \pi_0,\ 0 \rangle\!\rangle \boxplus \langle\!\langle 0,\ \pi_1 \rangle\!\rangle$。因此，下面的 定义 13是有意义的。

~ ~**定义 13.** 对于任意对象 X，定义 $\mathsf{l} \in \mathcal{C}(\mathsf{D}X, \mathsf{D}^2 X)$ 为 $\mathsf{l} := \pi_0, 0, 0, \pi_1$。

[7]或许可以将切范畴与相干微分结合为一个概念，从而能够公理化类似流形的对象，其中切空间上的向量加法仅部分定义。第一步应当是为这类对象构造令人信服的具体例子，这些例子或许与类型论语义有关。

由命题 2（左相容性） $\pi_0 \circ(\pi_0 + \pi_1) \boxplus \pi_1 \circ(\pi_0 + \pi_1)$。由$\sim\pi_0$ 和 π_1的可加性，这意味着 ($\pi_0 \circ \pi_0 + \pi_0 \circ \pi_1) \boxplus (\pi_1 \circ \pi_0 + \pi_1 \circ \pi_1)$。因此，根据（D-witness），$\pi_0 \circ \pi_0, \pi_0 \circ \pi_1 \boxplus \pi_1 \circ \pi_0$, $\pi_1 \circ \pi_1$，且下面的定义 14 是有意义的。

定义 14. 对于任意对象 X，我们可以定义 $\mathsf{c} \in \mathcal{C}(\tilde{\mathsf{D}}^2 X, \tilde{\mathsf{D}}^2 X)$，使得 $\mathsf{c} := \pi_0 \circ \pi_0, \pi_0 \circ \pi_1$, $\pi_1 \circ \pi_0, \pi_1 \circ \pi_1$。

理解这些态射如何作用于见证，可能会更容易。这对应于下文的 命题 8 。证明只需利用 π_0 和 π_1的联合单态性进行直接计算。

命题 8. 对于任意 x， u， v， $w \in \mathcal{C}(U, X)$，若$\langle\!\langle x, u \rangle\!\rangle$, $\langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle$ 有定义，

$$\begin{aligned} \theta \circ \langle\!\langle \langle\!\langle x, u \rangle\!\rangle, \langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle \rangle\!\rangle &= \langle\!\langle x, u + v \rangle\!\rangle \\ \mathsf{c} \circ \langle\!\langle \langle\!\langle x, u \rangle\!\rangle, \langle\!\langle v, w \rangle\!\rangle \rangle\!\rangle &= \langle\!\langle \langle\!\langle x, v \rangle\!\rangle, \langle\!\langle u, w \rangle\!\rangle \rangle\!\rangle \\ \mathsf{l} \circ \langle\!\langle x, u \rangle\!\rangle &= \langle\!\langle \langle\!\langle x, 0 \rangle\!\rangle, \langle\!\langle 0, u \rangle\!\rangle \rangle\!\rangle \end{aligned}$$

定义 15. 一个微分结构是一个预微分结构$(\mathsf{D}\ \pi_0,\ \pi_1,\ \sigma)$，其中满足以下公理，使用相关记号 $\mathsf{D}f$，该记号在 定义 11中引入：

(1) (Dproj-lin) $\mathsf{D}\pi_0 = \pi_0 \circ \pi_1$，$\mathsf{D}\pi_1 = \pi_1 \circ \pi_1$；(2) (Dsum-lin) $\mathsf{D}\sigma = \sigma \circ \pi_1$，$\mathsf{D}0 = 0$；(3) (D-chain)D 是一个函子（链式法则）；(4) (D-add) ι_0、 θ 是自然变换（导数的可加性）；(5) (D-lin) l 是自然变换（导数的线性）；(6) (D-Schwarz)c 是自然变换（施瓦茨法则）。

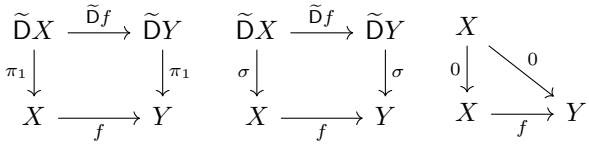
相干微分范畴是一个配备了微分结构的范畴 $\mathcal{C}$ 。

公理 (Dproj-lin) 对应于 D 关于 $_,_$ 的一项重要结构性质。公理 (Dsum-lin) 对应于导数算子的可加性，即 $(f + g)' = f' + g'$。公理 (D-chain) 对应于微分学中的链式法则。公理 (D-add) 表明 $u \mapsto f'(x) \cdot u$ 是可加的。公理 (D-lin) 表明 $u \mapsto f'(x) \cdot u$ 不仅是可加的，而且在 0 处等于其自身的导数。命题 4.2 的 [7] 中证明了（在笛卡尔微分范畴的左可加情形下），这意味着 $u \mapsto f'(x) \cdot u$ 在任意点都等于其自身的导数。相同的推理可以推广到我们的情形，但这需要过多的技术性论述，本文不作展开。最后，公理 (D-Schwarz) 对应于施瓦茨法则，即二阶导数 $f''(x)$（一个双线性映射）是对称的。第 3 节将这些公理作为 D 的性质进行了阐述，或许能帮助读者理解上述思想。

2.2 线性

在本节余下部分中，我们仅假设 $\mathcal{C}$ 配备了预微分结构。凡是用到相干微分范畴公理之处，都会明确指出。

定义 16 （D-线性）。 态射 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ 若满足以下图表交换，则称为 D-线性 。



注记 2。 第一个图表也可以写作 $\mathsf{D}(f) = f \circ \pi_1$，其含义是 $\mathsf{D}f = f \circ \pi_0, f \circ \pi_1$。

命题 9 f $f = f \circ \pi_1$。一个态射是 D- 线性的，当且仅当它可加且 D （即 $\mathsf{D}f = \langle\!\langle f \circ \pi_0, f \circ \pi_1 \rangle\!\rangle$）。

证明。 假设 f 是 D-线性的。那么 $f \circ 0 = 0$ 并且，根据 备注2， $f \circ \pi_0 \boxplus f \circ \pi_1$ 的见证 $\mathsf{D}f$。因此 $f \circ \pi_0 + f \circ \pi_1 := \sigma \circ \mathsf{D}f = f \circ \sigma$ 由假设成立。所以 f 根据 命题 3可加，而 $\mathsf{D}f = f \circ \pi_1$ 由假设成立。反过来，只有第二个图表不属于假设。

$$
\begin{aligned}
\sigma \circ \widetilde{\mathsf{D}} f &= (\pi_0 + \pi_1) \circ \widetilde{\mathsf{D}} f \\
&= \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}} f + \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}} f \quad \text{by Proposition 2} \\
&= f \circ \pi_0 + f \circ \pi_1 \quad \text{by assumption} \\
&= f \circ (\pi_0 + \pi_1) = f \circ \sigma \quad \text{by additivity of } f
\end{aligned}
$$

因此 f 是 D-线性的。 □

因此 D-线性态射尤其是可加的。正如我们将看到的，我们的可加概念和 D-线性态射最终与 [3], 的概念一致，因此在他们的框架中，可加性与线性的区别同样重要。

推论 2。 *(Dproj-lin)* 等价于 π_0 和 π_1的线性。 *(Dsum-lin)*等价于 σ 和 0的线性。

因此，D-线性态射是可加态射的特殊实例。我们对可加和 D-线性态射的定义最终与 [3] 中的定义一致，这要归功于下面的命题 10，因此，可加性与线性之间的这种区别，与它们所处的情形一样重要。

命题 10。 假设 *(Dproj-lin)*、*(D-chain)* 和 *(D-add)*，任意态射 $h \in \mathcal{C}(X, Y)$ 若满足 D $h = h \circ \pi_1$ 可加，则 D-线性。

证明。证明依赖于第 3 节的命题 18 和 19。若 $h = \mathsf{D}h \circ \pi_1$，则对任意 $g \in \mathcal{C}(Z, X)$， $h \circ g = h \circ \pi_1 \circ 0, g = \mathsf{D}h \circ 0, g$。因此，根据命题 18， $h \circ 0 = \mathsf{D}h \circ 0, 0 = 0$，并且再次根据命题 19， $h \circ (f_0 + f_1) = \mathsf{D}h \circ 0, f_0 + f_1 = \mathsf{D}h \circ 0, f_0 + \mathsf{D}h \circ 0, f_1 = h \circ f_0 + h \circ f_1$。因此， h 是可加的，所以根据命题 9， h 是 D-线性的。 □

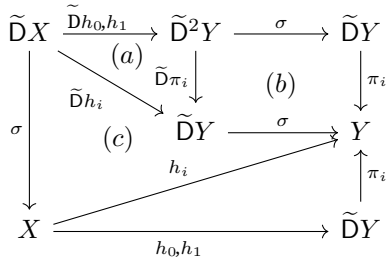
得益于 (D-chain)、(Dproj-lin) 和(Dsum-lin)，我们可以证明线性态射在复合、见证和求和下封闭。

命题 11。 假设*(D-chain)*，D-线性态射在复合和求逆下封闭。

证明。 利用 D 的函子性即可轻松验证。</output> □

命题 12 (D-线性性与配对)。 假设满足 *(D-chain)* 和 *(Dproj-lin)*。假设 满足 h_0， $h_1 \in \mathcal{C}(X, Y)$ 可求和，且二者均为 D-线性的。那么 $\langle\!\langle h_0, h_1 \rangle\!\rangle$ 是 D-线性的。

证明。 我们来处理涉及 σ 的图表，另外两个情形非常相似。由 π_i' 的联合单态性，只需针对 $i = 0,1$ 完成下面的图表追踪即可。



(a) 是 (D-chain) 的推论，(b) 是 (Dproj-lin) 的推论，而 (c) 则是 D-线性 h_i。 □

命题 13。 假设 *(D-chain)* 和 *(Dproj-lin)*，σ 是D-线性的，当且仅当对所有 h_0，$h_1 \in \mathcal{C}(X,\ Y)$ 可求和，且二者均为 D-线性，$h_0 + h_1$ 是D-线性的。

证明。假设 h_0, h_1 是 D-线性的。根据命题 12，h_0, h_1 是 D-线性的，因此 $h_0 + h_1 =$ $\sigma \circ h_0, h_1$ 是 D-线性的（D-线性在复合下封闭）。反过来，$\sigma = \pi_0 + \pi_1$ 和 π_0, π_1 是 D-线性的，因此 σ 是 D-线性的。 □

推论 3. 假设 *(Dproj-lin)*、*(Dsum-lin)* 和 *(D-chain)*，ι_0，ι_1，c，l θ 都是 D-线性的。

证明。 这些态射都是通过对 D-线性映射进行配对、求和和复合得到的。 □

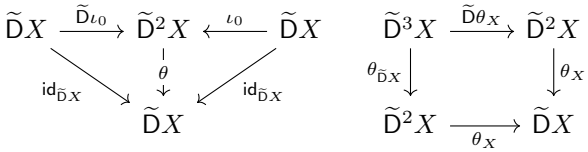
顺便一提，根据 备注2，D-线性意味着 π_i 满足 $\mathsf{D}\pi_i = \langle\!\langle \pi_i \circ \pi_0,\ \pi_i \circ \pi_1 \rangle\!\rangle$。特别是，这意味着 $\mathsf{c} = \langle\!\langle \mathsf{D}\pi_0,\ \mathsf{D}\pi_1 \rangle\!\rangle$。这非常有用，因为这样一来，配对的微分就可以由各自微分的配对得到。

命题 *14.* 假设 *(Dproj-lin)*、*(D-chain)*。设 $f_0, f_1 \in \mathcal{C}(X, Y)$ 满足 $f_0 \boxplus f_1$.
那么 $Df_0 \boxplus Df_1$，且 $\langle\!\langle Df_0, Df_1 \rangle\!\rangle = \mathsf{c} \circ D\langle\!\langle f_0, f_1 \rangle\!\rangle$。

Proof. $\pi_i \circ \mathsf{c} \circ \widetilde{\mathsf{D}}\langle\!\langle f_0, f_1 \rangle\!\rangle = \widetilde{\mathsf{D}}\pi_i \circ \widetilde{\mathsf{D}}\langle\!\langle f_0, f_1 \rangle\!\rangle = \widetilde{\mathsf{D}}f_i$. □

2.3 微分单子

命题 15. 假设 *(D-chain)*，*(Dproj-lin)* 和 *(Dsum-lin)*，以下图表可交换。



证明。根据推论 3，ι_0 是 D-线性的。因此，由备注2，$\mathsf{D}\iota_0 = \iota_0 \circ \pi_0$, $\iota_0 \circ \pi_1 = \pi_0, 0, \pi_1, 0$。因此，$\theta \circ \mathsf{D}\iota_0 = \pi_0, 0 + \pi_1 = \pi_0, \pi_1 =$ 恒等态射$_{\widetilde{\mathsf{D}}X}$ 由命题 8 得出。接下来，$\iota_0^{\mathsf{D}X} = \pi_0, \pi_1, 0, 0$，因为 $\pi_0, \pi_1 =$ 恒等态射且 $0^{X}, {}_{X}, 0^{X}, {}_{X} = 0^{\mathsf{D}X}, {}_{\mathsf{D}X}$。再次根据命题 8，$\theta \circ \iota_0 = \pi_0, \pi_1 + 0 = \pi_0, \pi_1 =$ 恒等态射 $\widetilde{\mathsf{D}}X$，因此这些三角形交换。

这个交换图可通过直接计算得到。为便于阅读，我们用简单的并置表示投影的复合。下方路径可利用加法的左相容性（命题 2）以及投影的可加性进行化简：

$$\begin{aligned}\theta \circ \theta &= \langle\!\langle \pi_0 \circ \pi_0 \circ \theta, \pi_1 \circ \pi_0 \circ \theta + \pi_0 \circ \pi_1 \circ \theta \rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle \pi_0 \circ \pi_0 \circ \pi_0, \pi_1 \circ \pi_0 \circ \pi_0 + \pi_0 \circ (\pi_1 \circ \pi_0 + \pi_0 \circ \pi_1) \rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle \pi_0 \circ \pi_0 \circ \pi_0, \pi_1 \circ \pi_0 \circ \pi_0 + (\pi_0 \circ \pi_1 \circ \pi_0 + \pi_0 \circ \pi_0 \circ \pi_1) \rangle\!\rangle .\end{aligned}$$

上方路径可以通过D的线性 θ 以及和的左相容性（命题 2）化简：

$$\begin{aligned}\theta \circ \widetilde{\mathsf{D}}\theta &= \langle\!\langle \pi_0 \circ \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}\theta, \pi_1 \circ \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}\theta + \pi_0\pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}\theta \rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle \pi_0 \circ \theta \circ \pi_0, \pi_1 \circ \theta \circ \pi_0 + \pi_0 \circ \theta \circ \pi_1 \rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle \pi_0 \circ \pi_0 \circ \pi_0, (\pi_1 \circ \pi_0 + \pi_0 \circ \pi_1) \circ \pi_0 + \pi_0 \circ \pi_0 \circ \pi_1) \rangle\!\rangle \\ &= \langle\!\langle \pi_0 \circ \pi_0 \circ \pi_0, (\pi_1 \circ \pi_0 \circ \pi_0 + \pi_0 \circ \pi_1 \circ \pi_0) + \pi_0 \circ \pi_0 \circ \pi_1) \rangle\!\rangle .\end{aligned}$$

利用部分和的结合律，我们得出这两个态射相等。

□

推论 4。 *(Dproj-lin)*、*(Dsum-lin)*、*(D-chain)* 和*(D-add)* 蕴含$(\mathsf{D}\ \iota_0,\ \theta)$ 是一个单子。

3 将公理解释为导数的性质

本节中，$\mathcal{C}$ 只假设为一个配备了预微分结构（定义 11）的范畴。我们将说明，相干微分范畴的各种公理对应于微分学中的标准规则，这些规则以关于$\mathsf{D}(f)$的性质来表述。本节的结果仅对第 6 节有必要，但也有助于我们形成对相干微分公理的直观认识。

所有证明都类似，都是利用 π_0 和 π_1 的联合单态性将公理化简为一组等式，然后证明其中只有一个等式是非平凡的。下文中，“线性”一词始终指 D-线性。

命题 16. D 是一个函子，当且仅当 $\mathsf{D}(\text{恒等态射}) = \pi_1$ 且 $\mathsf{D}(g \circ f) = \mathsf{D}(g) \circ \langle\!\langle f \circ \pi_0, \mathsf{D}(f) \rangle\!\rangle$。

证明。 D 是一个函子，当且仅当 $\mathsf{D}\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{\mathsf{D}X}$，且对于任意 g, f，$\mathsf{D}(g \circ f) = \mathsf{D}g \circ \mathsf{D}f$。根据 π_i 的联合单态性，$\mathsf{D}\mathrm{id} = \mathrm{id}$ 当且仅当 $\pi_i \circ \mathsf{D}\mathrm{id} = \pi_i \circ \mathrm{id} = \pi_i$ 且 $\pi_0 \circ \mathsf{D}\mathrm{id} = \mathsf{D}\mathrm{id} \circ \pi_0 = \pi_0 \mathrm{id}$。但根据预微分结构的假设，$\mathsf{D}\mathrm{id} = \mathrm{id}$ 当且仅当 $\pi_1 \circ \mathsf{D}\mathrm{id} = \pi_1$，也就是说，当且仅当 $\mathsf{D}(\mathrm{id}) = \pi_1$。同理，根据预微分结构的假设，$\pi_0 \circ \mathsf{D}g \circ \mathsf{D}f = g \circ \pi_0 \circ \mathsf{D}f = g \circ f \circ \pi_0 = \pi_0 \circ \mathsf{D}(g \circ f)$。因此，根据 π_i 的联合单态性，$\mathsf{D}(g \circ f) = \mathsf{D}g \circ \mathsf{D}f$ 当且仅当 $\pi_1 \circ \mathsf{D}(g \circ f) = \pi_1 \circ \mathsf{D}g \circ \mathsf{D}f$。根据 D 的定义，这恰好对应于等式 $\mathsf{D}(g \circ f) = \mathsf{D}(g) \circ \mathsf{D}f = \mathsf{D}(g) \circ f \circ \pi_0, \mathsf{D}(f)$ □

命题 *17.* 假设 *(Dproj-lin)*，σ 是线性的，当且仅当 $D\sigma = D\pi_0 + D\pi_1$。假设 *(Dproj-lin)* 和 *(D-chain)*，σ 是线性的，当且仅当对任意可求和的 f_0, f_1，$D(f_0 + f_1) = Df_0 + Df_1$ （回忆一下，根据命题 *14*，$Df_0 \boxplus Df_1$）。

~ ~ ~证明。由 π_i 的线性，$\mathsf{D}\pi_i = \pi_i \circ \pi_0, \pi_i \circ \pi_1$，因此根据命题 4，$\mathsf{D}\pi_0 + \mathsf{D}\pi_1 = \pi_0 \circ \pi_0 + \pi_1 \circ \pi_0, \pi_0 \circ \pi_1 + \pi_1 \circ \pi_1 = (\pi_0 + \pi_1) \circ \pi_0, (\pi_0 + \pi_1) \circ \pi_1 = \sigma \circ \pi_0, \sigma \circ \pi_1$。但是，根据命题 9，$\sigma$ 是线性的
~ ~ ~当且仅当 $\mathsf{D}\sigma = \sigma \circ \pi_0, \sigma \circ \pi_1$，也就是说，当且仅当 $\mathsf{D}\sigma = \mathsf{D}\pi_0 + \mathsf{D}\pi_1$。

对于引理的第二部分，注意到

$f_0 = \pi_0$ $f_1 = \pi_1$ and 的右侧陈述恰好是 $\mathsf{D}\sigma = \widetilde{\mathsf{D}}\pi_0 + \widetilde{\mathsf{D}}\pi_1$，因此逆向蕴含成立。对于正向蕴含，注意到

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathsf{D}}(f_0 + f_1) &= \widetilde{\mathsf{D}}(\sigma \circ \langle\!\langle f_0, f_1 \rangle\!\rangle) \\
&= \widetilde{\mathsf{D}}\sigma \circ \widetilde{\mathsf{D}}\langle\!\langle f_0, f_1 \rangle\!\rangle \quad \text{by (D-chain)} \\
&= (\widetilde{\mathsf{D}}\pi_0 + \widetilde{\mathsf{D}}\pi_1) \circ \widetilde{\mathsf{D}}\langle\!\langle f_0, f_1 \rangle\!\rangle \quad \text{by assumptions} \\
&= \widetilde{\mathsf{D}}\pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}\langle\!\langle f_0, f_1 \rangle\!\rangle + \widetilde{\mathsf{D}}\pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}\langle\!\langle f_0, f_1 \rangle\!\rangle \\
&= \widetilde{\mathsf{D}}f_0 + \widetilde{\mathsf{D}}f_1 \quad \text{by (D-chain)}
\end{aligned}$$

□

推论 5. 假设 *(Dproj-lin)* 和 *(D-chain)*，σ 是线性的，当且仅当对任意 f_0，f_1可求和，$\mathsf{D}(f_0 + f_1) = \mathsf{D}(f_0) + \mathsf{D}(f_1)$

~ ~ ~证明。σ 的线性等价于对任意可求和的 f_0, f_1，都有 $\mathsf{D}(f_0 + f_1) = \mathsf{D}f_0 + \mathsf{D}f_1$。根据命题 4，这等价于 $(f_0 + f_1) \circ \pi_0, \mathsf{D}(f_0 + f_1) = f_0 \circ \pi_0 + f_1 \circ \pi_0, \mathsf{D}(f_0) + \mathsf{D}(f_1)$。加法的左相容性（命题 2）保证第一坐标始终相等。因此，σ 是线性的，当且仅当对所有 $f_0 \boxplus f_1$，都有 $\mathsf{D}(f_0 + f_1) = \mathsf{D}(f_0) + \mathsf{D}(f_1)$。 □

命题 18. 以下断言等价：

(1) ι_0 是自然的；*(2)* 对任意 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$，$\mathsf{D}f \circ \iota_0 = 0$；*(3)* 对任意 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$、任意对象 U 以及 $x \in \mathcal{C}(U, X)$，$\mathsf{D}f \circ \langle\!\langle x, 0 \rangle\!\rangle = 0$。

~证明。(1) $\Leftrightarrow$ (2)。根据 π_i 的联合单态性，对于任意 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$，$\mathsf{D}f \circ \iota_0 = \iota_0 \circ f$ 当且仅当 $\pi_0 \circ \mathsf{D}f \circ \iota_0 = \pi_0 \circ \iota_0 \circ f = f$ 且 $\pi_1 \circ \mathsf{D}f \circ \iota_0 = \pi_1 \circ \iota_0 \circ f = 0$。第一个条件根据 π_0 的自然性和 ι_0 的定义总是成立。因此，ι_0 是自然的，当且仅当第二个恒等式成立。这个等式正是 (2)。

(2) $\Leftrightarrow$ (3)。正向可直接通过将 (2) 中的恒等态射与 x 在右侧复合得到。反向可直接将 (3) 中的等式应用于 $x =$ 恒等态射$_X$。

□

命题 19。 假设*(Dproj-lin)* 和 *(D-chain)*，以下断言等价：

(1) θ 是自然的；~ ~*(2)* 对任意 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$，$\mathsf{D}f \circ \mathsf{D}\pi_0 \boxplus \mathsf{D}f \circ \pi_0$ 且 $\mathsf{D}f \circ \theta = \mathsf{D}f \circ \mathsf{D}\pi_0 + \mathsf{D}f \circ \pi_0$；*(3)* 对任意 $f \in \mathcal{C}(X, Y)$、任意对象 U 以及任意可求和的 $x, u, v \in \mathcal{C}(U, X)$，$\mathsf{D}f \circ \langle\!\langle x, u \rangle\!\rangle \boxplus \mathsf{D}f \circ \langle\!\langle x, v \rangle\!\rangle$ 并且

$$\mathsf{D}f \circ \langle\!\langle x, u + v \rangle\!\rangle = \mathsf{D}f \circ \langle\!\langle x, u \rangle\!\rangle + \mathsf{D}f \circ \langle\!\langle x, v \rangle\!\rangle .$$

证明。 (1) $\Leftrightarrow$ (2)。由 π_i 的联合单态性可知，对任意 $f \in \mathcal{C}(X,Y)$，$\mathsf{D}f \circ \theta = \theta \circ \mathsf{D}^2 f$ 当且仅当 $\pi_0 \circ \mathsf{D}f \circ \theta = \pi_0 \circ \theta \circ \mathsf{D}^2 f$ 且 $\pi_1 \circ \mathsf{D}f \circ \theta = \pi_1 \circ \theta \circ \mathsf{D}^2 f$。等式 $\pi_0 \circ \mathsf{D}f \circ \theta = \pi_0 \circ \theta \circ \mathsf{D}^2 f$ 总是成立。事实上

$$\begin{aligned}
\pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}} f \circ \theta &= f \circ \pi_0 \circ \theta \quad \text{by naturality of } \pi_0 \\
&= f \circ \pi_0 \circ \pi_0 \quad \text{by definition of } \theta \\
\pi_0 \circ \theta \circ \widetilde{\mathsf{D}}^2 f &= \pi_0 \circ \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}^2 f \quad \text{by definition of } \theta \\
&= f \circ \pi_0 \circ \pi_0 \quad \text{by naturality of } \pi_0 .
\end{aligned}$$

等式左边的 $\pi_1 \circ \mathsf{D}f \circ \theta = \pi_1 \circ \theta \circ \mathsf{D}^2 f$ 根据定义就是 $\mathsf{D}(f) \circ \theta$。右边可改写如下。

$$\begin{aligned}
\pi_1 \circ \theta \circ \widetilde{\mathsf{D}}^2 f &= (\pi_0 \circ \pi_1 + \pi_1 \circ \pi_0) \circ \widetilde{\mathsf{D}}^2 f \\
&= \pi_0 \circ \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}^2 f + \pi_1 \circ \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}^2 f \quad \text{by Proposition 2} \\
&= \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}} \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}^2 f + \pi_1 \circ \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}^2 f \quad \text{by } \widetilde{\mathsf{D}}\text{-linearity of } \pi_0 \\
&= \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}(\pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}} f) + \pi_1 \circ \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}^2 f \quad \text{by (D-chain)} \\
&= \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}(f \circ \pi_0) + \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}} f \circ \pi_0 \quad \text{by naturality of } \pi_0 \\
&= \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}} f \circ \widetilde{\mathsf{D}} \pi_0 + \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}} f \circ \pi_0 \quad \text{by (D-chain)} \\
&= \mathsf{D}f \circ \widetilde{\mathsf{D}} \pi_0 + \mathsf{D}f \circ \pi_0 \quad \text{by definition}
\end{aligned}$$

因此，所考虑的第二个等式等价于式 (2)。

(2) 根据 (3) 的线性性，$\mathsf{D}\pi_0 = \pi_0 \circ \pi_0, \pi_0 \circ \pi_1$。于是，将式 (2) 右合成 $x, v, u, 0$，即可直接得到正向结论。反过来，将式 (3) 应用于 $x = \pi_0 \circ \pi_0$、$u = \pi_1 \circ \pi_0$ 和 $v = \pi_0 \circ \pi_1$，即可直接得到逆向结论。 □

注 3。注意，假设满足 (D-chain) 和 (Dproj-lin)，则 $\mathsf{D}(\mathsf{D}(f)) = \pi_1 \circ \mathsf{D}(\pi_1 \circ \mathsf{D}f) = \pi_1 \circ \mathsf{D}\pi_1 \circ \mathsf{D}^2 f = \pi_1 \circ \pi_1 \circ \mathsf{D}^2 f$。因此，$\mathsf{D}(\mathsf{D}(f))$ 不过是 $\mathsf{D}^2 f$ 的最右坐标。这对本部分接下来的内容会有所帮助。

命题 20. 假设 *(Dproj-lin)*、*(D-chain)* 以及 ι_0 的自然性，则以下断言等价：

(1) l 是自然的；

(2) 对所有态射 $f \in \mathcal{C}(X,Y)$，$\mathsf{D}(\mathsf{D}(f)) \circ \mathsf{l} = \mathsf{D}(f)$；

(3) 对所有态射 $f \in \mathcal{C}(X,Y)$，对所有可求和态射 $x, u \in \mathcal{C}(U,X)$，

$$\mathsf{D}(\mathsf{D}(f)) \circ \langle\!\langle \langle\!\langle x, 0 \rangle\!\rangle, \langle\!\langle 0, u \rangle\!\rangle \rangle\!\rangle = \mathsf{D}(f) \circ \langle\!\langle x, u \rangle\!\rangle .$$

证明。根据 π_i 的联合单态性，l 是自然的，当且仅当对于所有 f 和所有 $i\ j \in \{0,1\}$，$\pi_i \circ \pi_j \circ \mathsf{D}^2 f \circ \mathsf{l} = \pi_i \circ \pi_j \circ \mathsf{l} \circ \mathsf{D}f$。根据注 3（并且因为 $\pi_1 \circ \pi_1 \circ \mathsf{l} = \pi_1$），关于 $i = j = 1$ 的方程恰好对应于方程 $\mathsf{D}(\mathsf{D}(f)) \circ \mathsf{l} = \mathsf{D}(f)$。因此，只需证明当 $(i,j) \neq (1,1)$ 时，$\pi_i \circ \pi_j \circ \mathsf{D}^2 f \circ \mathsf{l} = \pi_i \circ \pi_j \circ \mathsf{l} \circ \mathsf{D}f$ 总成立，即可得出 (1) 等价于 (2)。

- Case $i = 0, j = 0$: $\pi_0 \circ \pi_0 \circ \mathsf{l} \circ \widetilde{\mathsf{D}} f = \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}} f = f \circ \pi_0$ and $\pi_0 \circ \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}^2 f \circ \mathsf{l} = f \circ \pi_0 \circ \pi_0 \circ \mathsf{l} = f \circ \pi_0$;

- 情形 $i=1,j=0$: $\pi_0\circ\pi_1\circ\cdots=\pi_1\circ\pi_0\circ\cdots=\pi_1\circ\cdots=\mathsf{l}\,\mathsf{D}f=0\circ\mathsf{D}f=0$ 和 $\mathsf{D}^2f\circ\mathsf{l}\,\mathsf{D}f\circ\pi_0\circ\mathsf{l}\,\pi_1\circ\mathsf{D}f\circ\iota_0\circ\pi_0=\pi_1\circ\iota_0\circ f\circ\pi_0=0$，这归功于 ι_0 的自然性；
- 情形 $i=0,j=1$: $\pi_0\circ\pi_1\circ\cdots=\mathsf{l}\circ\mathsf{D}f=0\circ\mathsf{D}f=0$ 和 $\pi_0\circ\pi_1\circ\mathsf{D}^2f\circ\mathsf{l}=\pi_1\circ\mathsf{D}\pi_0\circ\mathsf{D}^2f\circ\mathsf{l}\,\pi_1\circ\mathsf{D}f\circ\mathsf{D}\pi_0\circ\mathsf{l}=\pi_1\circ\mathsf{D}f\circ\iota_0\circ\pi_0=\pi_1\circ\iota_0\circ f\circ\pi_0=0$，这归功于 ι_0 的自然性。

接下来，(2) 是 (3) 在 $x=\pi_0$ 和 $u=\pi_1$的特例。反过来，假设 (2)，则 $\mathsf{D}(\mathsf{D}(f))\circ\langle x,0,0,u\rangle=\mathsf{D}(\mathsf{D}(f))\circ\mathsf{l}\circ\langle x,u\rangle=\mathsf{D}(\mathsf{D}(f))\circ\langle x,u\rangle=\mathsf{D}(f)\circ\langle x,u\rangle$。 □

命题 21. 假设*(Dproj-lin)* 和*(D-chain)*，以下断言等价：

(1) c是自然的；

(2) 对所有态射 $f\in\mathcal{C}(X,Y)$，$\mathsf{D}(\mathsf{D}(f))\circ\mathsf{c}=\mathsf{D}(\mathsf{D}(f))$；

(3) 对所有可求和的态射 $f\in\mathcal{C}(X,Y)$ 和 $x,u,v,w\in\mathcal{C}(U,X)$，

$$\mathsf{D}(\mathsf{D}(f))\circ\langle\!\langle\langle x,u\rangle,\langle v,w\rangle\rangle\!\rangle=\mathsf{D}(\mathsf{D}(f))\circ\langle\!\langle\langle x,v\rangle,\langle u,w\rangle\rangle\!\rangle$$

证明。由 π_i 的联合单态性可知，c 自然，当且仅当对所有 $i,j\in\{0,1\}$，$\pi_i\circ\pi_j\circ\mathsf{D}^2f\circ\mathsf{c}=\pi_i\circ\pi_j\circ\mathsf{c}\circ\mathsf{D}^2f$。但 $\pi_i\circ\pi_j\circ\mathsf{c}\circ\mathsf{D}^2f=\pi_j\circ\pi_i\circ\mathsf{D}^2f$。于是，根据注 3，关于 $i=j=1$ c 的方程恰好对应于方程 $\mathsf{D}(\mathsf{D}(f))\circ\mathsf{c}=\mathsf{D}(\mathsf{D}(f))$。因此，只需证明当 $(i,j)\neq(1,1)$ 时，$\pi_i\circ\pi_j\circ\mathsf{D}^2f\circ\mathsf{c}=\pi_j\circ\pi_i\circ\mathsf{D}^2f$，即可得出 (1) 等价于 (2)。

- $i=0,j=0$: 该等式由等式的自反性成立。
- $i=1,j=0$: $\pi_0\circ\pi_1\circ\cdots=\pi_0\circ\cdots=\pi_1\circ\pi_0\circ\cdots=\mathsf{D}^2f=\pi_1\circ\mathsf{D}\,\mathsf{D}^2f=\pi_1\circ\mathsf{D}f\circ\mathsf{D}$ 且 $\mathsf{D}^2f\circ\mathsf{c}\,\pi_1\circ\mathsf{D}f\circ\pi_0\circ\mathsf{c}=\pi_1\circ\mathsf{D}f\circ\mathsf{D}\pi_0$，因此两边相等。
- $i=0,j=1$: $\pi_0\circ\pi_1\circ\mathsf{D}^2f\circ\mathsf{c}=\pi_1\circ\pi_0\circ\mathsf{D}^2f$ 当且仅当 $\pi_0\circ\pi_1\circ\mathsf{D}^2f=\pi_1\circ\pi_0\circ\mathsf{D}^2f\circ\mathsf{c}$，因为 c 是对合的。但如上所示，该等式成立。

接下来，对于 $x=\pi_0\circ\pi_0$、$u=\pi_0\circ\pi_1$、$v=\pi_1\circ\pi_0$ 和 $w=\pi_1\circ\pi_1$，(2) 是 (3) 的一个特例。反过来，若 (3) 成立，则 $\mathsf{D}(\mathsf{D}(f))\circ\langle x,u,v,w\rangle=\mathsf{D}(\mathsf{D}(f))\circ\mathsf{c}\circ\langle x,v,u,w\rangle=\mathsf{D}(\mathsf{D}(f))\circ\langle x,v,u,w\rangle$. □

4 与笛卡尔积的相容性

本节假设 $\mathcal{C}$ 是笛卡尔的，并配备了左可求和结构 $(\mathsf{D},\pi_0,\pi_1,\sigma)$。

记号 2. 我们沿用线性逻辑中的记号，用 & 表示笛卡尔积。对于任意对象 Y_0,Y_1，投影记作 $\mathsf{p}_i\in\mathcal{C}(Y_0\,\&\,Y_1,Y_i)$，而 $f_0\in\mathcal{C}(X,Y_0)$ 与 $f_1\in\mathcal{C}(X,Y_1)$ 的配对记作 $\langle f_0,f_1\rangle$。最后，终对象记作 $\top$。注意，笛卡尔积泛性质中配对的唯一性可以理解为 p_i 的联合单态性。

4.1 笛卡尔积和可求和结构

定义 17. 如果满足 $\langle 0,0\rangle = 0$，并且对所有 $f_0, g_0 \in \mathcal{C}(X, Y_0)$ 和 $f_1, g_1 \in \mathcal{C}(X, Y_1)$，可求和结构 (D π_0, π_1, σ) 就与笛卡尔积相容：

- $\langle f_0, f_1\rangle \boxplus \langle g_0, g_1\rangle$ 当且仅当 $f_0 \boxplus g_0$ 和 $f_1 \boxplus g_1$
- 然后 $\langle f_0, f_1\rangle + \langle g_0, g_1\rangle = \langle f_0 + f_1, g_0 + g_1\rangle$。

也就是说，和是按分量计算的。下面我们更详细地分解这个定义。

命题 22. 以下各项等价

- p_0,p_1 是可加的；
- $\langle 0,\ 0\rangle = 0$ 且对所有的 $f_0,\ g_0 \in \mathcal{C}(X,\ Y_0)$ 以及 $f_1,\ g_1 \in \mathcal{C}(X,\ Y_1)$，若 $\langle f_0,\ f_1\rangle \boxplus \langle g_0,\ g_1\rangle$ 则$f_0 \boxplus g_0,\ f_1 \boxplus g_1$ 且 $\langle f_0,\ f_1\rangle + \langle g_0,\ g_1\rangle = \langle f_0 + f_1,\ g_0 + g_1\rangle$。

证明。 假设 p_0,p_1 是可加的。那么 $\mathsf{p}_i \circ 0 = 0 = \mathsf{p}_i \circ \langle 0,0\rangle$。因此，根据联合单态性，$0 = \langle 0,0\rangle$。此外，假设 $\langle f_0, f_1\rangle \boxplus \langle g_0, g_1\rangle$。那么，根据 p_i的可加性，$\mathsf{p}_i \circ \langle f_0, f_1\rangle = f_i$和 $\mathsf{p}_i \circ \langle g_0, g_1\rangle = g_i$是可求和的，并且 $f_i + g_i = \mathsf{p}_i \circ (\langle f_0, f_1\rangle + \langle g_0, g_1\rangle)$。因此，$\mathsf{p}_i$ 的联合单态性意味着 $\langle f_0, f_1\rangle + \langle g_0, g_1\rangle = \langle f_0 + f_1, g_0 + g_1\rangle$。

反过来，由于 $\langle 0,0\rangle = 0$，我们有 $\mathsf{p}_i \circ 0 = \mathsf{p}_i \circ \langle 0,0\rangle = 0$。令 $f, g \in \mathcal{C}(X, Y_0 \,\&\, Y_1)$ 为可求和的。可以写成 $f = \langle \mathsf{p}_0 \circ f,\ \mathsf{p}_1 \circ f\rangle$ 和 $g = \langle \mathsf{p}_0 \circ g,\ \mathsf{p}_1 \circ g\rangle$。由于 $f \boxplus g$，我们有 $\mathsf{p}_i \circ f \boxplus \mathsf{p}_i \circ g$ 和 $f + g = \langle \mathsf{p}_0 \circ f + \mathsf{p}_0 \circ g,\ \mathsf{p}_1 \circ f + \mathsf{p}_1 \circ g\rangle$。对这个等式应用 p_i，得到 $\mathsf{p}_i \circ (f + g) = \mathsf{p}_i \circ f + \mathsf{p}_i \circ g$，因此 p_i 是可加的。 □

推论 6. 如果p_0 和p_1 是可加的，那么$0 \,\&\, 0 = 0$，并且对于所有 $f_0,\ g_0 \in \mathcal{C}(X_0,\ Y_0)$ 以及$f_1,\ g_1 \in \mathcal{C}(X_1,\ Y_1)$，若 $f_0 \,\&\, f_1 \boxplus g_0 \,\&\, g_1$，则 $f_0 \boxplus g_0$，$f_1 \boxplus g_1$，且 $f_0 \,\&\, f_1 + g_0 \,\&\, g_1 = (f_0 + g_0) \,\&\, (f_1 + g_1)$。

证明。 我们只需利用以下事实： $f \,\&\, g = \langle f \circ \mathsf{p}_0,\ g \circ \mathsf{p}_1\rangle$ 以及命题 22 再结合和关于复合的左相容性（命题 2）。 □

现在假设投影 p_0 和 p_1 是可加的。这使我们能够为任意对象 X_0, X_1 定义一个态射 $\mathsf{c}_{\&} \in \mathcal{C}(\mathrm{D}(X_0 \,\&\, X_1), \mathrm{D}X_0 \,\&\, \mathrm{D}X_1)$，其定义为 $\mathsf{c}_{\&} := \langle \mathsf{p}_0 \circ \pi_0, \mathsf{p}_0 \circ \pi_1, \mathsf{p}_1 \circ \pi_0, \mathsf{p}_1 \circ \pi_1\rangle$。换言之，$\pi_i \circ \mathsf{p}_j \circ \mathsf{c}_{\&} = \mathsf{p}_j \circ \pi_i$，即

$$\mathsf{c}_{\&} \circ \langle\!\langle \langle f_0, f_1\rangle, \langle g_0, g_1\rangle \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \langle\!\langle f_0, g_0\rangle\!\rangle, \langle\!\langle f_1, g_1\rangle\!\rangle \rangle\!\rangle .$$

这与翻转 c 非常相似（它交换中间的两个坐标），但该配对没有关联任何可求和条件。

定理 4。 以下断言等价

(1) $\mathsf{c}_{\&}$ 是一个同构；*(2)* $\pi_0 \,\&\, \pi_0 \boxplus \pi_1 \,\&\, \pi_1$；*(3)* 对于任意 $f_0, g_0 \in \mathcal{C}(X, Y_0)$，$f_1, g_1 \in \mathcal{C}(X, Y_1)$，若 $f_0 \boxplus g_0$ *and* $f_1 \boxplus g_1$，则 $f_0 \,\&\, f_1 \boxplus g_0 \,\&\, g_1$；*(4)* 对于任意 $f_0, g_0 \in \mathcal{C}(X, Y_0)$，$f_1, g_1 \in \mathcal{C}(X, Y_1)$，若 $f_0 \boxplus g_0$ *and* $f_1 \boxplus g_1$，则 $\langle f_0, f_1\rangle \boxplus \langle g_0, g_1\rangle$

然后 $\langle\!\langle \pi_0 \,\&\, \pi_0, \pi_1 \,\&\, \pi_1 \rangle\!\rangle = \mathsf{c}^{-1}_{\&}$。

证明。(1) ⇒ (2)：假设 $\mathsf{c}_\&$ 是一个同构，其逆为 w。那么 $\pi_i \circ \mathsf{p}_j = \pi_i \circ \mathsf{p}_j \circ \mathsf{c}_\& \circ w = \mathsf{p}_j \circ \pi_i \circ w$。但是，根据 p_j 的自然性，$\pi_i \circ \mathsf{p}_j = \mathsf{p}_j \circ (\pi_i \& \pi_i)$，因此 $\mathsf{p}_j \circ \pi_i \circ w = \mathsf{p}_j \circ (\pi_i \& \pi_i)$。根据 p_j's 的联合单态性，我们有 $\pi_i \circ w = (\pi_i \& \pi_i)$。也就是说 $w = \pi_0 \& \pi_0, \pi_1 \& \pi_1$。

(2) ⇒ (1)：假设 $\pi_0 \& \pi_0 \boxplus \pi_1 \& \pi_1$，其见证为 w。那么，$\mathsf{p}_j \circ \pi_i \circ w = \mathsf{p}_j \circ (\pi_i \& \pi_i) = \pi_i \circ \mathsf{p}_j$。因此

$$\mathsf{p}_j \circ \pi_i \circ w \circ \mathsf{c}_\& = \pi_i \circ \mathsf{p}_j \circ \mathsf{c}_\& = \mathsf{p}_j \circ \pi_i$$
$$\pi_i \circ \mathsf{p}_j \circ \mathsf{c}_\& \circ w = \mathsf{p}_j \circ \pi_i \circ w = \pi_i \circ \mathsf{p}_j$$

由 p_j's 和 π_i's 的联合单态性可得 $w \circ \mathsf{c}_\& =$ 恒等态射$_{\widetilde{\mathsf{D}}(X_0 \& X_1)}$ 以及 $\mathsf{c}_\& \circ w =$恒等态射$_{\widetilde{\mathsf{D}}X_0 \& \widetilde{\mathsf{D}}X_1}$。

(2) ⇒ (3)：我们有 $w \circ f_0 \& f_1 \boxplus w \circ g_0 \& g_1$，我们得到 $w \circ f_0 = f_0 \& f_1$ 以及 $\pi_1 \circ w = g_0 \& g_1$，使得 $f_0 \& f_1 \boxplus g_0 \& g_1$。

(3) ⇒ (2)：(2) 是情形 (3) 的特例。

(3) ⇒ (4)：假设 $f_0 \boxplus g_0$ 和 $f_1 \boxplus g_1$。那么根据假设，$f_0 \& f_1 \boxplus g_0 \& g_1$。令 $w = f_0 \& f_1, g_0 \& g_1 \circ \langle$恒等态射, 恒等态射$\rangle$。于是 $\pi_0 \circ w = \langle f_0, f_1 \rangle$ 和 $\pi_1 \circ w = \langle g_0, g_1 \rangle$，使得 $\langle f_0, f_1 \rangle \boxplus \langle g_0, g_1 \rangle$。

(4) ⇒ (3)：假设 $f_0 \boxplus g_0$ 和 $f_1 \boxplus g_1$。那么 $f_0 \circ \mathsf{p}_0 \boxplus g_0 \circ \mathsf{p}_0$ 和 $f_1 \circ \mathsf{p}_1 \boxplus g_1 \circ \mathsf{p}_1$ 根据复合的左相容性（命题 2）。因此，根据假设，$\langle f_0 \circ \mathsf{p}_0, f_1 \circ \mathsf{p}_1 \rangle \boxplus \langle g_0 \circ \mathsf{p}_0, g_1 \circ \mathsf{p}_1 \rangle$。也就是说 $f_0 \& f_1 \boxplus g_0 \& g_1$。 □

推论 7. 可求和结构与笛卡尔积相容，当且仅当 $\mathsf{p}_0, \mathsf{p}_1$ 是可加的，且 $\mathsf{c}_\&$ 是同构。

4.2 笛卡尔积与微分结构

现在我们假设 $\mathcal{C}$ 是一个带有预微分结构 $(\mathsf{D}\ \pi_0, \pi_1, \sigma)$ 的笛卡尔范畴。

定义 18. 如果其底层可求和结构与笛卡尔积相容，且 $\mathsf{p}_0, \mathsf{p}_1$ 是 D-线性的，则（预）微分结构 $(\mathsf{D}\ \pi_0, \pi_1, \sigma)$ 与笛卡尔积相容。笛卡尔相干微分范畴 (CCDC) 是指其笛卡尔积与微分结构相容的相干微分范畴。

我们假设 $\mathcal{C}$ 是一个 CCDC。根据 p_0 和 p_1, 的 D-线性，所有仅涉及笛卡尔积的构造都是 D-线性的。

命题 23. 如果 $h_0 \in \mathcal{C}(X, Y_0)$ 和 $h_1 \in \mathcal{C}(X, Y_1)$ 是 D-线性的，那么 $\langle h_0, h_1 \rangle$ 是 D-线性的。如果 $f_0 \in \mathcal{C}(X_0, Y_0)$ 和 $f_1 \in \mathcal{C}(X_1, Y_1)$ 是 D-线性的，那么 $f_0 \& f_1$ 是 D-线性的。

证明。对于第一个陈述，我们采用与命题 12 相同的方法，只是将可求和对中的配对替换为笛卡尔积的配对。第二个陈述由第一个陈述得出，因为 $f_0 \& f_1 = \langle f_0 \circ \mathsf{p}_0, f_1 \circ \mathsf{p}_1 \rangle$ 是投影，且投影是 D-线性的；而 D-线性在复合下封闭。 □

对于任意对象 X_0, X_1，存在一个自然变换 $\langle \mathsf{D}\mathsf{p}_0, \mathsf{D}\mathsf{p}_1 \rangle \in \mathcal{C}(\mathsf{D}(X_0 \& X_1), \mathsf{D}X_0 \& \mathsf{D}X_1)$。由 p_0 和 p_1 的 D-线性，该自然变换等于 $\langle \mathsf{p}_0 \circ \pi_0, \mathsf{p}_0 \circ \pi_1, \mathsf{p}_1 \circ \pi_0, \mathsf{p}_1 \circ \pi_1 \rangle = \mathsf{c}_\&$。因此得到一个类似于命题 14 的结果。

命题 24. 对于任意 $f_0 \in \mathcal{C}(X, Y_0)$ 和 $f_1 \in \mathcal{C}(X, Y_1)$，$\langle \mathsf{D}f_0, \mathsf{D}f_1 \rangle = \mathsf{c}_\& \circ \mathsf{D}\langle f_0, f_1 \rangle$

Proof. $\mathsf{p}_i \circ \mathsf{c}_\& \circ \widetilde{\mathsf{D}}\langle f_0, f_1 \rangle = \widetilde{\mathsf{D}}\mathsf{p}_i \circ \widetilde{\mathsf{D}}\langle f_0, f_1 \rangle = \widetilde{\mathsf{D}}f_i$. □

4.3 偏导数

利用 $\mathsf{c}^{-1}\ \&$，我们定义两个自然变换

$$\Phi^0 = (\mathsf{c}_\&)^{-1} \circ (\mathsf{id}_{\widetilde{\mathsf{D}}X_0} \,\&\, \iota_0) \in \mathcal{C}(\widetilde{\mathsf{D}}X_0 \,\&\, X_1, \widetilde{\mathsf{D}}(X_0 \,\&\, X_1))$$
$$\Phi^1 = (\mathsf{c}_\&)^{-1} \circ (\iota_0 \,\&\, \mathsf{id}_{\widetilde{\mathsf{D}}X_1}) \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, \widetilde{\mathsf{D}}X_1, \widetilde{\mathsf{D}}(X_0 \,\&\, X_1))$$

注意到 $\widetilde{\mathsf{c}}_\&$，$(\mathsf{c}_\&)^{-1}$，$\Phi^0$ 以及 Φ^1 都是 D-线性的，这归功于 命题 11 和 23 以及 推论 3 .

命题 25. $\Phi^0 = \langle\!\langle \pi_0 \,\&\, \text{恒等态射}_{X_1},\ \pi_1 \,\&\, 0 \rangle\!\rangle$ 和 $\Phi^1 = \langle\!\langle \text{恒等态射}_{X_0} \,\&\, \pi_0,\ 0 \,\&\, \pi_1 \rangle\!\rangle$

证明。 由 定理 4，$(\mathsf{c}_\&)^{-1} = \langle\!\langle \pi_0 \& \pi_0,\ \pi_1 \& \pi_1 \rangle\!\rangle$ 结论可通过直接计算得出。 □

定义19（偏导数）。若 $f \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, X_1, Y)$，则可以定义 $\mathsf{D}_0 f := \mathsf{D}f \circ \Phi^0 \in \mathcal{C}(\mathsf{D}X_0 \,\&\, X_1, \mathsf{D}Y)$ 和 $\mathsf{D}_1 f := \mathsf{D}f \circ \Phi^1 \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, \mathsf{D}X_1, \mathsf{D}Y)$，它们是 f 的偏导数。

命题 26。对于任意 $f \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, X_1, Y)$，$\pi_0 \circ \mathsf{D}_0 f = f \circ (\pi_0 \,\&\, \text{恒等态射})$ 和 $\pi_0 \circ \mathsf{D}_1 f = f \circ (\text{恒等态射} \,\&\, \pi_0)$。

证明。 $\pi_0 \circ \mathsf{D}_0 f = \pi_0 \circ \mathsf{D}f \circ \Phi^0 = f \circ \pi_0 \circ \Phi^0 = f \circ (\pi_0 \,\&\, \text{恒等态射})$ 由 命题 25得出。对于 Φ^1 的证明类似。 □

命题 27。 下图交换。

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{\mathsf{D}}(X_0 \,\&\, \widetilde{\mathsf{D}}X_1) & \xleftarrow{\Phi^0} & \widetilde{\mathsf{D}}X_0 \,\&\, \widetilde{\mathsf{D}}X_1 & \xrightarrow{\Phi^1} & \widetilde{\mathsf{D}}(\widetilde{\mathsf{D}}X_0 \,\&\, X_1) \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mathsf{D}}\Phi^1} & & & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mathsf{D}}\Phi^0} \\
\widetilde{\mathsf{D}}^2(X_0 \,\&\, X_1) & & \xrightarrow{\qquad\qquad \mathsf{c} \qquad\qquad} & & \widetilde{\mathsf{D}}^2(X_0 \,\&\, X_1)
\end{array}$$

证明。 我们利用 命题 25 来计算 $\widetilde{\mathsf{D}}\Phi^1 \circ \Phi^0$ 和 $\widetilde{\mathsf{D}}\Phi^0 \circ \Phi^1$。由于 Φ^0 是 $\widetilde{\mathsf{D}}$-线性的，$\widetilde{\mathsf{D}}\Phi^0 = \langle\!\langle \Phi^0 \circ \pi_0, \Phi^0 \circ \pi_1 \rangle\!\rangle$ 由 备注2。因此

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathsf{D}}\Phi^0 \circ \Phi^1 &= \widetilde{\mathsf{D}}\Phi^0 \circ \langle\!\langle \mathsf{id}_{X_0} \,\&\, \pi_0, 0 \,\&\, \pi_1 \rangle\!\rangle \\
&= \langle\!\langle \Phi^0 \circ (\mathsf{id}_{X_0} \,\&\, \pi_0), \Phi^0 \circ (0 \,\&\, \pi_1) \rangle\!\rangle \\
&= \langle\!\langle \langle\!\langle \pi_0 \,\&\, \pi_0, \pi_1 \,\&\, 0 \rangle\!\rangle, \langle\!\langle 0 \,\&\, \pi_1, 0 \,\&\, 0 \rangle\!\rangle \rangle\!\rangle
\end{aligned}$$

类似地，$\mathsf{D}\Phi^1 \circ \Phi^0 = \langle\!\langle \langle\!\langle \pi_0 \,\&\, \pi_0, 0 \,\&\, \pi_1 \rangle\!\rangle, \langle\!\langle \pi_1 \,\&\, 0, 0 \,\&\, 0 \rangle\!\rangle \rangle\!\rangle$。交换性由命题 8得出。 □

命题 28。 下图可交换

$$\begin{array}{ccccc}
\widetilde{\mathsf{D}}(X_0 \,\&\, \widetilde{\mathsf{D}}X_1) & \xleftarrow{\Phi^0} & \widetilde{\mathsf{D}}X_0 \,\&\, \widetilde{\mathsf{D}}X_1 & \xrightarrow{\Phi^1} & \widetilde{\mathsf{D}}(\widetilde{\mathsf{D}}X_0 \,\&\, X_1) \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mathsf{D}}\Phi^1} & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{c}_\&^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\mathsf{D}}\Phi^0} \\
\widetilde{\mathsf{D}}^2(X_0 \,\&\, X_1) & \xrightarrow{\theta} & \widetilde{\mathsf{D}}(X_0 \,\&\, X_1) & \xleftarrow{\theta} & \widetilde{\mathsf{D}}^2(X_0 \,\&\, X_1)
\end{array}$$

证明。根据命题 27 的证明中对 $\mathsf{D}\Phi^0 \circ \Phi^1$ 的计算，我们知道 $\theta \circ \widetilde{\mathsf{D}}\Phi^0 \circ \Phi^1 = \pi_0 \,\&\, \pi_0, \pi_1 \,\&\, 0 + 0 \,\&\, \pi_1 = \pi_0 \,\&\, \pi_0, \pi_1 \,\&\, \pi_1$，由推论 6 可得。因此，根据定理 4，$\theta \circ \mathsf{D}\Phi^0 \circ \Phi^1 = (\mathsf{c}_\&)^{-1}$。对 $\theta \circ \mathsf{D}\Phi^1 \circ \Phi^0$进行类似计算即可得到相应结果。 □

注 4。 我们可以验证，自然态射 Φ^0， Φ^1 是强度 [10, 11] 对于$\tilde{}$单子 $(\mathsf{D}\ \iota_0,\ \theta)$。命题 28 中的图表 表明这个强单子是一个交换单子。这些图表可以手工验证，也可以由关于笛卡尔范畴上强单子的一般性质推出。

如 [12] 第2.3段所述，笛卡尔范畴上的任意单子$(\mathsf{M}\ \eta, \mu)$ 都可以赋予余松对称幺半群单子[8] 结构，取

- n^0 is the unique element of $\mathcal{C}(\mathsf{M}\top, \top)$
- $\mathsf{n}^2_{X_1,X_2} := \langle \mathsf{M}\mathsf{p}_1, \mathsf{M}\mathsf{p}_2\rangle \in \mathcal{C}(\mathsf{M}(X_1 \,\&\, X_2), \mathsf{M}X_1 \,\&\, \mathsf{M}X_2)$

若n^2 和n^0 是同构，M 便成为（强）对称幺半群单子。这正是$\tilde{}$这里的M =D所发生的情况，因为$\mathsf{n}^2 = \mathsf{c}_\&$，并且我们可以利用$\mathsf{n}^0$ 是一个同构，其逆为 ι_0，这可由 π_i的并单射性证明。不过，正如[10, 14], 所示，对称幺半群单子与交换单子等价，而事实证明，由对称幺半群结构诱导出的强度恰好就是 Φ^0 和 Φ^1。

由于命题27和28，公理 (D-Schwarz) 和 (D-add) 很自然地适用于偏导数的情形，分别给出了完整的施瓦茨法则和莱布尼茨法则。莱布尼茨法则是导数可加性的推论，这并不令人意外，因为在通常的微分学中也是如此：$f'(x,y)\cdot(u,v) = f'(x,y)\cdot(u,0) + f'(x,y)\cdot(0,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot v$。

命题 29 （莱布尼茨法则）。 $\tilde{\mathsf{D}}f\circ\mathsf{c}^{-1}{}_\& = \theta\circ\tilde{\mathsf{D}}_0\tilde{\mathsf{D}}_1 f = \theta\circ\tilde{\mathsf{D}}_1\tilde{\mathsf{D}}_0 f$

证明。 我们来证明 $\tilde{\mathsf{D}}f\circ\mathsf{c}^{-1}{}_\& = \theta\circ\tilde{\mathsf{D}}_0\tilde{\mathsf{D}}_1 f$。

$$\begin{aligned}
\theta\circ\widetilde{\mathsf{D}}_0\widetilde{\mathsf{D}}_1 f &= \theta\circ\widetilde{\mathsf{D}}(\widetilde{\mathsf{D}}f\circ\Phi^1)\circ\Phi^0 \quad \text{by definition}\\
&= \theta\circ\widetilde{\mathsf{D}}^2 f\circ\widetilde{\mathsf{D}}\Phi^1\circ\Phi^0 \quad \text{by (D-chain)}\\
&= \widetilde{\mathsf{D}}f\circ\theta\circ\widetilde{\mathsf{D}}\Phi^1\circ\Phi^0 \quad \text{by (D-add)}\\
&= \widetilde{\mathsf{D}}f\circ\mathsf{c}^{-1}_\& \quad \text{by Proposition 28}
\end{aligned}$$ □

$\tilde{\mathsf{D}}f\circ\mathsf{c}^{-1}{}_\& = \theta\circ\tilde{\mathsf{D}}_1\tilde{\mathsf{D}}_0 f$的证明类似。

命题30 （施瓦茨法则）。 $\tilde{\mathsf{D}}_0\tilde{\mathsf{D}}_1 f = \mathsf{c}\circ\tilde{\mathsf{D}}_1\tilde{\mathsf{D}}_0 f$

证明。 与 命题 29的证明非常相似，区别在于它使用 c 的(D-Schwarz)自然性，而非 θ的自然性。 □

4.4 推广到任意有限积

记号3。 回想一下，任意有限积的存在等价于二元积和终对象的存在。为了与当前记号保持一致，我们将有限积的下标从 0 开始： $X_0\&\cdots\&X_n$。我们允许空积，约定取 $n=-1$ 会得到一个积 $X_0\,\&\,\cdots\,\&\,X_{-1} := \top$。

上述构造可以推广到任意有限积。确实，可以$\tilde{}$定义一个（对称幺半）自然变换 $\mathsf{c}^n_\& \in \mathcal{C}(\mathsf{D}(X_0\,\&\,\cdots\,\&\,X_n), \mathsf{D}X_0\,\&\,\cdots\,\&\,\mathsf{D}X_n)$ 由 $(\mathsf{c}_\&)_X := \mathsf{t}_{\mathsf{D}\top}\in\mathcal{C}(\mathsf{D}\top,\top)$、$(\mathsf{c}^0_\&)_X := \mathsf{id}_{\mathsf{D}X}\in\mathcal{C}(\mathsf{D}X,\mathsf{D}X)$ 和 $\mathsf{c}^{n+1}{}_\& := \mathsf{c}_\&\circ\langle\mathsf{c}^n{}_\&\cdot\mathsf{id}_{\mathsf{D}X_{n+1}}\rangle$归纳定义。根据笛卡尔积的结合律，此定义不依赖于 $X_0\,\&\,\cdots\,\&\,X_n$ 的具体括号分组方式。

[8] 也称为余松弛对称幺半单子、对称余幺半单子或霍普夫单子，参见 [13]

记号 4. 令 $X_0, Y_0, \ldots, X_n, Y_n \in$ 属于对象$(\mathcal{C})$，$i \in [\![0, n]\!]$，并且对每个 $k \neq i$，都有 $f_k \in \mathcal{C}(X_k, Y_k)$。令 $g \in \mathcal{C}(X_i, Y_i)$。定义 $(g; f_{-i}) := f_0 \,\&\, \cdots \,\&\, f_{i-1} \,\&\, g \,\&\, f_{i+1} \,\&\, \cdots \,\&\, f_n$，其中除位置 i 使用 g 外，其他位置均使用 f_i。

与二元情形类似，接下来可以定义强度 $\Phi^i \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, \cdots \,\&\, \widetilde{\mathrm{D}}X_i \,\&\, \cdots \,\&\, X_n, \mathrm{D}(X_0 \,\&\, \cdots \,\&\, X_n))$ as

$$\Phi^i := (\mathsf{c}^n_{\&})^{-1} \circ (\mathsf{id}_{\widetilde{\mathrm{D}}X_i}; (\iota_0)_{-i}) .$$

命题 31. $\mathsf{c}^n_{\&}$ 是一个同构，并且 $(\mathsf{c}^n_{\&})^{-1} = \langle\!\langle \pi_0 \,\&\, \cdots \,\&\, \pi_0, \pi_1 \,\&\, \cdots \,\&\, \pi_1 \rangle\!\rangle$。因此，$\Phi^i = \langle\!\langle (\pi_0; \text{恒等态射}_{-i}), (\pi_1; 0_{-i}) \rangle\!\rangle$。

证明。 关于 $\mathsf{c}^n_{\&}$ 的等式可通过展开归纳定义并使用 定理 4得到。关于 Φ^i 的等式可由此推出，正如 命题 25中所示。 □

定义 20. 对于任意的 $f \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, \cdots \,\&\, X_n, Y)$，可以将第 i 阶偏导数$\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$ $\widetilde{}$定义为 f，即 $\mathrm{D}_i f := \mathrm{D}f \circ \Phi^i \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, \cdots \,\&\, \mathrm{D}X_i \,\&\, \cdots \,\&\, X_n, \mathrm{D}Y)$。

$\widetilde{}$**命题 32.** $\pi_0 \circ \mathrm{D}_i f = f \circ (\pi_0; \text{恒等态射}_{-i})$。

证明。 与 命题 26相同。 □

定义 21。 对于任意 $X \in$ 对象$(\mathcal{C})$ 和 $n \geq 0$，我们可以将 $\theta^k_X \in \mathcal{C}(\widetilde{\mathrm{D}}^{n+1}X, \widetilde{\mathrm{D}}X)$ 定义为 k 个 θ 的复合：$\theta^0_X =$ 恒等态射$_{\widetilde{\mathrm{D}}X}$ 和 $\theta^{k+1}_X = \theta^k_X \circ \theta_{\widetilde{\mathrm{D}}^k X}$。类似地，我们定义 $\pi^k_i \in \mathcal{C}(\widetilde{\mathrm{D}}^k X, X)$。

注意，$\theta^k = \langle\!\langle \pi_0^{k+1}, \sum_{j=0}^k \pi_0^j \circ \pi_1 \circ \pi_0^{k-j} \rangle\!\rangle$。换言之，$\theta^k$ 的右分量对 k 所有可能的组合求和，这些组合由左投影和一个右投影构成。可以证明命题 28 对 $n \geq 1$的推广，

$$(\mathsf{c}^n_{\&})^{-1} = \theta^n \circ \widetilde{\mathsf{D}}^n \Phi^{\alpha(n)} \circ \cdots \circ \widetilde{\mathsf{D}}\Phi^{\alpha(1)} \circ \widetilde{\mathsf{D}}\Phi^{\alpha(0)}$$

对于任意 α 的置换 $[\![0, n]\!]$。与 命题 29一样，这将莱布尼茨法则推广到了 n 元情形。

Pr命题 33 (广义莱布尼茨法则)。 对于任意 $n \geq 1$ 以及任意 $[\![0$的置换 α， $n]\!]$ ，

$$\widetilde{\mathsf{D}} f \circ (\mathsf{c}^n_{\&})^{-1} = \theta^n \circ \widetilde{\mathsf{D}}_{\alpha(n)} \ldots \widetilde{\mathsf{D}}_{\alpha(0)} f .$$

4.5 多线性态射

$\widetilde{}$我们将可加性和 D-线性的概念推广到多元函数。

定义22。 态射 $f \in \mathcal{C}(Y_0 \,\&\, \cdots \,\&\, Y_n, Z)$ 关于其第 i^{th} 个变量可加（对于$i \in [\![0, n]\!]$），当且仅当 $f \circ (0; \mathsf{id}_{-i}) = 0$，且对于所有满足 $h_0 \boxplus h_1$ 的 $h_0, h_1 \in \mathcal{C}(X, Y_i)$，有 $f \circ (h_0; \mathsf{id}_{-i}) \boxplus f \circ (h_1; \mathsf{id}_{-i})$，并且

$$f \circ (h_0; \mathsf{id}_{-i}) + f \circ (h_1; \mathsf{id}_{-i}) = f \circ (h_0 + h_1; \mathsf{id}_{-i})$$

命题34。 态射 $f \in \mathcal{C}(Y_0 \,\&\, \cdots \,\&\, Y_n, Z)$ 若满足 $f \circ (0; \text{恒等态射}_{-i}) = 0$，则其第 i^{th} 个变量可加，当且仅当 $f \circ (\pi_0; \text{恒等态射}_{-i}) \boxplus f \circ (\pi_1; \text{恒等态射}_{-i})$，其和为 $f \circ (\sigma; \text{恒等态射}_{-i})$。

证明。 证明与 命题 3相同，利用以下事实：对于任意 $k \in \{0, 1\}$，$f \circ (h_k; \text{恒等态射}_{-i}) = f \circ (\pi_k; \text{恒等态射}_{-i}) \circ (\langle\!\langle h_0, h_1 \rangle\!\rangle; \text{恒等态射}_{-i})$。 □

定义23。 一个态射 $f \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, \cdots \,\&\, X_n, Y)$ 在其 i^{th} 第 i^{th} 个自变量 上线性，当且仅当它对该自变量$\tilde{}$可加，且 $\pi_1 \circ \mathsf{D}_i f = f \circ (\pi_1; \text{恒等态射}_{-i})$。

$\tilde{}$如命题 10所示，(D-add) 确保方程 $\pi_1 \circ \mathsf{D}_i f = f \circ (\pi_1;\text{恒等态射}_{-i})$ 是保证该 i^{th} 元上的线性。

命题35。 假设 $\pi_1 \circ \tilde{\mathsf{D}}_i f = f \circ (\pi_1;\text{恒等态射}_{-i})$。那么 f 在其 i^{th}元上是可加的，因此在该元上是线性的。

证明。 该方程允许将 $f \circ (h; \mathsf{id}_{-i})$ 改写如下。

$$\begin{aligned} f \circ (h; \mathsf{id}_{-i}) &= f \circ (\pi_1; \mathsf{id}_{-i}) \circ (\langle\!\langle 0, h \rangle\!\rangle; \mathsf{id}_{-i}) \\ &= \widetilde{\mathsf{D}}_i f \circ (\langle\!\langle 0, h \rangle\!\rangle; \mathsf{id}_{-i}) \quad \text{by assumption} \\ &= \widetilde{\mathsf{D}} f \circ \Phi^i \circ (\langle\!\langle 0, h \rangle\!\rangle; \mathsf{id}_{-i}) \\ &= \widetilde{\mathsf{D}} f \circ \langle\!\langle (0; \mathsf{id}_{-i}), (h; 0_{-i}) \rangle\!\rangle \quad \text{by Proposition 31} \end{aligned}$$

$\tilde{}$特别地， $f \circ (0; \mathsf{id}_{-i}) = \mathsf{D} f \circ (0; \mathsf{id}_{-i}), (0; 0_{-i})$。但根据推论 6，$(0; 0_{-i}) = 0$。因此，根据 (D-add) 和命题 18， $f \circ (0; \mathsf{id}_{-i}) = 0$。类似地，若 $h_0 \boxplus h_1$，

$f \circ (h_0 + h_1; \mathsf{id}_{-i}) \sim= \mathsf{D} f \circ (0; \mathsf{id}_{-i}), (h_0 + h_1; 0_{-i}) \sim= \mathsf{D} f \circ (0; \mathsf{id}_{-i}), (h_0; 0_{-i}) + (h_1; 0_{-i})$ 根据推论 6$\sim$ $\sim= \mathsf{D} f \circ (0; \mathsf{id}_{-i}), (h_0; 0_{-i}) + \mathsf{D} f \circ (0; \mathsf{id}_{-i}), (h_1; 0_{-i})$ 根据 (D-add) 和命题 19$= f \circ (h_0; \mathsf{id}_{-i}) + f \circ (h_1; \mathsf{id}_{-i})$。

□

定义 24. 态射 $f \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, \cdots \,\&\, X_n, Y)$ 是多重线性的（更准确地说，是 $(n+1)$-线性的），当且仅当它对所有自变量都线性。注意，1-线性态射$\tilde{}$恰好就是 D-线性态射。

为了检验这个概念是否合理，我们可以结合下面的结果和莱布尼茨法则，证明一个类似于微分学中以下事实的结果：若 Φ 是一个双线性映射，则 $\Phi'(x, y) \cdot (u, v) = \Phi(x, v) + \Phi(u, y)$。

引理 1. 对于任意 $f \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, \cdots \,\&\, X_n, Y)$ 以及 $i, j \in [\![0, n]\!]$，使得 $i \neq j$，

$$\widetilde{\mathsf{D}} \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_i \widetilde{\mathsf{D}}_j f = \widetilde{\mathsf{D}}_i f \circ (\pi_0; \mathsf{id}_{-j})$$

证明。 这是一个直接计算

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathsf{D}} \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_i \widetilde{\mathsf{D}}_j f &= \widetilde{\mathsf{D}} \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}} (\widetilde{\mathsf{D}}_j f) \circ \Phi^i \\ &= \widetilde{\mathsf{D}} (\pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_j f) \circ \Phi^i \quad \text{by (D-chain)} \\ &= \widetilde{\mathsf{D}} (f \circ (\pi_0; \mathsf{id}_{-j})) \circ \Phi^i \quad \text{by Proposition 32} \\ &= \widetilde{\mathsf{D}} f \circ \widetilde{\mathsf{D}} (\pi_0; \mathsf{id}_{-j}) \circ \Phi^i \quad \text{by (D-chain)} \\ &= \widetilde{\mathsf{D}} f \circ \Phi^i \circ (\pi_0; \mathsf{id}_{-j}) \quad \text{since } \Phi^i \text{ natural and } i \neq j \\ &= \widetilde{\mathsf{D}}_i f \circ (\pi_0; \mathsf{id}_{-j}) \end{aligned}$$

□

定理 5。 对于任意$(n+1)$-线性态射 $f \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, \cdots \,\&\, X_n,\ Y)$

$$\pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}} f \circ (\mathsf{c}_\&)^{-1} = f \circ (\pi_0 \,\&\, \cdots \,\&\, \pi_0)$$
$$\pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}} f \circ (\mathsf{c}_\&)^{-1} = f \circ (\pi_1 \,\&\, \pi_0 \,\&\, \cdots \,\&\, \pi_0) + \cdots + f \circ (\pi_0 \,\&\, \cdots \,\&\, \pi_0 \,\&\, \pi_1)$$

证明。 我们将给出 $n = 1$的证明。一般情形依赖于相同的论证。第一个等式直接由 π_0的自然性以及命题 25 得出。对于第二个等式，莱布尼茨（命题 29）保证 $\pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}} f \circ \mathsf{c}^{-1}{}_\& = \pi_1 \circ \theta \circ \widetilde{\mathsf{D}}_0 \widetilde{\mathsf{D}}_1 f = \pi_1 \circ \pi_0 \circ \mathsf{D}_0 \mathsf{D}_1 f + \pi_0 \circ \pi_1 \circ \mathsf{D}_0 \mathsf{D}_1 f$。我们可以分别计算这两个加项。

$$\begin{aligned}
\pi_1 \circ \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_0 \widetilde{\mathsf{D}}_1 f &= \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_1 f \circ (\pi_0 \,\&\, \mathsf{id}) \quad \text{by Proposition 26} \\
&= f \circ (\mathsf{id} \,\&\, \pi_1) \circ (\pi_0 \,\&\, \pi_1) \quad \text{by bilinarity of } f \\
&= f \circ (\pi_0 \,\&\, \pi_1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi_0 \circ \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_0 \widetilde{\mathsf{D}}_1 f &= \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}} \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_0 \widetilde{\mathsf{D}}_1 f \quad \text{by linearity of } \pi_0 \\
&= \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_0 f \circ (\mathsf{id} \,\&\, \pi_0) \quad \text{by Lemma 1} \\
&= f \circ (\pi_1 \,\&\, \mathsf{id}) \circ (\mathsf{id} \,\&\, \pi_0) \quad \text{by bilinarity of } f \\
&= f \circ (\pi_1 \,\&\, \pi_0)
\end{aligned}$$

由此证明得证。 □

我们可以拓展 引理 1 证明中的思路，得到以下结果。这个结果至关重要，因为它解释了如何投影到一系列偏导数上。

Pr命题 36。 设 $n \geq 0$, $f \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, \cdots \,\&\, X_n)$, $d \geq 0$和 $i, i_1, \ldots, i_d \in [\![0, n]\!]$。那么，

$$\widetilde{\mathsf{D}}^d \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_{i_d} \ldots \widetilde{\mathsf{D}}_{i_1} \widetilde{\mathsf{D}}_i f = \widetilde{\mathsf{D}}_{i_d} \ldots \widetilde{\mathsf{D}}_{i_1} f \circ (\widetilde{\mathsf{D}}^{h_d(i)} \pi_0; \mathsf{id}_{-i})$$

其中 $h_d(i) = \#\{k \in [\![1, d]\!] \mid i_k = i\}$。此外，若 f 是$(n+1)$线性的，则

$$\widetilde{\mathsf{D}}^d \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_{i_d} \ldots \widetilde{\mathsf{D}}_{i_1} \widetilde{\mathsf{D}}_i f = \widetilde{\mathsf{D}}_{i_d} \ldots \widetilde{\mathsf{D}}_{i_1} f \circ (\widetilde{\mathsf{D}}^{h_d(i)} \pi_1; \mathsf{id}_{-i})$$

证明。 对 d 进行归纳。情形 $d = 0$ 是 命题 32 关于 π_0的结论，而n-线性的定义适用于 π_1。我们处理 π_0 的归纳步骤。 π_1 的归纳步骤同理可证。

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathsf{D}}^{d+1} \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_{i_{d+1}} \ldots \widetilde{\mathsf{D}}_{i_1} \widetilde{\mathsf{D}}_i f &= \widetilde{\mathsf{D}}(\widetilde{\mathsf{D}}^d \pi_0) \circ \widetilde{\mathsf{D}}(\widetilde{\mathsf{D}}_{i_d} \ldots \widetilde{\mathsf{D}}_{i_1} \widetilde{\mathsf{D}}_i f) \circ \Phi^{i_{d+1}} \quad \text{by definition} \\
&= \widetilde{\mathsf{D}}(\widetilde{\mathsf{D}}^d \pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_{i_d} \ldots \widetilde{\mathsf{D}}_{i_1} \widetilde{\mathsf{D}}_i f) \circ \Phi^{i_{d+1}} \quad \text{by (D-chain)} \\
&= \widetilde{\mathsf{D}}(\widetilde{\mathsf{D}}_{i_d} \ldots \widetilde{\mathsf{D}}_{i_1} \widetilde{\mathsf{D}}_i f \circ (\widetilde{\mathsf{D}}^{h_d(i)} \pi_0; \mathsf{id}_{-i})) \circ \Phi^{i_{d+1}} \quad \text{by inductive hypothesis} \\
&= \widetilde{\mathsf{D}} \widetilde{\mathsf{D}}_{i_d} \ldots \widetilde{\mathsf{D}}_{i_1} \widetilde{\mathsf{D}}_i f \circ \widetilde{\mathsf{D}}(\widetilde{\mathsf{D}}^{h_d(i)} \pi_0; \mathsf{id}_{-i}) \circ \Phi^{i_{d+1}} \quad \text{by (D-chain)}
\end{aligned}$$

下一步是利用 $\Phi^{i_{d+1}}$ 的自然性：

$$\widetilde{\mathsf{D}}(f_0 \,\&\, \cdots \,\&\, f_n) \circ \Phi^{i_{d+1}} = (\widetilde{\mathsf{D}} f_{i_{d+1}}; f_{-i_{d+1}})$$

如果 $i_{d+1} = i$，那么

$$\widetilde{\mathsf{D}}(\widetilde{\mathsf{D}}^{h_d(i)} \pi_0; \mathsf{id}_{-i}) \circ \Phi^{i_{d+1}} = \Phi^{i_{d+1}} \circ (\widetilde{\mathsf{D}}^{h_d(i)+1} \pi_0; \mathsf{id}_{-i})$$

如果 $i_{d+1} \neq i$ 那么

$$\widetilde{\mathsf{D}}(\widetilde{\mathsf{D}}^{h_d(i)}\pi_0; \mathsf{id}_{-i}) \circ \Phi^{i_{d+1}} = \Phi^{i_{d+1}} \circ (\widetilde{\mathsf{D}}^{h_d(i)}\pi_0; \mathsf{id}_{-i})$$

在两种情况下，

$$\widetilde{\mathsf{D}}(\widetilde{\mathsf{D}}^{h_d(i)}\pi_0; \mathsf{id}_{-i}) \circ \Phi^{i_{d+1}} = \Phi^{i_{d+1}} \circ (\widetilde{\mathsf{D}}^{h_{d+1}(i)}\pi_0; \mathsf{id}_{-i})$$

因此：

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathsf{D}}^{d+1}\pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_{i_{d+1}} \dots \widetilde{\mathsf{D}}_{i_1}\widetilde{\mathsf{D}}_i f &= \widetilde{\mathsf{D}}\widetilde{\mathsf{D}}_{i_d} \dots \widetilde{\mathsf{D}}_{i_1}\widetilde{\mathsf{D}}_i f \circ \Phi^{i_{d+1}} \circ (\widetilde{\mathsf{D}}^{h_{d+1}(i)}\pi_0; \mathsf{id}_{-i}) \\ &= \widetilde{\mathsf{D}}_{i_{d+1}}\widetilde{\mathsf{D}}_{i_d} \dots \widetilde{\mathsf{D}}_{i_1}\widetilde{\mathsf{D}}_i f \circ (\widetilde{\mathsf{D}}^{h_{d+1}(i)}\pi_0; \mathsf{id}_{-i})\end{aligned}$$

由此完成证明。 □

将此性质应用于 $d = 1$ ，可得到与引理 1类似的结果。

推论 8。 如果 $f \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, \cdots \,\&\, X_n)$ 是$(n+1)$-线性的，那么对于任意满足$i \neq j$ 的 $i, j \in [\![0, n]\!]$ 以及任意 $k \in \{0, 1\}$,

$$\widetilde{\mathsf{D}}\pi_k \circ \widetilde{\mathsf{D}}_i\widetilde{\mathsf{D}}_j f = \widetilde{\mathsf{D}}_i f \circ (\pi_k; \mathsf{id}_{-j})$$

$$\widetilde{\mathsf{D}}\pi_k \circ \widetilde{\mathsf{D}}_i\widetilde{\mathsf{D}}_i f = \widetilde{\mathsf{D}}_i f \circ (\widetilde{\mathsf{D}}\pi_k; \mathsf{id}_{-i})$$

我们可以利用这个推论证明，$(n+1)$-线性态射的偏导数也是$(n+1)$-线性的。

定理 6. 若 $(X_0 \,\&\, \cdots \,\&\, X_n)$ 是$(n+1)$-线性的，则对于任意 $i \in [\![0, n]\!]$，$\mathsf{D}_i f$ 都是$(n+1)$-线性的。

证明。 设 $j \in [\![0, n]\!]$。目标是证明 $\pi_1 \circ \mathsf{D}j\mathsf{D}_i f = \mathsf{D}_i f \circ (\pi_1;$ 恒等态射$-j)$。由 π_k 的联合单态性，只需证明对任意$k \in \{0, 1\}$， $\pi_k \circ \pi_1 \circ \mathsf{D}j\mathsf{D}_i f = \pi_k \circ \mathsf{D}_i f \circ (\pi_1;$ 恒等态射 $-j)$。若 $i \neq j$,

$$\begin{aligned}\pi_k \circ \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_j\widetilde{\mathsf{D}}_i f &= \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}\pi_k \circ \widetilde{\mathsf{D}}_j\widetilde{\mathsf{D}}_i f \quad \text{by } \widetilde{\mathsf{D}}\text{-linearity of } \pi_1 \\ &= \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_j f \circ (\pi_k; \mathsf{id}_{-i}) \quad \text{by Corollary 8} \\ &= f \circ (\pi_1; \mathsf{id}_{-j}) \circ (\pi_k; \mathsf{id}_{-i}) \quad \text{since } f \text{ is } (n+1)\text{-linear} \\ &= f \circ (\pi_k; \mathsf{id}_{-i}) \circ (\pi_1; \mathsf{id}_{-j}) \quad \text{since } i \neq j \\ &= \pi_k \circ \widetilde{\mathsf{D}}_i f \circ (\pi_1; \mathsf{id}_{-j}) \quad \text{since } f \text{ is } (n+1)\text{-linear}\end{aligned}$$

情形 $i = j$ 非常相似

$$\begin{aligned}\pi_k \circ \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_i\widetilde{\mathsf{D}}_i f &= \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}\pi_k \circ \widetilde{\mathsf{D}}_i\widetilde{\mathsf{D}}_i f \quad \text{by } \widetilde{\mathsf{D}}\text{-linearity of } \pi_1 \\ &= \pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}_i f \circ (\widetilde{\mathsf{D}}\pi_k; \mathsf{id}_{-i}) \quad \text{by Corollary 8} \\ &= f \circ (\pi_1; \mathsf{id}_{-i}) \circ (\widetilde{\mathsf{D}}\pi_k; \mathsf{id}_{-i}) \quad \text{since } f \text{ is } (n+1)\text{-linear} \\ &= f \circ (\pi_k; \mathsf{id}_{-i}) \circ (\pi_1; \mathsf{id}_{-i}) \quad \text{since } \pi_k \text{ is } \widetilde{\mathsf{D}}\text{-linear} \\ &= \pi_k \circ \widetilde{\mathsf{D}}_i f \circ (\pi_1; \mathsf{id}_{-i}) \quad \text{since } f \text{ is } (n+1)\text{-linear.}\end{aligned}$$

□

与线性态射复合会保持多重线性。因此，莱布尼茨法则保证，如果 f 是多重线性的，那么 $\mathsf{D}f$ 也具有多重线性。

命题 37。 如果 $f \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, \cdots \,\&\, X_n, Y)$ 是$(n+1)$-线性的，并且 $h \in \mathcal{C}(Y, Z)$ 是线性的，那么 $h \circ f$ 是$(n+1)$-线性的。

证明。 这可由直接计算得出 $\pi_1 \circ \mathsf{D}_i(h \circ f) = \pi_1 \circ \mathsf{D}(h \circ f) \circ \Phi^i = \pi_1 \circ \mathsf{D}h \circ \mathsf{D}f \circ \Phi^i = h \circ \pi_1 \circ \mathsf{D}_i f = h \circ f \circ (\pi_1;$ 恒等态射$_{-i})$。 □

定理 7。 若 $f \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, \cdots \,\&\, X_n, Y)$ 是$(n+1)$-线性的，则 $\mathsf{D}f \circ (\mathsf{c}^n_{\&})^{-1} \in \mathcal{C}(\mathsf{D}X_0 \,\&\, \cdots \,\&\, \mathsf{D}X_n, \mathsf{D}Y)$ 也同样是$(n+1)$-线性的。

证明。 根据莱布尼茨（命题 33），$\mathsf{D}f \circ (\mathsf{c}^n_{\&})^{-1} = \theta^n \circ \mathsf{D}_{\alpha(n)} \cdots \mathsf{D}_{\alpha(0)} f$。但是，根据定理 6，偏导数保持多重线性；而复合左侧的 θ^n 保持多重线性命题 37。 □

5 线性逻辑模型的指数 Kleisli 范畴

5.1 线性环境中的相干微分

设 $\mathcal{L}$ 是一个线性逻辑模型，即对称幺半闭范畴，更确切地说，是 [15] 意义下的 Seely 范畴。我们将 $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ 与 $g \in \mathcal{L}(Y, Z)$ 的复合记为 gf，以强调这样的直觉：$\mathcal{L}$ 中的态射是线性的。Seely 范畴的公理包括存在笛卡尔积 &，以及 $\mathcal{L}$ 上的余单子 (!, der, dig)，其中 $\mathsf{der}_X \in \mathcal{L}(!X, X)$ 和 $\mathsf{dig}_X \in \mathcal{L}(!X, !!X)$ 是自然变换。该余单子的 Kleisli 范畴 $\mathcal{L}_!$ 是这样一个范畴：其对象是 $\mathcal{L}$ 的对象，其同态集为 $\mathcal{L}_!(X, Y) = \mathcal{L}(!X, Y)$。在这个范畴中，复合定义为 $g \circ f = g\,!f\,\mathsf{dig}$，而 X 上的恒等态射是 der_X，即余单子的单位。众所周知，$\mathcal{L}_!$ 是一个笛卡尔（闭）范畴，具有与 $\mathcal{L}$ 相同的笛卡尔积 &。

本节的目标是说明，在 LL 的背景下，[5]中引入的 $\mathcal{L}$ 上的相干微分赋予 $\mathcal{L}_!$ 一个 CCDC 结构。

定理 8. 可求和范畴 $\mathcal{L}$ 上的任意微分结构（见 *[5]*）都会在 $\mathcal{L}_!$ 上诱导出一个 *CCDC* 结构。

首先，我们来详细说明这一假设的含义。若范畴 $\mathcal{L}$ 具有第一作者意义下的可求和结构 $(\mathsf{S}\ \pi_0, \pi_1, \sigma)$，则称其为可求和的 [5]。根据定理 3，这意味着 $(\mathsf{S}\ \pi_0, \pi_1, \sigma)$ 是定义 10 意义下的左可求和结构，其中每个态射都是可加的，并且 S 的函子作用由 $\mathsf{S}f := f \circ \pi_0, f \circ \pi_1$ 给出。接着，我们可以照常定义 $\iota_i, \theta, \mathsf{l}$ 和 c[9]。不同之处在于，每个态射的可加性保证了这些族是函子 S 的自然变换。特别地，$(\mathsf{S}\ \iota_0, \theta)$ 实际上是一个单子。若 $\mathcal{L}$ 中的 $\langle \mathsf{Sp}_0, \mathsf{Sp}_1 \rangle = \mathsf{c}_{\&}$ 是一个同构[10]，则称范畴 $\mathcal{L}$ 是作为笛卡尔范畴可求和的。由于 $\mathcal{L}$ 中的每个态射都是可加的，根据推论 7，这等价于笛卡尔积与定义 17 中的左可求和结构相容。

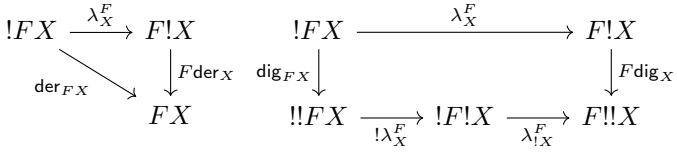
众所周知，存在一个忠实函子 $\mathsf{Der} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}_!$，它将 X 映射到 X，并将 $f \in \mathcal{L}(X, Y)$ 映射到 $f\,\mathsf{der}_X \in \mathcal{L}(!X, Y)$。我们可以证明，此函子在 $\mathcal{L}_!$ 上诱导出一个左可求和结构 $(\mathsf{D}, \mathsf{Der}(\pi_0), \mathsf{Der}(\pi_1), \mathsf{Der}(\sigma))$（其中 $\mathsf{D}X := \mathsf{S}X$），且该结构与 $\mathcal{L}_!$ 的笛卡尔积 & 相容。原因在于 Der 保持单态性和可加性，这归功于众所周知的事实：$\mathsf{Der}(h) \circ f = h\,f$。最后，Der 的定义保证

[9]注意，在 [5]，θ 称为 τ[10]我们可以证明，利用 [5] 中的条件，即 $0 \in \mathcal{L}(\mathsf{S}\top, \top)$ 是同构这一条件始终成立，这是利用 π_i 的联合单态性得出的

Der(f_0, f_1) $=$Der(f_0), Der(f_1。特别地，定义 6 和定义 12 至 14 中由左可求和结构 (D,Der(π_0),Der(π_1),Der(σ)) 生成的态射族，分别为 Der(ι_i)、Der(θ)、Der(l) 和 Der(c)。

那么，可求和范畴 $\mathcal{L}$ 上的微分结构是一个自然变换$\partial_X \in \mathcal{L}(!\mathrm{S}X, \mathrm{S}!X)$，它满足一些称为（$\partial$-链式）、（$\partial$-局部）、（$\partial$-线性）、（$\partial$-&）和（$\partial$-施瓦茨）的方程（见 [5]）。第一个公理（$\partial$-链式）是关于 dig 和 der 的 ∂ 相容性条件，使 ∂ 成为函子 S 与余单子 ! 之间的分配律。_

定义 25。 函子 $F: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 与范畴 $\mathcal{L}$ 上的余单子 $!^{-}$之间的分配律 是一个自然变换 $\lambda^F \in \mathcal{L}(!FX, F!X)$，使得下面两个图表可交换。



分配律的定义见 [16], 其中还给出了命题 38和 39 的证明；这些命题陈述如下（ [16]的推论 5.11）[11]。

命题 38. 设 F: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个自函子。分配律
$\lambda_F \in \mathcal{L}$ FX F X F F $\mathcal{L}_!$ F F F $\mathcal{L}_! \to (!,!)$ 与 [12] ˆ在 上的提升之间存在一个双射。 $FX = FX$ F h $=$ Fh 的一个提升 ˆ是一个函子 ˆ:，满足 ˆ以及 ˆ(导数()) 导数()。

证明。 给定一个分配律 $\lambda^F \in \mathcal{L}(!FX, F!X)$，可以定义一个延拓映射 X到 FX，并将 $f \in \mathcal{L}_!(X, Y)$ 映射到 $F(f)$ $\lambda^F_X \in \mathcal{L}_!(FX, FY)$。利用分配律的图表，可以验证它是一个函子；利用 λ^F 的自然性，它也是 F 的一个提升。反过来，任意 F 的提升 ˆF 都会导出一个族 λ^F_X $=$ˆF恒等态射$_{!X} \in \mathcal{L}_!(!FX, F!X)$。ˆ 分配律的两个图表来自 F 的函子性，而自然性则源于这样一个事实：ˆ F 是 F 的延拓。 □

ˆ ˆ注记 5. 设 $F, G: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 是两个函子，分别具有与分配律 $\lambda^F \in \mathcal{L}(!FX, F!X)$ 和 $\lambda^G \in \mathcal{L}(!GX, G!X)$ 相关联的提升 F 和 G 。那么 ˆ$_G$ˆF是 GF 的一个提升，而与 GF 相关联的分配律是如下自然变换：$\lambda^{GF}_X = G(\lambda^F_X)$ $\lambda^G_{FX} \in \mathcal{L}_!(!GFX, GF!X)$。

以下结果见 [16], ，但相当鲜为人知。尽管证明确实非常简单，却为如何将结构扩展到 Kleisli 范畴（或类似地，Eilenberg-Moore 范畴）这一想法提供了一个非常有趣的视角。

ˆ ˆ**命题 39.** 设 $F, G: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ 是两个自函子。假设 F和 G 分别是 F 和 G 的提升，并设 λ^F 和 λ^G 是它们各自相关联的分配律。ˆ ˆ设 $\alpha_X \in \mathcal{L}(FX, GX)$ 是一个自然变换。那么，如果且仅如果下图交换，Der$(\alpha_X) \in \mathcal{L}_!(FX, GX)$ 才是自然的。

$$\begin{array}{ccc} !FX & \xrightarrow{\lambda^F} & F!X \\ {\scriptstyle !\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ !GX & \xrightarrow[\lambda^G]{} & G!X \end{array} \tag{3}$$

[11] 这些观察是在更一般的 2-范畴框架下得出的。这里也使用了“延拓”一词。为沿用 [16] 的术语，我们使用“提升”一
[12] 词。

证明。 直接计算即可。 □

在微分的情形下，公理（∂-chain）意味着 $\partial \in \mathcal{C}(!\mathsf{S}X, \mathsf{S}!X)$ 是余单子 ! 与函子 S 之间的分配律。这意味着 S 可以被提升~为 $\mathcal{L}_!$ 上的自函子 D。此外，还有一个平凡的分配律 $\mathrm{id}_{!X} \in \mathcal{L}(!X, !X)$，它对应于将 $\mathcal{L}$ 上的恒等函子提升为 $\mathcal{L}_!$ 上的恒等函子。于是，(∂-local) 是方程（3）的一种情形，其中 $F = \mathsf{S}$、$G = \mathrm{Id}$ 和 $\alpha = \pi_0$。这~意味着，当且仅当 $\mathrm{Der}(\pi_0) \in \mathcal{L}_!(\mathsf{D}X, X)$ 是自然变换时，(∂-local) 成立。因此，(D, $\mathrm{Der}(\pi_0)$, $\mathrm{Der}(\pi_1)$, $\mathrm{Der}(\sigma)$) 是 $\mathcal{L}_!$ 上的预微分结构（定义 11 意义下），并且 (D-chain) 成立。

~此外，由于 D 是 S 的提升，对于任意 $h \in \mathcal{L}(X, Y)$，态射 $\mathrm{Der}(h) \in \mathcal{L}_!(X, Y)$~ ~是 D-线性的。事实上，$\mathrm{Der}(\pi_0) \circ \mathsf{D}(\mathrm{Der}(h)) = \mathrm{Der}(\pi_0) \circ \mathrm{Der}(\mathsf{S}h) = \mathrm{Der}(h\,\pi_0) = \mathrm{Der}(h) \circ \mathrm{Der}(\pi_0)$。因此，$\mathrm{Der}(\pi_i)$、$\mathrm{Der}(\sigma)$ 和 $\mathrm{Der}(\mathsf{p}_i)$ 都是线性的，故 (Dproj-lin)、(Dsum-lin) 成立，且预微分结构与笛卡尔积相容。

此外，(∂-lin) 由方程（3）的两个实例构成。第一个实例中，$F = \mathsf{S}$、$G = \mathrm{Id}$ 和 $\alpha = \iota_0 \in \mathcal{L}(X, \mathsf{S}X)$。第二个实例中，$F = \mathsf{S}^2$、$G = \mathsf{S}$ 和 $\alpha = \theta \in \mathcal{L}(\mathsf{S}^2X, X)$。事实上，正如我们在注 5 中所见，存在一个~与 D^2, 将 S^2 提升到 $\mathcal{L}_!$相关联的分配律 $\mathsf{S}(\partial_X)\,\partial_{\mathsf{S}X} \in \mathcal{C}(!\mathsf{S}^2X, \mathsf{S}^2!X)$。因此，~ ~ ~ ~(∂-lin) 成立，当且仅当 $\mathrm{Der}(\iota_0) \in \mathcal{L}_!(\mathsf{D}^2X, \mathsf{D}X)$ 和 $\mathrm{Der}(\theta) \in \mathcal{L}_!(\mathsf{D}^2X, \mathsf{D}X)$ 是自然变换，也就是说，当且仅当 (D-add) 成立[13]。

最后，(∂-施瓦茨)由方程（3）的一个实例构成，其中 $F = \mathsf{S}^2$, $G =$~ ~S^2 以及 $\alpha = \mathsf{c}$。因此，(∂-施瓦茨)成立，当且仅当 $\mathrm{Der}(\mathsf{c}) \in \mathcal{L}_!(\mathsf{D}^2X, \mathsf{D}^2X)$ 是自然的。唯一缺少的公理是 (D-lin)，它对应于 Der(l) 的自然性。根据命题 39，当且仅当下图可交换时，该公理成立。

$$\begin{array}{ccccc} !\mathsf{S}X & & \xrightarrow{\quad\partial_X\quad} & & \mathsf{S}!X \\ {\scriptstyle !\mathsf{l}}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathsf{l}_{!X}} \\ !\mathsf{S}^2X & \xrightarrow[\partial_{\mathsf{S}X}]{} & \mathsf{S}!\mathsf{S}X & \xrightarrow[\mathsf{S}\partial_X]{} & \mathsf{S}^2!X \end{array} \tag{4}$$

该图表在 [5] 中未被提及，但在相干微分的 线性逻辑 语境下完全合理，且在所有已知的相干微分线性逻辑模型中均成立。该图表所带来的影响留待后续研究。至此，定理 8的证明结束。

注 6。唯一剩下的公理是 (∂-&)，它涉及 Seely 范畴 $\mathcal{L}$ 的 Seely 同构 $\mathsf{m}^n \in \mathcal{L}(!X_0 \otimes \ldots \otimes !X_n, !(X_0 \,\&\, \ldots \,\&\, X_n))$。在 LL 中可以定义一种多重线性概念：给定任意 $l \in \mathcal{L}(X_0 \otimes \ldots \otimes X_n, Y)$，可以将 $l \in \mathcal{L}_!(X_0 \& \ldots \& X_n, Y)$ 定义为 $l = l\,(\mathrm{der} \otimes \ldots \otimes \mathrm{der})\,(\mathsf{m}^n)^{-1}$。于是，$\mathcal{L}_!(X_0 \& \ldots \& X_n, Y)$~ 中的一个态射是 $(n+1)$-线性的（按 LL 的意义），当且仅当它可以写成 h，其中某个 h 存在。公理 (∂-&) 可以用来证明，任何按 LL 意义为 $(n+1)$-线性的态射，按定义 24 的意义也为 $(n+1)$-线性。这一事实的证明可以在 [17] 的定理 4.26 中找到。这是一个关键事实，因为它表明，真正重要的是 CCDC 意义下的 $(n+1)$-线性，而不是 LL 意义下的 $(n+1)$-线性。

许多线性逻辑的模型都具有相干微分结构，例如相干空间、非一致相干空间和概率相干空间。因此，它们的 Kleisli 范畴

[13]正如我们所见，这赋予了 ~D 在 $\mathcal{L}_!$ 上的单子结构。事实上，(∂-chain) 和 (∂-lin) 合在一起构成了 单子 ~D 与余单子 $!_$ 之间的分配律。这里存在一种引人注目的对称性，因为它还允许将 $!_$ 提升为 $\mathcal{L}_\mathsf{S}$ S 的 Kleisli 范畴上的余单子

都是 CCDC。这提供了丰富多样的实例。这里我们介绍概率相干空间这一实例。

5.2 概率相干空间的示例

概率相干空间（PCS） [18] 是一个二元组 $X = (|X|, \mathrm{P}X)$，其中 $|X|$ 是一个集合，且 $\mathrm{P}X \subseteq (\mathbb{R}_{\geq 0})^{|X|}$ 满足 $\mathrm{P}X = \{x \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{|X|} \mid \forall x' \in \mathcal{P}'\ \langle x, x' \rangle := \sum_{a \in |X|} x_a x'_a \leq 1\}$，对于某个 $\mathcal{P}' \subseteq (\mathbb{R}_{\geq 0})^{|X|}$，称其为 X的预对偶。为避免 ∞ 系数，还假设$\forall a \in |X|\ 0 < \sup_{x' \in \mathcal{P}'} x'_a < \infty$，此时很容易验证，对所有 $\forall a \in |X|\ 0 < \sup_{x \in \mathrm{P}X} x_a < \infty$均成立。

集合 I 上的元素多重集是一个函数 $m : I \to \mathbb{N}$，满足集合 $\mathrm{supp}(m) = \{i \in I \mid m(i) \neq 0\}$ 是有限的。这些多重集构成的集合 $\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(I)$是由 I生成的自由交换幺半群。我们用 $[i_1, \ldots, i_k]$ 表示满足 $m(i) = \#\{j \mid i_j = i\}$的 $m \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(I)$，其中$i_1, \ldots, i_k \in I$。

给定概率相干空间 X 和 Y，函数 $f : \mathrm{P}X \to \mathrm{P}Y$ 是解析的[14]，当且仅当存在一个矩阵 $t \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|X|) \times |Y|}$，使得对所有 $x \in \mathrm{P}X$ 和 $b \in |Y|$，都有 $f(x)_b = \sum_{(m,b) \in \mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|X|) \times |Y|} t_m\ {}_b x^m$ 其中 $x^m = \prod_{a \in |X|} x_a^{m(a)}$。由于 t 中的所有系数都是有限的，因此不难看出，可以通过迭代求导从函数 f 本身恢复这些系数，见 [18]。因此，一个解析函数恰好对应一个矩阵。

恒等函数 $\mathrm{P}X \to \mathrm{P}X$ 是解析的（其矩阵 t 由 $t_{m,a} = \delta_{m,[a]}$给出），且两个解析函数的复合仍是解析的。我们用 APcoh 表示这样一个范畴：其对象是概率相干空间，态射是解析函数。例如，若 1 是 PCS $(\{*\}, [0,1])$，则由 $f_1(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$和 $f_2(x) = e^{x-1}$给出的 $f_1, f_2 : [0,1] \to [0,1]$属于 $\mathrm{APcoh}(1,1)$，但 $f_3(x) = 2x - x^2$ 不属于，因为它有负系数。两个解析函数 $\mathrm{P}X \to \mathrm{P}Y$的（逐点）和总是有定义的 $\mathrm{P}X \to \mathbb{R}_{\geq 0}^{|Y|}$，但不一定属于 $\mathrm{APcoh}(X, Y)$，因此 APcoh 不是左可加的[15]。

如果 X是一个 PCS，那么 $\widetilde{\mathrm{D}}X = (\{0,1\} \times |X|, \mathrm{P}(\widetilde{\mathrm{D}}X) = \{z \in (\mathbb{R}_{\geq 0})^{\{0,1\} \times |X|} \mid \pi_0(z) + \pi_1(z) \in \widetilde{\mathrm{P}}X\})$ 是一个 PCS，其中 $\pi_i(z)_a = z_{i,a}$。于是 $\pi_0, \pi_1 \in \mathrm{APcoh}(\mathrm{D}X, X)$，并且我们还有由 $\sigma(z) = \pi_0(z) + \pi_1(z)$ 给出的 $\sigma \in \mathrm{APcoh}(\mathrm{D}X, X)$。换句话说，$\mathrm{D}X$ 是这样一个 PCS，其元素是满足 $x + u \in \mathrm{P}X$ 的配对 $(x, u) \in \mathrm{P}X^2$。这样，我们为 APcoh 配备了一个左预可求和结构，其对应的可求和性概念显而易见：若 $f_0, f_1 \in \mathrm{APcoh}(X, Y)$ 的逐点和 $f_0 + f_1$ 属于 $\mathrm{APcoh}(X, Y)$，则它们可求和（该和的矩阵是 f_0 和 f_1 的矩阵之和）。很容易验证，这个左预可求和结构是一个左可求和结构（见定义 10）。

$\widetilde{\mathrm{D}}$如第 2.1 节所述，微分归结为将运算 D扩展到态射上，并使其满足定义 15 的条件。给定 $f \in$

[14]这些函数还有一种纯函数式刻画：它们是全单调且 Scott 连续的函数，参见 [19]

[15]至少对于这种最自然的加法而言。

$\widetilde{\mathbf{APcoh}}(X,Y)$ 的矩阵 t 以及 (x,u) 态射 $\in \mathbf{P}(\mathbf{D}X)$，我们有

$$\begin{aligned} f(x+u) &= \sum_{(m,b)\in\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|X|)\times|Y|} t_{m,b}(x+u)^m \\ &= \sum_{(m,b)\in\mathcal{M}_{\mathrm{fin}}(|X|)\times|Y|} t_{m,b} \sum_{p\le m} \binom{m}{p} x^{m-p}u^p \\ &= f(x) + \sum_{a\in\mathsf{supp}(m)} \binom{m}{[a]} x^{m-[a]}u_a + r(x,u) \\ &= f(x) + \sum_{a\in\mathsf{supp}(m)} m(a)x^{m-[a]}u_a + r(x,u) \end{aligned}$$

其中 $\binom{m}{p} = \prod_{a\in|X|}\binom{m(a)}{p\ a}\ (\ ) \in \mathbb{N}$ 当 $p \le m$ 时，按逐点序。在这些表达式中，余项 $r(x,u)$ 是关于 x 和 u 的幂级数，其所有单项式在 u 中的总次数均为 > 1（例如，当 $a,b,c \in |X|$ 时，$x_a u_b u_c$）。特别地，$\|r(x,u)\| \in o(\|u\|)$，其中 $\|x\| = \sup\{\langle x,x'\rangle \mid x' \in \mathcal{P}'\} \in [0,1]$，对 X 的任意预对偶都成立（此范数不依赖于 $\mathcal{P}'$ 的选择）。利用定义 11，我们设

$$\mathsf{D}f(x,u) = \sum_{a\in\mathsf{supp}(m)} m(a)x^{m-[a]}u_a.$$

由于 t 的所有系数都是 ≥ 0，我们有 $f(x)+\mathsf{D}f(x,u) \le f(x+u)$，按逐点序，因此 $\widetilde{\ }$ 满足 $\mathsf{D}f(x,u) = (f(x),\mathsf{D}f(x,u)) \in \mathbf{P}(\mathbf{D}Y)$。这样，我们定义了一个解析函数 $\widetilde{\ }\ \widetilde{\ }\ \widetilde{\ }\mathsf{D}f \in \widetilde{\mathbf{APcoh}}(\mathbf{D}X,\mathbf{D}Y)$，并且很容易验证，APcoh 是符合定义 15 意义下的相干微分范畴。对于上面的两个例子，我们得到 $\mathsf{D}f_2(x,u) = e^{x-1}u$ 以及 $\mathsf{D}f_1(x,u) = xu/\sqrt{1-x^2}$；后者似乎在 $x=1$ 时未定义，但实际上并非如此，因为此时必有 $u=0$，因此 $\mathsf{D}f_1(1,0) = 0$。

一个解析的 $f \in \mathbf{APcoh}(X,Y)$ 是线性的，如果其矩阵 t 满足：每当 $t_{m,b} \neq 0$ 时，就有 $m = [a]$ 存在某个 $a \in |X|$。这种线性概念[16] 与 $\widetilde{\ }$ 可加性（定义 3）和 D-线性（定义 16）都一致。

范畴 APcoh 是笛卡尔的，其中 $\top = (\emptyset,\{0\})$ 和 $X \,\&\, Y = (\{0\}\times|X| \cup \{1\}\times|Y|)$ $\{z \in (\mathbb{R}_{\ge 0})^{\{0\}\times|X|\cup\{1\}} \mid \mathsf{p}_0(z) \in \mathsf{P}X \text{ 和 } \mathsf{p}_1(z) \in \mathsf{P}Y\}$ 很容易看出是一个 PCS（p_i 的定义与 π_i 完全相同），且 $\mathsf{P}(X \,\&\, Y) = \mathsf{P}X \otimes \mathsf{P}Y$，只差一个平凡的双射。投影 p_i 是可加的，而 $\mathsf{c}_\&$（见第 4.1 节）是一个同构：若 $((x,u),(y,v)) \in \mathsf{P}(\mathbf{D}X \,\&\, \mathbf{D}Y)^{\widetilde{\ }}$，则 $((x,y),(u,v)) \in \mathsf{P}(\mathbf{D}(X \,\&\, Y))$，因为 $(x,y)+(u,v) = (x+u,y+v)$，因此根据推论 7，可求和结构与笛卡尔积相容。

若一个 $f \in \widetilde{\mathbf{APcoh}}(X_0 \,\&\, X_1, Y)$ 在 X_0, X_1 中是双线性的，则它分别对两个输入都是线性的（或可加的）。这等价于说，它的矩阵 t 满足：若 $t_{m,b} \neq 0$，则 $m = [(0,a_0),(1,a_1)]$，其中 $a_i \in |X_i|$ 对于 $i = 0,\ 1$。令 $\mathbf{N} = (\mathbb{N}, \{x \in (\mathbb{R}_{\ge 0})^{\mathbb{N}} \mid \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \le 1\})$ 表示 APcoh 中的整数类型，则函数 $h\colon \widetilde{\mathbf{APcoh}}(\mathbf{N} \,\&\, \mathbf{N} \,\&\, \mathbf{N}, \mathbf{N})$，由 $h(u,x,y) = u_0 x + (\sum_{n=1}^{\infty} u_n)y$ 给出，在 N、N 和 N 中是双线性的，可理解为零值判断算子。函数 $k \in \widetilde{\mathbf{APcoh}}(\mathbf{N},\mathbf{N})$，满足 $k(x)_n = x_{n+1}$，是线性的，并表示后继运算。

[16] 这源于以下事实：$\mathbf{APcoh}$ 是线性逻辑的 PCS 模型上余单子“!”的 Kleisli 范畴，其中线性逻辑的 PCS 模型为 [18]。

6 与笛卡尔微分范畴的联系

我们在本节中证明，CCDC 是笛卡尔微分范畴的一种推广[3]。

6.1 笛卡尔左加法范畴

我们采用 [20] 对左加法范畴的表述，因为本文使用的假设集最小。

定义 26. 左加法范畴是这样一种范畴：每个同态集都是交换幺半群，其加法 $+$ 和零元 0 与右侧的复合相交换，即 $(f+g)\circ h = f\circ h + g\circ h$ 且 $0\circ f = 0$。

定义 27. 若态射 h 的加法与左侧和 h 的复合相容，即 $h\circ(f+g) = h\circ f + h\circ g$ 且 $h\circ 0 = 0$，则称其为可加态射。注意，恒等态射是可加的，且可加态射对加法和复合封闭。

定义 28. 笛卡尔左加法范畴是投影为可加态射的左加法范畴。

给定一个笛卡尔左加法范畴 $\mathcal{C}$，可以定义一个可求和配对结构 ~（定义 1）（$\mathsf{D}_\&, \mathsf{p}_0, \mathsf{p}_1, \mathsf{p}_0 + \mathsf{p}_1$），其中 $\mathsf{D}_\& X = X \,\&\, X$。接着可以验证，所有态射都是可求和的（ $f \boxplus g$ 的见证是 $\langle f, g\rangle$）。此外，~范畴的左加法性确保由（$\mathsf{D}_\&, \mathsf{p}_0, \mathsf{p}_1, \mathsf{p}_0 + \mathsf{p}_1$）诱导的和的概念与同态集上的原生幺半群结构一致。特别地，一个态射按照定义 3 的意义是可加的，当且仅当它按照定义 28 的意义是可加的。因此，~$\mathsf{p}_0, \mathsf{p}_1$ 和 $\mathsf{p}_0 + \mathsf{p}_1$ 都是可加的。由此，（$\mathsf{D}_\&, \mathsf{p}_0, \mathsf{p}_1$, $\mathsf{p}_0 + \mathsf{p}_1$）是一个左预可求和结构。~最后，它是一个左可求和结构，因为（D-witness）显然成立（所有对象都是~~可求和的），而（D-zero）和（D-com）成立，这是因为所有对象都是可求和的，并且（$\mathcal{C}(X, Y)$ $+, 0$）是一个交换幺半群。

~~反过来， $\mathcal{C}$ 上形状为 $(\mathsf{D}_\&, \mathsf{p}_0, \mathsf{p}1, \sigma)$ 且 $\mathsf{D}_\& X = X \& X$ 的任意左可求和结构，都会为每个同态集赋予交换幺半群结构，而命题 2 保证该范畴是左加法范畴。于是，如上所述，一个态射按照定义 3 的意义是可加的，当且仅当它按照定义 28 的意义是可加的。因此，$\mathsf{p}_0, \mathsf{p}_1$ 是可加的，所以该范畴是笛卡尔左加法范畴。此外，根据命题 1， $\sigma = \mathsf{p}_0 + \mathsf{p}_1$，因此由同态集上的幺半群诱导的左可求和结构与我们最初采用的左可求和结构一致。由此我们证明了下面的定理 9。

~**定理 9**。设 $\mathcal{C}$ 是一个笛卡尔范畴。定义 $\mathsf{D}_\& X = X \,\&\, X$。使 $\mathcal{C}$ 成为笛卡尔左加法范畴~~~的同态集上的幺半群结构，与满足下列条件的 $\mathcal{C}$ 上的左可求和结构$(\mathsf{D}\ \pi_0, \pi_1, \sigma)$ 之间存在双射：$\mathsf{D} = \mathsf{D}_\&$，$\pi_0 = \mathsf{p}_0$ 以及$\pi_1 = \mathsf{p}_1$。

~~备注7。任何定义在 $\mathcal{C}$ 上、形如（$\mathsf{D}_\&$，$\mathsf{p}_0, \mathsf{p}_1$，$\sigma$）的左可求和结构，若满足$\mathsf{D}_\& X = X \,\&\, X$，则事实上与笛卡尔积相容。$\mathsf{p}_0$ 和p_1 的可加性属于可求和公理的一部分，而$\mathsf{c}_\&$ 是同构，这归功于定理 4以及一切对象均可求和这一事实。

6.2 笛卡尔微分范畴

We 按照另一种表述方式给出笛卡尔微分范畴的公理 n of [7] 为方便起见。

定义 29. 笛卡尔微分范畴是一个笛卡尔左加法范畴 $\mathcal{C}$，配备了一个微分组合子 D，它将每个态射 $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ 映射为态射 $\mathsf{D}f \in \mathcal{C}(X \,\&\, X, Y)$，使得

(1) $\mathsf{D}\mathsf{p}_0 = \mathsf{p}_0 \circ \mathsf{p}_1$, $\mathsf{D}\mathsf{p}_1 = \mathsf{p}_1 \circ \mathsf{p}_1$; (2) $\mathsf{D}0 = 0$ 和 $\mathsf{D}(f+g) = \mathsf{D}f + \mathsf{D}g$; (3) 恒等态射 $= \pi_1$ 和 $\mathsf{D}(g \circ f) = \mathsf{D}g \circ \langle f \circ \pi_0, \mathsf{D}f \rangle$; (4) $\mathsf{D}f \circ \langle x, 0 \rangle = 0$ 和 $\mathsf{D}f \circ \langle x, u+v \rangle = \mathsf{D}f \circ \langle x, u \rangle + \mathsf{D}f \circ \langle x, v \rangle$; (5) $\mathsf{DD}f \circ \langle \langle x, 0 \rangle, \langle 0, u \rangle \rangle = \mathsf{D}f \circ \langle x, u \rangle$; (6) $\mathsf{DD}f \circ \langle \langle x, u \rangle, \langle v, w \rangle \rangle = \mathsf{DD}f \circ \langle \langle x, v \rangle, \langle u, w \rangle \rangle$.

请注意，公理$\mathsf{Did} = \mathsf{p}_1$ 似乎在 [7], 给出的公理中缺失了，不过在 [3]的原始表述中可以找到。通常还有另一条公理，指出 $\mathsf{D}\langle f, g \rangle = \langle \mathsf{D}f, \mathsf{D}g \rangle$. 但正如 [20], 所指出的，这条公理可以由投影的线性性和链式法则推出，因此我们将其舍弃。

设 $\mathcal{C}$ 是一个左加法范畴。正如定理 9 所述，~同态集中的幺半群结构来自一个与笛卡尔积相容的可求和结构 $(\mathsf{D}_\&, \mathsf{p}_0, \mathsf{p}_1, \mathsf{p}_0 + \mathsf{p}_1)$。因此，在此可求和结构之上定义的预微分结构与定义 29 意义下的微分组合子之间存在双射：我们~可以将 $\mathsf{D}_\&$ 从 D 得到的函子作用定义为 $\mathsf{D}_\& f := \langle f \circ \mathsf{p}_0, \mathsf{D}f \rangle$，并将 D~从 $\mathsf{D}_\&$ 定义为 $\mathsf{D}f = \mathsf{p}_1 \circ \mathsf{D}_\& f$。

此外，我们在第 3 节中证明，相干微分的公理等价于关于 D 的一些等式性质。当底层左可求和结构~为 $(\mathsf{D}_\&, \mathsf{p}_0, \mathsf{p}_1, \mathsf{p}_0 + \mathsf{p}_1)$ 时，这些性质恰好就是笛卡尔微分范畴的公理。公理 (1) 对应于 (Dproj-lin)。根据推论 5，(2) 对应于 (Dsum-lin)。根据命题 16，(3) 对应于 (D-chain)。根据命题 18 和 19，(4) 对应于 (D-add)。根据命题 20，(5) 对应于 (D-lin)。根据命题 21，(6) 对应于 (D-Schwarz)。

最后，左可求和结构~的微分结构实际上与笛卡尔积相容，因为 p_0 和 p_1 的线性已包含在（1）中。

定理 10。 笛卡尔微分范畴恰好是满足下列条件的笛卡尔相干微分范畴：其中 $\mathsf{D}X = X \,\&\, X$, $\pi_0 = \mathsf{p}_0$, $\pi_1 = \mathsf{p}_1$。

注 8。 在 [3], h 若 $\mathsf{D}(h) = h \circ \mathsf{p}_1$，则称其为线性的。 命题 10 保证了~这一线性概念通过 定理 10 恰好对应于我们在 D-线性中引入的概念，见 定义 16。

注 9。 每个笛卡尔微分范畴也是一个切范畴 [7], ，其~由 D 诱导的切函子与 $\mathsf{D}_\&$是完全相同的函子。这是合理的，因为相干微分和切范畴非常相似：它们通过以两种不同方式推广加法来扩展笛卡尔微分范畴。

7 一阶相干微分语言

We 引入一种与这些模型相关联的一阶语言。请注意，一项发展 t
of a 完整的相干微分 PCF，而我们的语言大致可以视为其中的一部分 a

片段已经可以在 [17], 中找到，其语义基于 [5]。本文的主要贡献在于，CCDC 为更有原则、更综合地处理语义提供了工具。语法与语义之间更紧密的联系，使得发展新思路成为可能，例如以更系统的方式处理多重线性。

7.1 项

定义 30。设 $\mathcal{B}$ 为基类型符号集，其元素记为 α、β.....对于任意 $\alpha \in \mathcal{B}$ 和 $h \in \mathbb{N}$，$\tilde{\mathrm{D}}^h\alpha$ 是一个基类型。一般类型归纳定义如下:

$$A, B, C := \tilde{\mathrm{D}}^h\alpha \mid A \,\&\, B\,.$$

对于任意类型 A，我们通过对 A 归纳定义类型 $\tilde{\mathrm{D}}A$：$\tilde{\mathrm{D}}\tilde{\mathrm{D}}^h\alpha = \tilde{\mathrm{D}}^{h+1}\alpha$，以及 $\tilde{\mathrm{D}}(A \& B) = \mathrm{D}A \,\&\, \mathrm{D}B$。

定义 31。设 φ、ψ.....为函数符号。每个函数符号 φ 都唯一对应一个形式为 A_0，.....，$A_n \to B$ 的函数类型，其中 A_i 和 B 是类型。于是，$n+1$ 称为 φ 的元数，记作 $\mathrm{ar}(\varphi)$。

类型为 A_0，.....，$A_n \to B$ 的函数符号 φ 将在第 7.2 节中解释为一个 $(n+1)$-线性态射 $[\![\varphi]\!] \in \mathcal{C}([\![A_0]\!] \& \cdots \& [\![A_n]\!], [\![B]\!])$（回顾定义 24）。注意，类型 A_i 本身可以是积，不一定是基类型。例如，$\mathcal{C}((A \& B) \& C, D)$ 中的一个二重线性映射绝不能视为 $\mathcal{C}(A \& B \& C, D)$ 中的三重线性映射。

定义 32. 定义函数 为

$$f, g, \ldots := \varphi \mid \pi_i^A \mid \mathsf{p}_i^{A,B} \mid \iota_i^A \mid \theta_n^A$$

其中 $i \in \{0, 1\}$、$n \geq 0$、φ 是函数符号，A、B 是类型。每个函数 f 都有一个函数类型：π_0^A、π_1^A 的类型为 $\tilde{\mathrm{D}}A \to A$，$\iota_0^A$、$\iota_1^A$ 的类型为 $A \to \tilde{\mathrm{D}}A$，$\theta_n^A$ 的类型为 $\tilde{\mathrm{D}}^{n+1}A \to \tilde{\mathrm{D}}A$，而 $\mathsf{p}_0^{A\,B}$，、$\mathsf{p}_1^{A\,B}$，的类型分别为 $A \,\&\, B \to A$ 和 $A \,\&\, B \to B$。注意，投影的元数为 1，而不是 2。下文中，构造子 π_i、p_i、ι_i 和 θ_n 所附的类型始终省略不写。

注记 10. 取 $n = -1$ 即可表示常量。

De定义 33. 设 $\mathcal{V}$ 为变量符号集。项集 Λ_1 归纳定义如下 y as f如下

$$t, u, \ldots := \langle t_0, t_1 \rangle \mid f^\zeta(t_0, \ldots, t_n) \mid x$$

其中 $x \in \mathcal{V}$、f 是元数为 $n+1$ 和 $\zeta \in [\![0$的函数符号，有限词集[17]由 $[\![0$、$n]\!]$的元素构成。

注记 11。只要同时提供这些函数符号的形式导数，我们便可以在此演算中加入非多重线性函数符号。不过，由于 PCF 基本运算的性质，我们只关注多重线性函数。相干微分 PCF 将包含一个基类型 nat、两个函数符号 pred和 succ，其类型为 $\mathtt{nat} \to \mathtt{nat}$；一族函数符号 $\mathtt{if}^A$，其类型为 $\mathtt{nat} \; A \,\&\, A \to A$（条件式）；以及一族函数符号 $\mathtt{let}^A$，其类型为 nat，$(\mathtt{nat} \to A) \to A$（在整数类型上采用按值调用）。在 线性逻辑 框架中的相干微分语义，或 [17] 第 5.2 节的例子，都表明

[17]这样的词表示对多重线性符号 f 连续应用偏导数，更多 e on t其在第 7.2 节。

$$\frac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A}\ (\text{Var}) \qquad \frac{\Gamma \vdash t_0 : A \quad \Gamma \vdash t_1 : B}{\Gamma \vdash \langle t_0, t_1 \rangle : A \,\&\, B}\ (\text{Pair})$$

$$\frac{f : A_0, \ldots, A_n \to B \quad \zeta \in [\![0, n]\!]^* \quad (\Gamma \vdash t_i : \widetilde{\mathsf{D}}^{|\zeta|_i} A_i)_{i=0}^n}{\Gamma \vdash f^\zeta(t_0, \ldots, t_n) : \widetilde{\mathsf{D}}^{|\zeta|} B}\ (\text{App})$$

图 1：类型规则

$$\begin{aligned}
\partial(x, y) &= \begin{cases} x & \text{if } y = x \\ \iota_0(y) & \text{otherwise} \end{cases} \\
\partial(x, \langle t_0, t_1 \rangle) &= \langle \partial(x, t_0), \partial(x, t_1) \rangle \\
\partial(x, f^\zeta(t_0, \ldots, t_n)) &= \theta_n(f^{\zeta n \cdots 10}(\partial(x, t_0), \ldots, \partial(x, t_n)))
\end{aligned}$$

图 2：项的微分

pred和 succ 应解释为线性态射，而 $\texttt{if}^A$ 和 $\texttt{let}^A$ 应解释为 2-线性态射。利用变量也可以非线性地使用这一事实，以及 PCF 不动点算子，便能够写出解释并非多重线性的项。例如，f_1 第 5.2 节 中的 [4]就是一个项的语义，参见。

记号 5. 对于任意单词 ζ，我们用 $|\zeta|$ 表示其长度，用 $|\zeta|_j$ 表示字母 j出现的次数。我们用 f 表示 f^ϵ，其中 ϵ 为空词。注意，当 $\mathrm{ar}(f) = 0$ 时，单词 $\zeta \in [\![0、\ 0]\!]^*$ 可以唯一地视为一个整数 $d = |\zeta|$。于是我们用 $f^{(d)}$ 表示 f^ζ。

我们在图 1中介绍类型规则。对多线性态射的系统处理使这些规则能够大幅分解。若 f 具有类型 A_0、.....、$A_n \to B$，我们记作 $f\colon\ A_0,\ \ldots\ldots,\ A_n \to B$。对于任意项 t，可以通过归纳法定义项 $\partial(x,\ t)$。t归纳步骤见图 2。

命题 40。若 $\Gamma, x\colon A \vdash t\colon B$ 则 $\Gamma, x : \mathsf{D}A \vdash \partial(x, t) : \mathsf{D}B$

证明。 对类型推导进行归纳。

- 若最后应用的规则是 (Var)，则第一种可能是 $t = x$ and $\Gamma, x\colon\ A \vdash x\colon\ A$. 但此时，$\partial(x, x) = x$ and $\Gamma, x : \mathsf{D}A \vdash x : \mathsf{D}A$. 第二种可能是$t = y$ with $y \neq x$ and $\Gamma \vdash y : B$. 但此时，$\partial(x, y) = \iota_0(y)$ and $\Gamma \vdash \iota_0(y) : \mathsf{D}B$. 因此，$\Gamma, x : \mathsf{D}A \vdash \iota_0(y) : \mathsf{D}B$ 在两种情况下均成立。
- 若最后应用的规则是 (Pair)，则 $t = \langle t_0, t_1 \rangle$, t的类型为 $B_0 \& B_1$, $\Gamma, x\colon\ A \vdash t_0\colon\ B_0$and $\Gamma, x\colon\ A \vdash t_1\colon\ B_1$. 但 $\partial(x, t) = \langle \partial(x, t_0)\ \partial(x, t_1) \rangle$. 根据归纳假设 $\Gamma, x : \mathsf{D}A \vdash \partial(x, t_0) : \mathsf{D}B_0$ and $\Gamma, x : \mathsf{D}A \vdash \partial(x, t_1) : \mathsf{D}B_1$. 因此，应用 (Pair) 后，$\Gamma, x : \mathsf{D}A \vdash \langle \partial(x, t_0)\ \partial(x, t_1) \rangle : \mathsf{D}B_0 \& \mathsf{D}B_1$. 但 $\mathsf{D}B_0 \& \mathsf{D}B_1 = \mathsf{D}(B_0 \& B_1)$ 因此 $\Gamma, x : \mathsf{D}A \vdash \partial(x, \langle t_0, t_1 \rangle) : \mathsf{D}(B_0 \& B_1)$.
- 如果最后应用的规则是（应用规则），那么 $t = f^\zeta(t_0, \ldots, t_n)$, f具有某个类型 $A_0, \ldots, A_n \to B$, 且 $\Gamma, x\colon\ A \vdash t\colon\ \widetilde{\mathsf{D}}^{|\zeta|} B$。此外，对于任意 i, $\Gamma, x\colon\ A \vdash t_i\colon\ \widetilde{\mathsf{D}}^{|\zeta|_i} A_i$。根据归纳法

假设，$\Gamma, x\colon \tilde{\mathsf{D}}A \vdash \partial(x,t_i)\colon \tilde{\mathsf{D}}^{|\zeta|_i+1}A_i$。但 $|\zeta n\cdots 10|_i = |\zeta|_i + 1$ 因此，应用（应用规则）可得 $\Gamma, x\colon \tilde{\mathsf{D}}A \vdash f^{\zeta n\cdots 10}(\partial(x,t_0)\ldots,\partial(x,t_n))\colon \tilde{\mathsf{D}}^{|\zeta|+n+1}B$ 的一个推导。再次对 $f = \theta_n$ 应用（应用规则），得到 $\Gamma, x\colon \tilde{\mathsf{D}}A \vdash \theta_n(f^{\zeta n\cdots 10}(\partial(x,t_0)\ldots,\partial(x,t_n)))\colon \tilde{\mathsf{D}}^{|\zeta|+1}B$ 的一个推导，由此证明完毕。

□

7.2 语义

设 $\mathcal{C}$ 是一个 CCDC。为简单起见，我们假设 $\mathsf{D}(X \,\&\, Y) = \mathsf{D}X \,\&\, \mathsf{D}Y$ 且 $\mathsf{c}_\& = \mathsf{id}$[18]。假设对于任意基类型符号 α，我们给定了 $\mathcal{C}$ 的一个对象 $[\![\alpha]\!]$。那么，可以将任意类型解释为一个对象：$[\![\tilde{\mathsf{D}}^h\alpha]\!] = \tilde{\mathsf{D}}^h[\![\alpha]\!]$ 且 $[\![A \,\&\, B]\!] = [\![A]\!] \,\&\, [\![B]\!]$。

通过直接的归纳法可得 $[\![\mathsf{D}A]\!] = \mathsf{D}[\![A]\!]$。通常，这种解释可扩展到上下文，令 $[\![x_0\colon A_0,\ldots,x_n\colon A_n]\!] = [\![A_0]\!] \,\&\, \cdots \,\&\, [\![A_n]\!]$。空上下文的语义为 $\top$。

假设对于任意函数符号 $\varphi\colon A_0,\ldots,A_n \to B$，我们给定一个 $(n+1)$-线性态射 $[\![\varphi]\!] \in \mathcal{C}([\![A_0]\!] \,\&\, \cdots \,\&\, [\![A_n]\!], [\![B]\!])$。那么，通过令 $[\![\pi_i]\!] = \pi_i$, $[\![\iota_i]\!] = \iota_i$, $[\![\theta_n]\!] = \theta^n$（如定义 21 中所定义）以及 $[\![\mathsf{p}_i]\!] = \mathsf{p}_i$，任意函数 $f\colon A_0,\ldots,A_n \to B$ 都可以解释为一个 $(n+1)$-线性态射 $[\![f]\!]$。

注 12. 由于 $\mathsf{c}_\& = $ 恒等态射，我们有 $\mathsf{D}\mathsf{p}_i = \mathsf{D}\mathsf{p}_i \circ (\mathsf{c}_\&)^{-1} = \mathsf{D}\mathsf{p}_i \circ \pi_0 \,\&\, \pi_0, \pi_1 \,\&\, \pi_1 = \tilde{\mathsf{D}}\mathsf{p}_i \circ (\pi_0 \,\&\, \pi_0), \mathsf{p}_i \circ (\pi_1 \,\&\, \pi_1) = \pi_0 \circ \mathsf{p}_i, \pi_1 \circ \mathsf{p}_i = \mathsf{p}_i$。另请注意，$\langle \mathsf{D}f_0, \mathsf{D}f_1\rangle = \mathsf{D}\langle f_0, f_1\rangle$ 根据命题 24

定理 11. 对于任意项 t，只要 $\Gamma \vdash t\colon A$，我们就可以定义 $[\![t]\!]_\Gamma \in \mathcal{C}([\![\Gamma]\!], [\![A]\!])$。

证明。 我们对该项进行归纳。

- 若 $t = x$，则最后一个类型规则必定是（变量规则），因此 $\Gamma = \Gamma_0, x\colon A, \Gamma_1$。定义 $[\![x]\!]_\Gamma = \mathsf{p}_{|\Gamma_0|} \in \mathcal{C}([\![\Gamma_0]\!] \,\&\, [\![A]\!] \,\&\, [\![\Gamma_1]\!], [\![A]\!])$。
- 若 $t = \langle t_0, t_1\rangle$，则最后一个类型规则必定是（配对规则），因此 t 的类型为 $A \,\&\, B$, $\Gamma \vdash t_0\colon A$ 且 $\Gamma \vdash t_1\colon B$。根据归纳法，可以定义 $[\![t_0]\!]_\Gamma \in \mathcal{C}([\![\Gamma]\!], [\![A]\!])$ 和 $[\![t_1]\!]_\Gamma \in \mathcal{C}([\![\Gamma]\!], [\![B]\!])$。接着定义 $[\![\langle t_0, t_1\rangle]\!]_\Gamma = \langle [\![t_0]\!]_\Gamma, [\![t_1]\!]_\Gamma\rangle \in \mathcal{C}([\![\Gamma]\!], [\![A \,\&\, B]\!])$。
- 若 $t = f^\zeta(t_0,\ldots,t_n)$ 且 $f\colon A_0,\ldots,A_n \to B$，则最后一个类型规则必定是（应用规则）。也就是说，t 的类型必定为某个类型 $D^{|\zeta|}B$，并且对于 $i = 0,\ldots,n$，我们有 $\Gamma \vdash t_i\colon \tilde{\mathsf{D}}^{|\zeta|_i}A_i$ 的推导。根据归纳假设，我们可以定义 $[\![t_i]\!]_\Gamma \in \mathcal{C}([\![\Gamma]\!], [\![D^{|\zeta|_i}A_i]\!])$。但是 $[\![D^{|\zeta|_i}A_i]\!] = \tilde{\mathsf{D}}^{|\zeta|_i}[\![A_i]\!]$ 且 $\tilde{\mathsf{D}}_{\zeta_k}\ldots\tilde{\mathsf{D}}_{\zeta_1}[\![f]\!] \in \mathcal{C}(\tilde{\mathsf{D}}^{|\zeta|_0}[\![A_0]\!] \,\&\, \cdots \,\&\, \tilde{\mathsf{D}}^{|\zeta|_n}[\![A_n]\!], \tilde{\mathsf{D}}^{|\zeta|}[\![B]\!])$。因此，我们可以令 $[\![f^{\zeta_1\cdots\zeta_k}(t_0,\ldots,t_n)]\!]_\Gamma = \tilde{\mathsf{D}}_{\zeta_k}\ldots\tilde{\mathsf{D}}_{\zeta_1}[\![f]\!] \circ \langle [\![t_0]\!]_\Gamma,\ldots,[\![t_n]\!]_\Gamma\rangle$。

□

记号 6. 我们用 $[\![x]\!]_\Gamma = \mathsf{p}_x$ 表示 $[\![\Gamma]\!]$ 到 Γ 中 x 所在坐标的投影。

注记 13。 特别地，$[\![\pi_i^{(d)}(t)]\!] = \tilde{\mathsf{D}}^d\pi_i \circ [\![t]\!]$, $[\![\iota_i^{(d)}(t)]\!] = \tilde{\mathsf{D}}^d\iota_i \circ [\![t]\!]$, $[\![\theta_n^{(d)}(t)]\!] = \tilde{\mathsf{D}}^d\theta^n \circ [\![t]\!]$。更重要的是，$[\![\mathsf{p}_i^{(d)}(t)]\!] = \tilde{\mathsf{D}}^d\mathsf{p}_i \circ [\![t]\!] = \mathsf{p}_i \circ [\![t]\!]$，这是因为我们假设 $\mathsf{c}_\&$ 是恒等态射。

[18] 这个假设绝非必要，但它简化了记号和结果

记号 7. 对任意 $\zeta = \zeta_1 \cdots \zeta_k$ 中的字 $[\![0,n]\!]^k$，定义 $\tilde{\mathrm{D}}\zeta := \tilde{\mathrm{D}}_{\zeta_k} \ldots \tilde{\mathrm{D}}_{\zeta_1}$。那么，对任意$f \in \mathcal{C}(X_0 \,\&\, \ldots \,\&\, X_n, Y)$，$\tilde{\mathrm{D}}_\zeta f \in \mathcal{C}(\tilde{\mathrm{D}}^{|\zeta|_0} X_0 \,\&\, \cdots \,\&\, \tilde{\mathrm{D}}^{|\zeta|_n} X_n, \tilde{\mathrm{D}}^{|\zeta|} Y)$。注意，$\tilde{\mathrm{D}}_{\zeta\cdot\delta} = \tilde{\mathrm{D}}_\delta \tilde{\mathrm{D}}_\zeta$。那么，命题 36 可视为如下性质：对于任意 $f(n+1)$-线性映射，以及任意长度为 d 的字δ，$\tilde{\mathrm{D}}^d \pi_i \circ \tilde{\mathrm{D}}_\delta \tilde{\mathrm{D}}_j f = \tilde{\mathrm{D}}_\delta f \circ (\tilde{\mathrm{D}}^{|\delta|_j} \pi_i$; 恒等态射–$j$)

本节关于演算的主要结果是证明，这一语法导数运算的语义与模型中的导数相对应。

定理 12。 若 $\Gamma, x\colon A \vdash t\colon B$ 则 $[\![\partial(x,t)]\!]_{\Gamma,x:\tilde{\mathrm{D}}A} = \mathrm{D}_1[\![t]\!]_{\Gamma,x:A}$ 其中 $[\![t]\!]_{\Gamma,x:A}$ 视为 $\mathcal{C}([\![\Gamma]\!] \,\&\, [\![A]\!], [\![B]\!])$ 的态射。

证明。 对 t 使用归纳法。

- 若 $t = x$ 则 $[\![t]\!]_{\Gamma,x:A} = \mathrm{p}_1 \in \mathcal{C}([\![\Gamma]\!] \,\&\, [\![A]\!], [\![A]\!])$。那么 $\mathrm{D}_1\mathrm{p}_1 = \tilde{\mathrm{D}}\mathrm{p}_1 \circ \tilde{\Phi}^1 = \tilde{\mathrm{D}}\mathrm{p}_1 \circ \tilde{\mathrm{id}} \,\&\pi_0, 0 \,\&\, \pi_1 = \mathrm{p}_1 \circ (\mathrm{id} \,\&\, \pi_0), \mathrm{p}_1 \circ (0 \,\&\, \pi_1) = \pi_0 \circ \mathrm{p}_1, \pi_1 \circ \mathrm{p}_1 = \mathrm{p}_1$ 由命题 25及 p_1 的线性性得出。$\sim$
- 若 $t = y \neq x$，则 $[\![t]\!]_{\Gamma,x:A} = [\![y]\!]_\Gamma \circ \mathrm{p}_0 = \mathrm{p}_y \circ \mathrm{p}_0 \in \mathcal{C}([\![\Gamma]\!] \,\&\, [\![A]\!], [\![B]\!])$。于是 $\mathrm{D}1(\mathrm{p}_y \circ \mathrm{p}0) = \tilde{\mathrm{D}}\mathrm{p}_y \circ \mathrm{D}\mathrm{p}_0 \circ \Phi^1 = \mathrm{D}\mathrm{p}_y \circ \mathrm{D}\mathrm{p}_0 \circ \mathrm{id} \,\&\, \pi_0, 0 \,\&\, \pi_1 = \mathrm{D}\mathrm{p}_y \circ \mathrm{p}_0 \circ (\mathrm{id} \,\&\, \pi_0), \mathrm{p}_0 \circ (0 \,\&\, \pi_1) = \tilde{\mathrm{D}}\mathrm{p}_y \circ \mathrm{p}0, 0 = \mathrm{p}_y \circ \mathrm{p}0, 0 = [\![\iota_0(y)]\!] = [\![\partial(x,y)]\!]$。
- 若 $t = \langle t_0, t_1 \rangle$，则 $[\![\partial(x,t)]\!] = [\![\langle \partial(x,t_0)\ \partial(x,t_1)\rangle]\!] = \langle [\![\partial(x,t_0)]\!], [\![\partial(x,t_1)]\!]\rangle$。根据归纳假设，$[\![\partial(x,t)]\!] = \langle \mathrm{D}_1[\![t_0]\!], \mathrm{D}_1[\![t_1]\!]\rangle$。但是 $\langle \mathrm{D}_1[\![t_0]\!], \mathrm{D}_1[\![t_1]\!]\rangle = \langle \mathrm{D}[\![t_0]\!] \circ \sim\Phi^1, \mathrm{D}[\![t_1]\!] \circ \Phi^1\rangle = \langle \mathrm{D}[\![t_0]\!], \mathrm{D}[\![t_1]\!]\rangle \circ \Phi^1$。根据注 12，这等于 $\tilde{\mathrm{D}}\langle [\![t_0]\!], [\![t_1]\!]\rangle \circ \Phi^1 = \tilde{\mathrm{D}}_1\langle [\![t_0]\!], [\![t_1]\!]\rangle = \mathrm{D}_1[\![t]\!]$。
- 若 $t = f^\zeta(t_0, \ldots, t_n)$，则根据定义 $\partial(x,t) = \theta_n(f^{\zeta^{n\cdots 10}}(\partial(x,t_0) \ldots, \partial(x,t_n)))$。因此，$[\![\partial(x,t)]\!] = \theta^n \circ \mathrm{D}_{n\cdots 10}\mathrm{D}_\zeta f \circ \langle [\![\partial(x,t_0)]\!], \ldots, [\![\partial(x,t_n)]\!]\rangle = \theta^n \circ \mathrm{D}_{n\cdots 10}\mathrm{D}_\zeta f \circ \sim\langle \mathrm{D}_1[\![t_0]\!], \ldots, \mathrm{D}_1[\![t_n]\!]\rangle$ 由归纳假设可知。但根据莱布尼茨法则（命题 33），有 $\theta^n \circ \mathrm{D}_{n\cdots 10}\mathrm{D}_\zeta f = \mathrm{D}\mathrm{D}_\zeta f$。因此，$[\![\partial(x,t)]\!] = \mathrm{D}\mathrm{D}_\zeta f \circ \langle \mathrm{D}[\![t_0]\!] \circ \Phi^1, \ldots, \mathrm{D}[\![t_n]\!] \circ \sim\Phi^1\rangle = \mathrm{D}\mathrm{D}_\zeta f \circ \langle \mathrm{D}[\![t_0]\!], \ldots, \mathrm{D}[\![t_n]\!]\rangle \circ \Phi^1 = \mathrm{D}(\mathrm{D}_\zeta f \circ \langle [\![t_0]\!], \ldots, [\![t_n]\!]\rangle) \circ \Phi^1 = \mathrm{D}[\![t]\!] \circ \Phi^1 = \tilde{\mathrm{D}}_1[\![t]\!]$。

□

7.3 归约

本节将引入一组归约规则，用于处理项的微分内容。这组规则比 [17], 中给出的规则更精简，但涵盖了我们所研究片段中的所有相关规则。

注 14。 我们本可以为显式替换添加一个构造 $t[u/x]$ ，其类型规则为

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash t[u/x] : B}(\mathrm{Cut})$$

以及执行替换步骤的归约规则（例如， $x[u/x] \to_{\Lambda_1} u$）。我们决定不这样做，因为在高阶 λ-演算中，这种显式替换并非必需。

与 [21] 的微分 λ 演算相比，主要区别在于没有和，因为我们不希望出现诸如以下非确定性类型规则

$$\frac{\Gamma \vdash t : A \qquad \Gamma \vdash u : A}{\Gamma \vdash t + u : A}$$

然而，将 π_1 应用于 θ 的归约会引入和。在没有上述类型规则的情况下处理和很棘手，因为这涉及主体归约。事实上，无法保证如果 $\Gamma \vdash t + u\colon A$ 且 $t \to_{\Lambda_1} t'$，那么 $\Gamma \vdash t' + u\colon A$。因此，我们选择了保守的做法，将和作为叠加在项之上的形式多重集保留下来。

定义 34。项多重集是项的有限多重集。

关于 第 5.2 节 中多重集所用的记号，请参阅该节。我们定义一个从项到项多重集的归约 $\to_{\Lambda_1}$。归约规则见 图 3。接着，我们将 $\to^?_{\Lambda_1}$定义为 $\to_{\Lambda_1}$的“自反”闭包。也就是说，$t \to^?_{\Lambda_1} L$ 当 $t \to_{\Lambda_1} L$ 或当 $L = [t]$时成立。它允许以单子方式将 $\to_{\Lambda_1}$ 提升为从项多重集到项多重集的归约：若$t_1 \to_{\Lambda_1} L_1$ 且对所有 $i \neq 1$，$t_i \to^?_{\Lambda_1} L_i$，则

$$[t_1, \dots, t_n] \to_{\mathcal{M}(\Lambda_1)} \sum_{i=1}^{n} L_i$$

其中 $\sum$ 是多重集并，也就是函数 $L_i\colon \Lambda_1 \to \mathbb{N}$ 的逐点和

.

$$\begin{aligned}
\mathsf{p}_i^{(d)}(\langle t_0, t_1\rangle) &\to_{\Lambda_1} [t_i] \\
\pi_i^{(d)}(f^{\zeta j \delta}(t_0, \dots, t_n)) &\to_{\Lambda_1} [f^{\zeta\delta}(t_0, \dots, \pi_i^{(|\delta|_j)}(t_j), \dots, t_n)] \quad \text{where } |\delta| = d \\
\pi_i^{(d)}(\iota_i^{(d)}(t)) &\to_{\Lambda_1} [t] \\
\pi_i^{(d)}(\iota_{1-i}^{(d)}(t)) &\to_{\Lambda_1} [\,] \\
\pi_0^{(d)}(\theta_n^{(d)}(t)) &\to_{\Lambda_1} [(\pi_0^{(d)})^{n+1}(t)] \\
\pi_1^{(d)}(\theta_n^{(d)}(t)) &\to_{\Lambda_1} \sum_{k=0}^{n} [(\pi_0^{(d)})^k \pi_1^{(d)} (\pi_0^{(d)})^{n-k}(t)]\,.
\end{aligned}$$

这里，$(\pi_i^{(d)})^n$ 是 $\pi_i^{(d)}$ 连续应用 n 次的记号。

Figure 3: Reduction rules

定义 35。类型为 $[t_1, \dots, t_n]$、上下文为 A的项多重集 Γ是 $\mathcal{C}$-可求和的，当且仅当$[\![t_1]\!]_\Gamma$、……、$[\![t_n]\!]_\Gamma$均可求和（按 定理 2的含义）。于是，我们定义 $[\![[t_1, \dots, t_n]]\!]_\Gamma = [\![t_1]\!]_\Gamma + \cdots + [\![t_n]\!]_\Gamma$。注意，$[\,]$ 始终是 $\mathcal{C}$-可求和的，并且 $[\![[\,]]\!] = 0$。

相干微分的要点在于，归约 $\to_{\Lambda_1}$ 总会引入对任意模型 $\mathcal{C}$ 都是 $\mathcal{C}$-可求和的项多重集。

定理 13（归约下语义的不变性）。对于任意 $\Gamma \vdash t\colon A$，若 $t \to_{\Lambda_1} L$则 L 是 $\mathcal{C}$-可求和的，且 $[\![L]\!]_\Gamma = [\![t]\!]_\Gamma$。

证明。我们来考察规则 $\to_{\Lambda_1}$的每一次应用。注意，当一个项多重集只有一个元素时，它总是 $\mathcal{C}$-可求和且 $[\![[t]]\!] = [\![t]\!]$。

$$\begin{aligned}
[\![\mathsf{p}_i^{(d)}(\langle t_0, t_1\rangle)]\!] &= \widetilde{\mathsf{D}}^d \mathsf{p}_i \circ \langle [\![t_0]\!], [\![t_1]\!]\rangle \\
&= \mathsf{p}_i \circ \langle [\![t_0]\!], [\![t_1]\!]\rangle \\
&= [\![t_i]\!]\,.
\end{aligned}$$

下面的规则是微分内容最集中的规则。回想一下，$\widetilde{[\![f]\!]}$假设是多重线性的，对任意函数 f 皆如此。这意味着，根据 $\mathsf{D}_\zeta[\![f]\!]$ 也具有多重线性，依据 定理 6，因此可以对它应用 命题 36 。

$$
\begin{aligned}
&[\![\pi_i^{(d)}(f^{\zeta j\delta}(t_0,\ldots,t_n))]\!] \\
&\quad= \widetilde{\mathsf{D}}^d\pi_i \circ \widetilde{\mathsf{D}}_\delta\widetilde{\mathsf{D}}_j\widetilde{\mathsf{D}}_\zeta[\![f]\!] \circ \langle [\![t_0]\!],\ldots,[\![t_n]\!]\rangle \\
&\quad= \widetilde{\mathsf{D}}_\delta\widetilde{\mathsf{D}}_\zeta[\![f]\!] \circ (\widetilde{\mathsf{D}}^{|\delta|_j}\pi_i; \mathsf{id}_{-j}) \circ \langle [\![t_0]\!],\ldots,[\![t_n]\!]\rangle \quad \text{by Proposition 36} \\
&\quad= \widetilde{\mathsf{D}}_{\zeta\delta}[\![f]\!] \circ \langle [\![t_0]\!],\ldots,\widetilde{\mathsf{D}}^{|\delta|_j}\pi_i \circ [\![t_j]\!],\ldots,[\![t_n]\!]\rangle \\
&\quad= [\![f^{\zeta\delta}(t_0,\ldots,\pi_i^{(|\delta|_j)}(t_j),\ldots,t_n)]\!]\,.
\end{aligned}
$$

接下来的三条规则相当标准，是由 π_i、 ι_j 和θ^n的定义推导出的。

$$
\begin{aligned}
[\![\pi_i^{(d)}(\iota_i^{(d)}(t))]\!] &= \widetilde{\mathsf{D}}^d\pi_i \circ \widetilde{\mathsf{D}}^d\iota_i \circ [\![t]\!] \\
&= \widetilde{\mathsf{D}}^d(\pi_i \circ \iota_i) \circ [\![t]\!] \quad \text{by (D-chain)} \\
&= \widetilde{\mathsf{D}}^d\mathsf{id} \circ [\![t]\!] = [\![t]\!] \quad \text{by (D-chain)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\![\pi_i^{(d)}(\iota_{1-i}^{(d)}(t))]\!] &= \widetilde{\mathsf{D}}^d\pi_i \circ \widetilde{\mathsf{D}}^d\iota_{1-i} \circ [\![t]\!] \\
&= \widetilde{\mathsf{D}}^d(\pi_i \circ \iota_{1-i}) \circ [\![t]\!] \quad \text{by (D-chain)} \\
&= \widetilde{\mathsf{D}}^d 0 \circ [\![t]\!] = 0 \circ [\![t]\!] \quad \text{by (Dsum-lin)} \\
&= 0 = [\![[\,]]\!]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\![\pi_0^{(d)}(\theta_n^{(d)}(t))]\!] &= \widetilde{\mathsf{D}}^d\pi_0 \circ \widetilde{\mathsf{D}}^d\theta^n \circ [\![t]\!] \\
&= \widetilde{\mathsf{D}}^d(\pi_0 \circ \theta^n) \circ [\![t]\!] \quad \text{by (D-chain)} \\
&= \widetilde{\mathsf{D}}^d(\pi_0^{n+1}) \circ [\![t]\!] \\
&= (\widetilde{\mathsf{D}}^d\pi_0)^{n+1} \circ [\![t]\!] \quad \text{by (D-chain)} \\
&= [\![(\pi_0^{(d)})^{n+1}(t)]\!]\,.
\end{aligned}
$$

最后一条规则引入了大小大于 1 的有限多重集。以下方程序列中的大多数行都应理解为：“上面的和有定义，因此下面的和也有定义，而且二者相等”。

$$
\begin{aligned}
[\![\pi_1^{(d)}(\theta_n^{(d)}(t))]\!] &= \widetilde{\mathsf{D}}^d\pi_1 \circ \widetilde{\mathsf{D}}^d\theta^n \circ [\![t]\!] \\
&= \widetilde{\mathsf{D}}^d(\pi_1 \circ \theta^n) \circ [\![t]\!] \quad \text{by (D-chain)} \\
&= \left(\widetilde{\mathsf{D}}^d\Big(\sum_{k=0}^{n} \pi_0^k \circ \pi_1 \circ \pi_0^{n-k}\Big)\right) \circ [\![t]\!] \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \widetilde{\mathsf{D}}^d(\pi_0^k \circ \pi_1 \circ \pi_0^{n-k})\right) \circ [\![t]\!] \quad \text{by (Dsum-lin) and Proposition 17} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \widetilde{\mathsf{D}}^d(\pi_0^k \circ \pi_1 \circ \pi_0^{n-k}) \circ [\![t]\!] \quad \text{by Proposition 2}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (\widetilde{\mathsf{D}}^d \pi_0)^k \circ \widetilde{\mathsf{D}}^d \pi_1 \circ (\widetilde{\mathsf{D}}^d \pi_0)^{n-k} \circ [\![t]\!] \quad \text{by (D-chain)}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} [\![(\pi_0^{(d)})^k \pi_1^{(d)} (\pi_0^{(d)})^{n-k}(t)]\!] .$$

因此， $\sum_{k=0}^{n} [(\pi_0^{(d)})^k \pi_1^{(d)} (\pi_0^{(d)})^{n-k}(t)]$ 是一个语义为 $[\![\pi_1^{(d)} (\theta_n^{(d)}(t))]\!]$ 的 $\mathcal{C}$-可求和对象。 □

推论 9. 对于任意可求和的项多重集 $\Gamma \vdash L\colon A$，若 $\mathcal{C}$ 可求和，且 $L \to_{\mathcal{M}(\Lambda_1)} L'$，则 L' 可求和，并且 $[\![L']\!]_\Gamma = [\![L]\!]_\Gamma$。

证明。假设 $[t_1, \ldots, t_n]$ 可求和，并且 $[t_1, \ldots, t_n] \to_{\mathcal{M}(\Lambda_1)} L$。也就是说，对于任意 i、$t_i \to^?_{\Lambda_1} [t_i^1, \ldots, t_i^{k_i}]$ 和 $L = \sum_{i=1}^{n} [t_i^1, \ldots, t_i^{k_i}]$。于是根据定理 13，对于任意 i、$[\![t_i^1]\!]$、……、$[\![t_i^{k_i}]\!]$ 都可求和，其和为 $[\![t_i]\!]$。根据假设，$[\![t_1]\!]$、……、$[\![t_n]\!]$ 都可求和，也就是说，$\sum_{j=1}^{k_1} [\![t_1^j]\!]$、……、$\sum_{j=1}^{k_n} [\![t_n^j]\!]$ 都可求和。根据定理 2，这意味着族 $[\![t_1^1]\!]$、……、$[\![t_1^{k_1}]\!]$、……、$[\![t_n^1]\!]$、……、$[\![t_n^{k_n}]\!]$ 可求和，其和为

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} [\![t_i^j]\!] = \sum_{i=1}^{n} [\![t_i]\!]$$

因此， L 是 $\mathcal{C}$-可求和的，并且 $[\![L]\!] = [\![[t_1, \ldots, t_n]]\!]$。 □

使用这类项多重集看起来可能有些非确定性。但由该演算的归约所生成的任何多重集，都可以在诸如概率相干空间[19] （见第5.2节）或非一致相干空间等确定性模型中解释为一个可求和族。这些模型的确定性使得能够在 [17] 中证明一个大致如下的结果：只要一个整数类型的闭项归约为一个项多重集 $C + [\underline{\nu}]$ （其中 $\underline{\nu}$ 是PCF中通常的整数变量），那么 $[\![C]\!] = 0$。也就是说，归约规则的分支中只有一个

$$\pi_1^{(d)}(\theta_n^{(d)}(t)) \to_{\Lambda_1} \sum_{k=0}^{n} [(\pi_0^{(d)})^k \pi_1^{(d)} (\pi_0^{(d)})^{n-k}(t)]$$

会产生非空多重集。该证明依赖于以下事实：由于该演算不具备任何形式的概率分支，任何整数类型的项在**APcoh** 中的解释，要么是在 δ_n 上的狄拉克分布 $\mathbb{N}$，要么是零分布。因此，一个整数类型的项多重集是**APcoh**-可求和的，当且仅当该多重集中至多有一个项的语义不为0。特别地，$[\![\underline{\nu}]\!]^{\mathbf{APcoh}} = \delta_\nu$ 和 $C + [\underline{\nu}]$ 是**APcoh**-可求和的（由推论 9），所以 $[\![C]\!]^{\mathbf{APcoh}} = 0$。也可以用非一致相干空间以类似方式证明相同的结果。这一观察促成了在 [17], 中为相干微分 PCF 开发一台完全确定性的克里维恩机，其方法是用可写内存结构扩展投影路径。

结论

我们引入并研究了一个用于相干微分的一般范畴框架。这是一种新的微分学方法，不要求环境范畴具有（左）可加性。我们还提出了一些基本的句法构造，用以说明

[19]概率分支绝非一种非确定性

项语言中这些新的范畴构造。这些构成了一种有原则且系统化的方法的基础，可用于研究函数式编程语言的指称语义，例如扩展了相干微分的（概率）PCF。正如 [17]所示，这种延拓能够完美地涵盖一般递归定义，以及确定性或概率行为；这与微分 λ演算 [22] 形成鲜明对比，后者本质上是非确定性的。因此，下一步将是把当前的一般公理化专门化到范畴为笛卡尔闭范畴的情形。

致谢

我们感谢审稿人认真审阅本文并提出宝贵意见。本研究部分得到 ANR 项目概率编程语义（*PPS*）ANR- 19-CE48-0014 的资助。

参考文献

[1]J. Girard, 《线性逻辑》, 《理论计算机科学》, 第 50 卷, 第 1–102 页, 1987 年。[在线]。网址：https://doi.org/10.1016/0304-3975(87)90045-4[2] R. Blute、R. Cockett 和 R. Seely, 《微分范畴》, 《计算机科学中的数学结构》, 第 16 卷, 第 1049–1083 页, 2006 年 12 月。[3] ——, 《笛卡尔微分范畴》, 《范畴理论及其应用》, 第 22 卷, 第 622–672 页, 2009 年 1 月。[4]T. Ehrhard, 《概率相干空间中的微分与距离》, 《计算机科学中的逻辑方法》, 第 18 卷, 第 3 期, 2022 年。 [在线]。网址：https://doi.org/10.46298/lmcs-18(3:2)2022[5] ——, 《相干微分》, 《计算机科学中的数学结构》, 第 1–52 页, 2023 年。[6] J. Rosicky, 《抽象切丛函子》, Diagramme, 第 12 期, 1984 年。[7] R. Cockett 和 G. Cruttwell, 《微分结构、切结构与合成微分几何》, 《应用范畴结构》, 第 22 卷, 2014 年 4 月。[8]M. A. Arbib 和 E. G. Manes, 《部分可加范畴与流图语义》, 《代数学杂志》, 第 62 卷, 第 1 期, 第 203–227 页, 1980 年。 [在线]。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0021869380902124[9] P. Hines, 《幺半群半环构造的范畴论类比》, 《计算机科学中的数学结构》, 第 23 卷, 第 1 期, 第 55–94 页, 2013 年。[10] A. Kock, 《强函子与幺半群单子》, 《数学档案》, 第 23 卷, 第 113–120 页, 1972 年 12 月。

[11]E. Moggi, 《计算概念与单子》, 《信息与计算》, 第93卷第1期, 第55–92页, 1991 年, 选自1989年IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集。[在线]。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0890540191900524

[12] M. Aguiar、M. Haim 和 I. Franco，《高阶幺半范畴上的单子》，《应用范畴结构》，第26卷，2018年6月。[13] I. Moerdijk，《张量范畴上的单子》，《纯粹与应用代数杂志》，第168卷第2期，第189–208页，2002年，《范畴论1999》：精选论文，会议于科英布拉举行，以纪念桑德斯·麦克莱恩90岁诞辰。 [在线]。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404901000962[14] A. Kock，《对称幺半闭范畴上的单子》，《数学档案》，第21卷，第1–10页，1970年1月。[15] P.-A. Melliès，《线性逻辑的范畴语义》，《全景与综合》，第27卷，第1–196页，2009年。[16]J. Power 和 H. Watanabe，《结合一个单子与一个余单子》，《理论计算机科学》，第280卷第1期，第137–162页，2002年，《计算机科学中的余代数方法》。[在线]。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030439750100024X[17]T. Ehrhard，《相干微分 PCF》，2022年。[在线]。网址：https://arxiv.org/abs/2205.04109[18] V. Danos 和 T. Ehrhard，《作为高阶概率计算模型的概率相干空间》，《信息与计算》，第152卷第1期，第111–137页，2011年。[19] R. Crubillé，《离散锥上的概率稳定函数是幂级数》，载于第33届年度ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集，LICS 2018，英国牛津，2018年7月9日至12日，A. Dawar 和 E. Grädel 编。美国计算机协会，2018年，第275–284页。 [在线]。网址：https://doi.org/10.1145/3209108.3209198[20] J.-S. P. Lemay，《切范畴：法阿·迪·布鲁诺构造的一种替代方案》，《范畴理论及其应用》，第33卷第35期，第1072–1110页，2018年。 [在线]。网址：http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/33/35/33-35abs.html[21] T. Ehrhard 和 L. Regnier，《微分 λ 演算》，《理论计算机科学》，第309卷第1期，第1–41页，2003年。[在线]。网址：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030439750300392X[22] ——，《微分 λ 演算》，《理论计算机科学》，第309卷第1–3期，第1–41页，2003年。