arXiv:2303.06963v1 [math.LO] 13 Mar 2023

在卢卡西维茨逻辑与 MV-代数中编码德·菲内蒂相干性

TOMMASO FLAMINIO 和 SARA UGOLINI

西班牙巴塞罗那 CSIC 人工智能研究所（IIIA）

Abstract. 本文研究概率逻辑 FP(L, L) 的证明论和代数性质，该逻辑旨在对卢卡西维茨事件的不确定性进行推理。从方法上说，我们将考虑一个从 FP(L, L) 的公式到卢卡西维茨逻辑命题语言的翻译函数，以便直接运用后者及其成熟的 MV-代数理论进行概率推理。更具体地说，借助这一翻译映射，我们将展示 FP(L, L) 的证明论性质，并引入一个代数类，证明 FP(L, L) 相对于该类是局部可靠且完备的。最后，我们将运用上述结果研究我们所称的“概率合一问题”。对此，我们将证明，Ghilardi 关于合一的代数观点可以推广到我们的情形；与卢卡西维茨命题情形相同，我们还将表明概率合一属于零元类型。

1. Introduction and motivation

将概率论视为逻辑的一部分，无疑是乔治·布尔在其开创性著作《 [4, §1]》的引言中提出的主要概念性贡献和突破性思想之一：

> 这篇论著旨在探究人类进行推理所依凭的心智运算的基本规律；以演算的符号语言表达这些规律，并以此为基础建立逻辑科学、构造其方法；再以该方法本身为基础，建立一种将概率数学学说付诸应用的通用方法。

在上述引文中，布尔将概率论视为一门涵盖某种推理的学科，而这种推理可以借助（数学）逻辑和代数符号语言的工具来处理。这正是如今我们倾向于将概率演算和概率逻辑区分为概率论两个互补却又紧密相连的方面的原因。

自布尔发表其著作以来，形式化方法和逻辑方法蓬勃发展，为概率推理提供了研究途径。其中值得一提的有：Keisler [29] 和Hoover [28]主要发展出的模型论方法；Fagin、Halpern和Megiddo在 [14] 提出的、更加面向人工智能的视角；以及H´ajek、Esteva和Godo在 [26]提出的方法。本文主要采用后一种方法，在这一方法中，概率被视为一种物理变量，并通过在卢卡西维茨逻辑的语言中加入模态算子 P 来建模；形如 $P(\varphi)$的公式——其中 φ 是任意经典公式——读作“φ 是可能的”。有趣的是，近期研究 [2]表明， [14] 的逻辑与H´ajek、Esteva和Godo逻辑的一个轻微变体在句法上可以相互定义，因而二者等价。

卢卡西维茨逻辑的等价代数语义（依照 [3], ）是 MV-代数类，它是一种代数簇，其一般结构与概率逻辑一样，定义在实单位区间 $[0,1]$ 上。公式 $P(\varphi)$ 的真值一旦通过卢卡西维茨赋值求得为 $[0,1]$，就是 φ 的概率。

我们在上一段中简要回顾的内容，其依据在于：尽管卢卡西维茨逻辑与概率逻辑之间存在不可忽视的差异，但我们仍可利用二者的相似之处，通过添加额外的算子 P 并对其进行公理化来扩展前者，从而形式化概率推理。

E-mail address: {tommaso, sara}@iiia.csic.es。

本文将关注对 H´ajek、Esteva 和 Godo 的逻辑的一种扩展。该逻辑最初在 [18]，中公理化，记为 FP(L, L)，近期已被证明（参见 [17]）是状态理论的逻辑；状态理论是概率论针对卢卡西维茨句子上的不确定量化所作的推广，由 Mundici 在 [37] 中提出。在 FP(L, L) 中，卢卡西维茨逻辑发挥双重作用：它既是内层逻辑，用于表示处于模态 P 作用范围内的公式（即事件）；也是外层逻辑，用于对复杂的概率模态公式进行推理。

更具体地说，我们将大致说明，为了在卢卡西维茨演算中形式化概率推理，并不需要引入导向逻辑 FP(L, L) 的模态扩展。事实上， [33]提出的有理多面体与有限呈示 MV-代数之间的范畴对偶，使我们能够在卢卡西维茨逻辑本身中编码局部的、有限的概率信息；这些信息由凸有理多面体描述，而凸有理多面体正是德·菲内蒂相干性准则（一种概率论基础）的几何解释。通过这种做法，我们还将考虑一个从 FP(L, L) 的模态（外层）语言到卢卡西维茨逻辑命题语言的翻译映射；在满足必要的基本假设时，该映射能够保留 FP(L, L) 的全部定理和推导。

将概率逻辑的模态语言翻译为命题卢卡西维茨语言的想法并不新鲜。例如，这种做法曾被用于证明 H´ajek、Esteva 和 Godo 的逻辑相对于概率模型的可靠性和完备性 [26]。更抽象地说，论文 [19] 和 [10] 讨论了此类翻译的一般效果，并为不确定性逻辑相对于其标准语义达到完备性设定了最低要求。还值得一提的是， [2]曾使用类似的翻译为概率推理引入一种证明演算。然而，正如 [18] 和 [15], 所指出的，通常用于通过此类翻译证明概率逻辑的可靠性和完备性的技术，在内层逻辑（即用于表示事件的逻辑）并非局部有限时，效果并不理想；卢卡西维茨演算正是这种情况。因此，本文需要提出一种翻译推导的新方法，以处理卢卡西维茨逻辑的非局部有限性；如上所述，该方法以德·菲内蒂关于相干性的奠基性工作及其以有限维多胞体刻画相干性的几何方式为基础。

本文除了详细说明这种翻译对 FP(L, L) 有何影响，并展示通过应用它可以证明哪些结果（我们借助有理多面体与有限呈示 MV-代数之间的范畴对偶），还将从纯代数的角度进行研究，找出一类构成 FP(L, L) 代数语义的 MV-代数。这些代数称为相干代数，它们构成有限呈示且投射的 MV-代数的真子类。值得指出的是，相干 MV-代数并不能为 FP(L, L) 提供等价代数语义；事实上，如何确立 FP(L, L) 的代数化仍是一个开放问题。

在本文最后一节，我们将运用上述翻译映射所得的结果以及相干 MV-代数的代数性质，探讨我们所称的概率合一问题。为此，我们采用一个关键思路：将形如 $P(\varphi)$ 的原子模态公式视为概率变量。从这个意义上说，完全类比可代数化逻辑中的通常合一问题，合一问题可以很容易地表述如下。给定一组概率模态公式对 $\{(\Phi_i, \Psi_i) \mid i = 1, \ldots, m\}$，求一个（若存在）概率代换 σ，将形如 $P(\varphi_j)$ 的模态子公式映射为（复合）概率项，使得对所有 $i = 1, \ldots, m$，恒等式 $\sigma(\Phi_i) = \sigma(\Psi_i)$ 在 FP(L, L) 中成立。为处理这类合一问题，我们首先将证明，Ghilardi 针对可代数化逻辑合一问题提出的代数方法 [24] ，在我们的非可代数化情形中也有类似的表述。其次，我们将展示，如何将 Marra 和 Spada 的病态例子 [33] （该例子证明卢卡西维茨逻辑的合一类型为零元）改编到 FP(L, L) 的情形，从而证明概率合一问题同样为零元。也就是说，存在一些概率合一问题，其合一子构成一个一般性序型为 ω 的共终链。

本文结构如下：下一节将回顾卢卡西维茨逻辑和 MV-代数（第 2.1 小节）以及自由代数和有限呈示 MV-代数（第 2.2 小节）所需的概念和结果。第 2.3 小节将介绍概率逻辑 FP(L, L) 及其基于状态的语义。在同一第 2 节中，我们还将介绍有限呈示 MV-代数和 FP(L, L) 的一些新结果，这些结果对后文很有用。第 3 节将简要介绍德·菲内蒂相干性及其几何，而在第 4 节，我们将回过头来

探讨逻辑 FP(L, L) 以及使我们能够在命题层面看待其模态语言的翻译映射。具体而言，我们将展示如何借助上述翻译，在局部范围内将 FP(L, L) 的蕴涵关系归约为卢卡西维茨逻辑的蕴涵关系。由此，我们证明了 FP(L, L) 的可推导关系是可判定的，并为概率逻辑得到了一个局部演绎定理。第 5 节定义了相干 MV-代数；除了证明它们是投射结构的特殊情形（见第 5.1 小节）外，我们还将在第5.2小节证明一个关于这些代数的 FP(L, L) 局部可靠性与完备性定理。第 6 节将介绍我们所称的概率合一问题，证明如何将 Ghilardi 的方法改述于我们的语境中，最后将 Marra 和 Spada 的病态例子调整到概率框架中，以表明概率合一属于零元类型。

2. Preliminaries

本节将介绍本文所依据的基本逻辑和代数概念。具体而言，包括卢卡西维茨逻辑与 MV-代数（第 2.1 小节）、有限生成自由 MV- 代数与有限呈示 MV- 代数（第 2.2 小节），以及基于状态语义的概率逻辑 FP(L, L)（第 2.3 小节）。除了回顾必要的概念和事实外，本文还将证明并评述这些主题的若干新结果。

2.1. 卢卡西维茨逻辑与 MV-代数。卢卡西维茨逻辑，符号记作 L，是一种非经典的多值演算，可在包含原始二元联结词 $\oplus$（析取）、一元联结词 $\neg$ （否定）和常元 $\bot$ （假）的签名中公理化。公式（下文将用小写希腊字母表示）按照通常方式由一个非空的命题变量集合定义。卢卡西维茨逻辑语言中还可以定义其他有用的联结词和常元符号，如下所示：

$$\top := \neg\bot;\ \varphi \to \psi := \neg\varphi \oplus \psi;\ \varphi \vee \psi := (\varphi \to \psi) \to \psi;\ \varphi \wedge \psi := \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi);\ \varphi \odot \psi := \neg(\neg\varphi \oplus \neg\psi);$$
$$\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi).$$

此外，若 φ 是任意公式，且 n 是正整数，我们将简记为

$$\varphi \odot \ldots \odot \varphi \ (n\text{-times}) \text{ by } \varphi^n \text{ and}$$
$$\varphi \oplus \ldots \oplus \varphi \ (n\text{-times}) \text{ by } n\varphi.$$

卢卡西维茨逻辑的公式集今后记作 Fm，而 Fm(k) 将记作以 {v1} 定义的公式集，其中包含命题变量。

L 的公理和规则如下：

(L1) $\varphi \to(\psi \to \varphi)$, (L2) $(\varphi \to \psi) \to((\psi \to \gamma) \to (\varphi \to \gamma))$, (L3) $((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$, (L4) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to(\psi \to \varphi)$, (MP) 由 φ、$\varphi \to \psi$ 推出 ψ （肯定前件式规则

le).

定理的定义与通常相同，我们用 $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ 表示 φ 是卢卡西维茨逻辑中的定理。特别地，如果 φ 和 ψ 在逻辑上等价，则称这两个公式逻辑等价，即 $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi \leftrightarrow \psi$。

若 $\Gamma = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\alpha\}$ 是可数多个（可能是无限多个）公式，且 φ 是一个公式，则 $\Gamma \vdash_{\mathrm{L}} \varphi$ 表示 φ 可以在卢卡西维茨演算中由这些 φ_i 推导出来。

在下一个命题的陈述中以及本文其他地方，每当需要突出公式中出现的命题变量时，我们会将公式写作 $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$。此外，若 $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ 是一个含有 k 个变量的公式，且 $\tau_1, \ldots, \tau_k$ 是公式，则我们用 $\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_k)$ 表示这样得到的公式：对所有 $i = 1, \ldots, k$，将变量 x_i 替换为公式 τ_i。

命题 2.1. L 满足以下性质：

（SE）等价替换：若 $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{Fm}(k)$，$\psi_1, \gamma_1, \ldots, \psi_k, \gamma_k \in \mathrm{Fm}$ 满足：对于所有 $i = 1, \ldots, k$，ψ_i 与 γ_i 在逻辑上等价，则

$$\vdash_{\mathrm{L}} \varphi(\psi_1, \ldots, \psi_k) \leftrightarrow \varphi(\gamma_1, \ldots, \gamma_k).$$

（LDT）局部演绎定理：若 φ、ψ 是公式，则 $\varphi \vdash_{\mathrm{L}} \psi$ 当且仅当存在正整数 n 使得 $\vdash_{\mathrm{L}} \varphi^n \to \psi$。

根据 Blok 和 Pigozzi [3], 的定义，Łukasiewicz 逻辑是可代数化的，其等价代数语义是 MV-代数簇 MV，该簇由 Chang 在 [8] 中引入（详尽论述另见 [9] ）。因此，我们不会区分该逻辑的命题语言与 MV-代数的代数签名。

定义 2.2. MV-代数是一个类型为 (2,1,0) 的系统 $\mathbf{A} = (A, \oplus, \neg, \bot)$，满足以下性质：

(MV1) $(A, \oplus, \bot)$ 是一个交换幺半群，(MV2) $\neg\neg x = x$，(MV3) $\neg(\neg x \oplus y) \oplus y = \neg(\neg y \oplus x) \oplus x$。

在每个 MV-代数 A 中，都可以根据上述对应关系在 A 上定义更多运算和常元。MV-代数的结构理论性质良好，参见例如 [9, §1]。特别地，同余与滤子相对应，也就是说，滤子是论域的非空子集，对 $\odot$ 封闭且向上封闭。具体而言，对于每个 MV-代数 A，同余格 Con(A) 与滤子格 Fil(A) 通过以下映射同构：

$$\theta \in Con(\mathbf{A}) \longmapsto F_\theta = \{x \in A \mid (x, \top) \in \theta\} \in Fil(\mathbf{A}) \text{ and} \tag{1}$$

$$F \in Fil(\mathbf{A}) \longmapsto \theta_F = \{(x, y) \in A \times A \mid (x \to y), (y \to x) \in F\} \in Con(\mathbf{A}). \tag{2}$$

此外，有限生成滤子都由其有限个生成元的交主生成。因此，有限生成同余也都是主同余。按照代数领域的惯例，我们不严格区分有限可呈示代数和有限呈示代数。因此，若一个 MV-代数同构于某个自由有限生成 MV-代数除以一个有限生成（因而也是主）同余所得的商 θ，我们就称它为有限呈示代数。

MV-代数 A 中支持集为 A 的卢卡西维茨语言赋值，是将命题变量映射到 A 的函数 e，并且对每个联结词和常量都保持相容。重言式是指在任意赋值下都取值为 $\top := \neg\bot$ 的公式。

Chang 完备性定理表明，L 关于所谓的标准 MV-代数是可靠且完备的。该结构为 $[0,1]_{MV} = ([0,1], \oplus, \neg, 0)$，其中对所有 $x, y \in [0,1]$, $x \oplus y =$, $\min\{1, x + y\}$ 且 $\neg x = 1 - x$。用代数术语来说，$[0,1]_{MV}$ 生成 MV 簇。事实上，标准 MV-代数既作为簇又作为拟簇生成 MV-代数簇 [25,推论 7.2]。这一事实使我们得以对 MV 中的自由代数作出一个重要刻画，我们将在下一小节回顾这一刻画。

2.2. 自由与有限呈示 MV-代数。MV-代数构成一个簇，即一个方程类。因此，根据 Birkhoff 定理 [5], , MV 中存在自由 MV-代数。若 X 是任意集合，我们将由 X自由生成的 MV-代数记为 Free(X)。在本文其余部分，我们始终假设 X是有限且非空的。

注 2.3。在簇 V 中，每个自由代数 Free(X) 都由众所周知的泛性质刻画：对于每个属于 V 的代数 $\mathbf{A} \in$ 以及每个函数 $f\colon X \to A$，都存在唯一的同态h_f: Free(X) $\to$ A，使其扩张 f。因此，只要 X 的基数有限，设为 $|X| = k$，我们就将变量 $\{x_1, \ldots, x_k\}$上的自由代数记为 Free(k)。将 X 中的元素双射到变量集合 $\{x_1, \ldots, x_k\}$ 上的映射 f，给出了 Free(X) 与 Free(k) 之间的一个同构。本文将广泛使用这种将集合 X 中的元素与由 $|X|$ 个元素组成的集合中的变量相对应的方式。

根据一个常见的泛代数论证，并且由于 $[0,1]_{MV}$ 生成 MV，对于每个有限的 k，Free(k) 都同构于 MV-代数 $[0,1]^{[0,1]^k}$ 的一个子代数；该代数由从 $[0,1]^k$ 到 $[0,1]$的函数构成，由投影映射生成，并且其运算是逐点定义的，依据的是标准 MV-代数中的运算。此外，回顾一下，对于所有有限的 k，Free(k) 在同构意义下就是卢卡西维茨逻辑的 Lindenbaum-Tarski 代数 L(k)，其公式取自 Fm(k)。

McNaughton 定理为我们提供了有限生成自由 MV-代数的清晰几何刻画，从而也为每个 Lindenbaum-Tarski 代数 L(k) 中的公式（模逻辑等价的等价类）提供了函数表示。回想一下，函数 $f\colon [0,1]^k \to [0,1]$ 若满足连续、分段线性且每一段都具有整数

系数，就称为 McNaughton 函数。对于每个正整数 k， $\mathcal{M}(k)$ 表示定义在 $[0,1]^k$ 上、具有 $[0,1]_{MV}$ 中所述逐点运算的 McNaughton 函数所构成的 MV-代数。

定理 2.4（[34, 36]）。对于每个正整数 k，自由代数 Free(k)、L(k) 和代数 $\mathcal{M}(k)$ 同构。

因此，上述定理告诉我们，对于每个公式 $\varphi \in \mathrm{Fm}(k)$，其在 L($k$) 中的等价类 $[\varphi]$，在同构意义下可视为一个 McNaughton 函数 $f_\varphi\colon [0,1]^k \to [0,1]$。反过来，对于每个 McNaughton 函数 $f \in \mathcal{M}(k)$，都存在一个（不唯一的）公式 φ，使得 $[\varphi]$ 在 $\mathcal{M}(k)$ 与 L(k) 之间的同构映射下映至 f。

下一条命题回顾关于有理多面体和 McNaughton 函数单点集的已知事实。请注意，$\mathbb{R}^k$ 中的（有理）多胞体是 $\mathbb{R}^k$（分别为 $\mathbb{Q}^k$）中有限多个点的凸包；（有理）多面体是有限个（有理）多胞体的并。此外，对于每个 k 以及每个 McNaughton 函数 $f \in \mathcal{M}(k)$，f 的单点集为 $\mathrm{O}(f) = \{x \in [0,1]^k \mid f(x) = 1\}$。

命题 2.5（[40, 定理 3.20]）。（1）对于每个有理多面体 $\mathscr{P} \subseteq [0,1]^k$，都存在$\chi_{\mathscr{P}} \in \mathrm{Fm}(k)$，使得 McNaughton 函数 $f_{\chi_{\mathscr{P}}}$ 满足 $\mathrm{O}(f) = \mathscr{P}$。

（2）对于每个 $\varphi \in \mathrm{Fm}(k)$，$\mathrm{O}(f_\varphi)$ 都是 $[0,1]^k$的有理多面体。（3）对于公式 φ、$\psi \in \mathrm{Fm}(k)$ 中的任意一对，$\varphi \vdash_L \psi$ 当且仅当 $\mathrm{O}(f_\varphi) \subseteq \mathrm{O}(f_\psi)$ 作为有理多面体。

上述命题为自由有限生成 MV-代数的主滤子和同余提供了一种几何表示。事实上，由 f生成的 Free(k) 的主滤子 F，以及由此得到的主同余 θ_F，根据上述命题对应于有理多面体 O(f)。反过来，给定一个有理多面体 $\mathscr{P} \subseteq [0,1]^k$，$F_{\mathscr{P}} = \{g \in \mathrm{Free}(k) \mid \mathrm{O}(g) \supseteq \mathscr{P}\}$ 是 Free(k) 的滤子，它由任意满足 $\mathrm{O}(f) = \mathscr{P}$ 的 f 作为主元生成。

因此，有限生成自由代数的有限生成商代数与有理多面体相对应。特别地，一个 MV-代数是有限呈示的，当且仅当它同构于在超立方体 $[0,1]^k$ 上、限制在有理多面体 $\mathscr{P}$ [40, 上的 McNaughton 函数代数 $\mathcal{M}(\mathscr{P})$3] 定理 6。于是，我们采用以下记号。

记号 2.6. 设 θ 是有限生成自由 MV-代数 Free(k) 的一个有限生成同余，并设 $\mathscr{P}$ 是与 θ 对应的有理多面体 $[0,1]^k$。那么，今后我们将把有限呈示 MV-代数 Free(k)/θ 记作 Free(k)/$\mathscr{P}$，而不会引起混淆。

我们将在本小节证明的最后一个结果，旨在将 [40, 定理 6.3] 推广到有限呈示的（不一定是自由的）MV-代数。首先，我们需要以下结果。

命题 2.7. 设 $\mathscr{P}, \mathscr{Q} \subseteq [0,1]^k$ 是有理多面体。设 $\hat{}\,\theta_{\mathscr{Q}}$ 是由满足 (a,b) 为 $\mathscr{Q}$（所关联的）同余的生成元的那些对 $([a]_{\mathscr{P}}, [b]_{\mathscr{P}})$ 所生成的 Free(k)/$\mathscr{P}$ 的同余。那么，

$$(\mathrm{Free}(k)/\mathscr{P})/\hat{\theta}_{\mathscr{Q}} \cong \mathrm{Free}(k)/(\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}).$$

证明。根据 [40, 定理 6.3], ，Free(k)/$\mathscr{P} \cong \mathcal{M}(\mathscr{P})$ 通过一个同构 ι 映射得到；对于每个 McNaughton 函数 $f\colon [0,1]^k \to [0,1]$，该同构将 Free($k$)/$\mathscr{P}$ 中的等价类 $[f]_{\mathscr{P}}$ 映射为 f 在 $\mathscr{P}$ 上的限制 $f_{\restriction \mathscr{P}}$。现在，由于有限生成同余和滤子在 MV-代数中都是主滤子，与 $\mathscr{Q}$ 相关联的滤子也为主滤子，因此由某个 $g \in \mathrm{Free}(k)$ 生成，且 $\mathrm{O}(g) = \mathscr{Q}$。现在设 $\hat{}\,\mathscr{Q}$ 是 $\mathcal{M}(\mathscr{P})$ 中通过 ι 与 $\hat{}\,\theta_{\mathscr{Q}}$ 对应的同余。因此，其关联滤子 F 由 $g_{\restriction \mathscr{P}} \in \mathcal{M}(\mathscr{P})$ 生成。

断言 2 .8. 对于每个 McNaughton 函数 $f\colon [0,1]^k \to [0,1]$, $f_{\restriction \mathscr{P}} \in F$ 当且仅当 $\mathrm{O}(g_{\restriction \mathscr{P}}) \subseteq \mathrm{O}(f_{\restriction \mathscr{P}})$.

事实上，若 $f_{\restriction \mathscr{P}} \in F$，则存在 n 使得 $(g_{\restriction \mathscr{P}})^n \leq f_{\restriction \mathscr{P}}$。因此，若 $g_{\restriction \mathscr{P}}(x) = 1$，则 $(g_{\restriction \mathscr{P}})^n(x) = 1$，从而 $x \in \mathrm{O}(f_{\restriction \mathscr{P}})$。反过来，假设 $\mathrm{O}(g_{\restriction \mathscr{P}}) \subseteq \mathrm{O}(f_{\restriction \mathscr{P}})$，则对引理 2.2(i)稍作修改可知，存在某个 n，使得 $(g_{\restriction \mathscr{P}})^n \leq f_{\restriction \mathscr{P}}$，这就证明了该断言。

现在，注意到

$$\mathrm{O}(g_{\restriction \mathscr{P}}) = \mathrm{O}(g) \cap \mathscr{P} = \mathscr{Q} \cap \mathscr{P}. \tag{3}$$

因此，断言 2.8 变为

$$f_{\restriction \mathscr{P}} \in F \text{ iff } \mathscr{Q} \cap \mathscr{P} \subseteq \mathrm{O}(f) \cap \mathscr{P}. \tag{4}$$

ˆ 现在，我们通过映射证明 $\mathcal{M}(\mathscr{P})/\mathscr{Q} \cong \mathcal{M}(\mathscr{Q} \cap \mathscr{P})$

$$\lambda : [f_{\restriction \mathscr{P}}]_{\hat{\mathscr{Q}}} \mapsto f_{\restriction \mathscr{Q}\cap\mathscr{P}}.$$

我们先证明 λ 定义良好，并取$[f_{\restriction \mathscr{P}}]\hat{}_{\mathscr{Q}} = [h_{\restriction \mathscr{P}}]\hat{}_{\mathscr{Q}}$。根据 (2)，这成立当且仅当 $f_{\restriction \mathscr{P}} \to h_{\restriction \mathscr{P}} \in F$ 且 $h_{\restriction \mathscr{P}} \to f_{\restriction \mathscr{P}} \in F$，也就是说，根据商上运算的定义，$(f \to h)_{\restriction \mathscr{P}} \in F$ 且 $(h \to f)_{\restriction \mathscr{P}} \in F$。根据 (4)，后者成立当且仅当 $\mathscr{Q} \cap \mathscr{P} \subseteq \mathsf{O}(f \to h) \cap \mathscr{P}$ 且 $\mathscr{Q} \cap \mathscr{P} \subseteq \mathsf{O}(h \to f) \cap \mathscr{P}$，也就是说，对所有 $x \in \mathscr{Q} \cap \mathscr{P}$，$(f \to h)(x) = f(x) \to h(x) = 1$ 且 $(h \to f)(x) = h(x) \to f(x) = 1$；也就是说，对所有$x \in \mathscr{Q} \cap \mathscr{P}$，$f(x) \leq h(x)$ 且 $h(x) \leq f(x)$，也就是说 $f_{\restriction \mathscr{Q}\cap\mathscr{P}} = h_{\restriction \mathscr{Q}\cap\mathscr{P}}$，换言之，$\lambda([f_{\restriction \mathscr{P}}]\hat{}_{\mathscr{Q}}) = \lambda([h_{\restriction \mathscr{P}}]\hat{}_{\mathscr{Q}})$。

注意到，上述论证（反向阅读）也表明 λ 是单射。满射性也显而易见。因此，为了完成证明，我们还需证明 λ 是同态。我们来证明 λ 关于 $\oplus$可交换；其余情况可用类似的论证得出。注意到$\lambda([f_{\restriction \mathscr{P}}]\hat{}_{\mathscr{Q}} \oplus [h_{\restriction \mathscr{P}}]\hat{}_{\mathscr{Q}}) = \lambda([f_{\restriction \mathscr{P}} \oplus h_{\restriction \mathscr{P}}]\hat{}_{\mathscr{Q}}) = \lambda([(f \oplus h)_{\restriction \mathscr{P}}]\hat{}_{\mathscr{Q}}) = (f \oplus h)_{\restriction \mathscr{Q}\cap\mathscr{P}} = f_{\restriction \mathscr{Q}\cap\mathscr{P}} \oplus h_{\restriction \mathscr{Q}\cap\mathscr{P}} = \lambda([f_{\restriction \mathscr{P}}]\hat{}_{\mathscr{Q}}) \oplus \lambda([h_{\restriction \mathscr{P}}]\hat{}_{\mathscr{Q}})$。□

前一个结果可用于证明以下一般事实。

推论 2.9. 每个有限呈示 MV-代数的有限生成商都是有限呈示的。

证明. 设 $\mathbf{A} = \mathbf{Free}(k)/\mathscr{P}$ 是有限呈示的，且 θ 是 A 的有限生成同余。设 $[g]_{\mathscr{P}}$ 是与 θ 相关联的滤子的生成元，其中 $g \in \mathbf{Free}(k)$。现在令 $\mathscr{Q} = \mathsf{O}(g)$。于是我们可以应用命题 2.7，得到 $\mathbf{A}/\theta \cong \mathbf{Free}(k)/(\mathscr{P} \cap \mathscr{Q})$。因此，由于多面体的交仍是多面体，$\mathbf{A}/\theta$ 是有限呈示的。□

记号 2.10（事件）。从下一小节开始，我们将讨论 MV-代数上的不确定性量化，尤其是自由 MV-代数上的不确定性量化。遵循标准记号，卢卡西维茨语言的公式在下文中称为事件。此外，借助定理 2.4，我们有时会将公式 φ 与其对应的 McNaughton 函数 f_φ 视为同一对象。在不会引起混淆的情况下，我们将这两种表达都称为事件 φ 或事件 f_φ。

2.3. FP(L, L) 逻辑与 MV-代数上的状态。FP(L, L) 的语言是在卢卡西维茨逻辑的语言（回顾第 2.1 节）上扩展一元模态 P 得到的。公式集合记为 PFm，由以下两类构成：

(EF)：事件公式的集合，包含卢卡西维茨语言中的所有公式；如上所述，这些公式将用小写希腊字母 φ、ψ、.....表示，并可带下标；
(MF)：模态公式的集合，包含原子模态公式，即对每个事件公式 φ，形如 $P(\varphi)$ 的表达式，以及常元 $\top$ 和 $\bot$；该集合在卢卡西维茨语言的联结词下封闭。模态公式将用大写希腊字母 Φ、Ψ、..... 表示，并可带下标。

请注意，PFm 中的模态公式只是以原子模态公式（视为变量）书写的 MV-项。也就是说，每个（复合）模态公式 Φ 都具有如下形式：$t[P(\varphi_1) \ldots, P(\varphi_k)]$，其中 $t[x_1, \ldots, x_k]$ 是关于 k 个变量的 MV-项，而 $P(\varphi_1) \ldots, P(\varphi_k)$ 是原子模态公式。实际上，FP(L, L) 的模态公式可视为具有两层：内层和外层。前者涉及上述这类内层原子模态公式，如 $P(\varphi_1) \ldots, P(\varphi_k)$，并描述事件 φ_1、.....、φ_k 上的概率不确定性；后者则允许通过卢卡西维茨联结词组合内层公式 $P(\varphi_i)$。这样，我们便能够表达原子概率公式的性质。例如，下面的公式 (P3) 表达了有限可加律。下文中，我们将用 $Var(\Phi_1, \ldots, \Phi_m)$ 表示复合模态公式 Φ_i 中所出现事件公式的（内层）卢卡西维茨变量集合。

FP(L, L) 的公理和规则如下：
(E L)：适用于事件公式的卢卡西维茨演算的所有公理和规则；
(M L)：适用于模态公式的卢卡西维茨演算的所有公理和规则；
(P)：以下是模态 P 特有的公理和规则：(P1) $\neg P(\varphi) \leftrightarrow P(\neg\varphi)$;

(P2) $P(\varphi \to \psi) \to (P(\varphi) \to P(\psi))$; (P3) $P(\varphi \oplus \psi) \leftrightarrow [(P(\varphi) \to P(\varphi \odot \psi)) \to P(\psi)]$; (N) 由 φ 推导出 $P(\varphi)$（必然化规则）。

证明的概念按通常方式定义。对于每个模态公式 Φ，下文将用 $\vdash_{FP} \Phi$ 表示 Φ 是 FP(L, L) 的一个定理。与 Łukasiewicz 情形一样，如果 Γ 是模态公式的可数（可能是无限）集合，且 Φ 是一个模态公式，我们用 $\Gamma \vdash_{FP} \Phi$ 表示 Φ 可由 Γ 在 FP(L, L) 中证明。

接下来的两个命题表明，逻辑 FP(L, L) 对内层和外层都满足等价替换。

命题 2.11. 设 $\Phi = t[P(\varphi_1) \dots, P(\varphi_k)]$ 是 PFm 中的一个公式，并设 $\varphi'_1, \dots, \varphi'_k \in$ Fm 满足：对于所有 $i = 1, \dots, k, \vdash_{\text{Ł}} \varphi_i \leftrightarrow \varphi'_i$。若 $\Phi' = t[P(\varphi'_1) \dots, P(\varphi'_k)],$，则 $\vdash_{FP} \Phi \leftrightarrow \Phi'$。

证明。根据命题 2.1，卢卡西维茨逻辑满足等价替换。因此，只需证明关于 $\Phi = P(\varphi)$ 的断言。设 φ' 是一个卢卡西维茨公式，使得 $\vdash_{\text{Ł}} \varphi \leftrightarrow \varphi'$。那么，特别地，$\vdash_{\text{Ł}} \varphi \to \varphi'$ 且 $\vdash_{\text{Ł}} \varphi' \to \varphi$。由前者，通过一次必然化规则 (N)，我们得到 $\vdash_{FP} P(\varphi \to \varphi')$，进而由公理 (P2) 和肯定前件式，得到 $\vdash_{FP} P(\varphi) \to P(\varphi')$。类似地，由 $\vdash_{\text{Ł}} \varphi' \to \varphi$，我们得到 $\vdash_{FP} P(\varphi') \to P(\varphi)$，于是断言得证。□

下一个结果可直接由以下事实推出：卢卡西维茨公理和规则对模态公式成立。

命题 2.12. 设 $\Phi = t[P(\varphi_1) \dots, P(\varphi_k)]$ 是 PFm 中的一个公式，并设 t' 是一个含 k 个变量的卢卡西维茨项，它在逻辑上等价于（在卢卡西维茨逻辑中）t。若 $\Phi' = t'[P(\varphi_1) \dots, P(\varphi_k)],$，则 $\vdash_{FP} \Phi \leftrightarrow \Phi'$。

FP(L, L) 最自然的语义由 MV-代数的状态给出。

定义 2.13 ([37]). 对于每个 MV-代数 A，A 的一个状态是满足以下条件的函数 $s\colon A \to [0,1]$：(s1) $s(\top) = 1$（规范化）；以及 (s2) 对所有满足 $a \odot b = \bot$（有限可加性）的 $a, b \in A$，均有 $s(a \oplus b) = s(a) + s(b)$。

当 MV-代数 A 特别是布尔代数（即满足 $x \vee \neg x = \top$）时，状态就是有限可加的概率函数。此外，从 MV-代数 A 到$[0,1]_{MV}$的每个同态都是一个状态。更一般地，MV-代数 A 的每个状态都属于乘积空间 $[0,1]^A$ 中 A 到 $[0,1]$, 的同态的凸包的拓扑闭包；更多详情请参见 [37, 40, 20] 。

请注意，FP(L, L) 的公理和规则足以在句法上证明模态P 满足状态的基本性质。例如，$\top \to P(\top)$可由必然化规则推出，而 $P(\top) \to \top$ 也成立，因为 $\varphi \to \top$ 是 Łukasiewicz 逻辑的一个定理。因此，对应于上述 (s1) 的 $P(\top) \leftrightarrow \top$可以在 FP(L, L) 中证明。将 (P1) 中的 $\varphi = \top$代入，可得 $\neg P(\top) \leftrightarrow P(\neg\top)$。由于 $P(\top) \leftrightarrow \top$ 且 $\neg\top \leftrightarrow \bot$，我们得到 $\bot \leftrightarrow P(\bot)$，即“矛盾的概率为零”。最后，P 的有限可加性 (s2) 可如下证明：设φ 和 ψ 满足 $\varphi \odot \psi \leftrightarrow \bot$ 是一个定理。于是，根据必然化规则，$P(\varphi \odot \psi) \leftrightarrow \bot$ 也是一个定理；在 (P3) 中以 $\bot$ 替换 $P(\varphi \odot \psi)$，可得 $P(\varphi \oplus \psi) \leftrightarrow [(P(\varphi) \to \bot) \to P(\psi)]$。现在，$P(\varphi) \to \bot$ 在 Łukasiewicz 逻辑中等价于 $\neg P(\varphi)$，因此 $(P(\varphi) \to \bot) \to P(\psi)$ 就是 $\neg P(\varphi) \to P(\psi)$，它等于 $P(\varphi) \oplus P(\psi)$。因此，由 $\vdash_{FP} \varphi \odot \psi \leftrightarrow \bot$ 可推得 $\vdash_{FP} P(\varphi \oplus \psi) \leftrightarrow P(\varphi) \oplus P(\psi)$。

现在，令 $\Phi = t[P(\varphi_1) \dots, P(\varphi_k)]$ 为 PFm 的一个模态公式，并假设 $n = |Var(\Phi)|$。那么，若 s 是 Free(n) 的一个状态，我们可以按如下方式在标准 MV-代数 $[0,1]_{MV}$ 中通过 s 对 Φ 求值：

$$t^{[0,1]_{MV}}[s(f_{\varphi_1}), \dots, s(f_{\varphi_k})].$$

定义 2.14. 对于每个含 n 个变量的公式 Φ，以及 Free(n) 的每个状态 s，若 $t^{[0,1]_{MV}}[s(f_{\varphi_1}) \dots, s(f_{\varphi_k})] = 1$，我们将记作$s \models \Phi$。

在 [17, 定理 4.2], 中，证明了逻辑 FP(L, L) 关于状态是完备的，也就是说，对于每个满足 $n = |Var(\Phi)|$ 的模态公式 Φ，若 $\vdash_{FP} \Phi$，则对 Free(n) 的所有状态 s，都有 $s \models \Phi$。现在我们对这一标准完备性定理作一个小小的推广，事实证明，这一推广对下文很有用。我们将利用 FP(L, L) 关于超状态的强完备性结果,

该结果见 [15]。对于每个 MV-代数 A，A 的一个超状态是一个映射 $s^*: A \to [0,1]^*$，其中 $[0,1]^*$ 是实单位区间的一个非平凡超幂，并满足上文定义 2.13 中的 (s1) 和 (s2)。给定 PFm 的一个模态公式 $\Phi = t[P(\varphi_1)\dots, P(\varphi_k)]$，且满足 $n = |Var(\Phi)|$，若 s^* 是 Free(n) 的一个超状态，则当 $s^* \models \Phi$ if $t^{[0,1]^*_{MV}}[s^*(f_{\varphi_1})\dots, s^*(f_{\varphi_k})] = 1$. 时，我们记作 $s^* \models \Phi$。以下结论成立。

命题 2.15（[15, 定理 4.8]）。设 Φ, Ψ 是 PFm 中的公式，满足 $n = |Var(\Phi, \Psi)|$。那么， $\Phi \vdash_{FP} \Psi$ 当且仅当对于 Free(n) 的每个超状态 s^*， $s^* \models \Phi$ 蕴含 $s^* \models \Psi$。

此外，回顾 [9]，每个 MV-链，即每个全序 MV-代数，都可以部分嵌入标准 MV-代数 $[0,1]_{MV}$。这意味着，对于每个 MV-链 A 以及 A 的每个有限子集 X，都存在一个单射映射 $\iota: X \to [0,1]_{MV}$，它保持 X 中出现的所有运算。例如，若 $x, y, x \oplus y \in X$，则 $\iota(x \oplus y) = \iota(x) \oplus \iota(y)$。

下一个技术引理摘自 [17, 定理 4.2] 的证明。

引理 2.16. 对于 Free(n) 中任意有限个 McNaughton 函数 $f_1, \dots, f_t$，以及任意超状态 s^*: Free(n) $\to [0,1]^*$，存在 $[0,1]^*$ 的有限子集 X、从 X 到 $[0,1]_{MV}$ 的部分嵌入 λ，以及状态 s: Free(n) $\to [0,1]$，使得对于所有 $j = 1, \dots, t$,

$$s(f_j) = \lambda(s^*(f_j)).$$

因 此现在可以证明我们所声称的对 FP(L, L) 标准完备性的改进 .

定理 2.17. 设 Φ, Ψ 是 PFm 中的公式，且 $n = |Var(\Phi, \Psi)|$。则 $\Phi \vdash_{FP} \Psi$ 当且仅当对于 Free(n) 的每个状态 s， $s \models \Phi$ 蕴含 $s \models \Psi$。

证明。根据命题 2.15， $\Phi \vdash_{FP} \Psi$ 当且仅当存在 Free(n)的一个超状态 s^*，使得 $s^* \models \Phi$蕴含 $s^* \models \Psi$。根据引理 2.16，存在 $[0,1]^*$的一个有限子集 X、从 X 到$[0,1]_{MV}$的一个部分嵌入 λ，以及一个状态 s: Free(n) $\to [0,1]$，使得对所有 $\gamma \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi_1, \dots, \psi_l\}$， $s(f_\gamma) = \lambda(s^*(f_\gamma))$。因此，

$$t^{[0,1]_{MV}}[s(f_{\varphi_1}), \dots, s(f_{\varphi_k})] = 1 \text{ and } r^{[0,1]_{MV}}[s(f_{\psi_1}), \dots, s(f_{\psi_l})] < 1.$$

□

鉴于上述结果，可以证明，我们在命题 2.11 和命题 2.12 中提出的要求——项 t 和 t' 所含变量的数量相同——并非必要。事实上，每个公式 $\Phi = t[P(\varphi_1)\dots, P(\varphi_k)]$ 都可以通过允许更多原子模态公式而等价地改写。更确切地说，设 Φ 如上所述，并设 $P(\psi_1)\dots, P(\psi_m)$为未出现在 Φ中的原子模态公式，考虑公式

$$\Phi' = \Phi \wedge \left(\bigwedge_{j=1}^{m} [P(\psi_j) \to P(\psi_j)] \right).$$

接下来，我们可以很容易地证明 $\vdash_{FP} \Phi \leftrightarrow \Phi'$。事实上，不失一般性地假设 n 是 Φ'中出现的命题变量的数量，根据定理 2.17， $\vdash_{FP} \Phi \leftrightarrow \Phi'$ 当且仅当对于 Free(n) 的每个状态 s， $s \models \Phi \leftrightarrow \Phi'$，也就是说，

$$t^{[0,1]_{MV}}[s(f_{\varphi_1}), \dots, s(f_{\varphi_k})] = \min \left\{ t^{[0,1]_{MV}}[s(f_{\varphi_1}), \dots, s(f_{\varphi_k})], \bigwedge_{j=1}^{m} (s(f_{\psi_j}) \to s(f_{\psi_j})) \right\}.$$

后一个等式显然成立，因为对于所有 $j = 1$， ....., m 以及每个状态 s， $s(f_{\psi_j}) \to s(f_{\psi_j}) = 1$。因此，我们立即得到以下命题，这对接下来的结果会有所帮助。

命题 2.18. 设 $\Phi = t[(P(\varphi_1)\dots, P(\varphi_k)]$ 和 $\Psi = u[P(\psi_1)\dots, P(\psi_m)]$ 是 PFm 中的公式。那么存在 $\Phi', \Psi' \in$ PFm，它们包含所有原子模态公式 $P(\varphi_1)\dots, P(\varphi_k)$,$P(\psi_1)\dots, P(\psi_m)$ 作为子公式，且 $\vdash_{FP} \Phi \leftrightarrow \Phi'$ 和 $\vdash_{FP} \Psi \leftrightarrow \Psi'$。

3. Coherence, coherent sets and their geometry

MV-代数的状态刻画了用卢卡西维茨逻辑语言描述的事件的不确定性量化，正如概率测度在经典逻辑领域中所起的作用。此外，类比于经典概率论的基础层面，状态是将德·菲内蒂无赌书判据 [11, 12] 自然推广到 MV-代数领域的函数。

要理解这一点，我们不妨回顾一下：德·菲内蒂的主观概率论奠基于两名玩家之间的一种下注游戏（通常称为博彩公司和赌徒），他们就某些结果未知的事件是否发生进行金钱赌注。本文无意全面详尽地介绍德·菲内蒂的游戏及其推广形式，感兴趣的读者可参阅这一主题的丰富文献（例如参见 [1, 11, 12, 38, 39, 41, 42, 43]及其中的参考文献）。不过，重要的是要记住：只要博彩公司确定一组事件 $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ 和售价 $\beta_1, \ldots, \beta_k \in [0,1]$（也就是说，一个簿 β：$\varphi_i \mapsto \beta_i$），这些售价便是相干的（且簿 β 是相干的），当且仅当它们能阻止任何可能心怀恶意的赌徒制定下注策略，使博彩公司遭受必然损失。

对下文至关重要的是，根据德菲内蒂定理 [12], 簿商的售价 $\beta_1, \ldots, \beta_k$ 相干，当且仅当它们符合有限可加概率的柯尔莫哥洛夫公理。

定理 3.1（德·菲内蒂）。设 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ 是任意有限集经典事件，且 β：$\varphi_i \mapsto \beta_i$ 是定义在这些事件上的簿。那么，β 相干，当且仅当存在一个布尔代数上的概率 μ，该布尔代数由这些 φ_i 生成，且此概率扩展了 β。也就是说，对于所有 $i = 1, \ldots, k$，都有 $\mu(\varphi_i) = \beta(\varphi_i)$。

德·菲内蒂相干性准则足够稳健，几乎无需修改即可扩展到 Łukasiewicz 领域，而 MV-代数的状态刻画了这一扩展后的相干性概念[38]。

定理 3.2（Mundici）。设 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ 是定义在 n 个命题变量上的有限集卢卡西维茨事件。簿 β：$\varphi_i \mapsto \beta_i$ 相干，当且仅当存在 Free(n) 的一个状态 s 扩展它。

对于每个由 n 个变量构成的事件集 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$，所有相干簿 β的集合 $\mathcal{E} \to [0,1]$ 都有清晰的几何表示。事实上，考虑 McNaughton 函数 f_{φ_1}、.....、 f_{φ_k}:$[0,1]^n \to [0,1]$，集合 $\{\langle f_1(x)$、.....、 $f_k(x)\rangle \mid x \in [0,1]^n\}$ 及其凸包

$$\mathscr{C}_{\mathcal{E}} = \overline{\mathrm{co}}\{\langle f_1(x), \ldots, f_k(x)\rangle \mid x \in [0,1]^n\} \subseteq [0,1]^k. \tag{5}$$

由于 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 是从 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ 到 $[0,1]$, 的函数集，我们也可以将它等价地视为 $[0,1]^k$ 或 $[0,1]^{\mathcal{E}}$的子集。

如 [16, 推论 3.2]所示，无需考虑所有元素 $x \in [0,1]^n$即可定义 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$。事实上，设 Δ 为一个正则复形[1]，它将 McNaughton 函数 f_1、.....、 f_k线性化。若 $\mathbf{v}_1$、.....、$\mathbf{v}_t$ 是 Δ的顶点，则上面的 (5) 可简化为

$$\mathscr{C}_{\mathcal{E}} = \mathrm{co}\{\langle f_1(\mathbf{v}_j), \ldots, f_k(\mathbf{v}_j)\rangle \mid j = 1, \ldots, t\}.$$

根据 [16, 推论 3.2], , 上述 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 的定义并不取决于我们选择哪个特定的 Δ 来线性化 McNaughton 函数 f_{φ_i}。

下面的例子展示了如何构造 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$。

例 3.3。考虑两个事件 φ_1、φ_2，它们对应的 McNaughton 函数为

$$f_{\varphi_1}(x,y) = x \vee y \text{ and } f_{\varphi_2}(x,y) = x \oplus y.$$

如图 1 所示，设定 $[0,1]^2$ 的正则复形，并注意到它将 $x \vee y$ 和 $x \oplus y$ 都线性化。Δ 的顶点为 $\mathbf{v}_1 = \langle 0$、$0\rangle$、$\mathbf{v}_2 = \langle 1$、$0\rangle$、$\mathbf{v}_3 = \langle 0$、$1\rangle$、$\mathbf{v}_4 = \langle 1$、$1\rangle$ 和 $\mathbf{v}_5 = \langle 1/2$、$1/2\rangle$。

[1]回忆一下，*simplicial complex* Δ 是由若干单形构成的非空有限集，并满足以下条件：Δ 中每个单形的面都属于 Δ；对于任意一对单形 T_1、$T_2 \in \Delta$，它们的交集要么为空，要么与 T_1 和 T_2 的一个公共面重合。正则复形是由正则单形构成的单纯复形（未解释的概念请参见 [13] ）。

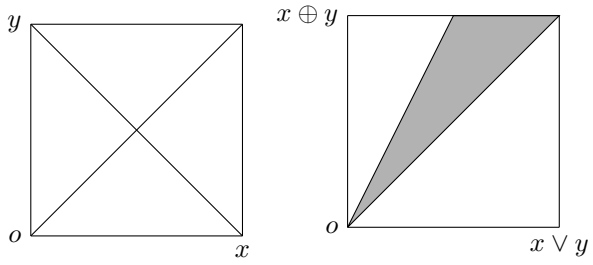


FIGURE 1. 对 $\mathcal{E} = \{x \vee y, x \oplus y\}$ 中的事件进行线性化的 $[0,1]^2$ 的三角剖分（左图），以及集合 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$（右图）。

因此可得

$$\langle f_{\varphi_1}\langle 0,0\rangle, f_{\varphi_2}\langle 0,0\rangle\rangle = \langle 0,0\rangle; \langle f_{\varphi_1}\langle 1,0\rangle, f_{\varphi_2}\langle 1,0\rangle\rangle = \langle f_{\varphi_1}\langle 0,1\rangle, f_{\varphi_2}\langle 0,1\rangle\rangle = \langle f_{\varphi_1}\langle 1,1\rangle, f_{\varphi_2}\langle 1,1\rangle\rangle = \langle 1,1\rangle, \text{ and } \langle f_{\varphi_1}\langle 1/2,1/2\rangle, f_{\varphi_2}\langle 1/2,1/2\rangle\rangle = \langle 1/2,1\rangle.$$

因此，$\mathscr{C}_{\mathcal{E}} = \mathsf{co}\{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1/2,1\rangle\}$ 如图 1 右侧所示，位于一个坐标以事件 $x \vee y$ 和 $x \oplus y$标记的空间中。

由于每个关于 $\mathcal{E}$的簿 β都可以视为一个点 $\langle \beta(\varphi_1) .., \beta(\varphi_k) \rangle \in [0,1]^k$，因此该表达式$\beta \in \mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 是有意义的。

T定理 3.4。对于 n 中变量的每个事件集 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$，以下条件成立：**(1)** $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 是 $[0,1]^k$ 的有理多面体，且包含一个布尔点；**(2)** 簿 $\beta\colon \mathcal{E} \to [0,1]$ 相干，当且仅当 $\beta \in \mathscr{C}_{\mathcal{E}}$。

证明。（1）的第一个断言和断言（2）分别是 [16, 推论 3.2] 和 [38, 推论 5.4]。因此，只需证明每个 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 都包含一个布尔点，也就是说，超立方体$[0,1]^k$的一个顶点。根据 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 的定义，再结合每个 McNaughton 函数 $f\colon [0,1]^n \to [0,1]$ 限制在 $\{0,1\}^n$上后只取 $\{0,1\}$ 中的值，即可直接得到这一结论。因此，对每个 $x \in \{0,1\}^n$，形如 $\langle f_{\varphi_1}(x) ....., f_{\varphi_k}(x) \rangle$ 的 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$中的点属于 $\{0,1\}^k$，由此断言得证。□

因此，下一个结果是定理 2.17、定理 3.2的推论，也基于这样一个观察：如定理 3.4所强调的，将状态限制在其论域的有限子集上后，每个状态都会确定相干簿。此外，鉴于上述论证，若 $\Phi = t[P(\varphi_1) ....., P(\varphi_k)]$是 PFm 中的一个公式，且 β是 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$上的相干簿，我们将记作

$$\beta \models \Phi \text{ iff } t^{[0,1]_{MV}}[\beta(\varphi_1), \ldots, \beta(\varphi_k)] = 1.$$

显然，若 $\beta \models \Phi$，则对于每个扩展 β 的状态 s，都有 $s \models \Phi$。

推论 3.5. 设 $\Phi = t[P(\varphi_1) \ldots, P(\varphi_k)]$ 和 $\Psi = r[P(\psi_1) \ldots, P(\psi_m)]$ 是来自 PFm 的公式，并设 $\mathcal{E}$ 为出现在 Φ 和 Ψ 中的事件集。那么，当且仅当对于所有满足 $\beta \models \Phi$ 的 $\beta \in \mathscr{C}_{\mathcal{E}}$，都有 $\beta \models \Psi$ 时，$\Phi \vdash_{FP} \Psi$。

到目前为止的论证清楚地表明，任意有限个 k **(Łukasiewicz)** 事件 $\mathcal{E}$ 都确定了博彩公司可在其上定义的所有可能相干簿的集合 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$。这类凸集将在下文中正式定义，并称为相干集。本节余下部分将对它们作几何描述，并证明一些基本性质。

定义 3.6. 若存在一个事件集 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ 使得 $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{\mathcal{E}}$，则称 $[0,1]^k$ 的凸子集 $\mathscr{C}$ 为相干集。

相干集并非由唯一的 $\mathcal{E}$ 选择所确定。例如，很容易看出，同一个相干集同时对应 $\mathcal{E} = \{x \wedge y, x \oplus y\}$ 和 $\mathcal{E}' = \{x \odot y, x \oplus y\}$。也就是说，$\mathscr{C}_{\mathcal{E}} = \mathscr{C}_{\mathcal{E}'}$。

还要注意，相干集并非可组合的。这意味着，如果 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}'$ 是两个事件集，那么不存在一般性的几何构造，能够根据 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 和$\mathscr{C}_{\mathcal{E}'}$定义出 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}\cup\mathcal{E}'}$。不过，将相干集投影到低维空间后，得到的确实是一个相干集。

命题 3.7. 设 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ 为一个事件集。那么对于 $\mathcal{E}$的每个子集 $\mathcal{E}'$， $\mathscr{C}_{\mathcal{E}'}$ 都与将 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 投影到 $[0,1]^{\mathcal{E}'}$所得的结果重合。

证明。只需注意到，从 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 到 $[0,1]^{\mathcal{E}'}$ 的投影由 $\mathcal{E}'$ 上所有的相干簿构成，因此它与 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}'}$ 重合，即对于每一个相干簿 β： $\mathcal{E} \to [0,1]$, ，其在 $\mathcal{E}'$ 上的限制也相干。□

下面的例子给出了上述结果的几何直观，同时也旨在阐明相干集的非复合性。

例 3.8。考虑由两个变量构成的事件集 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$，其 McNaughton 函数分别为

$$f_{\varphi_1}(x,y) = x \oplus y,\ f_{\varphi_2}(x,y) = x \odot y,\ f_{\varphi_3}(x,y) = x \wedge y.$$

为了描述 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$，请注意，图 1 左侧的三角剖分将 f_{φ_i} 线性化。因此，直接计算可得

$$\mathscr{C}_{\mathcal{E}} = \mathrm{co}\{\langle 0,0,0\rangle, \langle 1,0,0\rangle, \langle 1,1,1\rangle, \langle 1,1/2,0\rangle\}$$

如图 2 左上方所示。

$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 在同一图 2 中， $[0,1]^{(x\oplus y, x\wedge y)}$、 $[0,1]^{(x\odot y, x\wedge y)}$ 和 $[0,1]^{(x\oplus y, x\odot y)}$ 正方形上的投影分别如右上、左下和右下所示。显然，它们分别对应于事件 $\mathcal{E}' = \{\varphi_1, \varphi_2\}$、 $\mathcal{E}'' = \{\varphi_2, \varphi_3\}$ 和 $\mathcal{E}''' = \{\varphi_2, \varphi_3\}$的相干集。

最后，请注意我们在定义 3.6 下方的评论：尽管 $\mathcal{E}' \neq \mathcal{E}'''$，它们的相干集作为 $[0,1]^2$的子集是相同的。

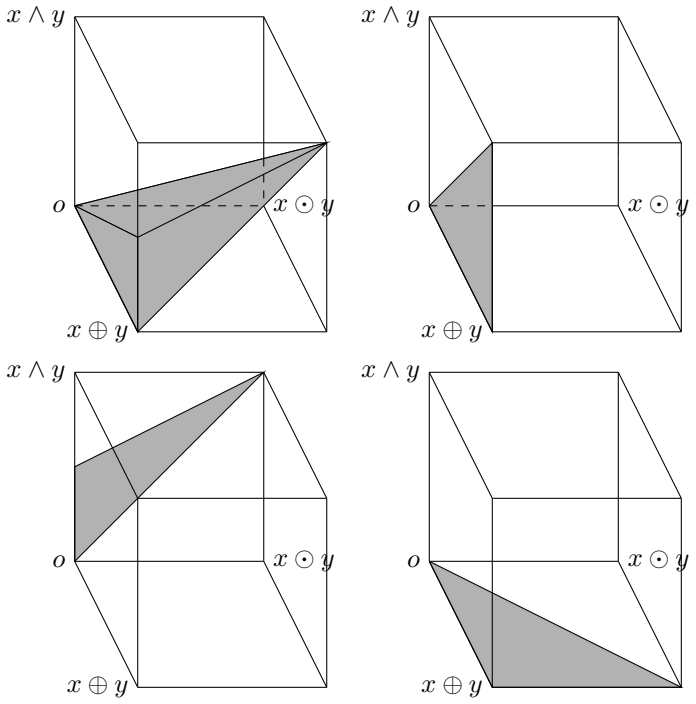


FIGURE 2. $\mathcal{E} = \{x \oplus y, x \odot y, x \wedge y\}$ 的相干集 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 及其在 $[0,1]^{(x\oplus y, x\wedge y)}$、 $[0,1]^{(x\odot y, x\wedge y)}$ 和 $[0,1]^{(x\oplus y, x\odot y)}$ 上的三个投影。

我们以以下这条有用的观察结束本节。

注 3.9。命题 2.5 的一个直接推论是，对于每个有理多面体 $\mathscr{P} \subseteq [0,1]^k$，都存在一些可相互证明但在逻辑上不等价的公式，使得它们的 McNaughton 函数的单点集全都为 $\mathscr{P}$。

McNaughton 函数的单点集全都为 $\mathscr{P}$。然而， [16, 命题 5.3] 给出了一种算法，对于每个有理多面体 $\mathscr{P}$ ，都能确定一个具有上述性质的特定公式 $\chi_{\mathscr{P}}$ 。由于相干集是凸有理多面体，这一论证显然也适用于相干集。因此，对于每个公式集 $\mathcal{E}=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_k\}$，今后我们都用 $\chi_{\mathcal{E}}$表示由上述算法选出的 Łukasiewicz 公式，使得 $f_{\chi_{\mathcal{E}}}$ 的单点集为 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$。

4. Local reduction of FP(L, L) to Łukasiewicz calculus

本节将说明如何将概率逻辑 FP(L, L) 的语言编码到命题卢卡西维茨演算中，并在局部约简其可推导关系。这种局部约简主要受到前述推论 3.5 的启发，并得益于一个从 FP(L, L) 的模态语言到 L 的模态语言的翻译映射。

将概率公式翻译为卢卡西维茨逻辑的命题语言，这一想法并不新鲜；事实上，它是 [26] 中用于证明基于概率空间的经典事件概率逻辑的可靠性与完备性的主要工具。此外，该方法也曾出于类似目的应用于[18] （更详尽的讨论另见 [19, 10] ）。在较新的论文[2] 中，这一想法终于被用于为 [26] 中引入的概率逻辑构造超序列演算，而 FP(L, L) 正是该逻辑的真扩张。

因此，我们从 PFm 的模态公式到卢卡西维茨逻辑的命题语言 Fm，开始以下列归纳方式定义翻译映射 $^\bullet$：

(T1) $(\bot)^\bullet=\bot$ 和 $(\top)^\bullet=\top$；(T2) 对于每个原子模态公式 $P(\varphi)$，令 p_φ 为卢卡西维茨语言中的一个新变量符号，并令 $P(\varphi)^\bullet=p_\varphi$；(T3) 若 $\Phi=t[P(\varphi_1)\ldots,P(\varphi_k)]$ 是一个复合模态公式，则 $\Phi^\bullet=t[P(\varphi_1)^\bullet,\ldots,P(\varphi_k)^\bullet]=t[p_{\varphi_1},\ldots,p_{\varphi_k}]$。

注4.1（概率代换）。刚刚引入的从 PFm 的模态公式到以变量 p_{φ_i}'s 为基础的命题卢卡西维茨公式的翻译，可能会让人想到将 PFm 的模态公式上的代换定义为任意一个映射

$$\sigma:\{P(\varphi_1),\ldots,P(\varphi_k)\}\to\mathbf{PFm}. \tag{6}$$

任意这样的 σ 都给出一个典型的 Łukasiewicz 代换（模去 $^\bullet$）。然而，注意到 $\vdash_{FP}$ 在按式 (6) 定义的映射下不满足代换不变性性质[2] 。事实上，考虑$\Phi=(P(x\vee\neg x))^2$ 和 $\Psi=(\neg P(x\vee\neg x))^2\vee(P(x\vee\neg x))^2$。注意到 $\mathscr{C}_{x\vee\neg x}=[1/2,1]$，并且对所有$\beta\in[1/2,1]$,

$$\beta\models(P(x\vee\neg x))^2\leftrightarrow(\neg P(x\vee\neg x))^2\vee(P(x\vee\neg x))^2.$$

事实上， $\beta^2=(1-\beta)^2\vee\beta^2$，因为对所有 $\beta\geq 1/2$，$(1-\beta)^2\leq\beta^2$。因此，由推论 3.5,

$$\vdash_{FP}\Phi\leftrightarrow\Psi.$$

考虑映射 σ: $\{P(x\vee\neg x)\}\to$PFm，使得 $\sigma(P(x\vee\neg x))=P(y)$。那么， $\nvdash_{FP}\sigma(\Phi)\leftrightarrow\sigma(\Psi)$，当然， $\sigma(\Phi)=(P(y))^2$ 且 $\sigma(\Psi)=(\neg P(y))^2\vee P(y)^2$。事实上，注意到 $\mathscr{C}_y=[0,1]$。因此，若任选一个 $\beta\in[0,1/2)$，便可得 $\beta^2=0$ 且 $(1-\beta)^2\vee\beta^2>0$，因为 $1-\beta>1/2$。因此，再次由推论 3.5,

$$\nvdash_{FP}\sigma(\Phi)\leftrightarrow\sigma(\Psi).$$

前述评论的理由是，既然我们希望将 FP(L, L) 的原子模态公式视为变量，为了使 $\vdash_{FP}$ 满足代换不变性，我们需要确保这些“变量”在相干集中取值。这一事实引出了以下概念。

定义 4.2（概率代换）。设 $\mathcal{E}=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_k\}$ 为一个事件集。映射 σ: $\{P(\varphi_i)\mid i=1,\ldots,k\}\to$PFm 若满足：对于所有 $\Phi,\Psi\in$PFm，若原子模态公式$\{P(\varphi_i)\mid i=1,\ldots,k\}$满足 $\vdash_{FP}\Phi\leftrightarrow\Psi$，则 $\vdash_{FP}\sigma(\Phi)\leftrightarrow\sigma(\Psi)$ ，那么它就是一个概率代换。

[2]回想一下，若命题逻辑 $\mathcal{L}$ 的蕴涵关系 $\vdash_{\mathcal{L}}$ 满足代换不变性（或*structurality*），则对于任意公式集 $\Gamma\cup\{\varphi\}$ 和任意代换 σ，若 $\Gamma\vdash_{\mathcal{L}}\varphi$，则 $\sigma\Gamma\vdash_{\mathcal{L}}\sigma\varphi$ （更多细节参见 [22, 定义 1.4] ）。

翻译 $^\bullet$ 可以借助一个解释所有概率公理实例的无限理论，将 FP(L, L) 的推导翻译为卢卡西维茨逻辑中的推导。由于卢卡西维茨逻辑的标准完备性并不适用于从无限理论出发的推导，因此在处理无限理论时，卢卡西维茨逻辑的句法与标准语义之间的相互作用会失效。解决这一问题的一种方法是通过德·菲内蒂相干性，将 FP(L, L) 的可推导关系局部约化为卢卡西维茨演算。下面的定理从几何视角通过相干集，并从 MV-代数的代数视角，展示如何在句法上用卢卡西维茨逻辑刻画 FP(L, L) 的推导。对于接下来的陈述，请回忆 $\chi_{\mathcal{E}}$ 在注 3.9 中的定义。

定理 4.3。设 $\Phi, \Psi \in$ PFm，且设 $\mathcal{E}$ 为其中出现的事件集。那么，以下条件等价:

(1) $\Phi \vdash_{FP} \Psi$; (2) $\chi_{\mathcal{E}}, \Phi^\bullet \vdash_L \Psi^\bullet$; (3) $\mathscr{C}_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{M}od(\Phi^\bullet) \subseteq \mathcal{M}od(\Psi^\bullet)$; (
4) 准方程 (($\chi_{\mathcal{E}}$ 且 $\Phi^\bullet$) 蕴含 $\Psi^\bullet$) 在所有 MV-代数中成立。

证明。(1)⇒(2) 设 $\Phi = t[P(\varphi_1) \ldots, P(\varphi_k)]$ 和 $\Psi = r[P(\psi_1) \ldots, P(\psi_m)]$ 为 PFm 中的模态公式，并假设 $\Phi \vdash_{FP} \Psi$。此外，设 e 为 $\chi_{\mathcal{E}}$ 和 $\Phi^\bullet$ 的一个 $[0,1]_{MV}$-模型。由于 $e(\chi_{\mathcal{E}}) = 1$，且根据翻译映射 $^\bullet$: PFm $\to$Fm 的定义，可得

$$\langle e(p_{\varphi_1}), \ldots, e(p_{\varphi_k}), e(p_{\psi_1}), \ldots, e(p_{\psi_m}) \rangle \in \mathrm{O}(\chi_{\mathcal{E}}) = \mathscr{C}_{\mathcal{E}}.$$

换言之，对于 $\tau \in \{\varphi_i, \psi_j \mid i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, m\}$，赋值 β: $\tau \mapsto e(p_\tau)$ 是相干的。此外，同一个 $[0,1]_{MV}$-估值 e 是 $\Phi^\bullet$ 的一个模型，因此，

$$t^{[0,1]_{MV}}[e(p_{\varphi_1}), \ldots, e(p_{\varphi_k})] = t^{[0,1]_{MV}}[\beta(\varphi_1), \ldots, \beta(\varphi_k)] = 1.$$

根据假设，$\Phi \vdash_{FP} \Psi$ 和 β 是 Φ 的一个模型。因此，根据推论 3.5，β 也是 Ψ 的一个模型。也就是说，

$$r^{[0,1]_{MV}}[\beta(\psi_1), \ldots, \beta(\psi_m)] = r^{[0,1]_{MV}}[e(p_{\psi_1}), \ldots, e(p_{\psi_m})] = 1$$

这表明 e 是 $\Psi^\bullet$ 的一个模型，正如所要求的。

(2)⇒(1) 论证与前一个类似。事实上，$\chi_{\mathcal{E}}$ 的每个 $[0,1]_{MV}$-模型 e 都是满足 Φ 的相干簿 β。因此，根据假设，e 是 $\Psi^\bullet$ 的模型，因而也是 $\beta \models \Psi$ 的模型；结论由推论 3.5 得出。

(2)⇔(3) 直接由命题 2.5 (3) 得出，而 (2)⇔(4) 则是一个直接推论，因为正如我们在第 2.1 小节中所回顾的，MV-代数是卢卡西维茨逻辑的等价代数语义。□

请注意，在上述结果的表述中，我们假设公式 Φ 和 Ψ 属于同一个事件集；根据命题 2.18，这样假设不失一般性。

前一个定理应该已经阐明了为什么我们在本节开头提到了局部约简。事实上，正如我们将在下一节进一步阐述的，模态公式 Φ 在 FP(L, L) 中的可证性，是通过卢卡西维茨逻辑中从另一个命题公式推出译后公式 $\Phi^\bullet$ 的可推导性来编码的，而该命题公式确实取决于 Φ 本身。正是在这个意义上，从概率蕴涵到命题蕴涵的编码是局部的。

我们以先前定理的一些推论结束本节。

推论 4.4。FP(L, L) 的可推导关系是可判定的。

证明。根据定理 4.3，FP(L, L) 中的每个推导 $\Phi \vdash_{FP} \Psi$ 成立，当且仅当相应的翻译后推导 $\chi_{\mathcal{E}}$, $\Phi^\bullet \vdash \Psi^\bullet$ 在 Łukasiewicz 逻辑中成立。 $\Phi^\bullet$和 $\Psi^\bullet$可通过算法从 Φ和 Ψ得到；此外，$\chi_{\mathcal{E}}$ 按照注 3.9 计算。由 Łukasiewicz 逻辑的可推导关系是可判定的这一事实，即可得出结论 [44]。□

推论 4.5. FP(L, L) 具有局部演绎定理：对于所有公式 $\Phi, \Psi \in$PFm，$\Phi \vdash_{FP} \Psi$ 当且仅当存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $\vdash_{FP} \Phi^n \to \Psi$。

证明。由定理 4.3， $\Phi \vdash_{FP} \Psi$ 当且仅当，给定 $\mathcal{E}$ 中的事件集 Φ 和 Ψ，有 $\chi_{\mathcal{E}}, \Phi^{\bullet} \vdash_{\mathrm{L}} \Psi^{\bullet}$，当且仅当 $\chi_{\mathcal{E}} \vdash_{\mathrm{L}} (\Phi^{\bullet})^{n} \rightarrow \Psi^{\bullet}$ 对某个 $n \in \mathbb{N}$ 成立，因为 Łukasiewicz 逻辑具有局部演绎定理（[40, 定理 1.7]）。由于 $(\Phi^{\bullet})^{n} \rightarrow \Psi^{\bullet} = (\Phi^{n} \rightarrow \Psi)^{\bullet}$，这当且仅当 $\chi_{\mathcal{E}} \vdash_{\mathrm{L}} (\Phi^{n} \rightarrow \Psi)^{\bullet}$ 成立；再次应用定理 4.3，这等价于 $\vdash_{FP} \Phi^{n} \rightarrow \Psi$，证明完毕。□

5. A local algebraic semantics for FP(L, L)

按照定理 4.3 的意义，MV-代数构成了 FP(L, L) 的一种语义。事实上，检验 FP(L, L) 中定理和推导的有效性，相当于检验所有 MV-代数组成的簇中的拟方程是否有效。本节将说明，实际上我们可以将范围缩小到一类特殊的投射 MV-代数。

5.1. 相干 MV-代数与投射性。本节稍后定义的 MV-代数类称为相干 MV-代数，旨在通过自由 MV-代数的适当商来刻画事件上的相干投注。更确切地说，若 $\mathcal{E}$ 是一个事件集，记作 $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$，并按惯例用 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 表示 $\mathcal{E}$ 上所有相干赋值的集合，则 Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 是相干 MV-代数的一个典型例子。因此，根据定理 3.4，对于每个事件集 $\mathcal{E}$，Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 都是有限呈示的。

如下结果表明，Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 编码了事件φ_1、...、 φ_k上的概率相干投注。

命题 5.1. 对于每个有限事件集 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$，Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 到 $[0,1]_{MV}$ 的同态与 $\mathcal{E}$上的相干簿之间存在一一对应关系。

证明. 证明基于以下一般事实：对于每个有限呈示 MV-代数 A ≅Free(k)/$\mathscr{P}$，A 到 $[0,1]_{MV}$的同态集合与 $\mathscr{P}$中的点一一对应，参见[40, 推论 6.4]。我们将 λ 称为 Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 到 $[0,1]_{MV}$的同态与 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$中的点之间的双射。因此，对于每个同态 h: Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}} \rightarrow [0,1]_{MV}$，令 $\lambda(h) = \mathbf{x}_h = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$。根据 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$的定义以及定理 3.4，簿 β: $\varphi_i \mapsto x_i$ 是相干的，而这个将 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 中的点对应到 $\mathcal{E}$ 上的相干簿的映射显然是双射。□

我们此前注意到，对于每个事件集合 $\mathcal{E}$，Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 都是有限呈示的。接下来的结果表明，每个这样的代数实际上都是 MV-代数簇 MV 中的投射代数。

在证明之前，回顾一下：若代数 A 与代数类 K 具有相同的签名，那么如果对于任意 B、C $\in$ K 以及同态 f: A $\rightarrow$ B 和 g: C $\rightarrow$ B，只要 g 是满射，就存在同态 h: A $\rightarrow$ C，使得 $g \circ h = f$，则称 A 在 K 中是投射的。若 A 是有限生成代数，而 V 是一个簇，则等价地，A 是投射代数，当且仅当它是某个有限生成自由代数的收缩。也就是说，当且仅当对于自由 MV-代数 Free(n)，存在同态 i: A $\rightarrow$ Free(n) 和 j: Free(n) $\rightarrow$ A，使得 $j \circ i$ 是 A 的恒等同态 $id_{\mathbf{A}}$。显然，i 是嵌入，而 j 是满射。

[7] 中的以下结果刻画了投射 MV-代数，并展示了它们的性质。为此，回顾如下定义：

(a) 若映射 η: $[0,1]^k \rightarrow [0,1]^k$ 满足 $\eta \circ \eta = \eta$，且 η 连续、分段（仿射）线性，并且每一段都具有整数系数，则称其为 $\mathbb{Z}$-收缩。正如 [32, 引理 2.4] 中所观察到的，上述映射η是 $\mathbb{Z}$-收缩，当且仅当存在 McNaughton 函数 $f_1, \ldots, f_k$: $[0,1]^k \rightarrow [0,1]$，使得 $\eta = \langle f_1, \ldots, f_k \rangle$；也就是说，对于每个 $x \in [0,1]^k$，$\eta(x) = \langle f_1(x) \ldots, f_k(x) \rangle$。如果存在一个$\mathbb{Z}$-收缩 η，将 $[0,1]^k$ 映射到 $\mathscr{P}$ 上，我们就称 $\mathscr{P}$ 是 $[0,1]^k$ 的 $\mathbb{Z}$-收缩。

(b) 有理多面体 τ 与 $\mathscr{P}$、$\mathscr{Q}$ 之间的映射 $[0,1]^k$ 是 $\mathbb{Z}$-同胚，如果 τ 是同胚，且存在 McNaughton 函数 f_1、.....、f_k，使得 $\tau = \langle f_1$、.....、$f_k \rangle$。为后续使用，注意到凸多面体 $\mathscr{P}$ 与非凸多面体 $\mathscr{Q}$ 之间可能存在 $\mathbb{Z}$-同胚。也就是说，凸性不会被 $\mathbb{Z}$-同胚保持。

(c) 若集合 $X \subseteq [0,1]^k$ 存在一个元素 $p \in X$（称为 X 的极点），使得对于每个 $y \in X$，线段 $[p, y]$ 都包含在 X 中（见 [27]），则称该集合为星形的。

定理 5.2（[7, 定理 1.2、1.4]）。(1) 有限生成 MV-代数 A 是投射的，当且仅当 A 同构于某个 $\mathbb{Z}$-收缩 $\mathscr{P}$ 的 Free(n)/$\mathscr{P}$。

（2）如果 $\mathscr{P} \subseteq [0,1]^n$ 是一个带有极点 $p \in \{0,1\}^n$ 的星形有理多面体，那么 Free(n)/$\mathscr{P}$ 是投射的。

第 n 该结果通过投射 MV-代数刻画了相干集 .

定理 5.3。设 $\mathscr{C} \subseteq [0,1]^k$ 为凸集。那么以下条件等价 *t:*

(1) $\mathscr{C}$ 是相干集，即 $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 对某个事件集 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ 成立；(2) $\mathscr{C}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的收缩；(3) Free(k)/$\mathscr{C}$ 是投射 MV- 代数。

证明。(1)⇒(3) 由于 $\mathscr{C}$ 是凸的，因此它是星形的，且每个点都是极点。此外，如果 $\mathscr{C}$ 是相干集，则存在事件集 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$，使得 $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{\mathcal{E}}$。根据定理 3.4，$\mathscr{C}$ 包含一个显然是极点的布尔点。因此，根据定理 5.2 (2)，Free(k)/$\mathscr{C}$ 是投射的。

(3)⇒(2) 假设 Free(k)/$\mathscr{C}$ 是投射的。根据定理 5.2 (1)，对于某个有理多面体 $\mathscr{P}$，Free(k)/$\mathscr{C}$ 与 Free(k)/$\mathscr{P}$ 同构，而 $\mathscr{P}$ 是 $[0,1]^k$的一个 $\mathbb{Z}$收缩。由 [40, 推论 3.10], 可知，$\mathscr{C}$与 $\mathscr{P}$ 同胚；并且 [40, 引理 17.6]证明，同胚保持 $\mathbb{Z}$收缩。因此，$\mathscr{C}$ 是 $[0,1]^k$的一个 $\mathbb{Z}$收缩。

(2)⇒(1) 假设 $\mathscr{C}$是 $[0,1]^k$的一个 $\mathbb{Z}$收缩，收缩映射为 $\eta\colon [0,1]^k \to \mathscr{C}$。那么，存在 McNaughton 函数 $f_1, \ldots, f_k\colon [0,1]^k \to [0,1]$，使得对于所有 $x = \langle x_1, \ldots, x_k\rangle \in [0,1]^k$，$\eta(x) = \langle f_1(x) \ldots, f_k(x)\rangle \in \mathscr{C}$ 且 $\eta \circ \eta = \eta$。事实上，

$$\mathscr{C} = \{\langle f_1(x), \ldots, f_k(x)\rangle \mid x \in [0,1]^k\}. \tag{7}$$

设 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$，使得对所有 $i = 1, \ldots, k$, $f_i = f_{\varphi_i}$。那么，根据相干集的定义和 (7)，有

$$\mathscr{C}_{\mathcal{E}} = \overline{\mathrm{co}}\{\langle f_{\varphi_1}(x), \ldots, f_{\varphi_k}(x)\rangle \mid x \in [0,1]^k\} = \overline{\mathrm{co}}(\mathscr{C}) = \mathscr{C},$$

其中，最后一个等式成立，是因为根据假设，$\mathscr{C}$ 是凸的。 □

现在，令 k 为任意正整数，并令 $\mathscr{C}$ 为 $[0,1]^k$ 的一个相干子集，也就是说，令 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ 为一个满足 $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 的事件集。那么，很容易看出，映射 λ: Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}} \to$ Free(k)/$\mathscr{C}$，对每个 $i = 1, \ldots, k$，将 Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 的生成元 $[\varphi_i]_{\mathscr{C}_{\mathcal{E}}}$ 映射到 Free(k)/$\mathscr{C}$ 的生成元 $[x_i]_{\mathscr{C}}$，从而确定了这两个 MV-代数之间的一个同构。因此，我们如下定义相干 MV-代数。

定义 5.4. 如果一个 MV-代数同构于 Free(k)/$\mathscr{C}$，其中 $\mathscr{C}$ 是 $[0,1]^k$ 的一个相干子集，且某个 $k \in \mathbb{N}$ 存在，则称它为相干的。我们用 coMV 表示这个代数类。

注意，根据定理 5.3，所有有限生成自由 MV-代数都是相干的。事实上，Free(k) ≅Free(k)/$[0,1]^k$ 以及 Free(k) 都是投射的。此外，注意到 $[0,1]^k$ 是一个相干集，事实上，$[0,1]^k = \mathscr{C}_{\mathcal{E}}$适用于由命题变量 x_1、.....、 x_k组成的集合 $\mathcal{E}$。

根据定义，类 coMV 在同构下封闭。因此，代数 A $\in$ coMV 可能具有 Free(k)/$\mathscr{C}$ 的形式，其中 $\mathscr{C}$ 不一定是凸的。事实上，[33] 提出的对偶性直接推论是：两个有限呈示 MV-代数同构，当且仅当它们各自的多面体是 $\mathbb{Z}$-同胚的；正如我们在上文 (b) 点所回顾的，凸性在 $\mathbb{Z}$-同胚下并不保持。然而，同构保持相干赋值。

注 5.5。根据定义 5.4，对于每个 A $\in$ coMV，都存在一个（不一定唯一的）事件集 $\mathcal{E}$，使得 A 与自由代数 Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 同构。每个同态 h: A $\to [0,1]_{MV}$ 都确定一个同态 h': Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}} \to [0,1]_{MV}$，它由 h 与同构 λ: Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}} \to$ A 复合而成。因此，根据命题 5.1，簿 $\beta\colon \varphi_i \mapsto h(\lambda([\varphi_i]))$ 是相干的。

还需注意，相干 MV-代数在同态像、子代数和直积这些普适代数算子下并不封闭（事实上，连投射 MV-代数也不封闭），因此它们既不是簇，也不是拟簇。

以下结论直接由定义 5.4、定理 5.3 以及投射代数在同构像下封闭这一事实推出。

推论 5.6。每个相干 MV-代数都是 MV-代数簇中的投射对象，因此也是 coMV 类中的投射对象。特别地，对于每个 A $\in$ coMV，都存在一个自由 MV-代数 Free(k) 以及同态 i: A $\to$ Free(k) 和 j: Free(k) $\to$ A，使得 $j \circ i = id_{\mathbf{A}}$。

直接考察定理 5.3 的证明，可以发现相干 MV-代数和相干集还有一个性质。事实上，考虑一个事件集 $\mathcal{E}=\{\varphi_1,\dots,\varphi_k\}$，其中 φ_i 用例如 n 个命题变量表示。那么，定理 5.3 中 (1) 与 (2) 的等价性告诉我们，$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}=\eta([0,1]^{\mathcal{E}})$，其中 η 是一个 $\mathbb{Z}$-收缩。因此，存在 McNaughton 函数 $f_1,\dots,f_k\colon [0,1]^k\to[0,1]$，使得 $\eta=\langle f_1,\dots,f_k\rangle$。称 $\varphi'_1,\dots,\varphi'_k$ 为满足 $f_i=f_{\varphi'_i}$ 的公式，并令 $\mathcal{E}'=\{\varphi'_1,\dots,\varphi'_k\}$。注意，每个 φ'_i 都用 k 个变量表示，并且 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}=\mathscr{C}_{\mathcal{E}'}$。换言之，

$$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}=\overline{\mathrm{co}}\{\langle f_{\varphi_1}(x),\dots,f_{\varphi_k}(x)\rangle \mid x\in[0,1]^n\}=\{\langle f_{\varphi'_1}(\mathbf{y}),\dots,f_{\varphi'_k}(\mathbf{y})\rangle \mid \mathbf{y}\in[0,1]^k\}.$$

因此，以下结论成立。

推论 5.7. 对于变量 n 中的任意事件集 $\mathcal{E}=\{\varphi_1,\dots,\varphi_k\}$，都存在变量 k 中的事件集 $\mathcal{E}'=\{\varphi'_1,\dots,\varphi'_k\}$，使得 $\{\langle f_{\varphi'_1}(\mathrm{y})\dots,f_{\varphi'_k}(\mathrm{y})\rangle \mid \mathrm{y}\in[0,1]^k\}$ 是凸的，并且与 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 重合。

现在，我们转而关注相干 MV-代数所具有、并将在下一节中用到的另一项性质。为此，回顾一下：如果同一签名下的代数类 K 满足联合嵌入性质，那么对于所有 A,B $\in$ K，都存在一个 C $\in$ K，以及嵌入 $h_{\mathbf{A}}$: A $\to$ C 和 $h_{\mathbf{B}}$: B $\to$C。

Prop命题 5.8. 相干 MV-代数类 coMV 具有联合嵌入性质 $y.$

证明。设 A 和 B 是两个相干 MV-代数，不失一般性，分别将它们视为 Free($\mathcal{E}_1$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}_1}$ 和 Free($\mathcal{E}_2$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}_2}$。记 $\mathcal{E}_3=\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$。那么，$\mathscr{C}_{\mathcal{E}_3}$ 是 $[0,1]^{\mathcal{E}_3}=[0,1]^{\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2}$的一个有理多面体。考虑投影映射 π_1 : $[0,1]^{\mathcal{E}_3}\to[0,1]^{\mathcal{E}_1}$ 和 $\pi_2\colon[0,1]^{\mathcal{E}_3}\to[0,1]^{\mathcal{E}_2}$。根据命题 3.7，有 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}_1}=\pi_1[\mathscr{C}_{\mathcal{E}_3}]$ 和 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}_2}=\pi_2[\mathscr{C}_{\mathcal{E}_3}]$。

注意，对于 $i=1,2$，每个投影 π_i 都是一个 $\mathbb{Z}$-映射。因此，其对应的对偶映射 h_i : Free($\mathcal{E}_i$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}_i}$ →Free($\mathcal{E}_3$) /$\mathscr{C}_{\mathcal{E}_3}$ 根据引理 [33, Lemma 3.3]是一个同态。此外，根据 [33] 的对偶定理，h_i 是单射（直接检查名为 $\mathscr{M}$ 的函子在 [33, §3.2]中如何作用于$\mathbb{Z}$-映射即可）。因此，每个 h_i 都是从 Free($\mathcal{E}_i$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}_i}$ 到 Free($\mathcal{E}_3$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}_3}$的嵌入。此外，这两个映射满足：对于所有 $\alpha\in\mathcal{E}_i$，$h_i([\alpha]_{\mathscr{C}_{\mathcal{E}_i}})=[\alpha]_{\mathscr{C}_{\mathcal{E}_3}}$. □

5.2. coMV 中的有效性与 FP(L, L) 中的可证性。现在，我们将定义适用于 coMV-代数的语义后承概念。其思路是，根据定理 3.5，FP(L, L) 中的定理和推导以相干赋值为基础。反过来，根据命题 5.1 和注 5.5，后者对应于从相干 MV-代数到 $[0,1]_{MV}$ 的同态。

现在回顾一下，给定一个 MV-项 $t(x_1\dots x_k)$ 和一个 MV-代数 A，通常认为 $\models_{\mathbf{A}} t(x_1,\dots,x_k)$ 意味着：变量 $X=\{x_1,\dots,x_k\}$ 到 A 中元素的任意赋值 h： $h(x_1)=a_1\dots h(x_k)=a_k$，都（唯一地）扩张为从项代数 Term($X$) 到 A 的同态 h（详见 [23, §1.1]），使得 $t^{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_k)=\top_{\mathbf{A}}$.。由于 MV-代数构成一个簇，因此也可以等价地说，$\models_{\mathbf{A}} t(x_1\dots x_k)$ 当且仅当对所有同态 h : Free(k) $\to$ A（其中 Free(k) 由 $x_1\dots x_k$ 生成），都有 $h(x_i)=a_i$，对于 $a_1\dots a_n$, $t^{\mathbf{A}}(a_1,\dots a_k)=\top_{\mathbf{A}}$。

然而，对于 FP(L, L)，公式有两层：外层是一个 MV-项，内层则是若干 MV-项（回顾第 2.3 小节）。为处理这一点，我们将定义相干估值的概念，它基于一个相干 MV-代数，该代数充当自由代数的“局部”版本。

记号 5.9. 从现在起，为避免可能的混淆，给定一个事件集 $\mathcal{E}=\{\varphi_1,\dots,\varphi_k\}$，我们将把自由 MV-代数 Free($\mathcal{E}$) 视为由变量 p_{φ_1}、……、p_{φ_k} 生成（而不再使用事件 φ_1、……、φ_k 表示这些变量）。我们还将用 Term($\mathcal{E}$) 表示以变量 p_{φ_1}、……、p_{φ_k} 为基底的卢卡西维奇语言中的项代数。

现在令 $\Phi=t[P(\varphi_1)\dots,P(\varphi_k)]$ 为 FP(L, L) 中的一个公式，并称之为 $\mathcal{E}=\{\varphi_1,\dots,\varphi_k\}$。令 $\Phi^{\bullet}=t(p_{\varphi_1},\dots,p_{\varphi_k})$ 为 Φ 按照第 4 节所述翻译成卢卡西维茨语言后的形式，并令 $\mu_{\mathcal{E}}$ 为自然满同态 $\mu_{\mathcal{E}}$: Term($\mathcal{E}$) →Free($\mathcal{E}$)（这里的满同态取普遍代数意义，即指满射同态）。考虑 $v_{\mathcal{E}}$ 从 $\Phi^{\bullet}$ 到 Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 的估值，它是从项代数 Term($\mathcal{E}$) 到 Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 的同态，并将映射扩展为

$$v_{\mathcal{E}}(p_{\varphi_i})=[\mu_{\mathcal{E}}(p_{\varphi_i})]_{\mathscr{C}_{\mathcal{E}}},\quad \text{for } i=1,\dots,k.$$

因此，上述解释为每个公式 $\Phi \in$ PFm 都给出了一个固定解释，并在相干代数 Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 中对 Φ 求值。我们可以按以下方式将这种求值扩展到与 Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 同构的相干 MV-代数。

定义 5.10. 设 $\mathcal{E}$ 为一个事件集，并设 A $\in$coMV 与 Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 通过映射 f : Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}} \to$ A 同构。复合映射 $f \circ v_{\mathcal{E}}$: Term($\mathcal{E}$) $\to$ A 称为 PFm 中关于事件集 $\mathcal{E}$ 上公式的相干估值。

根据我们在命题 5.1 中的论证，我们引入以下语义可导性概念，它使用 $[0,1]_{MV}$ 中相干 MV-代数的同态。

定义 5.11. 设 Φ 和 Ψ 是 PFm 中关于事件集 $\mathcal{E}$ 的公式。若对每个与 Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 同构的相干 MV-代数 A、每个相干估值 e : Term($\mathcal{E}$) $\to$ A，以及每个同态 h : A $\to [0,1]_{MV}$，都有 $h(e(\Phi^{\bullet})) = 1$，则 $h(e(\Psi^{\bullet})) = 1$，我们记作 $\Phi \models_{\mathcal{E}} \Psi$。

现在我们可以证明，相干 MV-代数可以视为概率逻辑 FP(L, L) 的代数模型。

定理 5.12. 设 $\Phi, \Psi \in$ PFm，且 $\mathcal{E}$ 是其中出现的事件集。那么，以下条件等价:

(1) $\Phi \vdash_{FP} \Psi$;
(2) $\Phi \models_{\mathcal{E}} \Psi$;

证明. 设 $\Phi, \Psi \in$ 是定义在事件 $\mathcal{E}$ 上的 PFm。注意，根据定义可直接推出: $\Phi \models_{\mathcal{E}} \Psi$ 当且仅当对于每个同态 h : Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}} \to [0,1]_{MV}$, $h(v_{\mathcal{E}}(\Phi^{\bullet})) =$1 都蕴含 $h(v_{\mathcal{E}}(\Psi^{\bullet})) = 1$。

现在假设 $\Phi \not\models_{\mathcal{E}} \Psi$。因此，当且仅当存在同态 h : Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}} \to [0,1]_{MV}$，使得 $h(v_{\mathcal{E}}(\Phi^{\bullet})) = 1$ 且 $h(v_{\mathcal{E}}(\Psi^{\bullet})) < 1$，该条件才成立。根据命题 5.1，从 Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 到 $[0,1]_{MV}$ 的同态与 $\mathcal{E}$ 上的相干投注一一对应。特别地，映射 β_h : $\varphi_i \in \mathcal{E} \mapsto h([\varphi_i]) \in [0,1]$ 是 $\mathcal{E}$ 上的相干簿（另见注 5.5）。于是，$h(v_{\mathcal{E}}(\Phi^{\bullet})) = 1$ 且 $h(v_{\mathcal{E}}(\Psi^{\bullet})) < 1$ 成立，当且仅当 $\beta_h \models \Phi$，而 $\beta_h \not\models \Psi$。根据推论 3.5，存在相干簿 β 使得 $\beta \models \Phi$ 但 $\beta \not\models \Psi$，这又等价于 $\Phi \not\vdash_{FP} \Psi$。由此，结论得证。□

根据上述证明，我们注意到，形如 Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 的代数在某种意义上是 $\mathcal{E}$ 中事件上的推导的标准模型。

最后指出，尽管定理 5.12 表明，代数类 coMV 为 FP(L, L) 提供了语义，但它既不是 Lindenbaum-Tarski 意义上的等价代数语义，也不是 Blok-Pigozzi 意义上的等价代数语义。事实上，这种语义很可能需要采用双排序代数，正如近期在 [31] 中所做的那样。

6. Probabilistic unification and its unification type

现在我们将说明，FP(L, L) 的合一问题的概率版本，如何以类似于 Ghilardi [24] 所提出的方法，在代数层面得到等价表述。

为可代数化逻辑 $\mathcal{L}$ 表述符号合一问题的常见方法，是考虑语言 $\mathcal{L}$ 上有限个项对 $\{(s_i, t_i) \mid i \in I\}$；求解该合一问题意味着找到一个代换 σ，称为合一子，它作用于项 s_i, t_i 中出现的变量，使恒等式 $\{\sigma(s_i) = \sigma(t_i) \mid i \in I\}$ 在 $\mathcal{L}$ 的等价代数语义中成立。可以按一般性对合一子排序，方法如下：如果存在另一个代换 τ 使得 $\tau \circ \sigma_1 = \sigma_2$，那么代换 σ_1 比代换 σ_2 更一般。这在一个问题的合一子集合上诱导出一个预序，因此我们可以考虑相应的偏序（其中等价类对应于一般性相同的合一子）。如果合一子的偏序存在最大元，则称该问题的合一类型为单一型；若不存在最大元，但有有限个极大元，则称为有限型；若有无限多个极大元，则称为无限型；其他情况则称为零元型。逻辑 $\mathcal{L}$ 的合一类型，是 $\mathcal{L}$ 中某个合一问题所出现的最差合一类型。

Ghilardi 表明，对于代数语义为 V 的可代数化逻辑，也可以通过代数方法研究合一问题。具体而言，一个合一问题对应于一个有限呈示的

代数 $\mathbf{A} \in \mathbf{V}$，它被视为由有限集 X 生成，并由有限集恒等式 S呈示，因此我们记作 $\mathbf{A} = \mathbf{F}(X, S)$。一个解（或合一子）是一个同态 $u : \mathbf{A} \to \mathbf{P}$，其中 P 是 V 中的投射代数。代数合一子也可以按照一般性排序：若存在同态 $p : \mathbf{P}_1 \to \mathbf{P}_2$ 使得 $p \circ u_1 = u_2$，则称合一子 $u_1 : \mathbf{A} \to \mathbf{P}_1$ 比 $u_2 : \mathbf{A} \to \mathbf{P}_2$ 更一般。这就在代数合一子上定义了一个预序；进而考虑其相应的偏序，便可为某个逻辑的代数语义定义代数合一类型的概念。Ghilardi 表明，对于可代数化逻辑，符号合一类型与代数合一类型一致 [24]。

Marra 和 Spada 将 Ghilardi 的结果应用于 [33] 卢卡西维茨逻辑，并证明卢卡西维茨逻辑的合一类型是零元。更具体地说，他们针对一个特定的 MV代数合一问题，构造了一条序型为 ω 的共终合一子链。他们的证明利用了有限呈示 MV-代数与有理多面体之间的对偶；事实上，他们的论证完全是几何性的。

正如我们在第5.2小节末尾所指出的，对于 FP(L, L)，我们并没有等价的代数语义，因此 Ghilardi定理无法直接应用于这种情况。不过，可以证明 FP(L, L) 的一个类似结果。

具体而言，正如我们所见，FP(L, L) 是一种用于推理 Łukasiewicz 事件的不确定性度量的逻辑，并且实质上（按照定理 4.3 的意义）将原子模态公式视为其变量。因此，我们遵循这一思路定义合一问题的一个概率版本：将概率公式作为参数，对 MV代数项进行合一。

6.1. 符号与代数概率合一问题。我们首先介绍本节的主要定义。具体而言，阐述在概率逻辑 FP(L, L) 中看待合一问题的符号方式和代数方式。

定义 6.1. FP(L, L) 的一个（符号）概率合一问题是一个由 m 恒等式组成的集合

$$\mathcal{I} = \{t_i[P(\varphi_1), \ldots, P(\varphi_k)] = u_i[P(\varphi_1), \ldots, P(\varphi_k)] \mid i = 1, \ldots, m\}. \tag{8}$$

注意，根据命题 2.18，不失一般性，可以假设这些恒等式定义在同一个事件集 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ 上。

给定如上所述的概率合一问题 $\mathcal{I}$， $\mathcal{I}$ 的一个概率合一子是定义 4.2 中的概率代换（其动机见注4.1），并且对所有 $i = 1$、.....、m，均满足：

$$\vdash_{FP} t_i[\sigma(P(\varphi_1)), \ldots, \sigma(P(\varphi_k))] \leftrightarrow u_i[\sigma(P(\varphi_1)), \ldots, \sigma(P(\varphi_k))] \tag{9}$$

与命题情形一样，概率合一子也可以按照一般性排序，具体如下。考虑上述问题的两个概率合一子 σ、τ，即 $\sigma(P(\varphi_i)) = r_i[P(\gamma_1)$ ....., $P(\gamma_t)]$ 和 $\tau(P(\varphi_i)) = r'_i[P(\gamma'_1)$ ....., $P(\gamma'_l)]$，它们对应于 $i = 1$、.....、m。那么，如果存在一个概率代换 δ，将每个 $P(\gamma'_j)$ 映射为关于 $j = 1$、.....、l 的项 $r''_i[P(\gamma_1)$ ....., $P(\gamma_t)]$，并且 $\sigma = \delta \circ \tau$ 在 FP(L, L) 中可证，也就是说，我们称 τ 比 σ 更一般，并记作 $\sigma \sqsubseteq \tau$

$$\vdash_{FP} t[\sigma(P(\varphi_1)), \ldots, \sigma(P(\varphi_k))] \leftrightarrow t[(\delta \circ \tau)(P(\varphi_1)), \ldots, (\delta \circ \tau)(P(\varphi_k))]. \tag{10}$$

注意，在上面的表达式中，合一子 σ 可以从外层项中提取出来，因此也可以等价地写成

$$\vdash_{FP} \sigma(t[\sigma(P(\varphi_1)), \ldots, P(\varphi_k)]) \leftrightarrow (\delta \circ \tau)(t[P(\varphi_1), \ldots, P(\varphi_k)]).$$

引理 6.2. 给定一个概率合一问题 $\mathcal{I}$， $\sqsubseteq$ 是其概率合一子集合上的预序。

证明。$\sqsubseteq$ 具有自反性这一事实，源于恒等映射显然是定义在任意原子模态公式集合上的概率代换。接下来证明 $\sqsubseteq$ 具有传递性。假设σ、τ、ρ是概率代换，且满足 $\sigma \sqsubseteq \tau$和 $\tau \sqsubseteq \rho$。那么，存在 δ、δ'这两个定义在相应原子模态公式集合上的概率代换，使得 $\sigma = \delta \circ \tau$ 和$\tau = \delta' \circ \rho$。因此，考虑 $\delta'' = \delta \circ \delta'$。由于 $\vdash_{FP}$满足相对于 δ 和 δ'的代换不变性，因此它们的复合也满足这一性质。现在，$\tau = \delta' \circ \rho$ 表示，对于定义在相应原子模态公式集合上的任意项 t，都有$\vdash_{FP} \tau(t) \leftrightarrow \delta' \circ \rho(t)$。根据概率代换的定义，我们可得 $\vdash_{FP} \delta \circ \tau(t) \leftrightarrow \delta \circ (\delta' \circ \rho)(t)$，因此$\vdash_{FP} \delta \circ \tau(t) \leftrightarrow (\delta'' \circ \rho)(t)$。由于根据 $\sigma = \delta \circ \tau$可得 $\vdash_{FP} \sigma(t) \leftrightarrow \delta \circ \tau(t)$，于是如所需，$\vdash_{FP} \sigma(t) \leftrightarrow \delta'' \circ \rho(t)$，这意味着 $\sigma = \delta'' \circ \rho$，从而 $\sqsubseteq$ 具有传递性。□

集合 X 上的每个预序 $\leq$ 都会在由等价关系$x \sim y$ （当且仅当 $x \leq y$ 且 $y \leq x$时）定义的商集上诱导出一个偏序集。为方便记号且不致引起混淆，下文将用 X 表示商集 $X/\sim$。

定义 6.3. 对于每个概率合一问题 $\mathcal{I}$，我们用 $U_{\mathcal{I}}$ 表示 $\mathcal{I}$ 的合一子集。用 $\mathscr{S}_{\mathcal{I}} = (U_{\mathcal{I}}, \preceq)$ 表示由预序 $\leq$ 诱导的偏序集，其中包含一般性相同的符号合一子。

显然，前几节中使用的从模态卢卡西维茨公式到命题卢卡西维茨公式的翻译映射 $^\bullet$，可以将事件$\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$上的每个概率合一问题 $\mathcal{I}$ （如 (8) 所示）翻译为以下命题卢卡西维茨合一问题

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}^\bullet & = & \{t_i[P(\varphi_1)^\bullet, \ldots, P(\varphi_k)^\bullet] = u_i[P(\varphi_1)^\bullet, \ldots, P(\varphi_k)^\bullet] \mid i = 1, \ldots, m\} \\ & = & \{t_i[p_{\varphi_1}, \ldots, p_{\varphi_k}] = u_i[p_{\varphi_1}, \ldots, p_{\varphi_k}] \mid i = 1, \ldots, m\}. \end{array} \tag{11}$$

给定 $\mathcal{I}$ 的一个解 σ，其翻译 $\sigma^\bullet$： $p_{\varphi_i} \mapsto (\sigma(P(\varphi_i)))^\bullet$ 满足：对于所有 $i = 1, \ldots, m$,

$$\chi_{\sigma(\mathcal{E})} \vdash_{\mathrm{L}} \sigma^\bullet(t_i[p_{\varphi_1}, \ldots, p_{\varphi_k}]) \leftrightarrow \sigma^\bullet(u_i[p_{\varphi_1}, \ldots, p_{\varphi_k}]), \tag{12}$$

其中，稍微滥用记号， $\sigma(\mathcal{E})$ 在此处及下文均表示出现在 $\sigma(P(\varphi_1)) \ldots, \sigma(P(\varphi_k))$ 中的事件集，因此 $\chi_{\sigma(\mathcal{E})}$ 是定理 4.3 中对应于 $\sigma(\mathcal{E})$ 中事件相干集的卢卡西维茨公式。

现在我们可以注意到，求解概率合一问题并不能简单地归结为卢卡西维茨逻辑中的通常合一，因为公式 $\chi_{\sigma(\mathcal{E})}$ 的存在负责确保代换后出现的新事件上的卢卡西维茨赋值具有相干性。不过，我们可以在这一背景下重新表述代数方法：将问题转化为一个有限呈示 MV-代数，并将解转化为到某个相干 MV-代数的同态；根据推论 5.6，我们知道该相干 MV-代数是投射的。

现在回顾记号 5.9 很有用：给定事件集 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$，我们将自由 MV-代数 Free($\mathcal{E}$) 视为由变量 p_{φ_1}、...、p_{φ_k} 生成。

定义 6.4. 代数概率合一问题是由事件集 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ 和变量 p_{φ_1}、...、p_{φ_k} 上的一个呈示（一组有限恒等式） $\mathcal{P}$ 所确定的 MV-代数。用符号表示为 F($\mathcal{E}, \mathcal{P}$) = Free($\mathcal{E}$)/($\mathscr{C}_{\mathcal{E}} \cap \mathscr{P}_{\mathcal{P}}$)，其中 $\mathscr{P}_{\mathcal{P}}$ 是由 Free($\mathcal{E}$) 上由 $\mathcal{P}$ 生成的同余所关联的多面体。给定一个代数概率合一问题 F($\mathcal{E}, \mathcal{P}$)，F($\mathcal{E}, \mathcal{P}$) 的代数合一子是一个同态 h : F($\mathcal{E}, \mathcal{P}$) $\to$ C，其中 C 是一个相干 MV-代数。

注意，每个 F($\mathcal{E}, \mathcal{P}$) 都是有限呈示 MV-代数，因为 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 和 $\mathscr{P}_{\mathcal{P}}$ 都是有理多面体，因此它们的交集也是如此。

我们为代数概率合一问题所选的定义虽然看起来有些随意，却并不具有限制性：事实上，每个有限呈示 MV-代数都是一个代数概率合一问题。只需将任意一组卢卡西维茨变量 $\mathcal{E}$ 作为 X 即可。在这种情况下，对于每个呈示 $\mathcal{P}$，我们得到代数 F($X, \mathcal{P}$)，它们与命题情形中的代数合一问题相同，因为 $\mathscr{C}_X = [0,1]^n$，其中 $n = |X|$。

注 6.5。注意，对于某个代数概率合一问题 F($\mathcal{E}, \mathcal{P}$)， $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 和 $\mathscr{P}_{\mathcal{P}}$ 的交集可能为空。由于对所有 $\mathcal{E}$ 都有 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}} \neq \emptyset$，这种情况可能是因为 $\mathscr{P}_{\mathcal{P}} = \emptyset$，也就是说，呈示 $\mathcal{P}$ 中出现的各对即使在卢卡西维茨逻辑中也无解；也可能实际上 $\mathscr{P}_{\mathcal{P}}$ 并非空集，但与 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}}$ 不相交。后一种情况直观上意味着，尽管 $\mathcal{P}$ 所呈示的恒等式在卢卡西维茨逻辑中有解，但这些解并非如上文各节所述的相干解。另请注意，如果 $\mathscr{C}_{\mathcal{E}} \cap \mathscr{P}_{\mathcal{P}} = \emptyset$，那么 F($\mathcal{E}, \mathcal{P}$) 仍是有限呈示的，并且等同于单点平凡代数。

代数概率统一子可以像命题情形中那样，按一般性排序 $\preceq$。此外， $\preceq$ 是代数概率合一问题 F($\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$) 的代数合一子集合 $U_{\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P})}$ 上的预序。

定义 6.6。我们用 $\mathscr{A}_{\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P})} = (U_{\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P})}, \preceq)$ 表示代数概率合一问题 F($\mathcal{E}, \mathcal{P}$) 的代数合一子的偏序集，其元素是具有相同一般性的合一子的等价类。

6.2. 概率合一的 Ghilardi 型定理。既然我们已经为 FP(L, L) 定义了符号合一和代数合一的自然概念，现在证明这两种方法是等价的。为此，我们将证明：给定一个符号概率合一问题，可以找到一个具有相同合一类型的代数合一问题，反之亦然。我们先定义两个映射，将概率合一问题及其合一子转换为相应的代数对象，反之亦然。

任取一个符号概率合一问题

$$\mathcal{I} = \{t_i[P(\varphi_1), \ldots, P(\varphi_k)] = u_i[P(\varphi_1), \ldots, P(\varphi_k)] \mid i = 1, \ldots, m\},$$

并令 $\mathcal{E} = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$, $\mathscr{C}_\mathcal{E}$ 为 $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ 的相干集， $\mathscr{P}_{\mathcal{I}^\bullet}$ 为由 (11) 中的方程组确定的多面体。最后，令

$$\mathsf{A}(\mathcal{I}) = \mathbf{F}(\mathcal{E}, \mathcal{I}^\bullet) = \mathrm{Free}(\mathcal{E})/(\mathscr{C}_\mathcal{E} \cap \mathscr{P}_{\mathcal{I}^\bullet}). \tag{13}$$

记号 6.7. 下文中，由于代换定义在项上（而非自由代数的元素上），因此有必要区分项代数 Term(n) 中的项与其在自由代数 Free(n) 中的等价类。于是，给定一组卢卡西维茨变量上的项 t，只要不会引起混淆，我们就用 $\overline{t}$ 表示 t 在相应自由代数中的等价类。此外，为简化记号，在诸如 $[\overline{t}]_{\mathscr{C}_\mathcal{E} \cap \mathscr{P}_{\mathcal{I}^\bullet}}$ 这样的表达式中，我们将下标 $\mathscr{C}_\mathcal{E} \cap \mathscr{P}_{\mathcal{I}^\bullet}$ 简写为 $\mathcal{I}$。因此，我们用 $[\overline{t}]_\mathcal{I}$ 表示 $[\overline{t}]_{\mathscr{C}_\mathcal{E} \cap \mathscr{P}_{\mathcal{I}^\bullet}}$。

给定任意概率合一子 σ for $\mathcal{I}$，考虑定义如下的 A(σ) $= h_\sigma$

$$h_\sigma([\overline{t}]_\mathcal{I}) = [\overline{\sigma^\bullet(t)}]_{\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}} \tag{14}$$

将 A($\mathcal{I}$) 映射到相干 MV-代数 Free($\sigma(\mathcal{E})$)/$\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}$。

引理 6.8. 给定一个概率合一问题 $\mathcal{I}$ 及其合一子 σ，A(σ) $= h_\sigma$ 是 A($\mathcal{I}$) 的代数合一子。

证明。设 $\mathcal{I}$ 如式 (8) 所示，先考虑映射 $\sigma^\bullet$: Free($\mathcal{E}$) $\to$ Free($\sigma(\mathcal{E})$) 以及自然满同态 μ : Free($\mathcal{E}$) $\to$ Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_\mathcal{E}$。于是，我们可以定义同态 $\sigma_\mathcal{E}$: Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_\mathcal{E}$ $\to$Free($\sigma(\mathcal{E})$)，如下所示：

$$\sigma_\mathcal{E}[\overline{t}]_{\mathscr{C}_\mathcal{E}} = \overline{\sigma^\bullet(t)}. \tag{15}$$

该映射定义良好，因为若 $[\overline{t}]_{\mathscr{C}_\mathcal{E}} = [\overline{t'}]_{\mathscr{C}_\mathcal{E}}$，由于 σ 尤其是一个概率代换，$\sigma^\bullet(t) = \sigma^\bullet(t')$。因此，根据第二同态定理（参见 [5,定理 6.15]）， $\sigma_\mathcal{E}$ 是一个同态。根据命题 2.7，

$$\mathsf{A}(\mathcal{I}) = \mathrm{Free}(\mathcal{E})/(\mathscr{C}_\mathcal{E} \cap \mathscr{P}_{\mathcal{I}^\bullet}) \cong (\mathrm{Free}(\mathcal{E})/\mathscr{C}_\mathcal{E})/\hat{\mathcal{I}},$$

其中，$\hat{\mathcal{I}}$是 Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{C}_\mathcal{E}$ 上由配对 $([\overline{t_i}]_{\mathscr{C}_\mathcal{E}}, [\overline{u_i}]_{\mathscr{C}_\mathcal{E}})$ 生成的同余，其中 t_i, u_i 是如式 (11) 所示定义合一问题的项，适用于 $i = 1, \ldots, m$。

接下来，考虑 Free($\mathcal{E}$) 到 Free($\sigma(\mathcal{E})$)/$\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}$ 的满同态 $\mu_2 \circ \sigma_\mathcal{E}$，如下面的交换图所示。

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Free}(\mathcal{E})/\mathscr{C}_\mathcal{E} & \xrightarrow{\sigma_\mathcal{E}} & \mathrm{Free}(\sigma(\mathcal{E})) & \xrightarrow{\mu_2} & \mathrm{Free}(\sigma(\mathcal{E}))/\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})} \\ {\scriptstyle \mu_1}\downarrow & & & \nearrow_{h} & \\ (\mathrm{Free}(\mathcal{E})/\mathscr{C}_\mathcal{E})/\hat{\mathcal{I}} & & & & \end{array}$$

现在我们证明 ker $\mu_1 \subseteq$ ker($\mu_2 \circ \sigma_\mathcal{E}$)，因此（再次根据第二同态定理[5, 定理 6.15]）存在一个同态 h，使交换图闭合。只需证明 $\hat{\mathcal{I}}$ 的生成元属于 ker($\mu_2 \circ \sigma_\mathcal{E}$)。于是取 $([\overline{t_i}]_{\mathscr{C}_\mathcal{E}}, [\overline{u_i}]_{\mathscr{C}_\mathcal{E}})$，其中 t_i, u_i 来自式 (11)，对任意 $i = 1, \ldots, m$ 均成立。由式 (12) 可直接推出 $[\sigma^\bullet(t_i)]_{\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}} = [\sigma^\bullet(u_i)]_{\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}}$。根据式 (15) 中 $\sigma_\mathcal{E}$ 的定义，可得 $\mu_2 \circ \sigma_\mathcal{E}([\overline{t_i}]_{\mathscr{C}_\mathcal{E}}) = \mu_2 \circ \sigma_\mathcal{E}([\overline{u_i}]_{\mathscr{C}_\mathcal{E}})$。因此，$\hat{\mathcal{I}}$ 的生成元属于 ker($\mu_2 \circ \sigma_\mathcal{E}$)，我们便可使交换图闭合。

最后，我们将命题 2.7 给出的同构称为 ι：

$$\iota : \mathsf{A}(\mathcal{I}) = \mathrm{Free}(\mathcal{E})/(\mathscr{C}_\mathcal{E} \cap \mathscr{P}_{\mathcal{I}^\bullet}) \to (\mathrm{Free}(\mathcal{E})/\mathscr{C}_\mathcal{E})/\hat{\mathcal{I}}$$

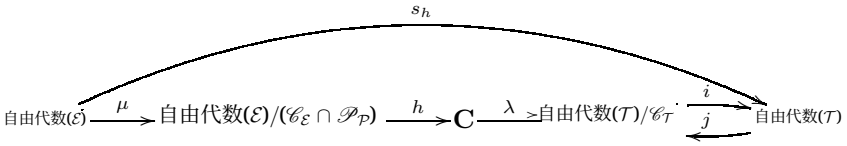
定义为 $\iota([\overline{t}]_{\mathcal{I}}) = [[\overline{t}]_{\mathscr{C}_\mathcal{E}}]_{\hat{\mathcal{I}}}$。由于 h_σ 恰好就是 $h \circ \iota$，这可直接由式 (14) 中 h_σ的定义得出，因此它是到一个相干 MV-代数的同态，进而是 $\mathbf{A}(\mathcal{I})$ 的一个合一子。□

鉴于上述结果，对于每个概率合一问题 $\mathcal{I}$，我们定义 $\mathbf{A}(\mathscr{S}_\mathcal{I})$ 为一个偏序集，其论域为 $\{h_\sigma \mid \sigma \in \mathscr{S}_\mathcal{I}\}$，序关系为定义 6.6 中的一般性序。

现在，考虑一个代数概率合一问题 $\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P}) = \mathbf{Free}(\mathcal{E})/(\mathscr{C}_\mathcal{E} \cap \mathscr{P}_\mathcal{P})$，其中$\mathcal{P} = \{(t_i[p_{\varphi_1},\dots,p_{\varphi_k}], u_i[p_{\varphi_1},\dots,p_{\varphi_k}]) \mid i = 1, \ldots..., m\}$. 我们以显然的方式定义

$$\mathbf{S}(\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P})) = \{t_i[P(\varphi_1),\dots,P(\varphi_k)] = u_i[P(\varphi_1),\dots,P(\varphi_k)] \mid i = 1,\dots,m\}. \tag{16}$$

显然，$\mathbf{S}(\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P}))$ 是一个概率合一问题。现在我们将说明如何将 $\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P})$ 的每个代数合一子解释为 $\mathbf{S}(\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P})$ 的概率合一子。为此，设 h 是从 $\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P})$ 到某个相干 MV-代数 $\mathbf{C}$ 的同态。根据定义，存在一个事件集 $\mathcal{T} = \{\tau_1,\dots,\tau_l\}$，使得 $\mathbf{C}$ 同构于 $\mathbf{Free}(\mathcal{T})/\mathscr{C}_\mathcal{T}$，同构映射为 λ。由于根据推论 5.6，$\mathbf{Free}(\mathcal{T})/\mathscr{C}_\mathcal{T}$ 是投射的，对于自然满同态 $j : \mathbf{Free}(\mathcal{T}) \to \mathbf{Free}(\mathcal{T})/\mathscr{C}_\mathcal{T}$，存在一个嵌入 $i : \mathbf{Free}(\mathcal{T})/\mathscr{C}_\mathcal{T} \to \mathbf{Free}(\mathcal{T})$，使得 $j \circ i = id_{\mathbf{Free}(\mathcal{T})/\mathscr{C}_\mathcal{T}}$。我们将 s_h 称为从 $\mathbf{Free}(\mathcal{E})$ 到 $\mathbf{Free}(\mathcal{T})$ 的同态，它是复合映射 $s_h = i \circ \lambda \circ h \circ \mu$，如下方交换图所示:



因此，对于每个 $p_{\varphi_1},\dots,p_{\varphi_k}$，考虑一个项 r_i，使得 $s_h[p_{\varphi_i}] = [r_i(p_{\tau_1},\dots,p_{\tau_l})],$，然后我们定义 $\mathbf{S}(h) = \sigma_h$ 如下:

$$\sigma_h(P(\varphi_i)) = r_i[P(\tau_1),\dots,P(\tau_l)] \tag{17}$$

引理 6.9. 给定任意代数概率合一问题 $\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P})$，其合一子为 h，$\mathbf{S}(h) = \sigma_h$是 $\mathbf{S}(\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P}))$ 的一个概率合一子。

证明。我们首先证明，按 (17) 定义的 σ_h 是一个概率代换，也就是说，如果

$$\vdash_{FP} t[P(\varphi_1),\dots,P(\varphi_k)] \leftrightarrow u[P(\varphi_1),\dots,P(\varphi_k)]$$

then

$$\vdash_{FP} t[\sigma_h(P(\varphi_1)),\dots,\sigma_h(P(\varphi_k))] \leftrightarrow u[\sigma_h(P(\varphi_1)),\dots,\sigma_h(P(\varphi_k))].$$

假设 $\vdash_{FP} \underline{t[P(\varphi_1)\dots,P(\varphi_k)]} \leftrightarrow \underline{u[P(\varphi_1)\dots,P(\varphi_k)]}$。根据定理 4.3，当且仅当 $[\,t(p_{\varphi_1},\dots,p_{\varphi_k})\,]_{\mathscr{C}_\mathcal{E}} = [\,u(p_{\varphi_1},\dots,p_{\varphi_k})\,]_{\mathscr{C}_\mathcal{E}}$ 时，这种情况才会发生，因此

$$[\overline{t(p_{\varphi_1},\dots,p_{\varphi_k})}]_{\mathscr{C}_\mathcal{E}\cap\mathscr{P}_\mathcal{P}} = [\overline{u(p_{\varphi_1},\dots,p_{\varphi_k})}]_{\mathscr{C}_\mathcal{E}\cap\mathscr{P}_\mathcal{P}}$$

这意味着

$$s_h(\overline{t(p_{\varphi_1},\dots,p_{\varphi_k})}) = s_h(\overline{u(p_{\varphi_1},\dots,p_{\varphi_k})}).$$

Being s_h 是一个同态，$t(s_h(\overline{p_{\varphi_1}})\dots,s_h(\overline{p_{\varphi_k}})) = u(s_h(\overline{p_{\varphi_1}})\dots,s_h(\overline{p_{\varphi_k}}))$，因此 als o

$$[t(s_h(\overline{p_{\varphi_1}}),\dots,s_h(\overline{p_{\varphi_k}}))]_{\mathscr{C}_\tau} = [u(s_h(\overline{p_{\varphi_1}}),\dots,s_h(\overline{p_{\varphi_k}}))]_{\mathscr{C}_\tau}$$

根据定理 4.3，这等价于我们需要证明的内容，即

$$\vdash_{FP} t[\sigma_h(P(\varphi_1)),\dots,\sigma_h(P(\varphi_k))] \leftrightarrow u[\sigma_h(P(\varphi_1)),\dots,\sigma_h(P(\varphi_k))].$$

注意，由于命题 2.12，(17) 中项 r 的选取并不重要。

我们已证明 σ_h 是概率代换，现在证明它是 $\mathbf{S}(\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P}))$ $=\{t_i[P(\varphi_1)\dots,P(\varphi_k)] = u_i[P(\varphi_1)\dots,P(\varphi_k)] \mid i = 1,\dots,m\}$ 的合一子。我们需要证明，对于 $i = 1\dots m$,

$$\vdash_{FP} t_i[\sigma_h(P(\varphi_1)),\dots,\sigma_h(P(\varphi_k))] \leftrightarrow u_i[\sigma_h(P(\varphi_1)),\dots,\sigma_h(P(\varphi_k))].$$

当且仅当这种情况发生
时

$$[t_i(s_h(\overline{p_{\varphi_1}}),\dots,s_h(\overline{p_{\varphi_k}}))]_{\mathscr{C}_\tau} = [u_i(s_h(\overline{p_{\varphi_1}}),\dots,s_h(\overline{p_{\varphi_k}}))]_{\mathscr{C}_\tau}.$$

换言之，当且仅当 $j \circ s_h(\overline{t_i(p_{\varphi_1},\dots,\varphi_k)}) = j \circ s_h(\overline{u_i(p_{\varphi_1},\ldots,\varphi_k)})$。这是因为 ce

$$j \circ s_h = j \circ i \circ \lambda \circ h \circ \mu = \lambda \circ h \circ \mu$$

并且 $\mu(\overline{t_i(p_{\varphi_1},\ldots,\varphi_k)}) = \mu(\overline{u_i(p_{\varphi_1},\ldots,\varphi_k)})$，因为 $t_i(p_{\varphi_1},\ldots,\varphi_k) = u_i(p_{\varphi_1},\ldots,\varphi_k) \in \mathcal{P}$，因此证明已完成。□

现在我们将证明，给定一个概率合一问题

$$\mathcal{I} = \{t_i[P(\varphi_1),\ldots,P(\varphi_k)] = u_i[P(\varphi_1),\ldots,P(\varphi_k)] \mid i = 1,\ldots,m\},$$

其概率合一子的偏序集 $\mathscr{S}_{\mathcal{I}}$ 与代数合一问题 $\mathbf{A}(\mathcal{I}) = \mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{I}^{\bullet}) =$ 自由代数$(\mathcal{E})/(\mathscr{C}_{\mathcal{E}} \cap \mathscr{P}_{\mathcal{I}^{\bullet}})$ 的代数合一子的偏序集同构。为此，我们将证明映射 A 在 $\mathbf{A}(\mathcal{I})$ 的代数合一子上是满射的，并且保持偏序。我们首先需要以下技术引理。

引理 6.10。给定一个概率合一问题 $\mathcal{I}$，$\mathbf{S}(\mathbf{A}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$，以及任意概率合一子 σ, $\sigma \sim \sigma_{h_\sigma} = \mathbf{S}(\mathbf{A}(\sigma))$，在统一子的预序中，并因而在偏序集 $U_{\mathcal{I}}$ 中二者重合。类似地，给定任意代数合一问题 $\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P})$，$\mathbf{A}(\mathbf{S}(\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P}))) = \mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P})$，以及任意代数合一子 k, $k \sim h_{\sigma_k} = \mathbf{A}(\mathbf{S}(k))$，在统一子的预序中，并因而在偏序集$U_{\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P})}$中二者重合。

证明。设 $\mathcal{I}$如（8）所示，$\mathcal{I} = \{t_i[P(\varphi_1)\ldots,P(\varphi_k)] = u_i[P(\varphi_1)\ldots,P(\varphi_k)] \mid i = 1,\ldots,m\}$. 事实 $\mathbf{S}(\mathbf{A}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$ 和 $\mathbf{A}(\mathbf{S}(\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P}))) = \mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P})$ 直接由 A 和 S 的定义得出。

设 σ 是 $\mathcal{I}$ 的一个概率合一子。由 $\mathbf{S}(\mathbf{A}(\mathcal{I})) = \mathcal{I}$ 这一事实以及引理 6.8 和 6.9 可知，σ_{h_σ} 也是 $\mathcal{I}$ 的一个概率合一子。我们证明 $\sigma \sqsubseteq \sigma_{h_\sigma}$ 和 $\sigma_{h_\sigma} \sqsubseteq \sigma$。这意味着我们需要找到 δ, δ' 概率代换，使得 FP(L, L) 证明 $\sigma = \delta \circ \sigma_{h_\sigma}$ 和 $\sigma_{h_\sigma} = \delta' \circ \sigma$，其含义如（10）所示。只需令 δ 和 δ' 分别为相应概率公式集合上的恒等映射，因为

$$\vdash_{FP} t[\sigma(P(\varphi_1)),\ldots,\sigma(P(\varphi_k))] \leftrightarrow t[(\sigma_{h_\sigma})(P(\varphi_1)),\ldots,(\sigma_{h_\sigma})(P(\varphi_k))].$$

事实上，根据定理 4.3 和 σ_{h_σ} 的定义（特别参见（17））， 这等价于说，对于所有 $\overline{t} \in \mathbf{Free}(\mathcal{E})$， $[\sigma^{\bullet}(t)]_{\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}} = [s_{h_\sigma}(\overline{t})]_{\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}}$。

为了验证这一点，我们来展开 s_{h_σ} 的定义。首先，回想一下， $h_\sigma([\overline{t}]_{\mathcal{I}}) = [\sigma^{\bullet}(t)]_{\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}}$。然后，参照得到（17）的记号，由于 h_σ 的陪域是一个相干代数 $\mathbf{Free}(\sigma(\mathcal{E}))/\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}$，我们可以令 λ 为恒等映射。此外，我们有 $i : \mathbf{Free}(\sigma(\mathcal{E}))/\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})} \to \mathbf{Free}(\sigma(\mathcal{E}))$ $j : \mathbf{Free}(\sigma(\mathcal{E}))/\mathscr{C} \to \mathbf{Free}(\sigma(\mathcal{E}))/\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}$，使得 $j \circ i = id$。因此，$s_{h_\sigma} = i \circ h_\sigma \circ \mu$。于是:

$$s_{h_\sigma}(\overline{t}) = i \circ h_\sigma \circ \mu(\overline{t}) = i \circ h_\sigma([\overline{t}]_{\mathcal{I}}) = i([\overline{\sigma^{\bullet}(t)}]_{\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}}) = i \circ j(\overline{\sigma^{\bullet}(t)}).$$

因此我们可以得出结论:

$$[s_{h_\sigma}(\overline{t})]_{\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}} = j \circ i \circ j(\overline{\sigma^{\bullet}(t)}) = [\overline{\sigma^{\bullet}(t)}]_{\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}}.$$

现在证明：给定 A 的一个代数概率统一子 h $\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P})$， $h : \mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P}) \to \mathbf{C}$， $h \sim h_{\sigma_h} = \mathbf{A}(\mathbf{S}(k))$ 在统一子偏序集 $U_{\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P})}$ 中。也就是说，存在同态 k, k'，使得$h = k \circ h_{\sigma_h}$且 $h_{\sigma_h} = k' \circ h$。令 $\mathcal{I} = \mathbf{S}(\mathbf{A})$。注意，根据定义，若 $C \cong \mathbf{Free}(\mathcal{T})/\mathscr{C}_{\mathcal{T}}$ 通过映射 λ，则 $h_{\sigma_h} : \mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P}) \to \mathbf{Free}(\mathcal{T})/\mathscr{C}_{\mathcal{T}}$，特别地， $h_{\sigma_h}([\overline{t}]_{\mathcal{I}}) = [s_h(\overline{t})]_{\mathscr{C}_{\mathcal{T}}}$。如图（17）之前的交换图所示，我们再次记 $s_h = i \circ \lambda \circ h \circ \mu$，并令 j，使得 $j \circ i = id$。

我们首先证明 $h_{\sigma_h} = \lambda \circ h$。确实，对于任意 $[\overline{t}]_{\mathcal{I}} \in \mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{P})$:

$$\lambda \circ h([\overline{t}]_{\mathcal{I}}) = j \circ i \circ \lambda \circ h([\overline{t}]_{\mathcal{I}}) = j \circ s_h(\overline{t}) = h_{\sigma_h}([\overline{t}]_{\mathcal{I}}).$$

因此，由于 λ 是同构，从 $h_{\sigma_h} = \lambda \circ h$ 也可推出 $h = \lambda^{-1} \circ h_{\sigma_h}$， 于是证明完成。

□

概率合 一问题 $\mathcal{I}$，现在我们将 A 视为从 $(U_{\mathcal{I}}, \leq)$ 到 $(U_{F(\mathcal{E},\mathcal{I}^{\bullet})}\ \preceq)$ 的映射 .

引理 6.11. 给定一个概率合一问题 $\mathcal{I}$，A 在 $(U_{F(\mathcal{E},\mathcal{I}^{\bullet})}\ \preceq)$ 上是满射，并且保持序：给定 σ 和 ρ，它们是 $\mathcal{I}$, $\sigma \sqsubseteq \rho$ 的概率合一子，当且仅当 $h_\sigma \preceq h_\rho$。

证明。根据引理 6.10，A 在 $(U_{F(\mathcal{E},\mathcal{I}^{\bullet})}\ \preceq)$ 上是满射；事实上，给定 $\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{I}^{\bullet})$ 的一个代数合一子 h unifier, 考虑 $\mathbf{S}(\mathbf{F}(\mathcal{E},\mathcal{I}^{\bullet}))$ 的一个合一子 σ_h unifier，可得 $\mathbf{A}(\sigma_h) = h_{\sigma_h}$ 与偏序集 $(U_{F(\mathcal{E},\mathcal{I}^{\bullet})}\ \preceq)$ 中的 h 相同。

现在假设 $\sigma \sqsubseteq \rho$，其中 $Var(\{\sigma(P(\varphi_1)) \ldots, \sigma(P(\varphi_k))\}) = \{\tau_1, \ldots \tau_l\} = \mathcal{T}$ 且 $Var(\{\rho(P(\varphi_1)) \ldots, \rho(P(\varphi_k))\}) = \{\gamma_1, \ldots \gamma_m\} = \mathcal{G}$。那么存在一个概率代换 δ，满足 $Var(\{\delta(P(\gamma_1)) \ldots, \delta(P(\gamma_m))\}) = \mathcal{T}$，且 $\sigma = \delta \circ \rho$ 满足式 (10) 的意义。考虑相干 MV-代数 Free($\rho(\mathcal{E})$)/$\mathscr{C}_{\rho(\mathcal{E})}$。我们可以将其视为代数合一问题 F($\rho(\mathcal{E})$ $\mathcal{P}_\top$)，其中 $\mathcal{P}_\top = \{p_{\gamma_i} = p_{\gamma_i} \mid i = 1, \ldots, m\}$。事实上，由于 $\mathscr{P}_{\mathcal{P}_\top} = [0,1]^m$，可得

$$\mathbf{F}(\rho(\mathcal{E}), \mathcal{P}_\top) = \mathrm{Free}(\rho(\mathcal{E}))/(\mathscr{C}_{\rho(\mathcal{E})} \cap \mathscr{P}_{\mathcal{P}_\top}) = \mathrm{Free}(\rho(\mathcal{E}))/\mathscr{C}_{\rho(\mathcal{E})}.$$

因此，考虑 S(F($\rho(\mathcal{E})$ $\mathcal{P}_\top$))，也就是说，$\{P(\gamma_i) = P(\gamma_i) : i = 1 \ldots m\}$。因此，$\delta$ 是 S(F($\rho(\mathcal{E})$ $\mathcal{P}_\top$)) 的概率合一子，因为它是一个概率代换，并且显然满足 (9)。接着，我们可以定义 A(δ) $= h_\delta$: Free($\rho(\mathcal{E})$)/$\mathscr{C}_{\rho(\mathcal{E})} \to$ Free($\sigma(\mathcal{E})$) /$\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}$，并证明 $h_\sigma = h_\delta \circ h_\rho$，这将意味着 $h_\sigma \preceq h_\rho$。这是因为对于所有项 $[\overline{t}]_{\mathcal{I}^\bullet} \in$ A($\mathcal{I}$):

$$h_\delta \circ h_\rho([\overline{t}]_{\mathcal{I}^\bullet}) = h_\delta[\overline{\rho^\bullet(t)}]_{\mathscr{C}_\mathcal{G}} = [\overline{\delta^\bullet \circ \rho^\bullet(t)}]_{\mathscr{C}_\mathcal{T}} = [\overline{\sigma^\bullet(t)}]_{\mathscr{C}_\mathcal{T}} = h_\sigma([\overline{t}]_{\mathcal{I}^\bullet})$$

根据 (10) 的意义下的事实 $\sigma = \delta \circ \rho$，以及定理 4.3。

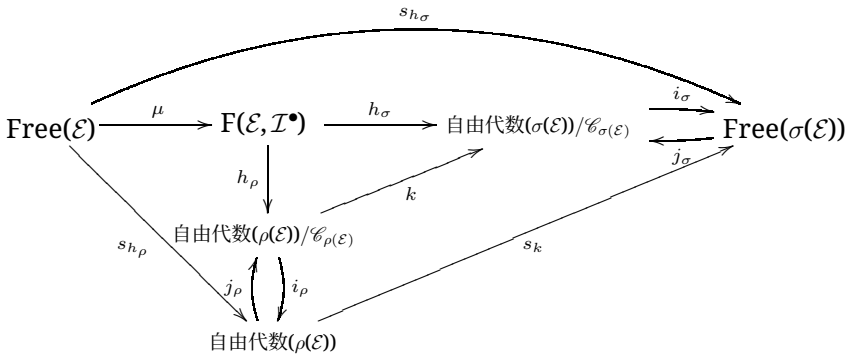
现在只需证明，若 $h_\sigma \preceq h_\rho$，则 $\sigma \sqsubseteq \rho$。于是设 $h_\sigma \preceq h_\rho$，即存在同态 k：Free($\rho(\mathcal{E})$) /$\mathscr{C}_{\rho(\mathcal{E})} \to$ Free($\sigma(\mathcal{E})$)/$\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}$，使得 $h_\sigma = k \circ h_\rho$。根据上文的同一说明，相干 MV-代数 Free($\rho(\mathcal{E})$) /$\mathscr{C}_{\rho(\mathcal{E})}$ 就是代数合一问题 F($\rho(\mathcal{E})$ $\mathcal{P}_\top$)，因此我们可以考虑 S(F($\rho(\mathcal{E})$ $\mathcal{P}_\top$)) 的概率合一子 σ_k。我们证明 $\sigma_k \circ \sigma_{h_\rho} = \sigma_{h_\sigma}$，这意味着 $\sigma_{h_\sigma} \sqsubseteq \sigma_{h_\rho}$，而根据引理 6.10，这意味着 $\sigma \sqsubseteq \rho$。要证明 $\sigma_k \circ \sigma_{h_\rho} = \sigma_{h_\sigma}$，只需证明

$$\vdash_{FP} t[\sigma_{h_\sigma}(P(\varphi_1)), \ldots, \sigma_{h_\sigma}(P(\varphi_k))] \leftrightarrow t[(\sigma_k \circ \sigma_{h_\rho})(P(\varphi_1)), \ldots, (\sigma_k \circ \sigma_{h_\rho})(P(\varphi_k))].$$

这等价于说 $[\sigma^\bullet_{h_\sigma}(t)]_{\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}} = [\sigma^\bullet_k \circ \overline{\sigma^\bullet_{h_\rho}(t)}]_{\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}}$，也就是说，

$$[s_{h_\sigma}(\overline{t})]_{\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}} = [s_k \circ s_{h_\rho}(\overline{t})]_{\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}}.$$

为了证明后一个恒等式，如下方交换图所示，我们将 j_σ 和 j_ρ 分别称为从 Free($\sigma(\mathcal{E})$) 到 Free($\sigma(\mathcal{E})$) /$\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}$ 以及从 Free($\rho(\mathcal{E})$) 到 Free($\sigma(\mathcal{E})$)/$\mathscr{C}_{\rho(\mathcal{E})}$的自然满同态。此外，令 i_σ 和 i_ρ 为映射（由代数的投射性给出），使得 $j_\sigma \circ i_\sigma = id_{\mathrm{Free}(\sigma(\mathcal{E}))/\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}}$ 和 $j_\rho \circ i_\rho = id_{\mathrm{Free}(\rho(\mathcal{E}))/\mathscr{C}_{\rho(\mathcal{E})}}$.



于是，我们得到

$$[s_{h_\sigma}(\overline{t})]_{\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}} = j_\sigma \circ i_\sigma \circ h_\sigma \circ \mu(\overline{t}) = h_\sigma \circ \mu(\overline{t})$$

and

$$[s_k \circ s_{h_\rho}(\overline{t})]_{\mathscr{C}_{\sigma(\mathcal{E})}} = j_\sigma \circ s_k \circ i_\rho \circ h_\rho \circ \mu(\overline{t}) = j_\sigma \circ i_\sigma \circ k \circ j_\rho \circ i_\rho \circ h_\rho \circ \mu(\overline{t}) = k \circ h_\rho \circ \mu(\overline{t}).$$

因此，由假设 $k \circ h_\rho = h_\sigma$，我们已经证明 $\sigma_k \circ \sigma_{h_\rho} = \sigma_{h_\sigma}$，也就是 $\sigma_{h_\sigma} \sqsubseteq \sigma_{h_\rho}$。所以，$\sigma \sqsubseteq \rho$ 证明至此完毕。□

由此可得以下结果。

定理 6.12. 给定一个关于 FP(L, L) 的（符号）概率合一问题 $\mathcal{I}$，存在一个代数概率合一问题 F($\mathcal{E}, \mathcal{P}$)，当且仅当 $\mathcal{I}$ 存在解或合一子。此外，相应的合一子的偏序集是同构的。

证明。根据引 根据命题 6.11，只需将 A($\mathcal{I}$) 视为代数概率合一问题 .
□

我们回顾一下，对于一种逻辑或一个代数簇，其合一类型指的是符号合一问题或代数合一问题中出现的最差合一类型。因此，我们还可以得到关于 FP(L, L) 的概率合一的以下结果。

定理 6.13。FP(L, L) 的符号合一类型与代数合一类型相同。

证明。给定一个符号合一问题，我们可以找到一个具有相同合一类型的代数合一问题，反之亦然。事实上，如定理 6.12 所述，给定 FP(L, L) 的一个概率合一问题 $\mathcal{I}$，存在一个具有相同合一类型的代数合一问题。更确切地说，根据引理 6.11，该问题为 A($\mathcal{I}$)。

反过来，考虑一个代数概率合一问题 F($\mathcal{E},\mathcal{P}$)。那么 S(F($\mathcal{E},\mathcal{P}$)) 具有相同的合一类型，因为根据引理 6.11，S(F($\mathcal{E},\mathcal{P}$)) 和 A(S(F($\mathcal{E},\mathcal{P}$))) 具有相同的合一类型；此外，根据引理 6.10，A(S(F($\mathcal{E},\mathcal{P}$))) $=$ F($\mathcal{E},\mathcal{P}$)。□

6.3. FP(L, L) 的概率合一类型是零元类型。在 [33] 中，作者采用 Ghilardi 的合一代数方法以及有限呈示 MV-代数的几何描述，给出了一个例子，表明卢卡西维茨逻辑的合一问题属于零元类型。由于 FP(L, L) 建立在卢卡西维茨逻辑之上，一方面，人们或许会认为概率合一问题至少与卢卡西维茨逻辑中的合一问题一样复杂；另一方面，我们对 Ghilardi 定理的版本（即定理 6.12 和 6.13）表明，并非所有（命题）合一子都是概率合一子。事实上，相于 MV-代数构成投射 MV-代数的真子类。因此，[33] 中描述的最坏情况并不直接适用于这里。

尽管如此，我们将证明，这个病态例子可以调整以适用于我们的情况，并且逻辑 FP(L, L) 的概率合一类型是零元类型。

因此，我们先从由命题变量 $\mathcal{E} = \{x_1, x_2\}$ 给出的两个事件构成的集合开始，并考虑仅包含以下恒等式的概率合一问题:

$$\mathcal{I} = \{P(x_1) \vee \neg P(x_1) \vee P(x_2) \vee \neg P(x_2) = \top\}$$

请注意，根据引理 2.18，这可以等价地改写为一个恒等式涉及同一组变量的问题，例如 $\mathcal{I} = \{P(x_1) \vee \neg P(x_1) \vee P(x_2) \vee \neg P(x_2) = (P(x_1) \to P(x_1)) \wedge (P(x_2) \to P(x_2))\}$。此外，请注意，A($\mathcal{I}$) $=$F($\mathcal{E}$, $\mathcal{I}^\bullet$)，其中 $\mathcal{I}^\bullet = \{P(x_1)^\bullet \vee \neg P(x_1)^\bullet \vee P(x_2)^\bullet \vee \neg P(x_2)^\bullet = \top^\bullet\} = \{p_{x_1} \vee \neg p_{x_1} \vee p_{x_2} \vee \neg p_{x_2} = \top\}$。这立即给出了一个关于命题变量 $\{p_{x_1}, p_{x_2}\}$ 的 [33] 病态例子。事实上，在此情形下，相干集为 $\mathscr{C}_\mathcal{E} = [0,1]^2$，而 $\mathscr{P}_{\mathcal{I}^\bullet}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的单位正方形的边界 $\mathscr{B}$，于是

$$\mathsf{A}(\mathcal{I}) = \mathrm{Free}(\mathcal{E})/([0,1]^2 \cap \mathscr{P}_{\mathcal{I}^\bullet}) = \mathrm{Free}(\mathcal{E})/\mathscr{P}_{\mathcal{I}^\bullet}.$$

然而， [33] 的同一证明并不能直接应用于我们的情形。为了说明 $\mathcal{I}$对 FP(L, L) 具有零元合一类型，我们需要将他们的构造调整到我们的情形。我们先简要回顾一下 [33]中构造的关键步骤。作者定义了一族多面体$\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2, \ldots$，它们位于 $\mathbb{R}^3$ 中，并以 $\mathbb{Z}^+$为索引；这是一列递增的平方螺旋，每个螺旋都投射到正方形 $\mathscr{B}$ 的边界上（见 [33, 图 1]）。接着，他们证明，对于某个 $n_i \in \mathbb{N}$，每个 $\mathscr{T}_i$ 都与一个有理多面体 $\mathscr{P}_i \subseteq [0,1]^{n_i}$ $\mathbb{Z}$-同胚。从代数视角来看，每个 $\mathscr{P}_i$对应于一个投射 MV-代数 Free(n_i)/$\mathscr{P}_i$，它是属于给出病态例子的 ω-链的某个代数合一子的陪域。

下面用代数术语重新表述 [33] 中的引理 6.1 和 6.2 的关键内容。

引理 6.14. 对于所有 $i \in \mathbb{Z}^+$，都存在同态 h_i : 自由代数($\mathcal{E}$)/$\mathscr{P}_{\mathcal{I}^\bullet} \to$ 自由代数(n_i)/$\mathscr{P}_i$，以及p_{i+1} : 自由代数(n_{i+1})/$\mathscr{P}_{i+1} \to$自由代数(n_i)/$\mathscr{P}_i$，使得:

(1) $p_{i+1} \circ h_{i+1} = h_i$; (2) 对所有 $i > j$，不存在同态 k : Free(n_j)/$\mathscr{P}_j \to$ Free(n_i)/$\mathscr{P}_i$ 使得 $k \circ h_j = h_i$; (3) 设 P 是一个投射 MV-代数，且 g : Free($\mathcal{E}$)/$\mathscr{P}_{\mathcal{I}^\bullet} \to$P 是一个同态。那么，存在一个指标 i_0 和一个同态 g': Free(n_{i_0})/$\mathscr{P}_{i_0} \to$P，使得 $g = g' \circ h_{i_0}$。

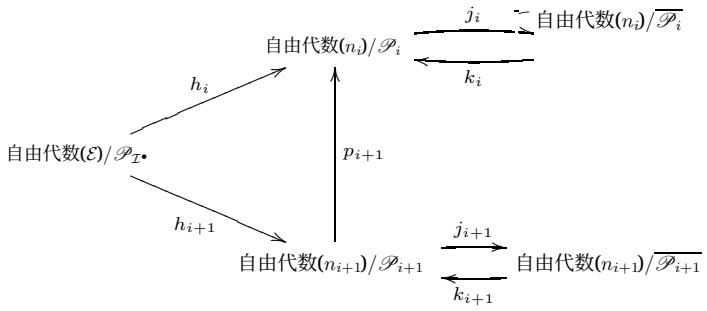


FIGURE 3. 基本构造

为了证明概率合一问题 $\mathcal{I}$ 具有零元类型，我们按如下方式进行。对于每个 $i = 1$、2、.....，记由 $\mathscr{P}_i$ 生成的有理多面体（其凸包）为 $\overline{\mathscr{P}_i}$。每个 $\overline{\mathscr{P}_i}$ 都是凸的，并且包含 $[0,1]^{n_i}$ 的一个布尔点，因为实际上，按照构造，每个 $\mathscr{P}_i$ 已经包含同一超立方体的一个布尔点。因此，根据定理 5.3 和定义 5.4，每个 Free(n_i)/$\overline{\mathscr{P}_i}$ 都是一个相干 MV- 代数。

接下来的引理采用刚刚引入的记号，为我们理解投射 MV-代数 Free(n_i)/$\mathscr{P}_i$ 与 Free(n_i)/$\overline{\mathscr{P}_i}$ 之间的关系提供了一些有用的提示。

引理 6.15. 对所有 $i = 1$、2、. . .、 $\mathscr{P}_i$，$\overline{\mathscr{P}_i}$ 都是 $\mathbb{Z}$ 的收缩，并且存在同态j_i : Free(n_i)/$\mathscr{P}_i$ →Free(n_i)/$\overline{\mathscr{P}_i}$ 和 k_i : Free(n_i)/$\overline{\mathscr{P}_i}$ → Free(n_i)/$\mathscr{P}_i$，使得 j_i 是单射， k_i 是满射，而 $k_i \circ j_i$ 是 Free(n_i)/$\mathscr{P}_i$ 上的恒等映射。

证明. 由于 $\mathscr{P}_i \subseteq \overline{\mathscr{P}_i}$，根据 [33]，中的对偶，我们得到存在一个满同态 k_i : Free(n_i)/$\overline{\mathscr{P}_i}$ → Free(n_i)/$\mathscr{P}_i$，另见定理 3.5]。由于 Free(n_i)/$\mathscr{P}_i$ 是投射的（如 [33] 中所示），根据投射代数的定义，存在一个同态 j_i : Free(n_i)/$\mathscr{P}_i$ → Free(n_i)/$\overline{\mathscr{P}_i}$，使得 $k_i \circ j_i$ 是 Free(n_i)/$\mathscr{P}_i$ 上的恒等映射，因此 j_i 必然是单射。□

在下一个关键引理中，基本记号取自图 3。

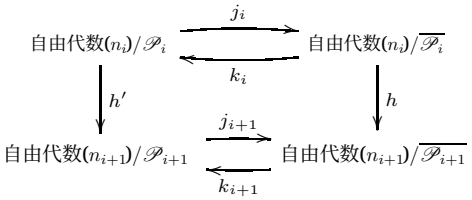
引理 6.16. 对所有 $i = 1$, 2,...，以下条件成立。

(1) $j_i \circ h_i = j_i \circ p_{i+1} \circ k_{i+1} \circ j_{i+1} \circ h_{i+1}$; (2) 不存在同态 h : 自由代数(n_i)/$\overline{\mathscr{P}_i}$ → 自由代数(n_{i+1})/$\overline{\mathscr{P}_{i+1}}$，使得 $h \circ j_i \circ h_i = j_{i+1} \circ h_{i+1}$。

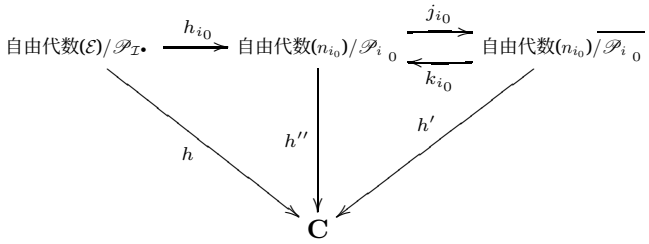
(3) 设 C 是一个相干 MV-代数，且 h : 自由代数($\mathcal{E}$)/$\mathscr{P}_{\mathcal{I}^\bullet}$ →C 是一个同态。那么存在一个 i_0 和一个同态 h' : 自由代数(n_{i_0})/$\overline{\mathscr{P}_{i_0}}$ → C，使得 $h = h' \circ j_{i_0} \circ h_{i_0}$。

证明. (1) 直接检查可知，两个复合映射都将自由代数($\mathcal{E}$)/$\mathscr{P}_{\mathcal{I}^\bullet}$ 映射到自由代数(n_i)/$\overline{\mathscr{P}_i}$。此外，由引理 6.15， $k_{i+1} \circ j_{i+1}$ 是自由代数(n_{i+1})/$\mathscr{P}_{i+1}$上的恒等映射。因此，根据引理 6.14 (1)，(1) 右侧的复合等于 $j_i \circ p_{i+1} \circ h_{i+1}$，且 $p_{i+1} \circ h_{i+1} = h_i$。由此，结论得证。

(2) 反设这样的 h 存在，并定义 h' : Free(n_i)/$\mathscr{P}_i$ → Free(n_{i+1})/$\mathscr{P}_{i+1}$为 $k_{i+1} \circ h \circ j_i$。于是有 $h' \circ h_i = k_{i+1} \circ h \circ j_i \circ h_i = k_{i+1} \circ j_{i+1} \circ h_{i+1}$。再次根据引理 6.15， $k_{i+1} \circ j_{i+1}$ 是 Free(n_{i+1})/$\mathscr{P}_{i+1}$ 上的恒等映射，因此有 $h' \circ h_i = h_{i+1}$，这与引理 6.14 (2) 矛盾。



(3) 由于相干 MV-代数是投射的，根据引理 6.14 (3)，存在一个 i_0 和一个同态 $h'' : \mathrm{Free}(n_{i_0})/\mathscr{P}_{i_0} \to \mathbf{C}$，使得 $h = h'' \circ h_{i_0}$。接着，令 $h' = h'' \circ k_{i_0}$。因此，$h' \circ j_{i_0} \circ h_{i_0} = h'' \circ k_{i_0} \circ j_{i_0} \circ h_{i_0}$。再次根据引理 6.15，$k_{i_0} \circ j_{i_0} = id$，从而 $h' \circ j_{i_0} \circ h_{i_0} = h'' \circ h_{i_0} = h$。



□

定理 6.17。FP(L, L) 的合一类型为零元。

证明。考虑本小节开头所述的概率合一问题 $\mathcal{I}$。与之对应的代数合一问题是有限呈示代数 自由代数($\mathcal{E}$)/$\mathscr{P}_{\mathcal{I}}$•，其合一子集包含所有同态 $j_i \circ h_i$（对所有 $i = 1, 2, \ldots\ldots$）。根据引理 6.16，集合 $\{j_i \circ h_i\}_{i \geq 1}$ 构成了 A($\mathcal{I}$) 的一条代数合一子链，其序型为 ω，并且在偏序集 $(U_{\mathsf{A}(\mathcal{I})}, \preceq)$ 中共终。由此可根据定理 6.13 得出结论。□

7. 结论与未来工作

本文介绍了一种将卢卡西维茨事件上的德·菲内蒂相干性（由 Mundici 在 [38] 中推广）编码到命题卢卡西维茨逻辑及其等价代数语义——MV-代数簇中的方法。借助这种编码以及从概率 FP(L, L) 的模态语言到命题卢卡西维茨语言的翻译映射，我们还证明，前者的推导可以在后者的命题层面处理。此外，我们确定了一类投射 MV-代数，使得 FP(L, L) 相对于该类是完备的；最后，我们通过代数方法研究了 FP(L, L) 的概率合一问题，并证明其具有零元类型。

我们的编码建立在有限呈示 MV-代数与有理多面体之间的对偶之上，该对偶在 [32, 33], 中提出；很容易证明，它可特化为相干 MV-代数与（$\mathbb{Z}$-同胚像的）相干集。代数与几何直觉之间的紧密联系已成功应用于多项深刻成果，例如 [7, 40] 中的成果；在我们看来，这种联系还可以进一步得到系统探索，以加强概率、代数与逻辑之间的联系。

关于这一主题的未来研究可以探索多个方向。具体而言，从代数角度来看，近期论文 [31] 中提出的双类型方法显然需要进一步研究，其与相干 MV-代数之间的关系也有待深入理解。此外，沿着类似方向，若能证明 FP(L, L) 是否可代数化（其定义必然需要扩展 Blok 和 Pigozzi 的经典定义 [3]），将会很有意义。

关于可代数化概率逻辑， [21] 中称为 SFP(L, L) 的形式系统是 FP(L, L) 的一个可代数化扩张，其等价代数语义由带内态的 MV-代数构成的 SMV 簇给出。然而，对 SFP(L, L) 的了解要少得多。例如，证明其具有标准完备性仍是一个开放问题。此外，本文针对 FP(L, L) 给出的结果在多大程度上可以推广到更一般的 SFP(L, L)，也值得探讨。

最后，关于概率合一，我们已经指出，我们的方法聚焦于外部语言，并将形如 $P(\varphi)$ 的原子模态公式视为必须相干赋值的变量。然而，FP(L, L) 语言的双层结构表明，还可以研究另一个内部概率合一问题。我们所说的内部概率合一问题是指：考虑定义 6.1 中的一个（符号）概率合一问题 $\mathcal{I} = \{t_i[P(\varphi_1) \ldots, P(\varphi_k)] = u_i[P(\varphi_1) \ldots, P(\varphi_k)] \mid i = 1, \ldots, m\}$。那么，对于 $\mathcal{I}$ 的一个内部合一子，可以考虑一个卢卡西维茨代换 σ，它将事件$\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ 中出现的命题变量映射为

$$\vdash_{FP} t_i[P(\sigma\varphi_1), \ldots, P(\sigma\varphi_k)] \leftrightarrow u_i[P(\sigma\varphi_1), \ldots, P(\sigma\varphi_k)].$$

请注意，上述问题无法归约为我们在第 6 节中讨论的概率合一问题。事实上，由于算子 P 不是真值函数的，因此一般而言，无法将形如 $P(\sigma\varphi)$的原子模态公式归约为 $\sigma P(\varphi)$。因此，我们需要开发其他方法来处理这一问题。

上述提及的所有研究方向，无疑都需要更深入地理解逻辑、代数、几何与不确定性之间的关系，而本文希望已为理解这些关系作出了贡献。

Funding

作者感谢 MOSAIC 项目（H2020-MSCA-RISE-2020Project 101007627）提供的部分资助。Ugolini 感谢玛丽·斯克沃多夫斯卡-居里资助协议 No 890616（H2020-MSCA-IF-2019）以及拉蒙-卡哈尔计划 RyC2021-032670-I 的支持。Flaminio 感谢西班牙项目 PID2019-111544GB - C21/AEI/10.13039/501100011033 的支持。

References

[1] S. Aguzzoli, B. Gerla, V. Marra, 《哥德尔逻辑的德·菲内蒂无赌书判据》。 *Studia Logica* 90:25–41, 2008年。[2] P. Baldi, P. Cintula, C. Noguera。《不确定性的经典与模糊双层模态逻辑：翻译与证明论》。 *Int. J. Comput. Intell. Syst.* 13 (1): 988–1001, 2020年。[3] W.J. Blok, D. Pigozzi。《可代数化逻辑》。 *Mem. Amer. Math. Soc.* 77。美国数学会，普罗维登斯，1989年。[4] G. Boole, 《 *An Investigation of the Laws of Thought on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* 1958 》。经校订后重印，Dover Publications，纽约，NY，。（剑桥大学出版社于2009年再版）。[5] S. Burris, H. P. Sankappanavar, 《普适代数教程》，施普林格出版社，纽约，1981年。[6] L. M. Cabrer。《含幺格序阿贝尔群的单纯形几何》。 *Forum Mathematicum* 27(3):1309–1344, 2015年[7] L. M. Cabrer, D. Mundici。《投射 MV-代数与有理多面体》。 *Algebra Universalis* 62: 63–74, 2009年。[8] C.C. Chang。《多值逻辑的代数分析》。 *Trans. Amer. Math. Soc.* 88: 467–490, 1958年。[9] R. Cignoli, I. M. L. D'Ottaviano, D. Mundici, 《 *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*》，逻辑趋势丛书第8卷，Kluwer，多德雷赫特，2000年。[10] P. Cintula, C. Noguera。《具有双层语法的不确定性模态逻辑：一般完备性定理》。载于 *Proceedings of WoLLIC 2014*: 124–136, 2014年。[11] B. de Finetti, 《概率的主观意义》， *Fundamenta Mathematicae* 17: 298–329, 1931年。英译本题为"论概率的主观意义"，载于 Paola Monari 和 Daniela Cocchi（编）， *Probabilità e Induzione* 291 ，Clueb，博洛尼亚，第 –321 页，1993年。[12] B. de Finetti, 《 *Theory of Probability*》，第1卷，威利，纽约，1974年。[13] G. Ewald, 《 *Combinatorial Convexity and Algebraic Geometry*》。施普林格出版社，纽约，1996年。[14] R. Fagin, J.Y. Halpern, N. Megiddo。《一种关于概率推理的逻辑》。 *Information and Computation* 86(1- 2): 78–128, 1990年。[15] T. Flaminio。《模糊逻辑的强非标准完备性》。 *Soft Computing* 12: 321–333, 2008年。[16] T. Flaminio。《无限值事件严格一致性的三种刻画》。 *Review of Symbolic Logic* 13(3): 593–610, 2020年。[17] T. Flaminio。《卢卡西维茨事件概率逻辑的标准完备性与有限模型性质》。*International Journal of Approximate Reasoning* 131: 136–150, 2021年。[18] T. Flaminio, L. Godo。《一种关于模糊事件概率推理的逻辑》， *Fuzzy Sets and Systems* 158(6): 625–638, 2007年。[19] T. Flaminio, L. Godo, E. Marchioni。《模糊事件不确定性的推理：概述》。载于 *Understanding Vagueness - Logical Philosophical and Linguistic Perspectives* , , , P. Cintula 等（编），College Publications：367–400, 2011年。

[20] T. Flaminio, T. Kroupa。《MV-代数的状态》。 *Handbook of Mathematical Fuzzy Logic*，第3卷。P. Cintula, C. Fermüller 和 C. Noguera（编），逻辑、数理逻辑与基础研究丛书，College Publications，伦敦，2015年。[21] T. Flaminio, F. Montagna。《具有内态的 MV-代数与概率模糊逻辑》。 *International Journal of Approximate Reasoning* 50 1 138 152, 2009 ，( ): – 。

[22] J.M. Font。《 *Abstract Algebraic Logic: An Introductory Textbook* 60 *Studies in Logic Mathematical Logic* 》，卷，。 *and Foundations* 2016 伦敦：College Publications，。[23] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski. H. Ono。《 *Residuated Lattices: An Algebraic Glimpse at Substructural Logics*》。逻辑与数理基础研究丛书第151卷。爱思唯尔，2007年。[24] S. Ghilardi。《通过投射性实现合一》。 *Journal of Logic and Computation* 7(6): 733–752, 1997年。[25] J. Gispert, D. Mundici。《MV-代数：具有阿基米德单位的量的簇》。 *Algebra Universalis* 53: 7–43, 2005年。[26] P. H´ajek, L. Godo, F. Esteva。《概率与模糊逻辑》。载于 *Proc. of Uncertainty in Artificial Intelligence* UAI'95，P. Besnard 和 S. Hanks（编），Morgan Kaufmann，旧金山：237–244, 1995年。[27] R. B. Holmes。《 *Geometric Functional Analysis and its Applications*》。施普林格出版社，纽约、海德堡、柏林，1975年。[28] D. N. Hoover。《概率逻辑》。 *Annals of Mathematical Logic* 14: 287–313, 1978年。[29] H.J. Keisler。《超有限模型论》。载于 R.O. Gandy 和 J.M.E. Hyland 编， *Logic Colloquium 76*: 5–110。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1977年。[30] T. Kroupa。《卢卡西维茨逻辑中的状态对应于有理多面体的概率》。 *International Journal of Approximate Reasoning* 53 435 446, 2012 : – 。[31]

T. Kroupa, V. Marra。《状态的双类型代数理论与 MV-代数的泛状态》。 *Journal of Pure and Applied Algebra* 225 12 106771, 2021 ( ), 。[32]

V. Marra, L. Spada。《MV-代数与蒂霍诺夫空间之间的对偶伴随》。 *Studia Logica* 100(1-2): 253–278, 2012年。[33] V. Marra, L. Spada。《卢卡西维茨逻辑与 MV-代数中的对偶、投射性与合一》。 *Annals of Pure and Applied Logic* 164 3 192 210, 2013 ( ): – 。[34]

R. McNaughton。《关于无限值命题逻辑的一个定理》。 *The Journal of Symbolic Logic*, 16: 1–13, 1951年。[35] G. Metcalfe, F. Montagna, C. Tsinakis。《有序代数中的 amalgamation 与插值》， *Journal of Algebra* 402 21 82, 2014 : – 。[36]

D. Mundici。《无限值逻辑中 McNaughton 定理的构造性证明》。 *The Journal of Symbolic Logic*, 58 2 596( ): –602, 1994年。[37] D. Mundici。《卢卡西维茨逻辑中的真值平均》。 *Studia Logica* 55: 113–127, 1995年。[38] D. Mundici。《无限值事件上的簿庄》。 *International Journal of Approximate Reasoning* 43(3): 223–240, 2006年。[39] D. Mundici。《德·菲内蒂一致性准则在卢卡西维茨逻辑中的解释》。 *Annals of Pure and Applied Logic*。161: 235–245, 2009年。[40] D. Mundici。《 *Advanced Łukasiewicz calculus and MV-algebras*》。逻辑趋势丛书第35卷，施普林格，2011年。[41] J.B. Paris。《 *The Uncertain Reasoner's Companion: A Mathematical Perspective*》。剑桥大学出版社，1994年。[42] J.B. Paris，《关于荷兰赌书方法的一则注记》。 *Proceedings of the Second International Symposium on Imprecise Probabilities and their Applications* 2001， （G. De Cooman, T. Fine 和 T. Seidenfeld 编），ISIPTA，Shaker Publishing Company，伊萨卡，NY，美国，第301–306页，2001年。[43] B. Weatherson，《从经典概率到直觉主义概率》。 *Notre Dame Journal of Formal Logic* 44 2 111 123, ( ): – 。[44] 2003 Wojcicki，《卢卡西维茨命题演算后承运算的矩阵表示》， Zeitschr. f math. Logik und Grundlag. d. Math. 10: 239–247, 1973年。