arXiv:2303.06971v1 [math.PR] 13 Mar 2023

非可逆椭圆扩散的退出时间与主特征值

Dorian Le Peutrec、Laurent Michel 和 Boris Nectoux

Abstract. 在本文中，我们分析有界区域上的非可逆扩散过程的亚稳态

$$dX_t = \boldsymbol{b}(X_t)dt + \sqrt{h}\,dB_t$$

其中 $\boldsymbol{b}$ 满足分解式 $\boldsymbol{b} = -(\nabla f + \boldsymbol{\ell})$ 和 $\nabla f \cdot \boldsymbol{\ell} = 0$。在此情形下，我们首先证明，当 $h \to 0$时，生成元 $(X_t)_{t\geq 0}$ 在 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上满足狄利克雷边界条件，其主特征值与从 Ω 出发的平均退出时间的逆呈指数级接近，并且这一结论对 Ω 内紧集 $X_0 = x$ 中的初始条件一致成立。我们还得到了这一极限下退出时间分布的渐近行为。这些初步结果的主要新意在于考虑了非可逆椭圆扩散，其关联的动力系统 $\dot{X} = \boldsymbol{b}(X)$ 在 $\partial\Omega$ 上允许存在平衡点。其次，在进一步满足 $\operatorname{div}\boldsymbol{\ell} = 0$ 的条件下，我们推导出极限 $h \to 0$下过程生成元的主特征值及其平均退出时间的一个新的精确渐近等价式。我们的证明结合了大偏差理论与半经典分析的工具，并且真正依赖于准平稳分布这一概念。

关键词。亚稳态、Eyring-Kramers 型公式、平均退出时间、主特征值、非可逆过程。

美国数学学会分类号。60J60、35P15、35Q82、47F05、60F10。

1. Introduction

1.1. 本文的目的。令 $L > 0$ and $M = (L\mathbb{T})^d$，其中 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 是一维环面。令 $(X_t)_{t\geq 0}$ 为随机微分方程在 M 上的解

$$dX_t = \boldsymbol{b}(X_t)\,dt + \sqrt{h}\,dB_t, \tag{1.1}$$

其中 $h > 0$，$(B_t)_{t\geq 0}$ 表示在 M 上的布朗运动，而 $\boldsymbol{b} : M \to \mathbb{R}^d$ 是一个向量场。这样的方程是统计物理学中最重要的模型之一。在本文中，$\Omega \subset M$ 是一个 C^∞ 定义域，我们将

$$\tau_{\Omega^c} = \inf\{t \geq 0, X_t \notin \Omega\}$$

过程 (1.1) 从 Ω 出发的首次逃逸时间。

当 h 较小时，由于系统 $\dot{X} = \boldsymbol{b}(X)$ 存在稳定平衡点，过程 (1.1) 会在 M 中某个此类点的邻域内停留很长时间，该邻域称为亚稳区域，之后才转移到另一个亚稳区域。因此，过程 (1.1) 被称为亚稳态过程。人们通过研究零白噪声极限 $h \to 0$ 下 τ_{Ω^c} 的概率律以及扩散过程 (1.1) 在 $\partial\Omega$ 上满足狄利克雷边界条件时，其无穷小生成元的主特征值 $-\lambda_{1,h}^L$ 的渐近行为，对亚稳态现象进行了广泛研究。当完全位于 Ω 内的动力系统 $\dot{X} = \boldsymbol{b}(X)$ 的每条轨道的 ω-极限集都包含于 Ω 时，$h\ln \mathbb{E}[\tau_{\Omega^c}]$ 在 $h \to 0$时的极限已在 [20] 中得到研究（另见 [21, 41]）。此外，当 $\boldsymbol{b}\cdot n_\Omega < 0$ 在 $\partial\Omega$ 上（其中 n_Ω 是

Ω 的单位外法向量 ∂），文献 [10] 证明了 $\lambda_{1,h}^{L}\mathbb{E}[\tau_{\Omega^c}] \to 1$ 当 $h \to 0$时（另见[28, 29]）。我们还提及 [43, 44]，其中通过形式计算得到了相关公式。

当过程 (1.1) 是可逆的，即存在一个函数 f 使得 $\boldsymbol{b} = -\nabla f$时，我们参考 [52, 26, 15, 47] 关于 $\lambda_{1,h}^{L}$ 上的尖锐渐近公式，或者当系统在 $\partial\Omega$ 上没有平衡点时关于 $\mathbb{E}[\tau_{\Omega^c}]$ 的尖锐渐近公式；若系统存在平衡点，则参考 [42, 35, 48] （另见 [38]）。当$\boldsymbol{b}\cdot n_\Omega = 0$时，二维随机扰动系统的循环效应已在 [12]中得到研究。关于这一主题的文献综述，参见 [1, 14, 13] 。

注。 关于无边界情形下特征值和跃迁时间的渐近估计，椭圆可逆过程的情形参见 [27, 46, 6, 18, 5, 2, 22, 25, 45] ；所考虑的过程为椭圆非可逆过程且以吉布斯测度 (1.2) 为不变测度时，参见 [4, 31, 34, 36] 。

本工作的目的是研究以下情形下的渐近行为： $h \to 0$ 关于$\lambda_{1,h}^{L}$ 以及 τ_{Ω^c} 的分布和期望时间；其中非可逆过程具有形式（1.1），且光滑向量场 $\boldsymbol{b} : M \to \mathbb{R}^d$ 可分解为光滑梯度场与向量场的逐点正交和（见（**Ortho**））。

首先，我们证明在此情形下，当 Ω 大致为势能函数 f 的一个单阱（见（**One-Well**））时（见定理1，这是本工作的第一个主要结果）：

R1. 当 $h \to 0$, λ_1^L 趋于$h\mathbb{E}[\tau_{\Omega^c}]$ 时，收敛至 1，而 λ_1^L 的分布$h\tau_{\Omega^c}$ 收敛至均值为 1 的指数分布；二者均以指数速度一致收敛，且对取值于 Ω 中（相关）紧集的初始条件 x 一致。我们还研究了谱隙的渐近行为。

此外，当吉布斯测度

$$\mu_G(dx) = \frac{e^{-\frac{2}{h}f}}{\int_M e^{-\frac{2}{h}f}}\,dx \tag{1.2}$$

是不变的（见（无散）），且对 ∂在其最低能量点附近的形状作出额外假设（见（**Normal**））时，我们证明（见定理2，这是本文的第二个主要结果）：

R2. 在极限下， $h \to 0$、 $\lambda_{1,h}^{L}$，从而 $\mathbb{E}[\tau_{\Omega^c}]$，满足艾林–克拉默斯型公式。

关于上文的 R1 项，与现有文献相比，主要的新颖之处在于，这些结果是在过程（1.1）为非可逆，且动力系统 $\dot{X} = \boldsymbol{b}(X)$ 允许在 $\partial\Omega$[1] 上存在平衡点的情况下同时推导出来的。众所周知，后一种情况会带来若干技术难题 [11], ，但它对于应用而言很自然 [44]。例如，当人们关注与（1.1）相关的所谓状态间动力学时，就会出现这种情况。此时，与某个宏观状态相关联的集合 Ω 通常确实被定义为某个渐近稳定平衡点的吸引域 $x_0 \in M$ ，该平衡点属于动力系统 $\dot{X} = \boldsymbol{b}(X)$，因此 $\partial\Omega$ 中包含（ $\dot{X} = \boldsymbol{b}(X)$的平衡点。关于状态间动力学的更多资料和参考文献，请参见 [49, 33, 40, 13] 。还需指出，条件（**Normal**）

[1]我们提及，在我们的设定中（更准确地说，在（**Ortho**）条件下），每个 ω-极限集都由单个平衡点组成，见第1.3节。

当 Ω 是吸引域时，该条件自动成立；关于这一点，参见（**Normal**）之后的讨论。

最后，关于上文的 R2 项，我们在定理 2 中为$\lambda_{1,h}^{L}$推导出的 Eyring-Kramers 型公式，根据 R1 项可导出 $\mathbb{E}[\tau_{\Omega^c}]$ 的逆矩阵公式。对于这类非可逆过程，无论$X = \boldsymbol{b}(X)$在 $\partial\Omega$上是否存在平衡点，该公式都是新的。它精确地揭示了边界 $\partial\Omega$对$h \to 0$ 的精确等价的影响，适用于$\lambda_{1,h}^{L}$ 和 $\mathbb{E}[\tau_{\Omega^c}]$。

1.2. 假设。对于 $\mu \in \mathbb{R}$，我们使用以下记号

$$\{f \le \mu\} := \{x \in M,\ f(x) \le \mu\},\ \{f < \mu\} := \{x \in M,\ f(x) < \mu\},\ \text{and}\ \{f = \mu\} := \{x \in M,\ f(x) = \mu\}.$$

此外，对于 $r > 0$和 $y \in M$， $B(y,r)$表示以 y为中心、半径为 r的开球，位于 M中：

$$B(y,r) := \{z \in M, |y - z| < r\}.$$

在本文中，我们假设存在一个光滑向量场 $\boldsymbol{\ell} : M \to \mathbb{R}^d$ 和一个光滑莫尔斯函数 $f : M \to \mathbb{R}$，使得向量场 $\boldsymbol{b} : M \to \mathbb{R}^d$ 满足以下正交分解：

(**Ortho**) $$\boldsymbol{b}(x) = -(\nabla f(x) + \boldsymbol{\ell}(x)) \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\ell}(x) \cdot \nabla f(x) = 0 \qquad \text{for every } x \in M.$$

回顾一下，若一个光滑函数的所有临界点都是非退化的，则称其为莫尔斯函数。

现在定义

$$\mathbf{C}_{\min} := \Omega \cap \{f < \min_{\partial\Omega} f\}. \tag{1.3}$$

注意，$\mathbf{C}_{\min} = \Omega \cap \{f < \min_{\partial\Omega} f\}$，并且当 $\mathbf{C}_{\min}$ 非空且连通时，它是 $\{f < \min_{\partial\Omega} f\}$ 的一个连通分支。

我们的第二个主要假 设大致是说，Ω 看起来像势函数 f 的一个单阱：

(One-Well) $f : M \to \mathbb{R}$ 在 Ω 中恰有一个临界点 x_0，且 $\partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega \neq \varnothing$.

注意，当（**One-Well**）成立时，$\mathbf{C}_{\min}$ 非空且连通， x_0 属于$\mathbf{C}_{\min}$，并且

$$f(x_0) = \min_{x \in \overline{\Omega}} f(x). \tag{1.4}$$

示意图见图 1.1 ，其中表示了 $\mathbf{C}_{\min}$ 在（**One-Well**）成立时的情形。

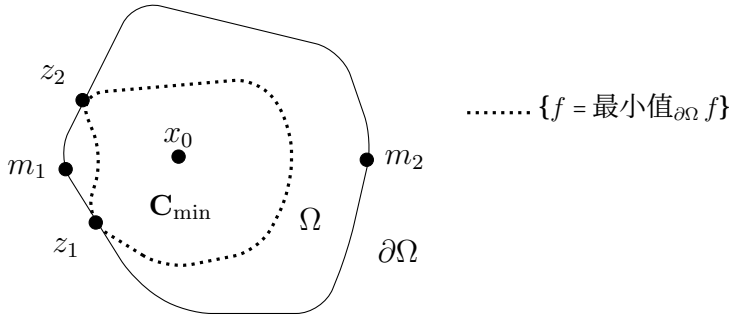

FIGURE 1.1. 当$\mathbf{C}_{\min}$ 在（**One-Well**）成立时的示意图。在此图中， $\partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega = \{z_1,\ z_2\}$ 以及 $m_1,\ m_2 \in \partial\Omega$ 是 f在 M中的局部极大值。

本工作的第一个主要结果，即定理 1，只需要假设（**Ortho**）和（**One-Well**）。第二个主要结果，即定理 2，还需要两个额外的假设，这正是本节余下部分的主题。第一个假设蕴含吉布斯测度 $\mu_G(dx) = \frac{e^{-\frac{2}{h}f}}{\int_M e^{-\frac{2}{h}f}}dx$ 在（1.2）中定义的

（Div-free） $$\text{For every } x \in M, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\ell}(x) = 0.$$

众所周知，在 M 上，具有足够光滑系数的椭圆型随机微分方程的过程解存在唯一的不变概率测度。此外，利用算子 $-\frac{h}{2}\Delta + \boldsymbol{b}\cdot\nabla$ 的伴随算子对不变概率测度的标准刻画[2]，条件（**Ortho**）和（**Div-free**）是确保测度 μ_G 是过程（1.1）对所有 $h > 0$ 而言的不变概率测度（因而也是唯一的不变概率测度）的充要条件。

在本文中，若 $z \in M$ 是 f 的指标 1 z 临界点，我们就称其为 f 的鞍点；也就是说，矩阵 Hess $f(z)$（根据（**Ortho**）可知该矩阵可逆）恰有一个负特征值。下面的最后一个假设（**Normal**）涉及点 $z \in \partial \mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$。这些点是 $f|_{\partial\Omega}$ 的全局极小点，对于定理1 和2给出的 Ω 逃逸平均时间渐近等价式至关重要。值得一提的是，根据[35, 命题 12], 中的第 (b) 项，当这样的 z 是 f 的临界点时，它是一个鞍点。

对于 $x \in M$，我们定义雅可比矩阵

$$\mathsf{L}(x) := \operatorname{Jac} \boldsymbol{\ell}(x).$$

为了陈述最后一个假设，我们需要用到以下命题中的一些结论，该命题由[34, 引理 1.8] 和 [3, 引理 1.4] 推导而来（类似结果另见 [32] ），涉及向量场 $\boldsymbol{b}$ 在 f 的鞍点处的雅可比矩阵。

引理 1. 假设 (Ortho) 成立，并设 $z \in M$ 是 f 的一个指标为 $p \in \{0, \dots, d\}$ 的临界点。那么，矩阵 Hess $f(z) + {}^t\mathsf{L}(z)$ 在 $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z < 0\}$ 中恰有 p 个特征值，在 $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 0\}$ 中恰有 $d-p$ 个特征值。

当 z 是鞍点时，我们用 $\mu(z)$ 表示 Hess $f(z) + {}^t\mathsf{L}(z)$ 在 $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z < 0\}$ 中的特征值，并用 $\lambda(z)$ 表示 Hess $f(z)$ 的负特征值。此外，在这种情况下，我们有：

(1) 特征值 $\mu(z)$ 是实数，因此为负。

(2) 设 $\xi(z)$ 是 Hess $f(z) + {}^t\mathsf{L}(z)$ 对应于 $\mu(z)$ 的实单位特征向量。那么，矩阵 Hess $f(z) + 2|\mu(z)|\xi(z)\xi(z)^t$ 为正定矩阵，且行列式为 $-\det$ Hess $f(z)$。

(3) 有 $|\mu(z)| \geq |\lambda(z)|$，当且仅当 ${}^t\mathsf{L}(z)\xi(z) = 0$ 时，等号成立。

现在我们来表述最后一个关于 f 在 $\partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$ 各点附近的局部形状的假设，其中（**Ortho**）成立。以下，对于任意 $z \in \partial\Omega$，$n_\Omega(z)$ 表示 $\partial\Omega$ 在 z 处的单位外法向量。

(Normal) $\forall z \in \partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$，成立：{ 当 $\nabla f(z) = 0$, $\xi(z) \in$ Span $(n_\Omega(z))$，当 $\nabla f(z) \neq 0$, $\det \operatorname{Hess}(f|_{\partial\Omega})(z) \neq 0$ 且 $\boldsymbol{\ell}(z) = 0$,

其中 $\xi(z)$ 是 Hess $f(z) + {}^t\mathsf{L}(z)$ 对应于其唯一负特征值的特征向量，见引理1。

[2]例如参见 [53, 第 259]页。

我们以讨论（Normal）的几何后果结束本节。

令 $z \in \partial \mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$ 满足 $\nabla f(z) = 0$。当（Normal）成立时，$T_z\partial\Omega$ 在 z 处的切空间$T_z\partial\Omega$ 满足 $T_z\partial\Omega = z + \{\xi(z)\}^{\perp}$。由于 $\xi(z)$ 是 Hess $f(z) + {}^t\mathrm{L}(z)$ 的一个特征向量，对应于其在 $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, z < 0\}$ 中的唯一特征值；并且根据引理 1，Hess $f(z) + {}^t\mathrm{L}(z)$ 的其余$d-1$ 特征值属于 $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, z > 0\}$，因此，超平面 $\{\xi(z)\}^{\perp}$ （的复化）是 $-\mathrm{Jac}\, \boldsymbol{b}(z) = \mathrm{Hess}\, f(z) + \mathrm{L}(z)$ 对应于其位于 $\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, z > 0\}$ 中的特征值的广义特征空间之和。此外，由[34, 引理 4.1] 可知，在 M 中 z 的一个邻域 $\mathcal{O}_z$ 内，

$$(\partial\Omega \cap \mathcal{O}_z) \setminus \{z\} \subset \{f > f(z)\}. \tag{1.5}$$

特别地，z 是 $f|_{\partial\Omega}$的严格全局最小值。关于1.2 所示的 $\xi(z)$ 以及$\mathbf{C}_{\min}$ 在此类点 z 附近的示意图（当Normal）成立时），请参见图

还要提及的是，正如下面第 1.3 节所解释的，$\nabla f(z) = 0$ 意味着 z是动力系统 $\dot{X} = \boldsymbol{b}(X)$ 的一个平衡点，也就是说，$\boldsymbol{b}(z) = 0$。因此，从动力学的角度看，上述讨论仅仅表明，当（Normal）成立时：对于每个满足 $\nabla f(z) = 0$的$z \in \partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$，$\Omega$的边界 ∂与动力系统 $\dot{X} = \boldsymbol{b}(X)$中 z的稳定流形相切，该稳定流形的维数为 $d-1$。我们回顾一下，平衡点 z 的稳定（分别为不稳定）流形定义为 M 中那些元素的集合，其轨迹（对于动力学 $\dot{X} = \boldsymbol{b}(X)$）在未来（分别在过去）收敛到 z；并且其在 z 处切空间的（复化）是$\mathrm{Jac}\, \boldsymbol{b}(z)$对应于其在$\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, z < 0\}$（分别在$\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\, z > 0\}$）中的特征值的广义特征空间之和。

现在考虑满足 $\nabla f(z) \neq 0$ 的 $z \in \partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$。由于 z 是 $f|_{\partial\Omega}$ 的全局最小值，切空间 $T_z\partial\Omega$ 满足 $T_z\partial\Omega = z + \{\nabla f(z)\}^{\perp}$，$\partial_n f(z) > 0$，并且 $\boldsymbol{b}(z) = -\nabla f(z) - \boldsymbol{\ell}(z)$ 指向内侧。因此，根据 (Ortho)，(Normal) 第二部分中的条件 $\boldsymbol{\ell}(z) = 0$ 等价于 $\boldsymbol{b}(z) \in$ 张成空间 $(n_\Omega(z))$。因此，从某种意义上说，当 z 不是动力系统 $\dot{X} = \boldsymbol{b}(X)$ 的平衡点时，这就是 (Normal) 的第一个假设的对应条件，因为它给出了 $\boldsymbol{b}(z)$ 与 $T_z\partial\Omega$ 正交的条件。

特别是，当（Normal）成立时，任意 $z \in \partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$ 都是 $f|_{\partial\Omega}$ 的严格全局最小值，无论 $\nabla f(z) \neq 0$还是 $\nabla f(z) = 0$。因此，由于 $\partial\Omega$ 是紧致的：

$$(\mathbf{Normal}) \Rightarrow \mathrm{Card}\, (\partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega) < +\infty. \tag{1.6}$$

1.3. 确定性动力系统。这里给出确定性动力系统 ω-极限集的基本性质 $\dot{X} = \boldsymbol{b}(X)$，该系统与随机微分方程（1.1）相关联，且满足（Ortho）条件。

对于每个 $x \in M$，我们用 $\varphi_t(x)$ 表示常微分方程在 M 上的解

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(x) = \boldsymbol{b}(\varphi_t(x)) \text{ with initial condition } \varphi_0(x) = x. \tag{1.7}$$

注意，由于 $\boldsymbol{b}$ 在 M 上是（全局）利普希茨连续的，这些曲线在全局范围内都有定义。

现在来描述动力系统（ ω-极限集，其中的某个 $x \in M$ 对应于动力系统（1.7）。该集合记为 $\omega(x)$，其定义如下（例如参见[54, 定义 8.1。1]）

$$\omega(x) := \{y \in M, \exists (s_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}, \lim_{n\to\infty} s_n = +\infty, \lim_{n\to\infty} \varphi_{s_n}(x) = y\}.$$

回顾一下，对于所有 $x \in M$，$\omega(x)$ 都是非空、连通、闭的，并且在（1.7）的流下保持不变（参见例如 [54, 命题8.1。3]）。此外，由于 $\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla f = 0$ 根据（Ortho）：

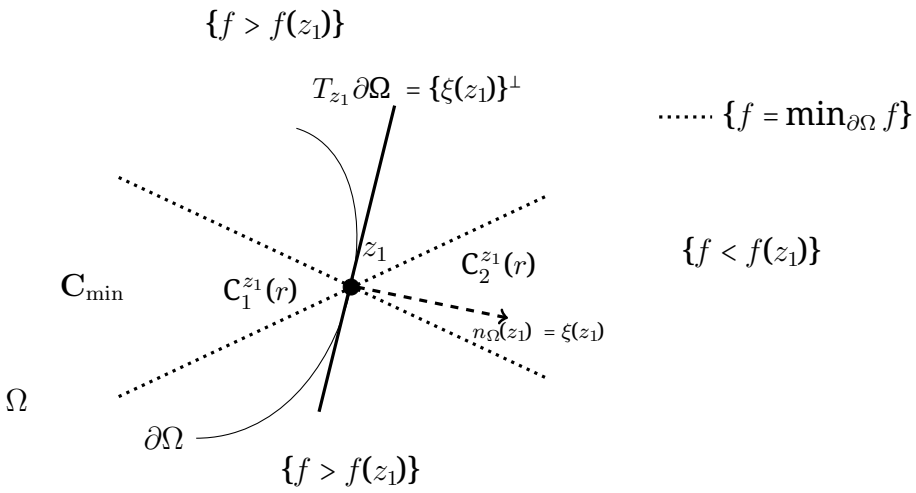

FIGURE 1.2. Ω 在 ∂附近的示意图 $z_1 \in \partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$ 在（**Normal**）成立时，以及 $\nabla f(z_1) = 0$（回想一下，z_1此时是 f的一个鞍点。）

对于每个 $x \in M$ 和 $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dt} f(\varphi_t(x)) = -|\nabla f|^2(\varphi_t(x)). \tag{1.8}$$

因此，仿照 [54, 定理 15.0.3], 的证明，对于梯度向量场，我们有：对所有$x \in M$, $\omega(x) \subset \{y \in M, \nabla f(y) = 0\}$。由于莫尔斯函数 $f : M \to \mathbb{R}$ 在 M 中只有有限个临界点，且 $\omega(x)$ 非空且连通：对所有 $x \in M$，存在 f 的一个临界点 $y \in M$，使得 $\omega(x) = \{y\}$，因此特别有 $\lim_{t\to+\infty} \varphi_t(x) = y$。

现在，回顾一下，按照定义，动力系统 (1.7) 的一个平衡点是一个点$z \in M$，满足 $\boldsymbol{b}(z) = 0$, 也就是说满足 $\omega(z) = \{z\}$。由此可得

$$\{z \in M, \boldsymbol{b}(z) = 0\} \subset \{z \in M, \nabla f(z) = 0\}.$$

此外，由于 Hess f在 f的任意临界点处均可逆，对 $\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla f = 0$在此类点附近进行泰勒展开可知，只要 $\nabla f(z) = 0$，就有 $\boldsymbol{\ell}(z) = 0$。因此，当 (Ortho) 成立时，有等号 $\{z \in M, \nabla f(z) = 0\} = \{z \in M, \boldsymbol{b}(z) = 0\}$；并且对于所有 $x \in M$，都存在 $y \in M$使得

$$\omega(x) = \{y\} \subset \{z \in M, \nabla f(z) = 0\} = \{z \in M, \boldsymbol{b}(z) = 0\}. \tag{1.9}$$

当 $t \to -\infty$ 时，同理可得：对于所有 $x \in M$，都存在 f 的两个临界点 $y_\pm$，使得

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi_t(x) = y_+ \quad \text{and} \quad \lim_{t\to-\infty} \varphi_t(x) = y_-. \tag{1.10}$$

定义 2. 对于每个 $x \in \Omega$，我们令 $t_x := \inf\{t \geq 0,\ \varphi_t(x) \notin \Omega\} > 0$。$F \subset \Omega$ 的吸引域定义为

$$\mathcal{A}(F) := \left\{x \in \Omega,\ t_x = +\infty \ \textit{and}\ \omega(x) \subset F\right\}. \tag{1.11}$$

Noti注意，当（**Ortho**）和（**One-Well**）成立时，（1.8）和（1.9）意味着

$$\mathbf{C}_{\min} \subset \mathcal{A}(\{x_0\}). \tag{1.12}$$

1.4. 主要结果。我们用 $L^2(\Omega)$ 表示关于 Ω 上的勒贝格测度在 Ω 上平方可积的函数空间。正则性为 $k \geq 1$ 的相应索博列夫空间记为 $H^k(\Omega)$。空间 $H_0^1(\Omega)$ 表示满足$w = 0$ 于 $\partial\Omega$ 上的函数 $w \in H^1(\Omega)$ 所构成的空间。我们还用 $L^2_w(\Omega)$ 表示关于 Ω 上测度 $e^{-\frac{2}{h}f}dx$的平方可积函数空间。记号 w表示内积中带有权函数 $e^{-\frac{2}{h}f}dx$。正则性为 $k \geq 1$ 的相应加权索博列夫空间记为$H^k_w(\Omega)$。

根据（**Ortho**），研究过程 L^2_w（Ω）的（负）无穷小生成元 L_h 在 $\partial\Omega$ 上满足狄利克雷条件时的谱性质，自然应在1.1）

$$L_h = -\frac{h}{2}\Delta + \nabla f \cdot \nabla + \boldsymbol{\ell} \cdot \nabla \quad \text{with domain } D(L_h) = H^2_w(\Omega) \cap \{w \in H^1_w(\Omega), w = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

它的伴随算子 L_h^* 在 $L^2_w(\Omega)$上的定义域仍为 $D(L_h)$，确实具有相当好的性质 m

$$L_h^* = -\frac{h}{2}\Delta + \nabla f \cdot \nabla - \boldsymbol{\ell} \cdot \nabla - \operatorname{div} \boldsymbol{\ell}.$$

特别地，当满足（无散）时， L_h^* 为 L_h ，其中 $\boldsymbol{\ell}$ 由 $-\boldsymbol{\ell}$替代，且过程（1.1）在 $\boldsymbol{\ell} = 0$时是可逆的。

为了研究 L_h的谱性质，我们实际采用酉变换，在平直空间 $L^2(\Omega)$中进行计算；在那里，分部积分等运算更容易完成。我们将扭曲梯度记作$\nabla_{f,\ h} := h\, e^{-\frac{f}{h}} \nabla e^{\frac{f}{h}} = h\nabla + \nabla f$这是 Witten 意义下的扭曲梯度 `，并且

$$\Delta_{f,h} := \nabla^*_{f,h} \nabla_{f,h} = -h^2\Delta + |\nabla f|^2 - h\Delta f \tag{1.13}$$

与 f 相关联的 Witten 拉普拉斯算子，其中伴随算子现在取在 $L^2(\Omega)$ 上。接下来定义

$$P_h := 2h\, e^{-\frac{f}{h}}\, L_h\, e^{\frac{f}{h}} = \Delta_{f,h} + 2\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla_{f,h} = \Delta_{f,h} + 2h\,\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla \tag{1.14}$$

其定义域为 $D(P_h) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，作用于 $L^2(\Omega)$ 上。根据 **(1.14)**，算子 $2h\, L_h$和 P_h 酉等价，因此具有相同的谱性质。特别地，对于所有 $h > 0$， $\lambda \in \sigma(L_h)$ 当且仅当 $2h\,\lambda \in \sigma($ $P_h)$，并且 λ 的代数重数和几何重数对于 L_h 和 $(2h)^{-1}P_h$均相同。

以下结果描述了固定 $h > 0$ 时 $(P_h, D(P_h))$ 的一般谱性质，因而也描述了 $(L_h, D(L_h))$ 的一般谱性质。

命题 3. 假设 (**Ortho**) 成立。那么，对于每个 $h > 0$:

- 算子 $P_h : D(P_h) \to L^2(\Omega)$ 是极大拟增生的。更准确地说，算子 $P_h + h\|\text{div } \boldsymbol{\ell}\|_\infty : D$ $(P_h) \to L^2(\Omega)$ 是极大增生的。此外， P_h 具有紧预解式且为扇形的。
- $P_h : D(P_h) \to L^2(\Omega)$ 的伴随算子为

  $$P_h^* = \Delta_{f,h} - 2\boldsymbol{\ell} \cdot \nabla_{f,h} - 2h \operatorname{div} \boldsymbol{\ell} \quad \textit{with domain } D(P_h).$$

  它也是极大拟增生的，具有紧预解式，且是扇形的。
- 存在 $\Sigma \subset \mathbb{C}$，使得 P_h 和 P_h^* 的谱满足

  $$\sigma(P_h) = \{\lambda^P_{1,h}\} \cup \Sigma \quad \textit{and} \quad \sigma(P_h^*) = \{\lambda^P_{1,h}\} \cup \overline{\Sigma},$$

其中 $\lambda_{1,h}^{P} \in \mathbb{R}_+^*$ 对 P_h 和 P_h^* 均为简单的（即代数重数为 1），并且对每个 $\lambda \in \Sigma$，实部 $\lambda > \lambda_{1,h}^{P}$。
此外，P_h（分别地，P_h^*）存在一个特征函数 $u_{1,h}^{P}$（分别地，$u_{1,h}^{P^*}$），与 $\lambda_{1,h}^{P}$ 相对应，且在 Ω 内为正。

命题 3 的证明采用了关于光滑有界区域上带狄利克雷边界条件的椭圆算子的标准论证。为求完整起见，证明见附录。

特征值 $\lambda_{1,h}^{P}$ 是 P_h 的所谓主特征值。根据（1.14），$\lambda_{1,h}^{L}$ 在 L_h 作用于 $L_w^2(\Omega)$ 时的主特征值因此满足 $2h\,\lambda_{1,h}^{L} = \lambda_{1,h}^{P}$。此外，由于 L_h 的预解算子是紧的，其谱是离散的，且只能在无穷远处聚集。因此，L_h 的扇形性以及命题 3 的最后一项意味着对每个 $h > 0$ 都存在谱隙，即：

$$\forall h > 0\,,\ \exists c_h > 0\,,\quad \sigma(L_h) \cap \left\{ z \in \mathbb{C}\,,\ \operatorname{Re} z \in (\lambda_{1,h}^{L}, \lambda_{1,h}^{L} + c_h) \right\} = \varnothing.$$

此外，第 3 节中的分析（见定理 4）使我们能够明确 $\lambda_{1,h}^{L}$ 以及该谱隙关于 h 的行为：当 f 在 Ω 中有 m_0 个局部极小值时，存在 c_1、$c_2 > 0$ 和 $h_0 > 0$，使得对每个 $h \in (0, h_0]$，L_h 都有 m_0 个特征值（按重数计）落在 $\{z \in \mathbb{C},\ |z| \le e^{-\frac{c_1}{h}}\}$ 中，其余特征值则位于 $\{z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re} z \ge c_2\}$ 中。特别地，当 (One-Well) 也成立时：

$$\exists c, h_0 > 0\,,\ \forall h \in (0, h_0]\,,\quad \lambda_{1,h}^{L} \le e^{-\frac{c}{h}} \quad \text{and} \quad \sigma(L_h) \cap \left\{ z \in \mathbb{C}\,,\ \operatorname{Re} z \in (\lambda_{1,h}^{L}, \lambda_{1,h}^{L} + c) \right\} = \varnothing.$$

现在我们可以陈述本文的两个主要结果。

定理 1. 假设 (**Ortho**) 且 (**One-Well**)。设 K 是 $\mathcal{A}(\{x_0\})$ 的一个紧子集 (参见(1.11))。那么，存在 $c > 0$ 和 $h_0 > 0$，使得对所有 $h \in (0, h_0]$：

a. L_h 的主特征值 $\lambda_{1,h}^{L}$ 满足，

$$\sigma(L_h) \cap \left\{ z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z \le c \right\} = \{\lambda_{1,h}^{L}\} \quad \textit{and} \quad \lim_{h \to 0} h \ln \lambda_{1,h}^{L} = -2\left(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0) \right). \tag{1.15}$$

b. 平均退出时间 τ_{Ω^c} 满足，对 $x \in K$ 一致，

$$\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] = \frac{(1 + O(e^{-\frac{c}{h}}))}{\lambda_{1,h}^{L}}. \tag{1.16}$$

c. 退出时间分布 τ_{Ω^c} 满足，

$$\sup_{t \ge 0\,,\, x \in K} \left| \mathbb{P}_x\left[\tau_{\Omega^c} > \frac{t}{\lambda_{1,h}^{L}} \right] - e^{-t} \right| \le e^{-\frac{c}{h}}. \tag{1.17}$$

我们对定理 1作几点说明：

● (1.15) 中的第二个结论是$\lambda_{1,h}^{L}$的所谓阿伦尼乌斯定律。结合 (1.16)，可得平均退出时间 τ_{Ω^c} 的以下阿伦尼乌斯定律：

$$\lim_{h \to 0} h \ln \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] = 2\left(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0) \right), \quad \text{uniformly in } x \in K.$$

• 方程（1.16）给出了关于 Ω 平均退出时间的以下均化结果：$\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] = \mathbb{E}_y[\tau_{\Omega^c}]\,(1+O(e^{-\frac{c}{h}}))$，在以下范围内一致成立：$x$，$y$ 在 $\mathcal{A}(\mathbf{C}_{\min})$ 的紧集内（见（1.12））。只要满足（**Ortho**），这一均化结果便推广了 [10,

推论 1]当（1.7）在 $\partial\Omega$ 上存在平衡点时。它还推广了 [48, 定理2]适用于底层过程为非可逆过程的情形。

- 方程（1.17）表明，当 $h \to 0$ 时，$\lambda_{1,h}^{L}\tau_{\Omega^c}$ 的分布将以指数速度收敛到均值为 1 的指数分布，并且这一收敛在 $\mathcal{A}(\{x_0\})$ 的紧集上一致。注意，（1.16）并非（1.17）的推论。

- 将定理 1 推广到所有 $x \in \mathcal{A}(\mathbf{C}_{\min})$ 而不仅限于 $x = x_0$，对于依赖过程（1.1）的应用而言，确实具有重要意义。事实上，实践中人们希望估计该过程被困在亚稳态区域 Ω 内的时间。由于它相对于勒贝格测度 dx 在 M 上具有密度，其轨迹经过 x_0 的概率为零。

我们的第二个主要结果指出，在附加假设（无散）和（**Normal**）下，特征值 $\lambda_{1,h}^{L}$ 满足艾林–克拉默斯型公式。

定理 2. 假设 (**Ortho**)、(**One-Well**)、(无散) 和 (**Normal**) 成立。那么，当 $h \to 0$ 时，特征值 $\lambda_{1,\,h}^{L}$ 满足以下 Eyring-Kramers 型公式：

$$\lambda_{1,h}^{L} = \left(\kappa_1^L\, h^{-\frac{1}{2}} + \kappa_2^L + O(h^{\frac{1}{4}})\right) e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0))}, \tag{1.18}$$

其中

$$\begin{cases} \kappa_1^L &= \dfrac{\sqrt{\det \operatorname{Hess} f(x_0)}}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\sum_{\substack{z\in\partial\mathbf{C}_{\min}\cap\partial\Omega \\ \nabla f(z)\neq 0}} \frac{\partial_{n_\Omega} f(z)}{\sqrt{\det \operatorname{Hess} f_{|\partial\Omega}(z)}} \\ \kappa_2^L &= \dfrac{\sqrt{\det \operatorname{Hess} f(x_0)}}{2\pi} \displaystyle\sum_{\substack{z\in\partial\mathbf{C}_{\min}\cap\partial\Omega \\ \nabla f(z)=0}} \frac{2|\mu(z)|}{\sqrt{|\det \operatorname{Hess} f(z)|}} \end{cases}, \tag{1.19}$$

且 $\mu(z)$ 表示 $\operatorname{Hess} f(z) + {}^t\mathsf{L}(z)$ 在鞍点 z 处的 f 负特征值（见命题 *1*）。

现在我们来讨论定理 2的结果。

● 我们的分析实际上表明，当 $\kappa_1^L = 0$ 或 $\kappa_2^L = 0$ 时，(1.18) 中的误差项 $O(h^{\frac{1}{4}})$ 的阶为 $O(h^{\frac{1}{2}})$，见定理 5。此外，当过程可逆时，即 $\boldsymbol{\ell} = 0$ （见 [35] 或下文命题 19），它的阶始终为 $O(h^{\frac{1}{2}})$。另外，无论过程是否可逆，当 (1.18) 中的误差项为 $O(h^{\frac{1}{2}})$ 时，它通常是最优的（讨论见例如 [35, 备注 25]）。

● 设 $\lambda_{1,h}^{\Delta}$ 为 $-\frac{h}{2}\Delta + \nabla f\cdot\nabla$ 的主特征值。当 $\kappa_1^L = 0$（即当 $\nabla f(z) = 0$ 对每个 $z \in \partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$ 均成立时），我们有：

$$\frac{\lambda_{1,h}^{\Delta}}{\lambda_{1,h}^{L}} \sim \frac{\displaystyle\sum_{z\in\partial\mathbf{C}_{\min}\cap\partial\Omega} |\lambda(z)|\,|\det \operatorname{Hess} f(z)|^{-\frac{1}{2}}}{\displaystyle\sum_{z\in\partial\mathbf{C}_{\min}\cap\partial\Omega} |\mu(z)|\,|\det \operatorname{Hess} f(z)|^{-\frac{1}{2}}},$$

其中，对于 $z \in \partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$，$\lambda(z)$ 是 $\operatorname{Hess} f(z)$ 的负特征值。根据引理 1，我们有 $|\mu(z)| \geq |\lambda(z)|$，且当且仅当 ${}^t\mathsf{L}(z)\xi(z) = 0$ 时取等号。然后，鉴于 (1.16) 和 [48, 定理 1]，我们通过在 $\partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$ 周围局部加入一个一般的漂移项 $\boldsymbol{\ell}(X_t)$ 到可逆过程 $dX_t = -\nabla f(X_t)\,dt + \sqrt{h}\,dB_t$ 中，从而加快逃逸出 Ω。在数学文献中，这种加速现象已经

通过分析不同的量，研究了定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的椭圆非可逆扩散：固定 $h>0$ 时趋于平衡的速率，或当 $h\to 0$时的跃迁时间渐近等价式，参见 $h\to 0$及其中的参考文献。[37, 4, 32, 34, 36]

- 最后提及，将本文与 [34,35, 3], 中所发展的分析相结合，显然可以将定理2 的结果推广到以下情形： f 在 Ω 中有多个局部极小值，且 $\boldsymbol{\ell}$ 具有经典展开式 $\sum_{k\geq 0} h^k \boldsymbol{\ell}_k$，其中 $\boldsymbol{\ell}_k$ 是在 M 上的光滑向量场，使得吉布斯测度（1.2）对过程（1.1）保持不变，且对所有 $h>0$均成立。

1.5. 证明策略与论文结构。 定理1 的证明关键依赖于公式

$$\frac{1}{\lambda^L_{1,h}} = \mathbb{E}_{\nu_h}[\tau_{\Omega^c}] = \frac{\int_\Omega \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] u^{P^*}_{1,h} e^{-\frac{f}{h}}}{\int_\Omega u^{P^*}_{1,h} e^{-\frac{f}{h}}}, \quad \text{where } \nu_h(dx) = \frac{u^{P^*}_{1,h} e^{-\frac{f}{h}}}{\int_\Omega u^{P^*}_{1,h} e^{-\frac{f}{h}}}\, dx \tag{1.20}$$

是过程（1.1）在 Ω 中的准平稳分布（实际上它就是该准平稳分布，详见第4.2 节中关于 ν_h的更多说明）。

为了从（ $\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}]$ ）的积分中提取1.20，例如证明（1.16），我们对 $x\mapsto \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}]$使用均化结果。这正是定理3的目的，该定理在第2节中借助大偏差技术得以证明。此外，我们还需要对主特征值$\lambda^L_{1,\,h} = \lambda^P_{1,\,h}/2h$ 的 L_h进行先验估计，这正是第4 节中定理3的目的；该定理仅依赖假设（**Ortho**），并通过半经典方法证明。

我们将在第4.1 节利用这些先验估计，推导出关于主特征函数$u^{P^*}_{1\,h,}$ 即 P^*_h的集中性信息，见命题18。随后，结合关于 $x\mapsto \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}]$ 的平坦化结果以及关于$\lambda^L_{1,\,h}$的先验估计，我们将在第1节4.2证明定理。

最后，若进一步假设条件（无散）和（**Normal**）成立，我们将通过为$\lambda^L_{1,\,h}$ 构造一个非常精确的准模态，证明定理2 中给出的关于 P_h的精确渐近等价式。这将在第5节完成，见定理5。

2. Leveling results on the mean exit time from Ω

本节旨在证明下文的定理3 ，该定理旨在当（**Ortho**）和（**One-Well**）成立时，给出关于 $x\mapsto \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}]$的精确平坦化结果，以及当 $h\to 0$时 $h\ln \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}]$的极限。为此，我们采用大偏差理论中的技巧。由于 $\boldsymbol{b}$ 在 $\partial\Omega$ 上可能存在平衡点，这些技巧无法直接应用于 Ω，因此需要谨慎处理（事实上，回顾可知， $\boldsymbol{b}(z)=0$ 当且仅当 $\nabla f(z)=0$，见（1.9））。

2.1. 大偏差与平均退出时间。本节仅假设（**Ortho**）。

2.1.1. *M子集上的准势。*现在我们引入与定义在 D上的向量场 $\boldsymbol{b}$ 相关的准势，其中 D 表示 M 的一个光滑有界子域（它可能是 M），并回顾其一些基本性质。对于 x、$y\in D$和 $t_1<t_2\in\mathbb{R}$，记

$\mathsf{C}^{x,\,y}([t_1,t_2],\overline{D})$为满足 $\phi(t_1)=x$ 且 $\phi(t_2)=y$的连续曲线 $\phi:[t_1,t_2]\to\overline{D}$的集合。对于 $\phi\in\mathsf{C}^{x,\,y}([t_1,t_2],D)$，若 ϕ绝对连续，则定义

$$S_{t_1,t_2}(\phi)=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}|\dot{\phi}_s-\boldsymbol{b}(\phi_s)|^2ds\in\mathbb{R}^+,$$

其中 $\dot{\phi}_s=\frac{d}{ds}\phi_s$，否则，$S_{t_1,\,t_2}(\phi)=+\infty$。函数

$$V_D:(x,y)\in\overline{D}\times\overline{D}\mapsto\inf\left\{S_{0,T}(\phi),\ \ \phi\in\mathcal{C}^{x,y}([0,T],\overline{D})\text{ and }T>0\right\}\in\mathbb{R}^+$$

称为过程（1.1）在 D上的（Freidlin-Wentzell）准势。注意

$$V_D(x,x)=0\text{ for all }x\in\overline{D}. \tag{2.1}$$

对于任意 x、$y\in\overline{D}$ 和 S、$S'\subset\overline{D}$，我们还定义

$$V_D(x,S')\coloneqq\inf_{y\in S'}V_D(x,y),\ V_D(S,y)\coloneqq\inf_{x\in S}V_D(x,y),\text{ and }V_D(S,S')\coloneqq\inf_{(x,y)\in S\times S'}V_D(x,y).$$

在下一个 引理中，我们回顾泛函 V 的一些基本且有用的性质 $_D$.

引理 4. 有如下结论：

- $V_D:\overline{D}\times\overline{D}\to\mathbb{R}^+$ 连续。
- 假设存在 D 的一个子集 S，使得对于任意 $T\geq0$ 和 $\phi\in\mathsf{C}^{x,\,y}([0,T],D)$，都存在 $t\in[0,T]$ 使得 $\phi_t\in S$。那么，成立

$$V_D(x,y)=\inf_{z\in S}[V_D(x,z)+V_D(z,y)].$$

- 对于每个 $x\in\overline{D}$ 以及满足以下条件的每个 $-\infty\leq t_-\leq t_+\leq+\infty$，若方程 (1.7) 的解 $\varphi_t(x)$ 满足 $\{\varphi_t(x)\ t\in[t_-,t_+]\}\subset\overline{D}$，其中 $\varphi_{t_\pm}(x)\coloneqq\lim_{t\to\pm\infty}\varphi_t(x)$ 当 $t_\pm=\pm\infty$ 时（见 (1.10)），则成立

$$V_D(\varphi_{t_-}(x),\varphi_{t_+}(x))=0.$$

- 设 $T>0$ 和 G 是 $\mathsf{C}([0,T],M)$ 的一个非空闭子集（赋予一致收敛拓扑）。那么，下确界

$$\inf\left\{S_{0,T}(\phi),\ \ \phi\in G\right\}$$

是一个最小值。特别地，只要 G 不包含动力系统 (1.7) 在 $[0,T]$上定义的任何轨道。

第一项是 [20, 第 6] 章第 1 节中引理 1.1 的推论，并蕴含第三项；第二项则可通过直接论证证明。至于最后一项，请参阅 [20, 第 4]章定理 1.1 证明之后的评注。

引理 5. 假设 满足 (**Ortho**)。那么，对所有 $\phi\in\mathsf{C}^{x,y}([t_1,t_2],M)$, $S_{t_1,t_2}(\phi)\geq2(f(y)-f(x))$.

证明。利用 (**Ortho**)，对所有 $\phi\in\mathsf{C}^{x,y}([t_1,t_2],M)$,

$$S_{t_1,t_2}(\phi)=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}|\dot{\phi}_s-(\nabla f(\phi_s)-\boldsymbol{\ell}(\phi_s))|^2ds+2\int_{t_1}^{t_2}\dot{\phi}_s\cdot\nabla f(\phi_s)ds\geq2(f(\phi(t_2))-f(\phi(t_1))),$$

由此可得所需结论。 □

注 6. 引理 5 的证明还可得出以下结论：对于每个 $x\in D$ 和每个 $-\infty\leq t_-\leq t_+\leq+\infty$，若具有初始条件 $\psi_0(x)$ 的 $\dot{X}=\nabla f(X)-\boldsymbol{\ell}(X)$ 的解 $\psi_t(x)$ 满足 $\{\psi_t(x)\ t\in[t_-,t_+]\}\subset D$，其中 $\psi_{t_\pm}(x)\coloneqq\lim_{t\to\pm\infty}\psi_t(x)$ 当 $t_\pm=\pm\infty$ 时，则有

$$V_D(\psi_{t_-}(x),\psi_{t_+}(x))=2(\psi_{t_+}(x)-\psi_{t_-}(x)).$$

2.1.2. 关于动力系统的结构。 为了证明定理 3 我们希望使用 [20,第 6]章中的定理 5.3，并选取合适的定义域 D 使得

$$\nabla f \neq 0 \text{ on } \partial D. \tag{2.2}$$

构造 D 是下一节的目的。在此之前，我们需要检查第 6]章[20, 第 2 节开头所述的条件是否满足。更确切地说，我们需要检查是否存在有限个紧子集 K_1、.....、 K_l，属于 D，使得:

(a) 对任意满足 $\varphi_t(x) \in D$ 对所有 $t \geq 0$ 均成立的 $x \in D$，存在某个 $q \in \{1, \dots, l\}$ 使得 $\omega(x) \subset K_q$。(b) 对所有 $i \in \{1, \dots, l\}$ 以及所有 x，均有 $y \in K_i$、 $V_D(x, y) = 0$。(c) 如果 $x \in K_i$ 且 $y \notin K_i (y \in D)$，则要么 $V_D(x, y) > 0$，要么 $V_D(y, x) > 0$。

下文中，我们记 $\{y \in D, \nabla f(y) = 0\} = \{y_1, \dots, y_l\}$，并定义

$$K_i = \{y_i\}, \ \forall i \in \{1, \dots, l\}. \tag{2.3}$$

引理 7. 假设 (**Ortho**) 和 (2.2)。当紧致集 K_i， $i = 1$，.. ., l，由下式定义时(2.3)，上文的条件 (a) 和 (b) 均成立。

证明。 由 (1.9) 和 (2.2)，若 $\{\varphi_t(z) \ t \geq 0\} \subset D$，$\omega(x) = \{y\}$ 对某个临界点 y 属于 f 且位于 D中。因此，条件 (a) 成立。此外，根据 (2.1)，条件 (b) 成立。 □

条件 (c) 是下一个命题要讨论的内容。

命题8. 假设 (**Ortho**) 和 (2.2)。当紧致集 K_i， $i = 1$，.. ., l，由 (2.3)定义时，条件 (c) 成立。

下面的引理将用于证明命题 8。

引理 9. 假设 (Ortho)。设 $z \in D$ 满足 $\nabla f(z) \neq 0$，并且对于某个 $T > 0$，$\{\varphi_t(z) \ t \in [0, T]\} \subset D$。那么，对于所有满足 $f(y) > f(\varphi_T(z))$ 的 $y \in D \setminus \{\varphi_t(z) \ t \in [0, T]\}$，有 $V_D(z, y) > 0$。

证明。令 $\rho_0 = \inf\{|y - \varphi_t(z)|, 0 \leq t \leq T\} > 0$。令 $T' \in (0, T]$。由引理的最后一条 4:

$$d_{T'} := \inf\left\{S_{0,T'}(\phi), \phi \in \mathcal{C}([0, T'], M) \text{ s.t. } \phi_0 = z \text{ and } \max_{t \in [0,T']} |\phi_t - \varphi_t(z)| \geq \rho_0/2\right\} > 0.$$

于是，对于 $T' \in (0, T]$，以及 $\phi \in \mathcal{C}^{z,y}([0, T'], D)$，有 $S_{0,T'}(\phi) \geq d_{T'} \geq d_T > 0$。因此，

$$\inf\left\{S_{0,T'}(\phi), \ \phi \in \mathcal{C}^{z,y}([0, T'], \overline{D}) \text{ and } T' \in (0, T]\right\} > 0. \tag{2.4}$$

现在考虑上面在 $T' \geq T$时的下确界。令 $0 < T_1 < T_2 < T$满足$f(y) > f(\varphi_{T_1}(z))$。注意到 (1.8) 和 $\nabla f(z) \neq 0$推出

$$f(z) > f(\varphi_{T_1}(z)) > f(\varphi_{T_2}(z)).$$

由此可得

$$\varphi(z)|_{[0,T_2]} \notin G^z_{T_2} := \left\{\phi \in \mathcal{C}([0, T_2], \overline{D}), \ \phi_0 = z \text{ and, for all } t \in [0, T_2], f(\phi_t) \geq f(\varphi_{T_1}(z))\right\}$$

以及引理 4 的最后一项可推出

$$A := \inf\left\{S_{0,T_2}(\phi), \phi \in G^z_{T_2}\right\} > 0.$$

考虑 $T' \geq T$和 $\phi \in \mathbf{C}^{z,y}([0,T'],D)$。假设 $\overline{\phi \in} G_{T'}^{z}$。则 $\phi|_{[0,T_2]} \in G_{T_2}^{z}$，因此$S_{0,T'}(\phi) \geq S_{0,T_2}(\phi) \geq A$。现在假设$\phi \notin G_{T'}^{z}$，即对于某个$t \in [0,T']$，有 $f(\phi_t) < f(\varphi_{T_1}(z))$。令 $t_1 \in (0,T')$ 满足 $f(\phi_{t_1}) = f(\varphi_{T_1}(z))$。根据引理 5，有

$$S_{0,T'}(\phi) \geq S_{t_1,T'}(\phi) \geq 2(f(\phi_{T'}) - f(\phi_{t_1})) = 2(f(y) - f(\varphi_{T_1}(z))) > 0.$$

总之，对于所有 $T' \geq T$和 $\phi \in \mathbf{C}^{z,y}([0,T'],D)$, $S_{0,T'}(\overline{\phi}) \geq \min(f(y) - f(\varphi_{T_1}(z)) \ A) > 0$。结合 (2.4)，引理的证明到此结束。□

现在我们可以证明命题8。

命题8的证明。设 $x \in D$ 满足 $\overline{\nabla} f(x) = 0$，因此根据 (2.2) 有 $x \in D$。再考虑满足 $y \neq x$ 的 $y \in D$。根据引理 5，只需考虑 $f(x) = f(y)$ 的情形。由于 $x \in D$ 且 f 在 M 中只有有限个临界点，因此存在球面 $C(x,r) = \{w \in M, |w-x| = r\} \subset D$，其半径为 $0 < r < |x-y|$，使得 $|\nabla f| > 0$ 在 $C(x,r)$ 上。然后，利用引理 4 的前两项，可得存在 $z \in C(x,r)$，使得

$$V_D(x,y) = \inf_{\xi \in C(x,r)} (V_D(x,\xi) + V_D(\xi,y)) = V_D(x,z) + V_D(z,y).$$

若 $f(z) < f(x) = f(y)$，则由引理 5 可得 $V_D(x,y) \geq V_D(z,y) \geq 2(f(y)-f(z)) > 0$。类似地，若 $f(z) > f(x)$，则 $V_D(x,y) \geq V_D(x,z) \geq 2(f(z) - f(x)) > 0$。最后考虑 $f(z) = f(x)$ 的情形。由于 $z \in D$and $\nabla f(z) \neq 0$，存在 $T > 0$ 使得

$$\{\varphi_t(z), \ t \in [0,T]\} \subset \overline{D} \ \text{ and, according to } (1.8), \quad f(z) > f(\varphi_t(z)) \text{ for all } t \in (0,T].$$

利用 $f(z) = f(y)$ 和 $z \neq y$，可得 $y \notin \{\varphi_t(z) \ t \in [0,T]\}$，且 $f(y) > f(\varphi_T(z))$。因此，根据引理 9，$V_D(z,y) > 0$，进而 $V_D(x,y) > 0$，由此完成命题8的证明。□

沿用[20], 的术语，我们称子集 $N \subset M$ 是稳定的，如果对于任意 $x \in N$ 和$y \in M \setminus N$，$V_M(x, y) > 0$（参见 [20,第 6]章引理 4.2 前面的几行）。于是有:

引理 10。假设(**Ortho**)。对于 x 中 f 的 M任一临界点，集合$\{x\}$ 是稳定的（按上述定义），当且仅当 x 是 f 在 M中的局部极小值。

证明。假设 x是莫尔斯函数 f在 M中的局部极小值，并取 $y \in M \setminus \{x\}$。由于 x是严格极小值，存在 $0 < r < |x-y|$使得 $f > f(x)$ 在 $C(x,r) = \{w \in M, |w-x| = r\}$ 上成立。因此，根据引理 4，存在 $z^* \in C(x,r)$ 使得

$$V_M(x,y) = \inf_{z \in C(x,r)} (V_M(x,z) + V_M(z,y)) = V_M(x,z^*) + V_M(z^*,y).$$

此外，利用引理 5，$V_M(x, z^*) \geq f(z^*) - f(x) > 0$因此 $V_M(x, y) > 0$，这意味着 $\{x\}$是稳定的。

现在假设 x 不是 M中的局部极小值。那么，根据引理 1，x 的 $X = \boldsymbol{b}(X)$ 的不稳定流形维数至少为一，因此存在 $z^* \in M \setminus \{x\}$，使得当 $t \to -\infty$时，$\varphi_t(z^*) \to x$。由引理 4 的第三项可知，$V_M(x, z^*) = 0$，这表明 x并不稳定。□

2.1.3. Freidlin-Wentzell 图与平均退出时间。 我们先引入一些记号。设$\mathbf{L}$ 是一个有限集，且 $\mathbf{W} \subset \mathbf{L}$。由箭头组成的图 $m \to n$ (其中 $m \in \mathbf{L} \setminus \mathbf{W}$， $n \in \mathbf{L}$，且$m \neq n$) 称为 $\mathbf{W}$-图，其定义在 $\mathbf{L}$ (参见 [20, 第 3 节，章节 6] 开头，如果满足以下条件：

- 每个点 $m \in \mathbf{L} \setminus \mathbf{W}$ 恰好是一个箭头的起点，
- 图中没有闭合回路。

最后一个条件可以替换为以下条件：对于每个点 $m \in \mathbf{L} \setminus \mathbf{W}$，都存在一串箭头从 m 通向某个 $n \in \mathbf{W}$。$\mathbf{L}$ 上的 $\mathbf{W}$-图集合记为 $G^{\mathbf{L}}(\mathbf{W})$。

当条件 (a)、(b) 和 (c) 成立，且 D 中至少有一个紧子集 K_1、……、K_l 是稳定的时，我们对这些集合进行标记，使得 K_1、……、K_{p_s} 是 K_1、……、K_l 中的稳定紧集，其中 $1 \leq p_s \leq l$。在这种情况下，[20, 第 6] 章中的定理 5.3 适用，并且推出：对于每个 $x \in D$，且当 x 在 D 的紧子集中变化时，一致地有

$$\lim_{h \to 0} h \ln \mathbb{E}_x[\tau_{D^c}] \leq W_D, \quad \text{where} \quad W_D := \min_{g \in G^{\{K_1, \ldots, K_{p_s}, \partial D\}}(\{\partial D\})} \sum_{(m \to n) \in g} V_D(m, n). \tag{2.5}$$

推论 11. 假设 (Ortho)、(2.2)成立，并且 f存在 $n+1$局部极小值 x_0， x_1， ……， x_n位于 D中，且 $n \geq 0$。那么，对所有 $x \in D$，且对 x 在 D的紧子集内一致成立，

$$\lim_{h \to 0} h \ln \mathbb{E}_x[\tau_{D^c}] \leq \sum_{k=0}^{n} V_D(x_k, \partial D).$$

证明。根据 (2.3)，定义紧集 K_i, $i = 1, \ldots, l$。根据引理 7 和命题8，条件 (a)、(b) 和 (c) 均成立。此外，根据引理 10，$\{x_k\}$、 $0 \leq k \leq n$ 是 $K_1, \ldots, K_l$ 中的稳定紧集，因此 $p_s = n+1$ 和 $\{K_1, \ldots, K_{p_s}\} = \{\{x_k\}\ 0 \leq k \leq n\}$。最后，对图形 $(\{x_0\} \to \partial\Omega) \ldots, (\{x_n\} \to \partial\Omega)$ 应用 (2.5)，即可得证。□

2.2. 上界 满足以下条件时平均退出时间的上界：(Ortho) 和(One-Well) 成立 .

命题 12。 假设(Ortho) 和(One-Well) 成立。那么，对每个 $\beta > 0$，都存在 $h_0 > 0$ 使得，对所有 $h \in (0, h_0]$,

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] \leq e^{\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0))} e^{\frac{\beta}{h}}.$$

证明。 假设 (Ortho) 和 (One-Well) 成立。令

$$D_\alpha := \{x \in M, \operatorname{dist}(x, \overline{\Omega}) < \alpha\}, \ \alpha > 0.$$

对于每个 $\alpha > 0$，我们有 $\Omega \subset D_\alpha$ and $\partial D_\alpha = \{x \in M, \operatorname{dist}(x, \Omega) = \alpha\}$。此外，存在 $\alpha_0 > 0$，使得对于每个 $\alpha \in (0, \alpha_0]$, D_α 都是 M 的 C^∞ 子定义域; 并且，由于 f 的临界点在 M 中是孤立的，$\{x \in D_\alpha, \nabla f(x) = 0\} \subset \Omega$。特别地， ∂D_α 上的 $|\nabla f| > 0$ 以及 D_α 中 f 的局部极小值，分别是 Ω 中的局部极小值 x_0 和 Ω 上的局部极小值 $x_1, \ldots, x_n$。由于 Ω 是 D_α 的一个紧子集，根据推论 11 可知，对于每个 $\alpha \in (0, \alpha_0]$ 和 $\epsilon > 0$，对于所有充分小的 h，有：

$$\sup_{x \in \overline{\Omega}} \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] \leq \sup_{x \in \overline{\Omega}} \mathbb{E}_x[\tau_{D_\alpha^c}] \leq e^{\frac{2}{h} \sum_{k=0}^{n} V_{D_\alpha}(x_0, \partial D_\alpha)} e^{\frac{\epsilon}{h}}.$$

为了证明命题 12，接下来只需证明

$$V_{D_\alpha}(x_0,\partial D_\alpha)+\sum_{k=1}^{n}V_{D_\alpha}(x_k,\partial D_\alpha)\le 2(\min_{\partial\Omega} f-f(x_0))+o_\alpha(1). \tag{2.6}$$

利用引理4的第二项，对于任意 $y\in\partial D_\alpha$ 和 $z\in\partial\Omega$,

$$V_{D_\alpha}(x_0,\partial D_\alpha)\le V_{D_\alpha}(x_0,y)\le V_{D_\alpha}(x_0,z)+V_{D_\alpha}(z,y).$$

此外，根据引理5 和注6，对于任意 $z\in\partial\mathbf{C}_{\min}\cap\partial\Omega$,

$$V_{D_\alpha}(x_0,z)=2(f(z)-f(x_0))=2(\min_{\partial\Omega} f-f(x_0)).$$

因此，对于任意 $z\in\partial\mathbf{C}_{\min}\cap\partial\Omega$ 以及充分小的 $\alpha>0$,

$$V_{D_\alpha}(x_0,\partial D_\alpha)\le 2(\min_{\partial\Omega} f-f(x_0))+V_{D_\alpha}(z,\partial D_\alpha)\le 2(\min_{\partial\Omega} f-f(x_0))+\frac{1}{2}(1+\|\boldsymbol{b}\|_\infty)^2\alpha\,,$$

这里我们用到了如下事实：对于任意 $x\neq y\in M$， $\phi:t\in[0,|y-x|]\mapsto x+\frac{y-x}{|y-x|}t$满足$S_{0,|y-x|}(\phi)\le\frac{1}{2}(1+\|\boldsymbol{b}\|_\infty)^2|x-y|$。同样的论证表明 $V_{D_\alpha}(x_k,\partial D_\alpha)\le\frac{1}{2}(1+\|\boldsymbol{b}\|_\infty)^2\alpha$对于任意 $1\le k\le n$ （因为 $x_k\in\partial\Omega$）。这便推出了（2.6），从而完成了命题12的证明。□

2.3. $x\mapsto\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}]$ 与承诺函数的平坦化结果。以下结果给出了关于 $x\mapsto\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}]$的局部均化结果。

引理 13. 假设 (**Ortho**) 和 (**One-Well**) 成立。令 $\delta_1>0$ 和 $r_h=e^{-\delta_1/h}$。那么，存在$h_0>0$和 $c>0$，使得对所有 $h\in(0,h_0]$, $\sup_{x\in\bar{B}(x_0,r_h)}|\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}]-\mathbb{E}_{x_0}[\tau_{\Omega^c}]|\le e^{-\frac{c}{h}}\mathbb{E}_{x_0}[\tau_{\Omega^c}]$。

证明. 由于 (Ortho) 成立， $\boldsymbol{b}(x_0)=0$ （见（1.9））。此外，根据引理 1，矩阵 Jac $\boldsymbol{b}(x_0)$ = –(Hess $f(x_0)$ +L(x_0)) 的特征值都属于 {z $\in\mathbb{C}$, Re z <0}（特别是， x_0 是动力系统 (1.7) 的渐近稳定平衡点）。证明思路与 [48, 引理 3]的证明相同。□

记 $\tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}$ 为过程 (1.1) 首次到达闭球 $B(x_0,r_h)$ 的时间，其中回顾一下 $r_h=e^{-\delta_1/h}$, $\delta_1>0$。常数 $\delta_1>0$ 将在下文的 (2.9) 中确定。我们假设h 足够小，使得 $B(x_0,r_h)\subset\mathbf{C}_{\min}$。函数

$$x\mapsto\mathbb{P}_x[\tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}<\tau_{\Omega^c}]$$

称为 Ω 与 $B(x_0,r_h)$ 之间的 committor 函数（或平衡势）。以下结果给出了 $x\mapsto\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}]$ 在 A({x_0}) 中的（全局）均化结果。

命题 14. 假设 (**Ortho**) 和 (**One-Well**)。那么，存在 $\delta_1>0$ ，使得对任意紧子集 K 属于 $\mathcal{A}(\{x_0\})$ （见 (1.11) 和 (1.12)），存在 $h_0>0$ 和 $c>0$，使得对所有 $h\in(0,h_0]$,

$$\sup_{x\in K}\left|\mathbb{P}_x[\tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}<\tau_{\Omega^c}]-1\right|\le e^{-\frac{c}{h}}.$$

注 15. 应用 [9, 定理 2] 和 Ω = $\mathcal{A}(\{x_0\})$ 可得命题 14的一个稍弱版本，其中 $\delta_1>0$ 取决于 K。

证明。对于 $\eta \in (0, \min_{\partial\Omega} f - f(x_0))$，令

$$\mathbf{C}_{\min}(\eta) := \mathbf{C}_{\min} \cap \{f < \min_{\partial\Omega} f - \eta\} = \{x \in \Omega, f(x) < \min_{\partial\Omega} f - \eta\}. \tag{2.7}$$

集合 $\mathbf{C}_{\min}(\eta)$ 是开集且光滑的（因为 $\nabla f \neq 0$ 在 $\partial\mathbf{C}_{\min}(\eta)$ 上），并且是包含 x_0 的 $\{f < \min_{\partial\Omega} f - \eta\}$ 的连通分支（例如参见 [15, 命题 18]）。还需注意，x_0是动力系统 (1.7) 的渐近稳定平衡点。此外，对于所有 $x \in \mathbf{C}_{\min}(\eta)$ 和 $t \in \mathbb{R}^+$，(1.8) 蕴含 $\varphi_t(x) \in \mathbf{C}_{\min}(\eta)$，因而 $\lim_{t\to+\infty} \varphi_t(x) = x_0$，因为 x_0 是 f 在 $\mathbf{C}_{\min}(\eta)$ 中的唯一临界点（见 (1.10)）。

现在固定

$$\eta_0 \in (0, \min_{\partial\Omega} f - f(x_0)) \text{ and } \eta_* \in (\eta_0, \min_{\partial\Omega} f - f(x_0)). \tag{2.8}$$

成立 $\overline{\mathbf{C}}_{\min}(\eta_*) \subset \mathbf{C}_{\min}(\eta_0)$。以下取足够小的 $h > 0$，使得 $B(x_0, r_h) \subset \mathbf{C}_{\min}(\eta_*)$，其中回顾一下 $r_h = e^{-\delta_1/h}$。根据 [9, 定理 2]，，存在 $\delta_1 > 0$（此处固定不变）、$h_0 > 0$ 和 $c > 0$，使得对所有 $h \in (0, h_0]$:

$$\sup_{y\in\overline{\mathbf{C}}_{\min}(\eta_*)} \mathbb{P}_y\left[\tau_{\mathbf{C}^c_{\min}(\eta_0)} \leq \tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}\right] \leq e^{-\frac{c}{h}}. \tag{2.9}$$

由于过程 (1.1) 的轨迹连续，对于所有 $y \in \mathbf{C}_{\min}(\eta_*)$，当 $X_0 = y$ 时都有 $\{\tau_{\Omega^c} < \tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}\} \subset \{\tau_{\mathbf{C}^c_{\min}(\eta_0)} < \tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}\}$，因此（同时利用 $\{\tau_{\Omega^c} = \tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}\} = \varnothing$）：

$$\sup_{y\in\overline{\mathbf{C}}_{\min}(\eta_*)} \mathbb{P}_y\left[\tau_{\Omega^c} \leq \tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}\right] \leq e^{-\frac{c}{h}}, \tag{2.10}$$

这就证明了当 $K = \mathbf{C}_{\min}(\eta_*)$ 时的命题。现在考虑 $K \subset A(\{x_0\})$ 的情形。根据 (2.10)，只需处理 $K \subset \Omega \setminus \mathbf{C}_{\min}(\eta_*)$ 的情形。取$K \subset \Omega \setminus \mathbf{C}_{\min}(\eta_*)$，使得 $K \subset A(\{x_0\})$。回顾一下，这意味着对于所有 $x \in K$，$\varphi_t(x)$ 对所有 $t \geq 0$ 均属于 $\in \Omega$，且 $\lim_{t\to+\infty} \varphi_t(x) = x_0$。于是，存在 $T_K > 0$，使得对所有$x \in K$，$\varphi_{T_K}(x) \in \mathbf{C}_{\min}(\eta_*)$。集合 $\{\varphi_{T_K}(x)\ x \in K\}$ 是开集 $\mathbf{C}_{\min}(\eta_*)$ 的紧子集，而 Ω 的紧子集 $\{\varphi_t(x), (x,t) \in K \times [0, T_K]\}$ 不包含 $x_0 \notin K$。因此，我们可以取足够小的 $\delta > 0$，使得:

C1. $\{\varphi_{T_K}(x) + z, x \in K$和 $|z| \leq \delta\} \subset \mathbf{C}_{\min}(\eta_*)$, C2. $x_0 \notin K_{T_K,\delta} := \{$
$\varphi_t(x) + z, (x,t) \in K \times [0, T_K]$和 $|z| \leq \delta\}$.

根据上面的 C2，对于任意足够小的 h，$B(x_0, r_h) \cap K_{T_K,\delta} = \varnothing$。那么，对于所有 $x \in K$，若 $X_0 = x$且 $\sup_{t\in[0,T_K]} |X_t - \varphi_t(x)| \leq \delta$:

$$T_K < \tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}. \tag{2.11}$$

此外，根据 [10, 引理 1] 及其注释，由于 M 是紧致的，存在 $c' > 0$ 使得对所有 h 充分小的:

$$\sup_{x\in M} \mathbb{P}_x\Big[\sup_{t\in[0,T_K]} |X_t - \varphi_t(x)| > \delta\Big] \leq e^{-\frac{c'}{h}}. \tag{2.12}$$

另一方面，根据上文的条件 C1，若 $X_0 = x \in K$ 且 $\sup_{t\in[0,T_K]}|X_t - \varphi_t(x)| \le \delta$，则成立 $X_{T_K} \in \mathbf{C}_{\min}(\eta_*)$。于是，对所有 $x \in K$，利用马尔可夫性质和（2.11），可得

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\Big[\tau_{\bar B(x_0,r_h)} < \tau_{\Omega^c},\ \sup_{t\in[0,T_K]}|X_t-\varphi_t(x)|\le\delta\Big] &= \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{E}_{X_{T_K}}\big[\mathbf{1}_{\tau_{\bar B(x_0,r_h)}<\tau_{\Omega^c}}\big]\mathbf{1}_{\sup_{t\in[0,T_K]}|X_t-\varphi_t(x)|\le\delta}\Big]\\ &\ge (1-e^{-\frac{c}{h}})\mathbb{P}_x\Big[\sup_{t\in[0,T_K]}|X_t-\varphi_t(x)|\le\delta\Big]\\ &\ge (1-e^{-\frac{c}{h}})(1-e^{-\frac{c'}{h}}),\end{aligned}$$

其中，我们在第二个和第三个等式中分别使用了（2.10）和（2.12）。总之，我们已证明，对于某个 $c>0$ 以及任意足够小的 h，$\sup_{x\in K}|\mathbb{P}_x[\tau_{\bar B(x_0,r_h)} < \tau_{\Omega^c}]-1| \le e^{-\frac{c}{h}}$，由此完成了命题14的证明。□

命题 16. 假设 (Ortho) 和 (One-Well)。那么，对于每个 $\eta_* \in (0, \min_{\partial\Omega} f - f(x_0))$，存在 $h_0 > 0$ 和 $c > 0$，使得对所有 $h \in (0, h_0]$，

$$\sup_{x\in\overline{\mathbf{C}}_{\min}(\eta_*)} \mathbb{E}_x[\tau_{\bar B(x_0,r_h)} \wedge \tau_{\Omega^c}] \le e^{\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0))}e^{-\frac{c}{h}},$$

其中 $\mathbf{C}_{\min}(\eta_*)$ 定义见 (2.7)。

证明。 命题 16 的证明受到 [10, 引理 6]的启发。取 $\eta_0 \in (0, \eta^*)$。为简化记号，设

$$K := \overline{\mathbf{C}}_{\min}(\eta_*) \quad \text{and} \quad D' := \mathbf{C}_{\min}(\eta_0).$$

回顾一下，$K \subset D' \subset \mathsf{A}(\{x_0\})$，并假设 $h > 0$ 足够小，使得 $B(x_0, r_h) \subset \operatorname{int} K$（见（2.8）及其下方的文字）。根据第 4] 章中的 [20, 定理 3.1 和定理 4.1（注意 $n_{\mathbf{C}_{\min}(\eta)} = \nabla f/|\nabla f|$，进而利用 (Ortho)，$\boldsymbol{b}\cdot n_{\mathbf{C}_{\min}(\eta)} > 0$ 在 $\partial\mathbf{C}_{\min}(\eta)$上），对于 D'的紧集中的 y，上述结果一致成立：

$$\lim_{h\to 0} h \ln \mathbb{E}_y[\tau_{D'^c}] = 2(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0) - \eta_0). \tag{2.13}$$

特别地，对于每个 $\beta > 0$ 以及每个足够小的 h，

$$A_h^{D'} := \sup_{y\in K}\mathbb{E}_y[\tau_{D'^c}] \le e^{\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0) - \eta_0)}e^{\frac{\beta}{h}}. \tag{2.14}$$

类似地，根据命题12，对于每个 $\beta > 0$ 以及每个 h 足够小的，

$$A_h^{\Omega} := \sup_{x\in\overline{\Omega}}\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] \le e^{\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0))}e^{\frac{\beta}{h}}. \tag{2.15}$$

此外，利用强马尔可夫性质，对于所有 $x \in K$，我们有：

$$\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] = \mathbb{E}_x[\tau_{\bar B(x_0,r_h)} \wedge \tau_{\Omega^c}] + \mathbb{E}_x\Big[\mathbf{1}_{\tau_{\Omega^c}>\tau_{\bar B(x_0,r_h)}}\mathbb{E}_{X_{\tau_{\bar B(x_0,r_h)}}}[\tau_{\Omega^c}]\Big]. \tag{2.16}$$

此外，由过程轨迹的连续性（1.1），我们有 $\tau_{D'^c} < \tau_{\Omega^c}$ 当 $X_0 = y \in B(x_0, r_h)$。因此，利用强马尔可夫性质，

$$\mathbb{E}_{X_{\tau_{\bar B(x_0,r_h)}}}[\tau_{\Omega^c}] \ge \mathbb{E}_{X_{\tau_{\bar B(x_0,r_h)}}}[\tau_{\Omega^c} - \tau_{D'^c}] = \mathbb{E}_{X_{\tau_{\bar B(x_0,r_h)}}}\Big[\mathbb{E}_{X_{\tau_{D'^c}}}[\tau_{\Omega^c}]\Big]. \tag{2.17}$$

对于 $x \in D'$，设 μ_x^h 在 $\partial D'$ 上，对于过程 (1.1) 在 $X_0 = x$时的命中分布，即 .:

$$\mu_x^h(B) = \mathbb{P}_x[X_{\tau_{D'^c}} \in B], \text{ for every Borel subset } B \text{ of } \partial D'. \tag{2.18}$$

紧接在 (D' 之后列出的2.7) 的性质，使我们可以应用 [9, 定理 1] （另见其中的公式 (5.1)），从而得到 $\|\mu_x^h - \mu_y^h\| \leq e^{-\frac{c}{h}}$关于 x一致成立， $y \in K$（其中 $\|\cdot\|$是全变差距离）。利用这一结果以及 (2.17) 和 $y = X_{\tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}}$，由 (2.16) 可推出，对所有 $x \in K$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] &\geq \mathbb{E}_x[\tau_{\bar{B}(x_0,r_h)} \wedge \tau_{\Omega^c}] + \mathbb{E}_x\Big[\mathbf{1}_{\tau_{\Omega^c} > \tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}} \mathbb{E}_{X_{\tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}}}\big[\mathbb{E}_{X_{\tau_{D'^c}}}[\tau_{\Omega^c}]\big]\Big] \\
&\geq \mathbb{E}_x[\tau_{\bar{B}(x_0,r_h)} \wedge \tau_{\Omega^c}] + \mathbb{E}_x\Big[\mathbf{1}_{\tau_{\Omega^c} > \tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}} \Big(\mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}_{X_{\tau_{D'^c}}}[\tau_{\Omega^c}]\big] - A_h^{\Omega} e^{-\frac{c}{h}}\Big)\Big] \\
&\geq \mathbb{E}_x[\tau_{\bar{B}(x_0,r_h)} \wedge \tau_{\Omega^c}] + \mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c} > \tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}]\, \mathbb{E}_x\big[\mathbb{E}_{X_{\tau_{D'^c}}}[\tau_{\Omega^c}]\big] - A_h^{\Omega} e^{-\frac{c}{h}}.
\end{aligned}$$

另一方面，根据强马尔可夫性质，对于所有 $x \in K$， $\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] = \mathbb{E}_x[\tau_{D'^c}] + \mathbb{E}_x[\,\mathbb{E}_{X_{\tau_{D'^c}}}[\tau_{\Omega^c}]\,]$。由此可得，对于所有 $x \in K$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[\tau_{\bar{B}(x_0,r_h)} \wedge \tau_{\Omega^c}] &\leq (1 - \mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c} > \tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}])\, \mathbb{E}_x[\,\mathbb{E}_{X_{\tau_{D'^c}}}[\tau_{\Omega^c}]\,] + A_h^{\Omega} e^{-\frac{c}{h}} + \mathbb{E}_x[\tau_{D'^c}] \\
&\leq (1 - \mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c} > \tau_{\bar{B}(x_0,r_h)}])\, A_h^{\Omega} + A_h^{\Omega} e^{-\frac{c}{h}} + A_h^{D'},
\end{aligned}$$

这意味着命题 16，利用（2.14）、（2.15）以及命题 14 （取 $K = \mathbf{C}_{\min}(\eta_*)$ ）。 □

定理 3。 假设 （**Ortho**）和 （**One-Well**）。设 K 是 $\mathcal{A}(\{x_0\})$ 的一个紧子集 （见（1.11）和 （1.12））。那么，存在 $h_0 > 0$ 和 $c > 0$ 使得，对于所有 $h \in (0, h_0]$ 且在 $x \in K$上均匀成立:

$$\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] = \mathbb{E}_{x_0}[\tau_{\Omega^c}](1 + O(e^{-\frac{c}{h}})) \text{ and } \lim_{h\to 0} h \ln \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] = 2(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0)).$$

证明。 首先，根据命题 12、（2.13），以及 $\mathbb{E}_y[\tau_{D'^c}] \leq \mathbb{E}_y[\tau_{\Omega^c}]$对所有 $y \in D'$成立这一事实，我们有，在 y 的紧集上关于 D'一致成立:

$$\lim_{h\to 0} h \ln \mathbb{E}_y[\tau_{\Omega^c}] = 2(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0)). \tag{2.19}$$

设 K 是 $\mathcal{A}(\{x_0\})$ 的一个紧子集。首先假设 $K = \mathbf{C}_{\min}(\eta_*)$ (见 (2.7) 和 (2.8))。利用 (2.16)、引理 13 和命题 16 及 14，可得其关于 $x \in K$一致:

$$\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] = \mathbb{E}_{x_0}[\tau_{\Omega^c}](1 + O(e^{-\frac{c}{h}})) + O(e^{\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0))} e^{-\frac{c}{h}}).$$

此外，利用 (2.19) 及 $y = x_0 \in D'$，可推得存在某个 $c > 0$ ，并且关于$x \in K = \mathbf{C}_{\min}(\eta_*)$一致地，对每个足够小的 h 均成立:

$$\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] = \mathbb{E}_{x_0}[\tau_{\Omega^c}](1 + O(e^{-\frac{c}{h}})). \tag{2.20}$$

这就证明了在 $K = \mathbf{C}_{\min}(\eta_*)$ 的情形下的定理 3 。现在考虑一般情形 $K \subset \mathcal{A}(\{x_0\})$。设 $T_K \geq 0$ 满足 $\varphi_{T_K}(x) \in \mathbf{C}_{\min}(\eta_*)$ 对所有 $x \in K$均成立，并取足够小的 $\delta > 0$ 使得:

- $\{\varphi_t(x) + z, (x,t) \in K \times [0, T_K]$和 $|z| \leq \delta\} \subset \Omega$,
- $\{\varphi_{T_K}(x) + z, x \in K$和 $|z| \leq \delta\} \subset \mathbf{C}_{\text{最小}}(\eta_*)$。

这两个条件意味着，对所有 $x \in K$，如果 $X_0 = x$ 且 $\sup_{t\in[0,T_K]} |X_t - \varphi_t(x)| \leq \delta$:

$$T_K < \tau_{\Omega^c} \text{ and } X_{T_K} \in \mathbf{C}_{\min}(\eta_*). \tag{2.21}$$

由 马尔可夫性质，（2.21），（2.12），以及（2.20），我们对所有 $x \in K$ 都有一致成立:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}\, \mathbf{1}_{\sup_{t\in[0,T_K]} |X_t - \varphi_t(x)| \leq \delta}] &= T_K \mathbb{P}_x\Big[\sup_{t\in[0,T_K]} |X_t - \varphi_t(x)| \leq \delta\Big] \\
&\quad + \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{E}_{X_{T_K}}[\tau_{\Omega^c}]\, \mathbf{1}_{\sup_{t\in[0,T_K]} |X_t - \varphi_t(x)| \leq \delta}\Big] \\
&= T_K(1 + O(e^{-\frac{c}{h}})) + \mathbb{E}_{x_0}[\tau_{\Omega^c}](1 + O(e^{-\frac{c}{h}}))
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\big[\tau_{\Omega^c}\mathbf{1}_{\sup_{t\in[0,T_K]}|X_t-\varphi_t(x)|>\delta}\mathbf{1}_{T_K<\tau_{\Omega^c}}\big] &= T_K\mathbb{P}_x\big[\sup_{t\in[0,T_K]}|X_t-\varphi_t(x)|>\delta, T_K<\tau_{\Omega^c}\big]\\ &\quad+\mathbb{E}_x\Big[\mathbb{E}_{X_{T_K}}\big[\tau_{\Omega^c}\big]\mathbf{1}_{\sup_{t\in[0,T_K]}|X_t-\varphi_t(x)|>\delta}\mathbf{1}_{T_K<\tau_{\Omega^c}}\Big]\\ &= T_K O(e^{-\frac{c}{h}})+\mathbb{E}_{x_0}\big[\tau_{\Omega^c}\big]O(e^{-\frac{c}{h}}).\end{aligned}$$

另一方面，利用（2.12），对每个 $x\in K$ 均有：

$$\mathbb{E}_x\big[\tau_{\Omega^c}\mathbf{1}_{\sup_{t\in[0,T_K]}|X_t-\varphi_t(x)|>\delta}\mathbf{1}_{\tau_{\Omega^c}\le T_K}\big]\le T_K e^{-\frac{c}{h}}.$$

结合前面的三个估计可得 $\mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}]=\mathbb{E}_{x_0}[\tau_{\Omega^c}](1+O(e^{-\frac{c}{h}}))$ 对所有足够小的 h 均成立，且对 $x\in K$一致成立。至此，定理 3 的证明结束。□

3. Spectral analysis of $\mathrm{Re}\,(P_h)$ and of P_h

回顾一下，本文始终假设（**Ortho**）。

3.1. 对 P_h 的实部进行分析。本节旨在对该算子进行初步谱分析（见命题 3）

$$\mathrm{Re}\,(P_h):=\frac{1}{2}(P_h+P_h^*)=\Delta_{f,h}+2\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla f-h\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\ell}=\Delta_{f,h}-h\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\ell}$$

其定义域为 $D(\mathrm{Re}\,(P_h))=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)=D(P_h)=D(P_h^*)$。该算子是自伴的，具有紧预解式，并且是闭二次型的 Friedrichs 扩张

$$u\in H_0^1(\Omega)\mapsto\int_\Omega|\nabla_{f,h}u|^2-h\int_\Omega(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\ell})\,|u|^2\,. \tag{3.1}$$

因此，它有下界 $-h\|\mathrm{div}\,\boldsymbol{\ell}\|_{L^\infty(\Omega)}$，于是

$$\sigma(\mathrm{Re}\,(P_h))\subset[-h\|\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\ell}\|_{L^\infty(\Omega)},+\infty).$$

当 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\ell}=0$ 时，算子 $\mathrm{Re}\,(P_h)$ 就是 Witten 拉普拉斯算子 $\Delta_{f,h}$（见（1.13））， 其定义域为 $D(\Delta_{f,h})=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，且特别地是正的。现在我们定义

$$\mathsf{U}_0=\{x\in\Omega,\ x\text{ is a local minimum of }f\ \}\quad\text{and}\quad\mathsf{m}_0:=\mathrm{Card}(\mathsf{U}_0)<+\infty^{3}. \tag{3.2}$$

于是，根据 [35, 定理 1], 存在 $c_0>0$ 和 $h_0>0$，使得对所有 $h\in(0,h_0]$:

$$\dim\ \mathrm{Ran}\,\pi_{[0,c_0h]}\big(\Delta_{f,h}\big)=\ \mathsf{m}_0, \tag{3.3}$$

其中，对于博雷尔集 $I\subset\mathbb{R}$，$\pi_I(\Delta_{f,h})$ 表示与 $\Delta_{f,h}$ 和 I 相关的谱投影。为简化记号，我们设

$$\pi_h^\Delta:=\pi_{[0,c_0h]}\big(\Delta_{f,h}\big). \tag{3.4}$$

此外，$\Delta_{f,h}$ 在 $[0,c_0h]$ 中的 m_0 特征值在 $h\to0$的极限下呈指数级小，也就是说，存在 $c>0$，使得对于任意足够小的 $h>0$，

$$\sigma(\Delta_{f,h})\cap[0,c_0h]\subset[0,e^{-\frac{c}{h}}]. \tag{3.5}$$

[3]我们回顾一下，f 根据 M（**Ortho**），在其中只有有限个临界点。

此外，由于 (Ortho) 成立，我们可以应用 [34, 引理 3.1]：对于 f的每个临界点 $\mathbf{u} \in M$，都存在一个在 $\mathbf{u}$ 附近定义、取值于 $\mathsf{M}_d(\mathbb{R})$ 的光滑映射 J，使得 $J(\mathbf{u})$ 是反对称的，并且 $\boldsymbol{\ell}(x) = J(x)\nabla f(x)$ 在 $\mathbf{u}$ 附近成立。因此，

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{\ell}(\mathbf{u}) &= \operatorname{Tr}\big(J(\mathbf{u})\operatorname{Hess} f(\mathbf{u})\big) = \operatorname{Tr}\big(\operatorname{Hess} f(\mathbf{u})J(\mathbf{u})\big)\\ &= \operatorname{Tr}\big({}^t\big(\operatorname{Hess} f(\mathbf{u})J(\mathbf{u})\big)\big) = -\operatorname{Tr}\big(J(\mathbf{u})\operatorname{Hess} f(\mathbf{u})\big),\end{aligned}$$

因此：

$$\text{for every critical point } \mathbf{u}\in M \text{ of } f,\quad \operatorname{div}\boldsymbol{\ell}(\mathbf{u}) = 0. \tag{3.6}$$

上述分析结合谱理论和半经典分析中关于 Schr¨odinger 算子的标准工具（例如参见 [8, 16]）得到以下命题。证明基本上依赖于这样一个事实：(3.6) 意味着 $\operatorname{Re}(P_h)$ 是 $\Delta_{f,h}$的一个 $O(h^{\frac{3}{2}})$ 阶扰动。

命题 17. 假设 (**Ortho**) 成立。那么，存在 $C, c > 0$ 和 $h_0 > 0$ 使得，对于所有 $h \in (0, h_0]$，计重数计算特征值时，有

$$\sigma(\operatorname{Re}(P_h)) \cap (-\infty, ch] \subset [-Ch^{\frac{3}{2}}, e^{-\frac{c}{h}}] \quad \textit{and} \quad \operatorname{Card}\big(\sigma(\operatorname{Re}(P_h)) \cap (-\infty, ch]\big) = \mathsf{m}_0,$$

其中 m_0 定义见 (3.2)。

此外，存在 $c_1 > 0$ 和 $h_0 > 0$ 使得，对于所有 $h \in (0, h_0]$：

$$\forall u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \quad \langle \operatorname{Re}(P_h)(1-\pi_h^{\Delta})u, (1-\pi_h^{\Delta})u\rangle_{L^2} \geq c_1 h \|(1-\pi_h^{\Delta})u\|_{L^2}^2,$$

其中 π_h^{Δ}是与 Δ_f相关联的谱投影，h 而区间 $[0, c_0 h]$ （见 (3.4)）。

注意，算子 $\operatorname{Re}(P_h)$ 的谱事先并不包含于 $[0, +\infty)$。

证明。定义 $\mathsf{m} := \operatorname{Card}(\{x \in \Omega \quad \nabla f(x) = 0\})$，并且当 $\mathsf{m}_0 > 0$时，将 $x_1, \dots, x_{\mathsf{m}}$中的元素排序$\{x \in \Omega \quad \nabla f(x) = 0\}$，使其满足（见（3.2））

$$\{x_1, \dots, x_{\mathsf{m}_0}\} = \mathsf{U}_0.$$

对于每个 $x_j \in \Omega$，我们考虑 Ω 中包含 x_j 的一个光滑开连通邻域 O_j，使得$\overline{O_j} \subset \Omega$。此外，当 $j \in \{1, \dots, \mathsf{m}_0\}$ 时，我们还假设 x_j 是 f 在 $\overline{O_j}$ 中取得其最小值的唯一点。类似地，当 $x_j \in \partial\Omega$ 时，我们考虑一个光滑开集 $O_j \subset \Omega$，使得 $\overline{O_j}$ 是 Ω 中 x_j 的一个邻域。此外，我们假设当 $i \neq j$ 时 $\overline{O_i} \cap \overline{O_j} = \varnothing$，因此每个 $\overline{O_i}$ 恰好包含 f 的一个临界点 x_i，且该点位于其内部。

步骤 1. 我们首先证明存在 $c > 0$，使得对于所有足够小的 $h > 0$，

$$\dim \operatorname{Ran} \pi_{(-\infty, e^{-\frac{c}{h}}]}\big(\operatorname{Re}(P_h)\big) \geq \mathsf{m}_0. \tag{3.7}$$

当 $\mathsf{m}_0 = 0$ 时，这显然成立。当 $\mathsf{m}_0 > 0$ 时，对于每个 $j \in \{1, \dots, \mathsf{m}_0\}$，我们引入一个截断函数 $\chi_j \in \mathsf{C}_c^{\infty}(O_j)$，使得在 x_j 的一个邻域内 $\chi_j = 1$，并且

$$\psi_j := \frac{\chi_j e^{-\frac{f}{h}}}{\|\chi_j e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2}}. \tag{3.8}$$

由于 x_j 是 f 在 $\operatorname{supp}\chi_j \subset O_j$ 上取得最小值的唯一点，根据标准的拉普拉斯渐近，当 $h \to 0$ 时，

$$\|\chi_j e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2}^2 = \frac{(\pi h)^{\frac{d}{2}}}{(\det \operatorname{Hess} f(x_j))^{\frac{1}{2}}} e^{-2\frac{f(x_j)}{h}}\big(1 + O(h)\big).$$

此外，利用 $\chi_j = 1$ 在 x_j 附近这一事实，因此 $f - f(x_j) > 2c_j$ 在 $\operatorname{supp} \nabla\chi_j$ 上对某个 $c_j > 0$ 成立，我们在 $h \to 0$ 时有：

$$\|\Delta_{f,h}\psi_j\|_{L^2} = \frac{h}{\|\chi_j e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2}} \|(-h\operatorname{div} + \nabla f\cdot)(e^{-\frac{f}{h}}\nabla\chi_j)\|_{L^2} \le e^{-\frac{c_j}{h}}. \tag{3.9}$$

由于更多 在除以 $\ell(x_j) = 0$ 根据（3.6），当 $h \to$ 时，拉普拉斯渐近给出 0,

$$\|(\operatorname{div}\ell)\psi_j\|_{L^2} = O(h^{\frac{1}{2}}). \tag{3.10}$$

上述两个关系可推出以下结论，后文将用到：

$$\|\operatorname{Re}(P_h)\psi_j\|_{L^2} = \|(\Delta_{f,h} - h\operatorname{div}\ell)\psi_j\|_{L^2} = O(h^{\frac{3}{2}}). \tag{3.11}$$

此外，利用（3.1）、分部积分、（**Ortho**）以及 $f - f(x_j) > 2c_j$ 在 $\operatorname{supp} \nabla\chi_j$ 上，当 $h \to 0$ 时成立：

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{Re}(P_h)\psi_j, \psi_j\rangle_{L^2} &= \frac{h^2}{\|\chi_j e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2}^2}\int_{O_j} |\nabla\chi_j|^2 e^{-2\frac{f}{h}} - \frac{h}{\|\chi_j e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2}^2}\int_{O_j} \operatorname{div}\ell\,\chi_j^2\, e^{-2\frac{f}{h}} \\ &= \frac{h^2}{\|\chi_j e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2}^2}\int_{O_j} |\nabla\chi_j|^2 e^{-2\frac{f}{h}} + 2\frac{h}{\|\chi_j e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2}^2}\int_{O_j} \chi_j\,\ell\cdot\nabla\chi_j\, e^{-2\frac{f}{h}} \le e^{-\frac{c_j}{h}}.\end{aligned}$$

由于 ψ_j， $j \in \{1, \ldots\ldots, \mathsf{m}_0\}$ 在 $L^2(\Omega)$ 中归一化且支集互不相交，由极小极大原理可知，$\operatorname{Re}(P_h)$ 至少有 $c := \min(c_1, \ldots\ldots, c_{\mathsf{m}_0})$ 个 m_0 特征值小于 $e^{-\frac{c}{h}}$，当 $h \to 0$ 时；这证明了（3.7）。

步骤 2. 让我们 现在证明存在 $c_1 > 0$，使得对于每个足够小的 $h > 0$ ：

$$\forall u \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega), \quad \langle \operatorname{Re}(P_h)(1-\pi_h^{\Delta})u, (1-\pi_h^{\Delta})u\rangle_{L^2} \ge c_1 h\|(1-\pi_h^{\Delta})u\|_{L^2}^2. \tag{3.12}$$

为此，我们首先定义一个截断函数 $\chi \in \mathsf{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^d, [0,1])$，使得 $\chi = 1$ 属于 $\{|x| \le 1\}$，$\chi = 0$ 属于 $\{|x| \ge 2\}$，且 $\sqrt{1-\chi^2} \in \mathsf{C}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$。然后，对于每个 $j \in \{1, \ldots, \mathsf{m}\}$，我们在 Ω 上定义如下光滑函数：

$$\chi_{j,h} : x \in \overline{\Omega} \longmapsto \chi(h^{-\varepsilon}(x - x_j)) \in \mathbb{R}^+,$$

其中 $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ 任意但固定。特别地，对于每个足够小的 $h > 0$，当 $x_j \in \Omega$ 时，$\operatorname{supp}\chi_{j,h} \subset O_j$；当 $x_j \in \partial\Omega$ 时，$\overline{O_j}$ 是 Ω 中 $\operatorname{supp}\chi_{j,h}$ 的一个邻域。最后，我们定义光滑函数

$$\chi_{0,h} : x \in \overline{\Omega} \longmapsto \Big(1 - \sum_{j=1}^{\mathsf{m}} \chi_{j,h}^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

使得 $\sum_{j=0}^{\mathsf{m}} \chi_{j,h}^2 = 1$ 在 Ω 上。

步骤 2a. 在 $\operatorname{supp}\chi_{0,h}$ 上的分析。由于 $\operatorname{supp}\chi_{0,h}$ 与 Ω 中莫尔斯函数 f 的临界点集之间的距离大于 h^{ε}，因此存在 $c > 0$，使得对每个足够小的 $h > 0$，在 $\operatorname{supp}\chi_{0,h}$ 上都有 $|\nabla f(x)|^2 \ge 3ch^{2\varepsilon}$。由于 $2\varepsilon < 1$，可知对每个足够小的 $h > 0$ 以及每个 $u \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$：

$$\begin{aligned}\langle \operatorname{Re}(P_h)\chi_{0,h}u, \chi_{0,h}u\rangle_{L^2} &= \langle(-h^2\Delta + |\nabla f|^2 - h\Delta f - h\operatorname{div}\ell)\chi_{0,h}u, \chi_{0,h}u\rangle_{L^2} \\ &\ge \langle(|\nabla f|^2 - h\Delta f - h\operatorname{div}\ell)\chi_{0,h}u, \chi_{0,h}u\rangle_{L^2} \\ &\ge 2ch^{2\varepsilon}\|\chi_{0,h}u\|_{L^2}^2.\end{aligned} \tag{3.13}$$

步骤 2b. 对 $\mathrm{supp}\chi_{j,h}$ 在 $x_j \notin \mathsf{U}_0$ 时的分析。在此情形下，有 $O_j \cap \mathsf{U}_0 = \varnothing$。将[35, 定理 1] 应用于 Witten 拉普拉斯算子 $\Delta_f^{O_j,h}$，其定义域为 $D(\Delta_{f\,h}^{O_j}) = H^2(O_j) \cap H_0^1(O_j)$，由此可知存在 $c>0$，使得对每个足够小的 $h>0$，

$$\dim\ \mathrm{Ran}\ \pi_{[0,3ch]}\big(\Delta_{f,h}^{O_j}\big) = 0.$$

由此可知，对于每个足够小的 $h>0$，以及每个 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega$):

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Re}\,(P_h)\chi_{j,h}u, \chi_{j,h}u\rangle_{L^2} &= \langle(\Delta_{f,h}^{O_j} - h\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\ell})\chi_{j,h}u, \chi_{j,h}u\rangle_{L^2} \\ &\geq \langle(3ch - h\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\ell})\chi_{j,h}u, \chi_{j,h}u\rangle_{L^2} \\ &= \big(3ch + O(h^{1+\varepsilon})\big)\|\chi_{j,h}u\|_{L^2}^2 \ \geq\ 2ch\|\chi_{j,h}u\|_{L^2}^2, \end{aligned} \tag{3.14}$$

其中，为了得到最后一个不等式，我们利用了 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{\ell}(x_j) = 0$ (见（3.6）) 以及 $\mathrm{supp}\ \chi_{j,h} \subset \{|x - x_j| \leq 2h^{\varepsilon}\}$，这意味着对于每个足够小的 $h>0$，在 $\mathrm{supp}\ \chi_{j,h}$ 上都有 $\|\mathrm{div}\ \boldsymbol{\ell}\|_{L^\infty} = O(h^{\varepsilon})$。

步骤 2c. 对 $\mathrm{supp}\,\chi_{j,h}$ 在 $x_j \in \mathsf{U}_0$. 上的分析。在这种情况下，有 $O_j \cap \mathsf{U}_0 = \{x_j\}$，再次将 [35, 定理 1] 应用于 Witten 拉普拉斯算子 $\Delta_f^{O_j,h}$，其定义域为 $D(\Delta_{f\,h}^{O_j}) = H^2(O_j) \cap H_0^1(O_j)$，即可推出存在 $c>0$，使得对于每个足够小的 $h>0$，

$$\dim\ \mathrm{Ran}\ \pi_{[0,3ch]}\big(\Delta_{f,h}^{O_j}\big) = 1. \tag{3.15}$$

定义

$$\psi_{j,h} := \frac{\chi_{j,h}e^{-\frac{f}{h}}}{\|\chi_{j,h}e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2}} \in \mathcal{C}_c^\infty(O_j, \mathbb{R}^+)$$

并注意到$\psi_{j,h}$ 二者既属于 $D(\Delta_{f\,h}^{O_j})$，也属于 $D(\Delta_{f,h})$。此外，利用 $\mathrm{supp}\chi_{j,h} \subset \{|x - x_j| \leq 2h^{\varepsilon}\}$、尾部估计和拉普拉斯渐近，有 $c'>0$ 存在，使得对于任意足够小的$h>0$，

$$\langle \Delta_{f,h}\psi_{j,h}, \psi_{j,h}\rangle_{L^2} = \frac{h^2}{\|\chi_{j,h}e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2}^2}\int_{O_j} |\nabla\chi_{j,h}|^2 e^{-2\frac{f}{h}} \leq e^{-2c'\frac{h^{2\varepsilon}}{h}}.$$

因此，利用谱估计

$$\forall b>0,\ \forall u \in Q(T),\ \big\|\pi_{[b,+\infty)}(T)\,u\big\|^2 \leq \frac{q_T(u)}{b}, \tag{3.16}$$

其中 $b = 3ch$ 和 $T = \Delta_{f\,h}^{O_j}$，对于希尔伯特空间 $(\mathsf{H}\ \|\cdot\|)$ 上任意非负自伴算子 $(T, D(T))$ 及其对应的二次型 $(q_T, Q(T))$ 均成立，我们得到（因为 $2\varepsilon<1$）

$$\pi_h^{\Delta,O_j}\psi_{j,h} = \psi_{j,h} + O(e^{-c'\frac{h^{2\varepsilon}}{h}})\ \text{ in } L^2(O_j), \tag{3.17}$$

为简洁起见，我们令 $\pi^{\Delta}_{,h}{}^{O_j} := \pi_{[0,3ch]}(\Delta_{f\,h}^{O_j},)$。特别地，根据 (3.15)，$\pi^{\Delta,h}{}^{O_j}$ 是 $\mathrm{Span}(\Psi_j)$上的正交投影算子，其中还利用了 (3.17)，

$$\Psi_j := \frac{\pi_h^{\Delta,O_j}\psi_{j,h}}{\|\pi_h^{\Delta,O_j}\psi_{j,h}\|} = \psi_{j,h} + O(e^{-c'\frac{h^{2\varepsilon}}{h}})\ \text{ in } L^2(O_j). \tag{3.18}$$

注 l　最后，针对 $\chi_{j,h}\psi_{j,h}$, $b = c_0h$ 和 $T = \Delta_{f,h}$ 进行相同的分析，表明 at

$$\pi_h^{\Delta}(\chi_{j,h}\psi_{j,h}) = \chi_{j,h}\psi_{j,h} + O(e^{-c'\frac{h^{2\varepsilon}}{h}})\ \text{ in } L^2(\Omega). \tag{3.19}$$

现在我们可以完成这一步了。回想一下，$\operatorname{div}\ell(x_j)=0$ 且 $\operatorname{supp}\chi_{j,h}\subset\{|x-x_j|\le 2h^\varepsilon\}$ 意味着，对于每个足够小的 $h>0$，在 $\operatorname{supp}\chi_{j,h}$ 上都有 $\operatorname{div}\ell\|_{L^\infty}=O(h^\varepsilon)$。因此，对于每个足够小的 $h>0$ 以及每个 $u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，令 $w:=(1-\pi_h^\Delta)u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，我们有

$$\langle \operatorname{Re}(P_h)\chi_{j,h}w,\chi_{j,h}w\rangle_{L^2}=\langle \Delta_{f,h}^{O_j}\chi_{j,h}w,\chi_{j,h}w\rangle_{L^2}+O(h^{1+\varepsilon})\|\chi_{j,h}w\|_{L^2}^2.$$

因此，另外利用（3.15），

$$\langle \operatorname{Re}(P_h)\chi_{j,h}w,\chi_{j,h}w\rangle_{L^2}\ \ge\ 3ch\|(1-\pi_h^{\Delta,O_j})\chi_{j,h}w\|^2+O(h^{1+\varepsilon})\|\chi_{j,h}w\|^2. \tag{3.20}$$

此外，利用（3.18），再结合（3.19）以及 $w\in(\operatorname{Ran}\pi_h^\Delta)^\perp$，

$$\begin{aligned}\chi_{j,h}w&=(1-\pi_h^{\Delta,O_j})\chi_{j,h}w+\langle\chi_{j,h}w,\Psi_j\rangle_{L^2(O_j)}\Psi_j\\&=(1-\pi_h^{\Delta,O_j})\chi_{j,h}w+\langle\chi_{j,h}w,\psi_{j,h}\rangle_{L^2(O_j)}\Psi_j+O(e^{-c'\frac{h^{2\varepsilon}}{h}})\|\chi_{j,h}w\|\\&=(1-\pi_h^{\Delta,O_j})\chi_{j,h}w+O(e^{-c'\frac{h^{2\varepsilon}}{h}})\|w\|_{L^2}.\end{aligned}$$

将此估计代入（3.20），可得：对于每个足够小的 $h>0$ 以及每个 $u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，令 $w:=(1-\pi_h^\Delta)u$，

$$\langle \operatorname{Re}(P_h)\chi_{j,h}w,\chi_{j,h}w\rangle_{L^2}\ge 2ch\|\chi_{j,h}w\|_{L^2}^2+O(e^{-c'\frac{h^{2\varepsilon}}{h}})\|w\|_{L^2}^2. \tag{3.21}$$

步骤 2d. （3.12）的证明。回顾所谓的 IMS 定位公式（例如参见 [8]）：

$$\begin{aligned}\forall w\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\ \langle \operatorname{Re}(P_h)w,w\rangle&=\sum_{j=0}^m\langle \operatorname{Re}(P_h)\chi_{j,h}w,\chi_{j,h}w\rangle-\sum_{j=0}^m h^2\left\||\nabla\chi_{j,h}|\,w\right\|_{L^2(\Omega)}^2\\&=\sum_{j=0}^n\langle \operatorname{Re}(P_h)\chi_{j,h}w,\chi_{j,h}w\rangle+O(h^{2-2\varepsilon})\|w\|_{L^2(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

另外利用估计式（3.13）、（3.14）和（3.21），可知存在 $c>0$，使得对于每个足够小的 $h>0$ 以及每个 $u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，令 $w:=(1-\pi_h^\Delta)u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，

$$\langle \operatorname{Re}(P_h)w,w\rangle\ge 2ch\sum_{j=0}^m\|\chi_{j,h}w\|_{L^2}^2+O(h^{2-2\varepsilon}+e^{-c\frac{h^{2\varepsilon}}{h}})\|w\|_{L^2(\Omega)}^2\ge ch\|w\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

这就证明了（3.12）。

步骤 3. 命题 17 的证明结束。首先回顾一下，由（3.7）可知存在 $c>0$，使得对于每个足够小的 $h>0$，$\operatorname{Ran}\pi_{(-\infty,e^{-\frac{c}{h}}]}(\operatorname{Re}(P_h))$ 的维数至少为 m_0。此外，由于 $\dim\operatorname{Ran}\pi_h^\Delta=m_0$（见（3.3）），根据（3.12）和极小极大原理，$\operatorname{Re}(P_h)$ 的第 (m_0+1) 个特征值在 $h\to 0$ 时有下界 c_1h。因此，对每个足够小的 $h>0$，$\operatorname{Ran}\pi_{(-\infty,e^{-\frac{c}{h}}]}(\operatorname{Re}(P_h))$ 的维数恰为 m_0。最后，只需证明，当 $h\to 0$ 时，$\operatorname{Re}(P_h)$ 在 $(-\infty,e^{-\frac{c}{h}}]$ 中的 m_0 个特征值的阶为 $O(h^{\frac{3}{2}})$。

为此，请注意，对于每个 $h>0$ 充分小的值，都可以构造一条简单闭曲线 $\gamma\subset\{z\in\mathbb{C},\ \text{实部}\ z\le\frac{c_1}{2}h\}$，使得：

- γ 包含 $[-h\|\operatorname{div}\ell\|_{L^\infty},\frac{c_1}{2}h]$，因此其内部包含 $\sigma(P_h\text{的实部})\cap(-\infty,\frac{c_1}{2}h]$，
- 对于某些 $c,c\prime>0$（与 $h,|\gamma|\le ch$ 无关），且 $\operatorname{dist}(\gamma,\sigma(\text{实部}(P_h)))\ge c\prime h$。

与 实部 (P_h) 和 σ(实部 (P_h))$\cap]-\infty$ 相关的秩为 m_0 的正交谱投影 π_h，于是对每个足够小的 $h>0$，均满足：

$$\pi_h = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma (z - \mathrm{Re}\,(P_h))^{-1} dz.$$

对于 $j \in \{1,\dots,\mathrm{m}_0\}$，令 ψ_j 为式（3.8）中定义的函数，并回顾尚未在本证明中使用的关系（3.11）：

$$\|\mathrm{Re}\,(P_h)\psi_j\|_{L^2} = O(h^{\frac{3}{2}}).$$

利用 $\|(z - \mathrm{R}\quad \mathrm{e}\,(P_h))^{-1}\| \le \frac{1}{c'h}$ 对每个 $z \in \gamma$ 都成立，可知对每个足够小的 $h>0$ ，

$$\begin{aligned}(1-\pi_h)\psi_j &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(z^{-1} - (z - \mathrm{Re}\,(P_h))^{-1}\right)\psi_j\, dz \\ &= \frac{-1}{2\pi i}\int_\gamma z^{-1}\left(z - \mathrm{Re}\,(P_h)\right)^{-1}\mathrm{Re}\,(P_h)\psi_j\, dz = O(h^{\frac{1}{2}}).\end{aligned} \tag{3.22}$$

由于族 $\left(\psi_j\right)_{j\in\{1,\dots,\mathrm{m}_0\}}$ 是标准正交的，因此族 $\left(\pi_h\psi_j = \psi_j + O(h^{\frac{1}{2}})\right)_{j\in\{1,\dots,\mathrm{m}_0\}}$ 线性无关，因而当 π_h 时，它是 Ran $h \to 0$ 的一组基。此外，任意归一化向量 $\Psi \in \mathrm{Ran}\,\pi_h$ 可写为 $\Psi = \sum_{k=1}^{\mathrm{m}_0}\mu_k\pi_h\psi_j$，其中复数 $\mu_1,\dots,\mu_k$ 满足 $\sum_{k=1}^{\mathrm{m}_0}|\mu_k|^2 = 1 + O(h^{\frac{1}{2}})$。因此由式（3.11）可得，当 $h\to 0$:

$$\|\mathrm{Re}\,(P_h)\Psi\|_{L^2(\Omega)} = \|\sum_{k=1}^{\mathrm{m}_0}\mu_k\pi_h\,\mathrm{Re}\,(P_h)\psi_j\|_{L^2(\Omega)} \le \sum_{k=1}^{\mathrm{m}_0}|\mu_k|\,\|\mathrm{Re}\,(P_h)\psi_j\|_{L^2(\Omega)} = O(h^{\frac{3}{2}}),$$

这意味着 在 $(-\infty, e^{-\frac{c}{h}}]$ 中，Re (P_h) 的 m_0 个特征值的数量级为 $O(h^{\frac{3}{2}}$).

□

3.2. 的小特征值及预解估计。本节旨在证明关于 4 的小特征值个数的定理 P_h (或者等价地，关于 L_h，见（1.14）。

定理 4。 假设 (**Ortho**) 成立。那么，存在 $c_2>0$ 使得，对所有$c_3 \in (0,c_2)$，均存在 $h_0>0$ 和 $C>0$ 使得，对所有 $z \in \{z\in\mathbb{C},$ 实部 $z \le c_2 h, |z| \ge c_3 h\}$ 以及$h\in(0,h_0]$,

$$P_h - z \text{ is invertible and } \quad \|(P_h - z)^{-1}\| \le Ch^{-1}.$$

此外，存在 $h_0>0$，使得对所有 $h\in(0,h_0]$, $\sigma(P_h)\cap\{z\in\mathbb{C}, \mathrm{Re}\,z \le c_2 h\}$ 恰由 m_0 个特征值 $\lambda_{1,h},\lambda_{2,h},\dots,\lambda_{\mathrm{m}_0,h}$ 组成（按代数重数计），其中 m_0 在（3.2）中定义。最后，存在 $c>0$，使得对所有 $j\in\{1,\dots,\mathrm{m}_0\}$ 以及足够小的 h，$|\lambda_{j,h}| \le e^{-\frac{c}{h}}$。所有这些结果对 P_h^* 也成立。

证明。 首先请注意，定理陈述中最后一句 4 关于 P_h^* 的结论可由关于 P_h 的部分直接推出，因为 $\sigma(P_h^*) = \sigma(P_h)$（含重数），并且对所有 $z\in\mathbb{C}\setminus\sigma(P_h)$, $\|(P_h - z)^{-1}\| = \|(\overline{P_h^* - \bar{}}z)^{-1}\|$（见 [30, 第 6 章第 6.6 节 3]）。

我们还回顾一下第 3.1 节开头给出的关系式 (3.3)、(3.4) 和 (3.5)。对于 $j\in\{1,\dots,\mathrm{m}_0\}$，考虑一个 $L^2(\Omega)$-归一化的特征函数 $u_{j,h}^{\Delta}$，它对应于 $\Delta_{f,h}$ 的第 j 个特征值。由于 $P_h = \Delta_{f,h} + 2\ell\cdot\nabla_f$，$_h$ 的定义域为 $D(P_h) = D(\Delta_{f,h})$，且与 $\Delta_{f,h}$ 相关的二次型由 (3.1) 给出，其中 $\ell = 0$:

$$\exists c>0 \text{ such that, when } h\to 0, \quad \|P_h u_{j,h}^{\Delta}\|_{L^2(\Omega)} \le e^{-\frac{c}{h}}. \tag{3.23}$$

同理，由于 $P_h^* = \Delta_{f,\ h} - 2\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla_{f,\ h} - 2h\mathrm{div}\ \boldsymbol{\ell}$ 的定义域为 $D(P_h^*) = D(\Delta_{f,\ h})$，存在 $c>0$，使得对任意足够小的 $h>0$，

$$\|P_h^* u_{j,h}^{\Delta}\|_{L^2(\Omega)} \le e^{-\frac{c}{h}} + 2h\|(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\ell})u_{j,h}^{\Delta}\|_{L^2(\Omega)}.$$

现在考虑上一节中（$(\psi_j)_{j\in\{1,\dots,\mathsf{m}_0\}}$ 的正交归一族，该族在（3.8）中定义，并利用谱估计（3.16），其中 $b = c_0 h$，$T = \Delta_{f,\ h}$，以及（3.9），存在 $c'>0$，使得对于每个 $j\in\{1,\ .....,\ \mathsf{m}_0\}$ 以及 $h>0$ 充分小时，

$$\pi_h^{\Delta}\psi_j = \psi_j + O(e^{-\frac{c'}{h}}) \ \text{ in } L^2(\Omega). \tag{3.24}$$

Us此外结合（3.10），由此可知，对于每个 $h>0$ 充分小时，

$$\|(\mathrm{div}\,\boldsymbol{\ell})\pi_h^{\Delta}\psi_j\|_{L^2(\Omega)} = O(h^{\frac{1}{2}}).$$

因此，由于（3.24）表明每个$u_{j,\ h}^{\Delta}$ 均可写作$u_{j,\ h}^{\Delta} = \sum_{k=1}^{\mathsf{m}_0}\mu_k\pi_h^{\Delta}\psi_j$ 其中μ_1，.....，μ_k是满足条件$\sum_{k=1}^{\mathsf{m}_0}|\mu_k|^2 = 1 + O(e^{-\frac{c'}{h}})$的复数，因此对于每个 $h>0$ 充分小的

$$\|P_h^* u_{j,h}^{\Delta}\|_{L^2(\Omega)} = O(h^{\frac{3}{2}}). \tag{3.25}$$

ˆ 现在定义算子 P_h 如下

$$\hat{P}_h := (1-\pi_h^{\Delta})P_h(1-\pi_h^{\Delta}) \text{ with domain } (1-\pi_h^{\Delta})D(P_h) \text{ on } \hat{\mathsf{E}} := (1-\pi_h^{\Delta})L^2(\Omega),$$

其中回顾一下，$D(P_h) = D(\Delta_{f,\ h}) = H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$。注意，空间 ˆE（配备受限的 ˆ $L^2(\Omega)$-厄米内积）是一个希尔伯特空间，并且算子 P_h :$D(\hat{P}_h) \to \hat{\mathsf{E}}$ 是良定义的，因为 $(1-\pi_h^{\Delta})D(P_h) = \hat{\mathsf{E}} \cap D(P_h) \subset D(P_h)$，其在 ˆE 中的定义域稠密。

证明的其余部分与 [34, 第 2B 节] 中的分析相似，并分为两个步骤。

ˆ ˆ ˆ ˆ 步骤 1。 $P_h : D(P_h) \to \mathsf{E}$ 的预解估计。首先，算子 P_h 是闭的。这由 $P_h : D(P_h) \to L^2(\Omega)$ 是闭的这一事实以及关系 ˆ $P_h = P_h + \pi_h^{\Delta}P_h\pi_h^{\Delta} - \pi_h^{\Delta}P_h - P_h\pi_h^{\Delta}$在 $D(\hat{P}_h)$ 上成立得出，因为 $\pi_h^{\Delta}P_h\pi_h^{\Delta} - \pi_h^{\Delta}P_h - P_h\pi_h^{\Delta}$可扩张为 $L^2(\Omega)$ 上的有界算子 T_h。事实上，$P_h\pi_h^{\Delta}$ 以及 $\pi_h^{\Delta}P_h\pi_h^{\Delta}$可扩张为 $L^2(\Omega)$ 上的有界算子，因为 π_h^{Δ}是连续的且为有限秩；对于 $\pi_h^{\Delta}P_h$ 也同样如此，因为对所有 $u\in D(P_h) = D(P_h^*)$，

$$\pi_h^{\Delta}P_h u = \sum_{j=1}^{\mathsf{m}_0}\langle u_{j,h}^{\Delta}, P_h u\rangle_{L^2(\Omega)} u_{j,h}^{\Delta} = \sum_{j=1}^{\mathsf{m}_0}\langle P_h^* u_{j,h}^{\Delta}, u\rangle_{L^2(\Omega)} u_{j,h}^{\Delta}.$$

ˆ 上述考虑还表明，P_h 的伴随算子是该算子 or

$$\hat{P}_h^* = (1-\pi_h^{\Delta})P_h^*(1-\pi_h^{\Delta}) \text{ with domain } (1-\pi_h^{\Delta})D(P_h).$$

ˆ 现在证明关于 P_h 的以下预解估计：存在 $C>0$ 和 $c_2>0$，使得对于所有足够小的 $h>0$，以及满足 $\mathrm{Re}\,\mathsf{z} \le c_2 h$ 的 $\mathsf{z}\in\mathbb{C}$，

$$\hat{P}_h - \mathsf{z} \text{ is invertible and } \|(\hat{P}_h - \mathsf{z})^{-1}\| \le Ch^{-1}. \tag{3.26}$$

为证明这一结论，考虑 $w \in D(\hat{P}_h) = (1-\pi_h^{\Delta})D(P_h)$ 以及 $z \in \mathbb{C}$。那么，根据命题 17，对于每个 $h>0$ 足够小的情形，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\langle(\hat{P}_h - z)w, w\rangle_{L^2(\Omega)} &= \mathrm{Re}\,\langle P_h(1-\pi_h^{\Delta})w, (1-\pi_h^{\Delta})w\rangle_{L^2(\Omega)} - (\mathrm{Re}\,z)\,\|(1-\pi_h^{\Delta})w\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &= \langle \mathrm{Re}\,(P_h)(1-\pi_h^{\Delta})w, (1-\pi_h^{\Delta})w\rangle_{L^2(\Omega)} - (\mathrm{Re}\,z)\|(1-\pi_h^{\Delta})w\|^2_{L^2(\Omega)}\\ &\geq [c_1 h - \mathrm{Re}\,z]\|(1-\pi_h^{\Delta})w\|^2_{L^2(\Omega)} = [c_1 h - \mathrm{Re}\,z]\|w\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

对于 $P_h^* - z$，同样的不等式也成立，因为 $\mathrm{Re}\,(P_h) = \mathrm{Re}\,(P_h^*)$。现在固定 $c_2 \in (0, c_1)$。当 $\mathrm{Re}\,z \leq c_2 h$ 且 $h>0$ 足够小时，前一个不等式蕴含

$$\|(\hat{P}_h - z)w\|_{L^2(\Omega)} \geq (c_1 - c_2)h\|w\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.27}$$

因此，当 $\mathrm{Re}\,z \leq c_2 h$ 且 $h>0$ 足够小时，$P_h - z$ 是单射，且其值域是闭的。由于同样的不等式也适用于其伴随算子 $P_h^* - \bar{z}$，$P_h - z$ 的值域在 E 中稠密。因此，$P_h - z : D(P_h) \to E$ 可逆，且关系式 (3.26) 可由 (3.27) 得出。

步骤 2. Grushin 问题与定理 4 的证明结束。定义算子：

$$R_- : \mathbb{C}^{m_0} \to L^2(\Omega),\ (\mu_k)_{j=1}^{m_0} \mapsto \sum_{j=1}^{m_0} \mu_j\, u_{j,h}^{\Delta},\ \text{and}\ R_+ : L^2(\Omega) \to \mathbb{C}^{m_0},\ u \mapsto (\langle u, u_{j,h}^{\Delta}\rangle_{L^2(\Omega)})_{j=1}^{m_0}.$$

我们在 $\mathbb{C}^{m_0}$ 上赋予 ℓ^2 范数。注意以下关系

$$R_+^* = R_-,\quad R_- R_+ = \pi_h^{\Delta},\ \text{and}\ R_+ R_- = \mathrm{I}_{\mathbb{C}^{m_0}}, \tag{3.28}$$

并且，对所有 $h>0$,

$$\|R_+\| \leq 1 \quad \text{and} \quad \|R_-\| \leq 1. \tag{3.29}$$

此外，根据（3.23）和（3.25），存在 $c>0$ 使得对每个 $h>0$ 足够小的情形，都有：

$$\|R_+ P_h\| = O(h^{\frac{3}{2}}) \quad \text{and} \quad \|P_h R_-\| \leq e^{-\frac{c}{h}}. \tag{3.30}$$

对于 $z \in \mathbb{C}$，我们用 $P_h(z)$ 表示由下式定义的线性算子

$$(u, u_-) \in D(P_h) \times \mathbb{C}^{m_0} \mapsto \begin{pmatrix} (P_h - z)u + R_- u_- \\ R_+ u \end{pmatrix} \in L^2(\Omega) \times \mathbb{C}^{m_0}.$$

利用（3.26）以及证明 [34, 引理 2。2], 时所做的同样分析，我们推得，当实部 $z \leq c_2 h$ 且 $h>0$ 足够小时，$\mathcal{P}_h(z)$ 可逆（即 Grushin 问题 $\mathcal{P}_h(z)$ 适定），其逆矩阵可写为

$$(f, g) \in L^2(\Omega) \times \mathbb{C}^{m_0} \mapsto \begin{pmatrix} \mathcal{E}(z) & \mathcal{E}_+(z) \\ \mathcal{E}_-(z) & \mathcal{E}_{-+}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in D(P_h) \times \mathbb{C}^{m_0},$$

其中 th 算子 E、E_+、E_- 和 E_{-+} 在 $\{\mathrm{Re}\,z \leq c_2 h\}$ 上全纯，并满足 ：

(1) $\mathcal{E}(z) = (\hat{P}_h - z)^{-1}(1-\pi_h^{\Delta})$ 因此，根据（3.26）：

$$\text{for every } z \in \{\mathrm{Re}\,z \leq c_2 h\},\quad \|\mathcal{E}(z)\| \leq C h^{-1}, \tag{3.31}$$

(2) $\mathcal{E}_{-+}(z) = -R_+(P_h - z)R_- + R_+ P_h(\hat{P}_h - z)^{-1}(1-\pi_h^{\Delta})P_h R_-$,
(3) $\mathcal{E}_+(z) = R_- - (\hat{P}_h - z)^{-1}(1-\pi_h^{\Delta})P_h R_-$,
(4) $\mathcal{E}_-(z) = R_+ - R_+ P_h(\hat{P}_h - z)^{-1}(1-\pi_h^{\Delta})$.

此外， P_h –z 可逆当且仅当 $E_{-+}(z)$ 可逆；在这种情况下，

$$(P_h - z)^{-1} = \mathcal{E}(z) - \mathcal{E}_+(z)\mathcal{E}_{-+}(z)^{-1}\mathcal{E}_-(z). \tag{3.32}$$

有关所谓 Grushin 问题的更多详情，请参阅 [51] 。

利用（3.26）、（3.28）、（3.29）和（3.30），可推得存在 $c > 0$ 使得，对每个 $h > 0$ 足够小且关于 $z \in \{\text{实部 } z \le c_2 h\}$一致成立：

$$\mathcal{E}_-(z) = R_+ + O(h^{\frac{1}{2}}),\ \mathcal{E}_+(z) = R_- + O(e^{-\frac{c}{h}}),\ \text{and } \mathcal{E}_{-+}(z) = z\mathrm{I}_{\mathbb{C}^{m_0}} + O(e^{-\frac{c}{h}}).$$

特别地，若还满足 $|z| \ge e^{-\frac{c}{2h}}$，则 $\mathcal{E}_{-+}(z)$ 可逆，因此 $P_h - z$ 也可逆（见（3.32）上方一行）。因此，对每个 $h > 0$ 足够小的：

$$\sigma(P_h) \cap \left\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\, z \le c_2 h\right\} \subset \left\{|z| \le e^{-\frac{c}{2h}}\right\}. \tag{3.33}$$

现在固定 $c_3 \in (0, c_2)$。于是，对每个 $h > 0$ 足够小以及每个 $z \in \{\text{实部 } z \le c_2 h, |z| \ge c_3 h\}$，算子 $E_{-+}(z)$ 均可逆，并且满足 $E_{-+}(z)^{-1} = z^{-1}(\mathrm{I}_{\mathbb{C}^{m_0}} + O(e^{-\frac{c}{2h}}))$。因此，根据（3.32），由于 $R_- R_+ = \pi_h^{\Delta}$, $\|\pi_h^{\Delta}\| \le 1$, $\|R_+\| \le 1$ 和 $\|R_-\| \le 1$，关于 $E_+(z)$、$E_-(z)$ 和 $E_{-+}(z)$ 的前述估计意味着，对所有 h 足够小且关于 $z \in \{\text{实部 } z \le c_2 h, |z| \ge c_3 h\}$ 一致成立：

$$(P_h - z)^{-1} = \mathcal{E}(z) - z^{-1}(\pi_h^{\Delta} + O(h^{\frac{1}{2}})) = \mathcal{E}(z) - z^{-1}\pi_h^{\Delta} + O(h^{-\frac{1}{2}}). \tag{3.34}$$

此外利用（3.31），存在 $K > 0$ 使得对所有足够小的 h 以及满足 $z \in \{\text{实部} z \le c_2 h,\ |z| \ge c_3 h\}$：

$$\|(P_h - z)^{-1}\| \le Ch^{-1} + |z|^{-1} + O(h^{-\frac{1}{2}}) \le Kh^{-1}.$$

最后，取 $\beta \in (c_3,\ c_2)$。根据（3.33），谱 Riesz 投影

$$\pi_h^P := \frac{1}{2i\pi}\int_{\{|z|=\beta h\}} (z - P_h)^{-1} dz \tag{3.35}$$

对每个足够小的 $h > 0$ 都有定义，且其秩等于 P_h 在$\{\text{实部 } z \le c_2 h\}$中的特征值个数（按代数重数计）。此外，方程（3.34）表明，对每个足够小的 $h > 0$，

$$\pi_h^P = \pi_h^{\Delta} + O(h^{\frac{1}{2}}) \tag{3.36}$$

因此，$\dim \mathrm{Ran}\,(\pi_h^P) = \dim \mathrm{Ran}\,(\pi_h^{\Delta}) = m_0$（见（3.3））。因此，对每个足够小的 h，$\sigma(P_h) \cap \{\text{实部 } z \le c_2 h\}$ 由m_0个特征值组成（按代数重数计），这些特征值均为指数级小量。这就完成了定理 4 的证明。□

4. Proof of Theorem 1

4.1. 关于 $u_{1,h}^P$ 以及 $u_{1,h}^{P^*}$ 的粗略渐近估计。从现在起，不失一般性地假设，主特征模态 $u_{1,h}^P$（属于 P_h）以及 $u_{1,h}^{P^*}$（属于 P_h^*），在命题 3中定义并已在 $L^2(\Omega)$中归一化。下一个命题将给出这些特征模态的先验估计，并将在第 4.2 节用于证明定理 1。

命题 18。假设满足 (Ortho) 和 (One-Well)。对于任意 $\eta \in (0, \min_{\partial\Omega} f - f(x_0))$，令$\chi_\eta : \Omega \to [0,1]$ 为一个光滑函数，使得 $\chi_\eta = 1$ 在 $C_{min}(\eta)$ 上成立（见 (2.7)），且 $\chi_\eta = 0$ 在 $\Omega \setminus C_{min}(\eta/2)$ 上成立。设

$$u_\eta = \frac{\chi_\eta e^{-\frac{f}{h}}}{\|\chi_\eta e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2(\Omega)}}.$$

*The*n，存在 $c>0$，使得对于所有足够小的 h，$u_{1,\ h}^{P}$ 和 $u_{1}^{P^*}{}_{,\ h}$，满足

$$u_{1,h}^{P}=\mathsf{u}_\eta+O(e^{-\frac{c}{h}})\quad and\quad u_{1,h}^{P^*}=\mathsf{u}_\eta+O(h^{\frac{1}{2}})\quad in\ L^2(\Omega), \tag{4.1}$$

以及

$$\frac{\int_{\Omega\setminus\overline{\mathsf{C}}_{min}(\eta)}\ u_{1,h}^{P}\,e^{-\frac{f}{h}}}{\int_\Omega u_{1,h}^{P}e^{-\frac{f}{h}}}=O(e^{-\frac{c}{h}})\quad and\quad \frac{\int_{\Omega\setminus\overline{\mathsf{C}}_{min}(\eta)}\ u_{1,h}^{P^*}\,e^{-\frac{f}{h}}}{\int_\Omega u_{1,h}^{P^*}e^{-\frac{f}{h}}}=O(e^{-\frac{c}{h}}). \tag{4.2}$$

证明。假设 (Ortho) 成立。根据定理 4，P_h 在 $\{\mathrm{Re}\ z\le c_2h\}$ 中恰有 m_0 个特征值，其中 m_0 是 Ω 中 f 的局部极小值个数（见 (3.2)），且这 m_0 个特征值均为指数级小。当 (One-Well) 也成立时，$\mathsf{U}_0=\{x_0\}$，因此 $\mathsf{m}_0=1$。于是，$\lambda_{1}^{P}{}_{,\ h}$ 是 $\{\mathrm{Re}\ z\le c_2h\}$ 中 P_h 的唯一特征值，且 π_h^P（见 (3.35)）的秩为 1。注意，对 $\pi_h^{P^*}$ 也同样成立。

在下文中，我们假设 (**Ortho**) 和 (**One-Well**)。

步骤 1。((4.1) 的证明。拉普拉斯方法给出（因为 $\chi_\eta=1$ 在 x_0 的一个邻域内，而根据 (**One-Well**，它是 f 在 Ω 中唯一的全局极小点）：

$$\|\chi_\eta e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2(\Omega)}=(\pi h)^{\frac{d}{4}}\left(\det \mathrm{Hess}\, f(x_0)\right)^{-\frac{1}{4}}\ e^{-\frac{f(x_0)}{h}}(1+O(h)). \tag{4.3}$$

由于 $P_h=\Delta_{f,h}+2\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla_{f,h}$ =(−h散度 $+\nabla f\cdot)\nabla_{f,h}+2\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla_{f,h}$满足 $\nabla_{f,h}=h\,e^{-\frac{f}{h}}\nabla e^{\frac{f}{h}}$，函数$P_h\mathsf{u}_\eta$的支撑包含于 $\mathrm{supp}\ \nabla\chi_\eta$，其中 $f-f(x_0)$ 大于 $\min_{\partial\Omega}f-f(x_0)\ -\eta>0$。因此，按照证明 (3.9) 时所用的推理，存在 $c>0$，使得对每个足够小的 $h>0$：

$$\|P_h\mathsf{u}_\eta\|_{L^2(\Omega)}\le e^{-\frac{c}{h}}. \tag{4.4}$$

由于更多 另外 $P_h^*=2\,$实部 $(P_h)-P_h$，(4.4) 和 (3.11) 表明，当 $h\to0$ ：

$$\|P_h^*\mathsf{u}_\eta\|_{L^2(\Omega)}=O(h^{\frac{3}{2}}). \tag{4.5}$$

另一方面，由于 $\mathsf{u}_\eta\in D(P_h)$，按照导出 (3.22) 的论证，关系式 (3.35) 以及定理 4 的预解估计蕴含存在 $C>0$ 使得，当$h\to0$,

$$\|(1-\pi_h^P)\mathsf{u}_\eta\|_{L^2(\Omega)}\le Ch^{-1}\|P_h\mathsf{u}_\eta\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.6}$$

因此，结合（4.4），存在 $c>0$ 使得，对每个足够小的 $h>0$：

$$\pi_h^P\mathsf{u}_\eta=\mathsf{u}_\eta+O(e^{-\frac{c}{h}})\ \text{in}\ L^2(\Omega).$$

特别地，对于所有足够小的 h，$\|\pi_h^P\mathsf{u}_\eta\|_{L^2\ (\Omega)}=1+O(e^{-\frac{c}{h}})$；又由于 π_h^P 的秩为 1，$\mathsf{u}_\eta\ge0$，且 $u_{1,\ h}^{P},u_{1}^{P^*}{}_{,\ h}>0$ 在 Ω 中，因此有：

$$u_{1,h}^{P}=+\frac{\pi_h^P\mathsf{u}_\eta}{\|\pi_h^P\mathsf{u}_\eta\|_{L^2(\Omega)}}=\frac{\pi_h^P\mathsf{u}_\eta}{1+O(e^{-\frac{c}{h}})}=\mathsf{u}_\eta+O(e^{-\frac{c}{h}})\quad\text{in}\ L^2(\Omega). \tag{4.7}$$

类似地，结合 P_h^*的预解估计和定理 4 以及（4.5），我们推得，当 $h\to0$，$\pi_h^{P^*}\mathsf{u}^\eta=\mathsf{u}_\eta+O$（$h^{\frac{1}{2}}$）且

$$u_{1,h}^{P^*}=+\frac{\pi_h^{P^*}\mathsf{u}_\eta}{\|\pi_h^{P^*}\mathsf{u}_\eta\|_{L^2(\Omega)}}=\frac{\pi_h^{P^*}\mathsf{u}_\eta}{1+O(h^{\frac{1}{2}})}=\mathsf{u}_\eta+O(h^{\frac{1}{2}})\quad\text{in}\ L^2(\Omega). \tag{4.8}$$

这就完成了对（4.1）的证明。

步骤 2。证明（4.2）。根据（4.1），我们有：

$$\int_\Omega u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}} = \int_\Omega \mathsf{u}_\eta\, e^{-\frac{f}{h}} + O(h^{\frac{1}{2}})\|e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2(\Omega)} = \frac{\int_\Omega \chi_\eta\, e^{-\frac{2}{h}f}}{\|\chi_\eta e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2(\Omega)}} + O(h^{\frac{1}{2}})\|e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2(\Omega)}.$$

H因此，采用我们推导（4.3）时使用的拉普拉斯方法，当 $h \to 0$时，我们有：

$$\int_\Omega u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}} = (\pi h)^{\frac{d}{4}} \big(\det \mathrm{Hess}\, f(x_0)\big)^{-\frac{1}{4}}\, e^{-\frac{f(x_0)}{h}} \big(1 + O(h^{\frac{1}{2}})\big).$$

因此，由于 $f - f(x_0) \geq \min_{\partial\Omega} f - f(x_0) - \eta > 0$ 在 $\Omega \setminus \mathsf{C}_{\min}(\overline{\eta})$ 上，存在 $c > 0$，使得对每个足够小的 h:

$$\frac{\int_{\Omega\setminus\overline{\mathsf{C}}_{\min}(\eta)} u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}}{\int_\Omega u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}} = \frac{\int_{\Omega\setminus\overline{\mathsf{C}}_{\min}(\eta)} \chi_\eta\, e^{-\frac{2}{h}f}}{\|\chi_\eta e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2(\Omega)} \int_\Omega u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}} + O(h^{\frac{1}{2}}) \frac{\|e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2(\Omega\setminus\overline{\mathsf{C}}_{\min}(\eta))}}{\int_\Omega u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}} = O(e^{-\frac{c}{h}}),$$

这就证明了 $u_{1\,h}^{P^*}$, 的（4.2）。$u_{1\,,h}^{P}$ 的证明类似。 □

4.2. 定理 1 的证明。假设（**Ortho**）和（**One-Well**）成立。回顾一下，对于过程（1.1）在 Ω 中的准平稳分布是一个概率测度 μ_h，定义在 Ω 上，满足对任意时刻 $t \geq 0$以及任意博雷尔集 $A \subset \Omega$, $\mathbb{P}_{\mu_h}(X_t \in A \,|\, t < \tau_{\Omega^c}) = \mu_h(A)$。现在引入 Ω 上如下概率分布（见命题3）：

$$\nu_h(dx) = \frac{u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}}{\int_\Omega u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}}\, dx.$$

利用杀死半群的光滑性 $P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t) 1_{t<\tau_{\Omega^c}}]$(例如，[39,第 2 节。1])以及与 [33, 命题 2。2], 证明中所用类似的计算，可以推出 ν_h 是过程[4] 在 Ω 中的准平稳分布，并且当1.1初始分布服从测度 X_0 ν_h时，有：

$$\tau_{\Omega^c} \sim \mathcal{E}(\lambda_{1,h}^L), \text{ where we recall that } \lambda_{1,h}^L = \frac{\lambda_{1,h}^P}{2h}, \tag{4.9}$$

其中 E ($\lambda_{1,h}^L$) 表示参数为 $\lambda_{1,h}^L$ 的指数分布。

步骤 1. (1.15)的证明。 注意，(1.15) 的第一个陈述已在命题 18证明一开始就得到证明。此外，根据 (4.9)，有：

$$\frac{1}{\lambda_{1,h}^L} = \mathbb{E}_{\nu_h}[\tau_{\Omega^c}] = \int_\Omega \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}]\, \nu_h(dx) = \frac{\int_\Omega \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}}{\int_\Omega u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}}. \tag{4.10}$$

[4]尽管此处并不要求 ν_h 的唯一性，但我们提及，对于具有光滑系数的椭圆过程，当 Ω 为光滑有界区域时，众所周知，Ω 中的准平稳分布是唯一的，参见例如 [23, 7, 50, 24]。

现在取 $\eta_0 \in (0, \text{最小值}_{\partial\Omega} f - f(x_0))$，并回忆 $\mathbf{C}_{\min}(\eta_0) = \mathbf{C}_{\min} \cap \{f < \text{最小值}_{\partial\Omega} f - \eta_0\}$ (见 (2.7))。于是有：

$$\frac{1}{\lambda_{1,h}^L} = \frac{\int_{\Omega \setminus \overline{\mathbf{C}}_{\min}(\eta_0)} \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] u_{1,h}^{P^*}(x)\, e^{-\frac{f(x)}{h}} dx}{\int_\Omega u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}} + \frac{\int_{\overline{\mathbf{C}}_{\min}(\eta_0)} \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] u_{1,h}^{P^*}(x)\, e^{-\frac{f(x)}{h}} dx}{\int_\Omega u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}} \geq \frac{\int_{\overline{\mathbf{C}}_{\min}(\eta_0)} \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] u_{1,h}^{P^*}\, e^{-\frac{f}{h}}}{\int_\Omega u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}}. \tag{4.11}$$

此外，定理 3 结合 $K = \mathbf{C}_{\min}(\eta_0) \Subset \mathcal{A}(\{x_0\})$可推出：存在某个 $c > 0$，且对任意$h > 0$ 充分小的：

$$\frac{\int_{\overline{\mathbf{C}}_{\min}(\eta_0)} \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] u_{1,h}^{P^*}\, e^{-\frac{f}{h}}}{\int_\Omega u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}} = \frac{\int_{\overline{\mathbf{C}}_{\min}(\eta_0)} u_{1,h}^{P^*}\, e^{-\frac{f}{h}}}{\int_\Omega u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}} \times \mathbb{E}_{x_0}[\tau_{\Omega^c}](1 + O(e^{-\frac{c}{h}})).$$

然后，进一步利用（4.2）并在必要时取 $c > 0$ 更小，可得当 $h \to 0$时：

$$\frac{1}{\lambda_{1,h}^L} \geq \frac{\int_{\overline{\mathbf{C}}_{\min}(\eta_0)} \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] u_{1,h}^{P^*}\, e^{-\frac{f}{h}}}{\int_\Omega u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}} = \mathbb{E}_{x_0}[\tau_{\Omega^c}](1 + O(e^{-\frac{c}{h}})), \tag{4.12}$$

再次应用定理 3，可得

$$\limsup_{h \to 0} h \ln \lambda_{1,h}^L \leq -\lim_{h \to 0} h \ln \mathbb{E}_{x_0}[\tau_{\Omega^c}] = -2(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0)).$$

最后，事实是

$$\liminf_{h \to 0} h \ln \lambda_{1,h}^L \geq -2(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0))$$

直接由命题 12 以及不等式 $\lambda_{1,h}^L \sup_{x \in \overline{\Omega}} \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] \geq 1$。这个标准不等式可如下推导。定义光滑函数 $g : x \in \Omega \mapsto v_h - \lambda_{1,h}^L \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}]$，其中 v_h 是满足 L_h 的主特征值，且 $v_h > 0$ 在 Ω 内，且 $\sup_{\overline{\Omega}} v_h = 1$。于是有 $L_h g = \lambda_{1,h}^L (v_h - 1) \leq 0$。因此，根据弱最大值原理 [19,第 6.4 节中的定理 1。1], 可得 $g \leq 0$ 在 Ω 上成立，从而得到所述不等式。

步骤 2. (1.16)的证明。将等号 (4.12代入关系式 (4.11，可知存在 $c > 0$，使得对任意 $h > 0$ 充分小的情形，

$$\frac{1}{\lambda_{1,h}^L} = \frac{\int_{\Omega \setminus \overline{\mathbf{C}}_{\min}(\eta_0)} \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}] u_{1,h}^{P^*}(x)\, e^{-\frac{f(x)}{h}} dx}{\int_\Omega u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}} + \mathbb{E}_{x_0}[\tau_{\Omega^c}](1 + O(e^{-\frac{c}{h}})). \tag{4.13}$$

此外，由 (1.15)、命题 12和 (4.2可知，对于某个 $c > 0$ 以及任意 $h > 0$充分小的情形，

$$\lambda_{1,h}^L \frac{\int_{\Omega \setminus \overline{\mathbf{C}}_{\min}(\eta_0)} \mathbb{E}_x[\tau_{\Omega^c}]\, u_{1,h}^{P^*}(x)\, e^{-\frac{f(x)}{h}} dx}{\int_\Omega u_{1,h}^{P^*} e^{-\frac{f}{h}}} \leq e^{-\frac{c}{h}},$$

将此估计代入（4.13）可得 $1 + O(e^{-\frac{c}{h}}) = \lambda_{1,h}^L \mathbb{E}_{x_0}[\tau_{\Omega^c}] (1 + O(e^{-\frac{c}{h}}))$ 当 $h \to 0$时。结合定理 3，即可证明（1.16）。

步骤 3. 证明（1.17）。令 $m_h = e^{\frac{2}{h}}(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0) - \frac{\eta_0}{2})$。取 $A(\{x_0\})$ 的一个紧子集 K，以及 $\eta_* \in (\eta_0, \min_{\partial\Omega} f - f(x_0))$，使得 $C_{\min}(\eta_*) \subset C_{\min}(\eta_0)$ 且 $C_{\min}(\eta_*) \subset A(\{x_0\})$（见（2.8））。我们声称，对所有 $x \in K$， $y \in C_{\min}(\eta_*)$，以及所有 $u > 0$:

$$\mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c} > u] \le \mathbb{P}_y[\tau_{\Omega^c} > u - 2m_h] + R_1 \text{ and } \mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c} > u] \ge \mathbb{P}_y[\tau_{\Omega^c} > u + m_h] + R_2, \tag{4.14}$$

其中，对于 $j \in \{1, 2\}$， R_j 与 $u > 0$、 x、 y相互独立，并且对于某个 $c > 0$ 以及所有充分小的 h，满足：$|R_j| \le e^{-\frac{c}{h}}$。

为证明（4.14），我们先考虑 $K = C_{\min}(\eta_*)$ 的情形。利用（2.13）和马尔可夫不等式，可得存在 $c > 0$，使得对于所有 h 充分小的情形:

$$\sup_{x \in C_{\min}(\eta_*)} \mathbb{P}_x[\tau_{C^c_{\min}(\eta_0)} > m_h] \le e^{-\frac{c}{h}}. \tag{4.15}$$

回忆一下，对于 $x' \in C_{\min}(\eta_0)$， $\mu^h_{x'}$ 表示过程（1.1）在 $X_0 = x'$ 时于 $\partial C_{\min}(\eta_0)$ 上的命中分布（见（2.18））， 且在 x'、$y' \in C_{\min}(\eta_*)$ 中一致成立。于是，利用强马尔可夫性质，对于所有 $u' > 0$、$v > 0$ 以及 x'、$y' \in C_{\min}(\eta_*)$，有

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{x'}[\tau_{\Omega^c} > u'] \ge \mathbb{P}_{x'}[\tau_{\Omega^c} > u' + \tau_{C^c_{\min}(\eta_0)}] &= \int \mathbb{P}_z[\tau_{\Omega^c} > u'] \mu^h_{x'}(dz) \\
&\ge \int \mathbb{P}_z[\tau_{\Omega^c} > u'] \mu^h_{y'}(dz) - \|\mu^h_{x'} - \mu^h_{y'}\| \\
&= \mathbb{P}_{y'}[\tau_{\Omega^c} > u' + \tau_{C^c_{\min}(\eta_0)}] - \|\mu^h_{x'} - \mu^h_{y'}\| \\
&\ge \mathbb{P}_{y'}[\tau_{\Omega^c} > u' + v] - \mathbb{P}_{y'}[\tau_{C^c_{\min}(\eta_0)} > v] - \|\mu^h_{x'} - \mu^h_{y'}\|.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

设 $u, v > 0$和 $x, y \in C_{\min}(\eta_*)$。若 $u - m_h \le 0$, $\mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c} > u] \le 1 = \mathbb{P}_y[\tau_{\Omega^c} > u - m_h]$。此外，利用 (4.15) 和 (4.16)，分别取 $(x', y', u', v) = (x, y, u, m_h)$，以及 $(x', y', u', v) = (y, x, u - m_h, m_h)$（当 $u - m_h > 0$ 时），我们推得对所有 $x, y \in C_{\min}(\eta_*)$ 以及所有 $u > 0$:

$$\mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c} > u] \le \mathbb{P}_y[\tau_{\Omega^c} > u - m_h] + r_1 \text{ and } \mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c} > u] \ge \mathbb{P}_y[\tau_{\Omega^c} > u + m_h] + r_2, \tag{4.17}$$

其中，对于 $j \in \{1, 2\}$， r_j 与 $u > 0$ 无关，且 $x, y \in C_{\min}(\eta_*)$，并满足 $|r_j| \le e^{-\frac{c}{h}}$，其中某个 $c > 0$ 与 h 无关。注意，当 $K = C_{\min}(\eta_*)$ 时，(4.17) 蕴含 (4.14)。还要指出，(4.17) 的证明受到 [22, 引理 3] 证明的启发。

现在我们来证明任意 $K \subset A(\{x_0\})$的（4.14）。取这样的 K 并考虑 $T_K \ge 0$，如定理3的证明中所述。对每个 $x \in K$ 和 $y \in C_{\min}(\eta_*)$，利用马尔可夫性质、（2.12）、（2.21）以及（4.17）中的第二个不等式，可得:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c} > u] &\ge \mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c} > u + T_K] \\
&\ge \mathbb{P}_x\Big[\tau_{\Omega^c} > u + T_K, \sup_{t \in [0, T_K]} |X_t - \varphi_t(x)| \le \delta\Big] \\
&= \mathbb{E}_x\Big[\mathbb{P}_{X_{T_K}}[\tau_{\Omega^c} > u] \mathbf{1}_{\sup_{t \in [0, T_K]} |X_t - \varphi_t(x)| \le \delta}\Big] \\
&\ge \big(\mathbb{P}_y[\tau_{\Omega^c} > u + m_h] + r_2\big)(1 + O(e^{-\frac{c}{h}})).
\end{aligned}$$

这证明了（4.14）中的第二个不等式。现在令 $h > 0$ 足够小，使得 $m_h > T_K$。然后，利用马尔可夫性质、（2.12）、（2.21）以及（4.17）中的第一个不等式，对于

所有 $u'>0$、 $x\in K$ 和 $y\in \overline{\mathsf{C}_{\min}(\eta_*)}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c}>u'+m_h]&\le \mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c}>u'+T_K]\\&=\mathbb{P}_x\Big[\tau_{\Omega^c}>u'+T_K,\ \sup_{t\in[0,T_K]}|X_t-\varphi_t(x)|\le\delta\Big]\\&\quad+\mathbb{P}_x\Big[\tau_{\Omega^c}>u'+T_K,\ \sup_{t\in[0,T_K]}|X_t-\varphi_t(x)|>\delta\Big]\\&=\mathbb{P}_x\Big[\tau_{\Omega^c}>u'+T_K,\ \sup_{t\in[0,T_K]}|X_t-\varphi_t(x)|\le\delta\Big]+O(e^{-\frac{c}{h}})\\&=\mathbb{E}_x\Big[\mathbb{P}_{X_{T_K}}[\tau_{\Omega^c}>u']\,\mathbf{1}_{\sup_{t\in[0,T_K]}|X_t-\varphi_t(x)|\le\delta}\Big]+O(e^{-\frac{c}{h}})\\&\le\big(\mathbb{P}_y[\tau_{\Omega^c}>u'-m_h]+r_1\big)\big(1+O(e^{-\frac{c}{h}})\big)+O(e^{-\frac{c}{h}}).\end{aligned}$$

取 $u>0$。于是，(4.14) 中的第一个不等式可由前一个不等式推出，条件是 $u-2m_h>0$ （将其用于 $u'=u-m_h>0$），并利用以下事实：当 $u-2m_h\le 0$ 时，$\mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c}>u]\le 1=\mathbb{P}_y[\tau_{\Omega^c}>u-2m_h]$。至此，(4.14) 得证。

现在我们可以证明方程 (1.17)。根据 (4.9)，对所有 $s\in\mathbb{R}$，该式均成立。

$$\mathbb{P}_{\nu_h}[\tau_{\Omega^c}>s]=e^{-\lambda^L_{1,h}\max(s,0)}, \tag{4.18}$$

并且，根据 (4.2)，存在 $c>0$，使得对所有足够小的 h 以及所有 $s\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{\nu_h}[\tau_{\Omega^c}>s]&=\frac{\int_\Omega \mathbb{P}_y[\tau_{\Omega^c}>s]\,u^{P^*}_{1,h}(y)\,e^{-\frac{1}{h}f(y)}dy}{\int_\Omega u^{P^*}_{1,h}e^{-\frac{f}{h}}}\\&=\frac{\int_{\overline{\mathsf{C}_{\min}(\eta_*)}}\mathbb{P}_y[\tau_{\Omega^c}>s]\,u^{P^*}_{1,h}(y)\,e^{-\frac{1}{h}f(y)}dy}{\int_\Omega u^{P^*}_{1,h}e^{-\frac{f}{h}}}+O(e^{-\frac{c}{h}}).\end{aligned} \tag{4.19}$$

此外，由 (1.15)，存在 $c>0$，使得对每个足够小的 h：

$$\lambda^L_{1,h}m_h\le e^{-\frac{c}{h}}.$$

考虑 $t>0$ 和 $x\in K\subset\mathcal{A}(\{x_0\})$。取 $s=t/\lambda^L_{1,h}+m_h>0$ 在 (4.18) 中，并利用 (4.14) 和 (4.19)，存在 $h_0>0$ 它不依赖于 $t>0$ 也不依赖于 $x\in K$，使得取 $c>0$充分小（如有必要，但不依赖于 $t>0$ 也不依赖于 $x\in K$），则对每个 $h\in(0,h_0]$均成立:
$\mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c}>t/\lambda^L_{1,h}]\ge e^{-\lambda^L_{1,h}(t/\lambda^L_{1,h}+m_h)}-e^{-\frac{c}{h}}$然后 $\mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c}>t/\lambda^L_{1,h}]-e^{-t}\ge-\lambda^L_{1,h}m_h-e^{-\frac{c}{h}}\ge-2e^{-\frac{c}{h}}$.

类似地，现在取 $s=t/\lambda^L_{1,h}-2m_h$ 并在必要时将 $h_0>0$ 取得更小（但不依赖于$t>0$ 也不依赖于 $x\in K$），则对每个 $h\in(0,h_0]$ 均成立:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c}>t/\lambda^L_{1,h}]-e^{-t}&\le e^{-\lambda^L_{1,h}\max(t/\lambda^L_{1,h}-2m_h,0)}+e^{-\frac{c}{h}}-e^{-t}\le\begin{cases}3\lambda^L_{1,h}m_h+e^{-\frac{c}{h}} & \text{if } t>2\lambda^L_{1,h}m_h\\ t+e^{-\frac{c}{h}} & \text{if } t\le 2\lambda^L_{1,h}m_h\end{cases}\\&\le 4e^{-\frac{c}{h}}.\end{aligned}$$

因此，对于每个紧 致集 $K\subset\mathsf{A}(\{x_0\})$，存在 $c>0$ 和 $h_0>0$，使得对所有 $h\in(0,h_0]$:

$$\sup_{x\in K,t\in\mathbb{R}^+}|\mathbb{P}_x[\tau_{\Omega^c}>t/\lambda^L_{1,h}]-e^{-t}|\le e^{-\frac{c}{h}},$$

至此，便完成了1.17的证明。

5. Proof of Theorem 2

在最后这一节中，我们证明定理2。更确切地说，我们证明关于$\lambda^P_{1,\ h}$ 的 P_h 主特征值的下述等价结论（参见1.14及其下文，以及命题3）。

定理 5. 假设 (Ortho)、(One-Well)、(无散) 和 (Normal) 成立。那么，当 $h\to 0$ 时， P_h 的主特征值 $\lambda^P_{1,h}$ 满足：

$$\lambda^P_{1,h}=\left(\kappa_1^P\,h^{\frac12}+\kappa_2^P\,h+O(h^{\frac54})\right)e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega}f-f(x_0))},$$

其中 $\kappa_1^P=2\kappa_1^L$ 和 $\kappa_2^P=2\kappa_2^L$（见 (1.19)），且误差项 $O(h^{\frac54})$ 实际上为 $O(h^{\frac32})$ 阶，当 $\kappa_1^P=0$ 或 $\kappa_2^P=0$ 时；也就是说，当对每个 $z\in\partial\mathsf{C}_{\min}\cap\partial\Omega$， $\nabla f(z)=0$，或当对每个$z\in\partial\mathsf{C}_{\min}\cap\partial\Omega$， $\nabla f(z)\neq 0$ 时。

5.1. 一般策略。为了证明定理 5，我们希望对每个足够小的 h，构造一个非常精确的近似函数 $\mathsf{f}_{1,h}$，它是 P_h 的特征模态 $u^P_{1,h}$。下一个命题给出了确保这种近似足够精确的条件。

命题 19. 假设 (Ortho) 和 (One-Well) 成立。此外，假设对于所有足够小的 h，存在一个 $L^2(\Omega)$-归一化函数 $\mathsf{f}_{1,\ h}\in D(P_h)$，满足以下性质：

(E1) $$\langle P_h\mathsf{f}_{1,h},\mathsf{f}_{1,h}\rangle_{L^2(\Omega)}=\left(\kappa_1^P h^{\frac12}+\kappa_2^P h+O(h^{\frac32})\right)e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega}f-f(x_0))},$$

(E2) $$\|P_h\mathsf{f}_{1,h}\|^2_{L^2(\Omega)}=O(h^2)\,\langle P_h\mathsf{f}_{1,h},\mathsf{f}_{1,h}\rangle_{L^2(\Omega)},$$

(E3) $$\|P_h^*\mathsf{f}_{1,h}\|^2_{L^2(\Omega)}=\left(\kappa_1^P h^{\frac12}\,O(h^2)+\kappa_2^P h\,O(h)\right)e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega}f-f(x_0))}.$$

那么，定理5 中的渐近等价式成立，即

$$\lambda^P_{1,h}=\left(\kappa_1^P\,h^{\frac12}+\kappa_2^P\,h+O(h^{\frac54})\right)e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega}f-f(x_0))}\quad when\ h\to 0,$$

其中误差项 $O(h^{\frac54})$ 实际上是 $O(h^{\frac32})$ 阶，当 $\kappa_1^P=0$ 或 $\kappa_2^P=0$ 时。

证明。 根据导出式 (4.6) 以及 (E1)、(E2) 的论证，对于某个 C， $c>0$以及每个 $h>0$ 足够小的值：

(5.1) $$\|(1-\pi_h^P)\mathsf{f}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}\le Ch^{-1}\|P_h\mathsf{f}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}\quad\text{and thus}\quad \pi_h^P\mathsf{f}_{1,h}=\mathsf{f}_{1,h}+O(e^{-\frac{c}{h}})\ \text{ in } L^2(\Omega).$$

由于 $P_h\pi_h^P\mathsf{f}_{1,\ h}=\lambda^P_{1,\ h}\pi_h^P\mathsf{f}_{1,\ h}$，由 (5.1) 的第二个估计可得

$$\begin{aligned}\lambda^P_{1,h}&=\frac{\langle P_h\pi_h^P\mathsf{f}_{1,h},\pi_h^P\mathsf{f}_{1,h}\rangle_{L^2(\Omega)}}{\|\pi_h^P\mathsf{f}_{1,h}\|^2_{L^2(\Omega)}}\\&=(1+O(e^{-\frac{c}{h}}))\Big[\langle P_h\mathsf{f}_{1,h},\mathsf{f}_{1,h}\rangle_{L^2(\Omega)}+\langle P_h(\pi_h^P-1)\mathsf{f}_{1,h},\mathsf{f}_{1,h}\rangle_{L^2(\Omega)}+\langle P_h\pi_h^P\mathsf{f}_{1,h},(\pi_h^P-1)\mathsf{f}_{1,h}\rangle_{L^2(\Omega)}\Big].\end{aligned}$$

此外 (5.1)， $\pi_h^P=O(1)$ (见 (3.36))，以及柯西-施瓦茨不等式推出：

$$|\langle P_h\pi_h^P\mathsf{f}_{1,h},(\pi_h^P-1)\mathsf{f}_{1,h}\rangle_{L^2(\Omega)}|=|\langle\pi_h^PP_h\mathsf{f}_{1,h},(\pi_h^P-1)\mathsf{f}_{1,h}\rangle_{L^2(\Omega)}|=\|P_h\mathsf{f}_{1,h}\|^2_{L^2(\Omega)}\,O(h^{-1})$$

and

$$|\langle P_h(\pi_h^P-1)\mathsf{f}_{1,h},\mathsf{f}_{1,h}\rangle_{L^2(\Omega)}|=|\langle(\pi_h^P-1)\mathsf{f}_{1,h},P_h^*\mathsf{f}_{1,h}\rangle_{L^2(\Omega)}|=\|P_h\mathsf{f}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}\|P_h^*\mathsf{f}_{1,h}\|_{L^2(\Omega)}\,O(h^{-1}).$$

此外利用（E1）、（E2）和（E3），可得

$$\lambda^P_{1,h}=(1+O(e^{-\frac{c}{h}}))\langle P_h\mathsf{f}_{1,h},\mathsf{f}_{1,h}\rangle_{L^2(\Omega)}(1+O(h^\ell))=\langle P_h\mathsf{f}_{1,h},\mathsf{f}_{1,h}\rangle_{L^2(\Omega)}(1+O(h^\ell))$$

其中 $\ell = \frac{1}{2}$ 当 $\kappa_1^P = 0$ （因此 $\kappa_2^P \neq 0$），$\ell = 1$ 当 $\kappa_2^P = 0$ （因此 $\kappa_1^P \neq 0$），且 $\ell = \frac{3}{4}$ 当 $\kappa_1^P \kappa_2^P \neq 0$。这便得到了命题 19。□

5.2. 定理 5 的证明。从现在起，我们假设 (Ortho)、(One-Well)、(无散) 和 (Normal)。根据命题 19，只需构造一个准模态 $\mathsf{f}_{1,\,h}$ 满足 (E1)、(E2) 和 (E3)（见下文命题 22）。下面的构造深受 [35, 34] 中构造的启发。

5.2.1. 点 $\partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$ 附近的坐标系。回顾一下，$\partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega \neq \varnothing$ （见（One-Well））， 并且 $\partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$ 的基数有限（见（1.6））。取 $\underline{z} \in \partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$。存在一个包含 V_z 的 z 在 Ω 中的邻域以及一个坐标系

$$p \in \mathsf{V}_z \mapsto v = (v', v_d) = (v_1, \dots, v_{d-1}, v_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}_- \tag{5.2}$$

使得

$$v(z) = 0, \quad \{p \in \mathsf{V}_z,\, v_d(p) < 0\} = \Omega \cap \mathsf{V}_z, \quad \{p \in \mathsf{V}_z,\, v_d(p) = 0\} = \partial\Omega \cap \mathsf{V}_z, \tag{5.3}$$

and

$$\forall i, j \in \{1, \dots, d\}, \quad g_z\Big(\frac{\partial}{\partial v_i}(z), \frac{\partial}{\partial v_j}(z)\Big) = \delta_{ij} \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial v_d}(z) = n_\Omega(z),$$

其中 g_z 是新坐标下的度量张量。我们用 $G = (G_{ij})_{1\le i,\, j\le d}$ 表示其矩阵，用 $G^{-1} = (G^{ij})_{1\le i,\, j\le d}$ 表示其逆矩阵；$(\mathsf{e}_1, \dots, \mathsf{e}_d) = ({}^t(1, 0, \dots, 0) \dots, {}^t(0, \dots, 0, 1))$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 的标准基，因此，定义 $J := \mathsf{Jac}\, v^{-1}$ 后，我们有

$$G = {}^tJJ, \quad G(0) = (\delta_{ij}) \ \text{ i.e. } \ {}^tJ(0) = J^{-1}(0), \quad \text{and} \quad n_\Omega(z) = J(0)\mathsf{e}_d\,. \tag{5.4}$$

ˆ 此外，在新坐标下定义函数 f 为 $f := f \bigcirc v^{-1}$：

情形 1，当 $\nabla f(z) \neq 0$：例如，根据 [26, 第 3 节。4], 该 v-坐标可选取为使得

$$\hat{f}(v', v_d) = f(z) + \mu(z)v_d + \frac{1}{2}\, v' \,\mathrm{Hess}\, \hat{f}|_{\{v_d=0\}}(0)\, {}^tv', \tag{5.5}$$

这里回顾一下，$\mu(z) := \partial_{n_\Omega} f(z) > 0$并且，由于（Normal），0 是 $f|_{\{v_d=0\}}$ 的一个非退化（全局）极小值。

情形 2，当 $\nabla f(z) = 0$：我们有 $\nabla(\hat{f} + |\mu(z)|v_d^2)(0) = 0$ 并且根据（5.4）：

$$\mathrm{Hess}(\hat{f} + |\mu(z)|v_d^2)(0) = {}^tJ(0)\big(\mathrm{Hess}\, f(z) + 2|\mu(z)|n_\Omega(z)n_\Omega(z)^*\big)J(0), \tag{5.6}$$

这里回顾一下，根据（Normal），$n_\Omega(z)$ 是与负特征值 $\mu(z)$ 相关联的特征向量，其中 $\mathsf{Hess}\ f(z) + {}^t\mathsf{L}(z)$。还需注意，根据引理 5.6，矩阵（1）是正定的。

特别 地，若将 V_z 取得足够小，则可假设当 $\nabla f(z) \neq 0$,

$$\mathrm{argmin}_{v(\overline{\mathsf{V}_z})}\big(\hat{f}(v) - 2\mu(z)v_d\big) = \{0\}, \tag{5.7}$$

而当 $\nabla f(z) = 0$,

$$\mathrm{argmin}_{v(\overline{\mathsf{V}_z})}\big(\hat{f}(v) + |\mu(z)|v_d^2\big) = \{0\}. \tag{5.8}$$

对于 $\delta_1 > 0$ 和 $\delta_2 > 0$ 足够小后，最终定义 ∂ 中 z 的以下邻域 Ω,

$$\mathsf{V}_{\partial\Omega}^{\delta_2}(z) := \big\{p \in \mathsf{V}_z,\, v_d(p) = 0 \text{ and } |v'(p)| \le \delta_2\big\} \ \text{(see (5.2)-(5.3))},$$

以及 Ω 中 z 的以下邻域,

$$\mathsf{V}_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z)=\big\{p\in\mathsf{V}_z,|v'(p)|\le\delta_2 \text{ and } v_d(p)\in[-2\delta_1,0]\big\}. \tag{5.9}$$

由 (5.9) 定义的集合是一个以 z 为中心、沿 v坐标方向的圆柱。通过选取更小的 $\delta_1>0$和 $\delta_2>0$，我们可以假设圆柱体 $\mathsf{V}^{\delta_1,\delta_2}\Omega(z)$，$z\in\partial\mathsf{C}_{\min}\cap\partial\Omega$ 两两不交。由于 $f(z)=\min_{\partial\Omega}f>f(x_0)$，我们还可以假设

$$\min_{\mathsf{V}_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z)} f>f(x_0)\quad(\text{so in particular } x_0\notin\mathsf{V}_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z)), \tag{5.10}$$

并且，根据 (1.5),

$$\operatorname{argmin}_{\mathsf{V}_{\partial\Omega}^{\delta_2}(z)} f=\{z\}. \tag{5.11}$$

参数 $\delta_2>0$ 现在固定不变。最后，根据 (5.11)，并通过选取更小的 $\delta_1>0$，存在 $r>0$ 使得:

$$\big\{p\in\mathsf{V}_z,|v'(p)|=\delta_2 \text{ and } v_d(p)\in[-2\delta_1,0]\big\}\subset\{f\ge f(z)+r\}. \tag{5.12}$$

本节最后，我们在每个 $z\in\partial\mathsf{C}_{\min}\cap\partial\Omega$ 附近局部定义一个函数 φ_z，它使用上述 v坐标，并将在下一节用于定义准模态 $\mathsf{f}_{1,h}$ （位于 z附近）。令$\chi\in C^\infty(\mathbb{R}^-,[0,1])$ 为一个截断函数，使得

$$\operatorname{supp}\chi\subset[-\delta_1,0] \text{ and } \chi=1 \text{ on } \Big[-\frac{\delta_1}{2},0\Big]. \tag{5.13}$$

对每个 $z\in\partial\mathsf{C}_{\min}\cap\partial\Omega$，该函数 φ_z 定义如下（见（5.2）、（5.3）和（5.9））:

情形 1，当 $\nabla f(z)\neq0$ 时:

$$\forall v=(v',v_d)\in v\big(\mathsf{V}_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z)\big),\quad \varphi_z(v',v_d):=\frac{\int_{v_d}^0\chi(t)e^{\frac{2}{h}\mu(z)t}dt}{\int_{-2\delta_1}^0\chi(t)\,e^{\frac{2}{h}\mu(z)t}dt}, \tag{5.14}$$

这里回顾一下 $\mu(z)=\partial_{n_\Omega}f(z)>0$，见（5.5）。

情形 2，当 $\nabla f(z)=0$ 时:

$$\forall v=(v',v_d)\in v\big(\mathsf{V}_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z)\big),\quad \varphi_z(v',v_d):=\frac{\int_{v_d}^0\chi(t)e^{-\frac{1}{h}|\mu(z)|t^2}dt}{\int_{-2\delta_1}^0\chi(t)\,e^{-\frac{1}{h}|\mu(z)|t^2}dt}, \tag{5.15}$$

这里回顾一下 $\mu(z)$ 是 Hess $f(z)+{}^t\mathsf{L}(z)$的负特征值，见（5.6）。

两种情形下:

$$\begin{cases}\varphi_z\in C^\infty\big(v\big(\mathsf{V}_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z)\big),[0,1]\big) \text{ only depends on } v_d,\ \varphi_z(v',0)=0, \text{ and}\\ \forall(v',v_d)\in v\big(\mathsf{V}_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z)\big),\ \varphi_z(v',v_d)=1 \text{ when } v_d\in[-2\delta_1,-\delta_1].\end{cases} \tag{5.16}$$

5.2.2. 准模态 $\mathsf{f}1,h$ 的定义。现在我们使用 v-坐标和上述 φ_z, $z\in\partial\mathsf{C}_{\min}\cap\partial\Omega$ 来定义 $\mathsf{f}1,h$。首先，回顾一下，我们在 (5.9) 中定义了围绕 $z\in\partial\mathsf{C}_{\min}\cap\partial\Omega$ 的两两不相交的圆柱体，它们满足 (5.10)、(5.11) 和 (5.12)。另一方面，对于每个 $p\in\partial\mathsf{C}_{\min}\setminus\partial\Omega$: $p\in\Omega$，因此 $\nabla f(p)\neq0$，这意味着对于足够小的每个 $r>0$，$\{f<f(p)\}\cap B(p,r)$ 都是连通的，因而包含于 $\mathsf{C}_{\min}$ 中。

这些考虑 这些推导意味着存在以下 Ω 的子集 C_{low} 和 C^{up}。

命题20。 假设 (**Ortho**)，(**One-Well**)，(无散)和 (**Normal**)。那么，存在两个 $\mathcal{C}^\infty$ 连通开集 $\mathbf{C}_{\text{low}}$ 和 $\mathbf{C}_{\text{up}}$，它们属于 Ω 并满足以下性质：

(1) 有 $\mathbf{C}_{\min} \subset \overline{\mathbf{C}_{\text{up}}} \cup \partial\Omega$ 和 $\operatorname{argmin}_{\overline{\mathbf{C}_{\text{up}}}} f = \{x_0\}$。(2) 集合 $\mathbf{C}_{\text{up}}$ 是 Ω 中每个 $\mathbf{V}_{\Omega}^{\delta_1,\delta_2}(z)$，$z \in \partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$ 的一个邻域。(3) 有 $\mathbf{C}_{\text{low}} \subset \mathbf{C}_{\text{up}}$，且条带 $\mathbf{C}_{\text{up}} \setminus \mathbf{C}_{\text{low}}$ 满足

$$\exists c > 0,\ f \geq f(x_0) + c \text{ on } \overline{\mathbf{C}}_{\text{up}} \setminus \mathbf{C}_{\text{low}} \quad \text{and} \quad \overline{\mathbf{C}}_{\text{up}} \setminus \mathbf{C}_{\text{low}} = \bigcup_{z \in \partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega} \mathbf{V}_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z) \bigcup \mathbf{O}, \tag{5.17}$$

其中 Ω 的子集 $\mathbf{O}$ 满足：

$$\exists c > 0,\ f \geq \min_{\partial\Omega} f + c \text{ on } \mathbf{O}.$$

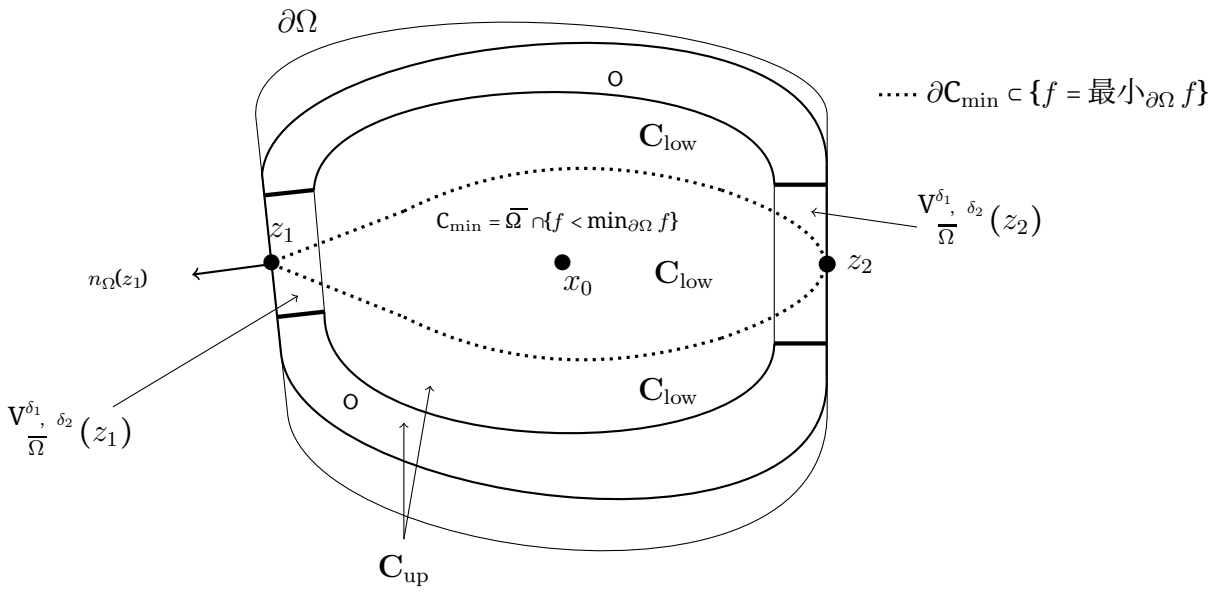

FIGURE 5.1. .....的示意图$\mathbf{C}_{\text{low}}$、$\mathbf{C}_{\text{up}}$和$\mathbf{O}$ （见命题20）。图中，$\partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega = \{z_1, z_2\}$ 其中 $\nabla f(z_1) = 0$ 和 $|\nabla f(z_2)| \neq 0$。

参见图5.1，其中给出了$\mathbf{C}_{\text{low}}$、$\mathbf{C}_{\text{up}}$和$\mathbf{O}$的示意图。注意，命题20意味着

$$\operatorname{argmin}_{\overline{\mathbf{C}}_{\text{up}}} f = \operatorname{argmin}_{\overline{\mathbf{C}}_{\text{low}}} f = \{x_0\}. \tag{5.18}$$

使用上述集合 $\mathbf{C}_{\text{up}}$ 和 $\mathbf{C}_{\text{low}}$，我们定义函数 $\phi_{1,h} : \Omega \to [0,1]$ 如下。

(i) 对于 $z \in \partial\mathbf{C}_{\min} \cap \partial\Omega$，$\phi_{1,h}$ 定义在圆柱 $\mathbf{V}_{\Omega}^{\delta_1,\delta_2}(z)$ （见（5.9））如下定义：

$$\forall p \in \mathbf{V}_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z),\ \phi_{1,h}(p) := \varphi_z(v(p)), \quad \text{see (5.14) and (5.15)}. \tag{5.19}$$

(ii) 由（5.16）、（5.17）以及 $\mathbf{C}_{\text{low}} \subset \mathbf{C}_{\text{up}}$（见命题20），上述函数 $\phi_{1,h}$ 满足（5.19），可以延拓至 Ω，使得

$$\phi_{1,h} = 0 \text{ on } \overline{\Omega} \setminus \mathbf{C}_{\text{up}}, \quad \phi_{1,h} = 1 \text{ on } \mathbf{C}_{\text{low}}, \text{ and } \phi_{1,h} \in C^\infty(\overline{\Omega}, [0,1]). \tag{5.20}$$

此外，鉴于（5.14）、（5.15）和（5.17），$\phi_{1,h}$ 可以在 O 上选取，使得对于某个 $C>0$，且对任意足够小的 h，

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d,\ |\alpha| \in \{1,2\},\ \|\partial^\alpha \phi_{1,h}\|_{L^\infty(\mathsf{O})} \le C h^{-2}. \tag{5.21}$$

注意到（5.20）意味着

$$\operatorname{supp} \nabla \phi_{1,h} \subset \overline{\mathbf{C}}_{\mathrm{up}} \setminus \mathbf{C}_{\mathrm{low}}. \tag{5.22}$$

现在我们可以为 P_h 定义准模态 $\mathsf{f}_{1,h}$。

定义21。假设满足（**Ortho**）、（**One-Well**）、（无散）和（**Normal**）。令$\phi_{1,h}$ 为上述满足（5.19）–（5.21）的函数。我们定义：

$$\mathsf{f}_{1,h} := \frac{\phi_{1,h}\, e^{-\frac{f}{h}}}{Z_{1,h}},\quad where\quad Z_{1,h} := \|\phi_{1,h}\, e^{-\frac{f}{h}}\|_{L^2(\Omega)}.$$

5.2.3. 准模态估计。

命题 22. 假设 (Ortho)、(One-Well)、（Div-free）和（Normal）成立。设 $\mathsf{f}_{1,h}$ 如定义21中所述。则 $\mathsf{f}_{1,h}$ 属于 $D(P_h)$，并满足命题 19 中的 (E1)、(E2) 和 (E3)。特别地，定理 5 成立。

证明. 首先，关系式 (5.20) 推出 $\mathsf{f}_{1,h} \in C^\infty(\Omega\ \mathbb{R}^+)$ 和 $\mathsf{f}_{1,h} = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上成立，因此，由于 $\mathbf{C}_{\mathrm{up}} \subset\Omega$（见命题 20），

$$\mathsf{f}_{1,h} \in D(P_h) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \tag{5.23}$$

下文中，$c>0$ 是一个与 $h>0$ 无关的常数，其值可随出现位置而变化。证明分为三个步骤。

步骤 1. 函数$\mathsf{f}_{1,h}$ 满足 (E1)。

A关于 的渐近等价式$Z_{1,h}$。由定义 21 和 (5.20)，可得

$$Z_{1,h}^2 = \int_\Omega \phi_{1,h}^2\, e^{-\frac{2}{h}f} = \int_{\mathbf{C}_{\mathrm{low}}} \phi_{1,h}^2\, e^{-\frac{2}{h}f} + \int_{\mathbf{C}_{\mathrm{up}}\setminus\mathbf{C}_{\mathrm{low}}} \phi_{1,h}^2\, e^{-\frac{2}{h}f} = \int_{\mathbf{C}_{\mathrm{low}}} \phi_{1,h}^2\, e^{-\frac{2}{h}f} + O\big(e^{-\frac{2}{h}(f(x_0)+c)}\big),$$

这里用到了 Ran $\phi_{1,h} \subset [0,1]$ 以及 $f \ge f(x_0)+c$ 在 $\mathbf{C}_{\mathrm{up}} \setminus \mathbf{C}_{\mathrm{low}}$(见 (5.17))。此外，利用$\phi_{1,h}=1$ 在 $\mathbf{C}_{\mathrm{low}}$ 以及 (5.18，标准的拉普拉斯方法表明，当 $h\to 0$时，

$$Z_{1,h}^2 = (\pi h)^{\frac{d}{2}} \big(\det \operatorname{Hess} f(x_0)\big)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{2}{h}f(x_0)}\big(1+O(h)\big). \tag{5.24}$$

渐近等价式 $\langle P_h \mathsf{f}_{1,h}, \mathsf{f}_{1,h}\rangle_{L^2(\Omega)}$。首先，利用（5.23）和（3.1），

$$\langle P_h \mathsf{f}_{1,h}, \mathsf{f}_{1,h}\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla_{f,h}\, \mathsf{f}_{1,h}|^2.$$

此外，根据定义 21 和（5.22），$\nabla_{f,h}\mathsf{f}_{1,h} = Z_{1,h}^{-1} h e^{-\frac{f}{h}} \nabla \phi_{1,h}$的支集包含于 $\mathbf{C}_{\mathrm{up}} \setminus \overline{\mathbf{C}}_{\mathrm{low}}$。因此，根据命题 20中的（3）、（5.21）和（5.24），对于每个足够小的 h，有：

$$\begin{aligned}\langle P_h \mathsf{f}_{1,h}, \mathsf{f}_{1,h}\rangle_{L^2(\Omega)} &= \sum_{z\in\partial\mathbf{C}_{\min}\cap\partial\Omega} \int_{\mathsf{V}_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z)} |\nabla_{f,h}\, \mathsf{f}_{1,h}|^2 + O\big(e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0)+c)}\big) \\ &= \sum_{z\in\partial\mathbf{C}_{\min}\cap\partial\Omega} Z_{1,h}^{-2} h^2 \int_{\mathsf{V}_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z)} \big|\nabla\phi_{1,h}\big|^2 e^{-\frac{2}{h}f} + O\big(e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0)+c)}\big).\end{aligned} \tag{5.25}$$

现在设 z 属于 $\partial\mathbf{C}_{\min}\cap\partial\Omega$，并回顾第 $p\mapsto v(p)$ 节中定义的坐标 5.2.1，参见（5.2）–（5.4）。我们还定义 $\hat{\boldsymbol{\ell}}:=\boldsymbol{\ell}\circ v^{-1}$。利用这些坐标，在 $\mathbf{V}^{\delta_1,\delta_2}_{\Omega}(z)$ 上有：

$$(\nabla f)(v^{-1})={}^tJ^{-1}\nabla\hat f,\ (\nabla\phi_{1,h})(v^{-1})={}^tJ^{-1}\nabla\varphi_z,\ \text{and}\ (\operatorname{Jac}\boldsymbol{\ell})(v^{-1})=\operatorname{Jac}\hat{\boldsymbol{\ell}}\,J^{-1}. \tag{5.26}$$

情形 1，当 $\nabla f(z)\neq 0$：利用 (5.4)、(5.26) 和 (5.14)，我们有

$$\int_{\mathbf{V}^{\delta_1,\delta_2}_{\Omega}(z)}\left|\nabla\phi_{1,h}\right|^2 e^{-\frac{2}{h}f}=\frac{\int_{|v'|\le\delta_2}\int_{-2\delta_1}^0 G^{dd}(v)\,\chi^2(v_d)\sqrt{|G|}(v)\,e^{-\frac{2}{h}(\hat f(v)-2\mu(z)v_d)}dv}{\left(\int_{-2\delta_1}^0\chi(t)\,e^{\frac{2}{h}\mu(z)t}dt\right)^2} \tag{5.27}$$

并且经过直接计算可知，当 $h\to 0$ (见 (5.13))，

$$N_z:=\int_{-2\delta_1}^0\chi(t)\,e^{\frac{2}{h}\mu(z)t}dt=\frac{h}{2\mu(z)}\big(1+O(e^{-\frac{c}{h}})\big). \tag{5.28}$$

另一方面，利用 $G(0)=(\delta_{ij})$、(5.13)、(5.5) 和 (5.7)，拉普拉斯方法给出

$$\begin{aligned}\int_{|v'|\le\delta_2}\int_{-2\delta_1}^0 G^{dd}\,\chi^2\sqrt{|G|}\,e^{-\frac{2}{h}(\hat f-2\mu(z)v_d)}dv&=\big(1+O(h)\big)\int_{\mathbb{R}^{d-1}}\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{2}{h}(\hat f-2\mu(z)v_d)}dv\\&=\big(1+O(h)\big)\frac{h}{2\mu(z)}\frac{(\pi h)^{\frac{d-1}{2}}e^{-\frac{2}{h}\hat f(0)}}{\left(\det\operatorname{Hess}\hat f|_{\{v_d=0\}}(0)\right)^{\frac12}}.\end{aligned}$$

将此方程与 (5.24)、(5.27) 和 (5.28) 结合起来（注意 $f(z)=\min_{\partial\Omega}f$），得到

$$\frac{h^2}{Z_{1,h}^2}\int_{\mathbf{V}^{\delta_1,\delta_2}_{\Omega}(z)}|\nabla\phi_{1,h}|^2\,e^{-\frac{2}{h}f}=\frac{2\partial_{n_\Omega}f(z)}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\det\operatorname{Hess}f(x_0)}}{\sqrt{\det\operatorname{Hess}f|_{\partial\Omega}(z)}}\sqrt{h}\,e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega}f-f(x_0))}\big(1+O(h)\big). \tag{5.29}$$

情形 2，当 $\nabla f(z)=0$：由 (5.4)、(5.26) 和 (5.15)，我们有

$$\int_{\mathbf{V}^{\delta_1,\delta_2}_{\Omega}(z)}|\nabla\phi_{1,h}|^2\,e^{-\frac{2}{h}f}=\frac{\int_{|v'|\le\delta_2}\int_{-2\delta_1}^0 G^{dd}(v)\,\chi^2(v_d)\sqrt{|G|}(v)\,e^{-\frac{2}{h}(\hat f(v)+|\mu(z)|v_d^2)}dv}{\left(\int_{-2\delta_1}^0\chi(t)\,e^{-\frac{1}{h}|\mu(z)|t^2}dt\right)^2},$$

其中，右端分母在极限下满足 $h\to 0$（见（5.13）），

$$N_z:=\int_{-2\delta_1}^0\chi(t)\,e^{-\frac{1}{h}|\mu(z)|t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi h}}{2\sqrt{|\mu(z)|}}\big(1+O(e^{-\frac{c}{h}})\big). \tag{5.30}$$

此外，利用 $G(0)=(\delta_{ij})$、(5.13)、(5.6) 和 (5.8)，拉普拉斯方法给出，当 $h\to 0$时，

$$\int_{|v'|\le\delta_2}\int_{-2\delta_1}^0 G^{dd}\,\chi^2\sqrt{|G|}\,e^{-\frac{2}{h}(\hat f+|\mu(z)|v_d^2)}dv=\frac{(\pi h)^{\frac d2}e^{-\frac{2}{h}\hat f(0)}}{\sqrt{\det\operatorname{Hess}(\hat f+|\mu(z)|v_d^2)(0)}}\big(\frac12+O(\sqrt{h})\big),$$

其中，由引理 1的第二项及（5.6），$\det\operatorname{Hess}(\hat f+|\mu(z)|v_d^2)(0)=-\det\operatorname{Hess}f(z)$。关于前一个等号中余项[35, 的最优性解释，请参见 25] 备注 $O(\sqrt{h})$，此外再利用（5.30），可得

$$\frac{h^2}{Z_{1,h}^2}\int_{\mathbf{V}^{\delta_1,\delta_2}_{\Omega}(z)}|\nabla\phi_{1,h}|^2\,e^{-\frac{2}{h}f}=\frac{2|\mu(z)|}{\pi}\frac{\sqrt{\det\operatorname{Hess}f(x_0)}}{\sqrt{|\det\operatorname{Hess}f(z)|}}\,h\,e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega}f-f(x_0))}\big(1+O(\sqrt{h})\big). \tag{5.31}$$

最后，（5.25）、（5.29）和（5.31）意味着 $\mathsf{f}_{1,h}$ 满足（E1）。

步骤 2。函数$\mathsf{f}_{1,h}$ 满足 (E2)。

回想一下，$\nabla_{f,h}\mathbf{f1}_{,h} = Z_1^{-1}{}_{,h}\, he^{-\frac{f}{h}}\nabla\phi_{1,h}$的支撑集包含在$\mathsf{C}_{\mathrm{up}}\setminus\mathsf{C}_{\mathrm{low}}$中，因此 $P_h\mathbf{f1}_{,h} = (\nabla^*_{f,h} + 2\boldsymbol{\ell}\cdot)\nabla_{f,h}\mathbf{f1}_{,h}$ 也同样如此。因此，命题20、(5.21) 和 (5.24) 表明，当 h 足够小时，

$$\int_\Omega |P_h\,\mathsf{f}_{1,h}|^2 = \sum_{z\in\partial\mathbf{C}_{\min}\cap\partial\Omega}\ \int_{\mathsf{V}_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z)} |P_h\,\mathsf{f}_{1,h}|^2 + O\big(e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0)+c)}\big). \tag{5.32}$$

由于 $\operatorname{div}\,\boldsymbol{\ell} = 0$，将 $P_h\,\mathsf{f}_{1,h}$ 替换为 $P_h^*\mathbf{f}_{1,h} = (\Delta_{f,h} - 2\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla_{f,h})\mathbf{f}_{1,h}$ 时，同样的关系仍成立。

现在令 z 属于 $\partial\mathsf{C}_{\min}\cap\partial\Omega$。利用关系 $\Delta_{f,h} = 2he^{-\frac{f}{h}}(-\frac{h}{2}\Delta + \nabla f\cdot\nabla)e^{\frac{f}{h}}$ 和 (5.26)，其中 φ_z 仅依赖于变量 v_d，我们在 $v(\mathsf{V}^{\delta_1,\delta_2}_{\Omega}(z))$ 上的 v 坐标中得到：

$$\begin{aligned}(\Delta_{f,h}\mathsf{f}_{1,h})\circ v^{-1} &= \frac{2h\,e^{-\hat f/h}}{Z_{1,h}}\Big[\frac{-h}{2\sqrt{|G|}}\operatorname{div}\big(\sqrt{|G|}\,G^{-1}\nabla\varphi_z\big) + \sum_{i,j} G^{ij}\partial_{v_j}\varphi_z\partial_{v_i}\hat f\Big]\\ &= \frac{h\,e^{-\hat f/h}}{Z_{1,h}}\Big[\frac{-h}{\sqrt{|G|}}\sum_i \partial_{v_i}\big(\sqrt{|G|}G^{id}\partial_{v_d}\varphi_z\big) + 2\partial_{v_d}\varphi_z\sum_i G^{id}\partial_{v_i}\hat f\Big].\end{aligned}$$

此外，回想一下，$\varphi_z(v) = \int_{v_d}^0 \chi(t)e^{-\frac{1}{h}\theta(t)}dt/N_z$，其中 $\theta(t) = -2\mu(z)t$ 当 $\nabla f(z)\neq 0$，而 $\theta(t) = |\mu(z)|t^2$ 当 $\nabla f(z) = 0$（见 (5.14) 和 (5.15)），因此

$$\partial_{v_d}\varphi_z(v) = -\frac{1}{N_z}\chi(v_d)e^{-\frac{\theta(v_d)}{h}} \quad\text{and}\quad \partial^2_{v_d}\varphi_z(v) = -\frac{1}{N_z}\chi'(v_d)e^{-\frac{\theta(v_d)}{h}} + \frac{1}{h\,N_z}\chi(v_d)\theta'(v_d)e^{-\frac{\theta(v_d)}{h}}. \tag{5.33}$$

因此，我们在 $v(\mathsf{V}^{\delta_1,\delta_2}_{\Omega}(z))$上有：

$$\begin{aligned}(\Delta_{f,h}\mathsf{f}_{1,h})\circ v^{-1} = \frac{he^{-\frac{1}{h}(\hat f+\theta)}}{N_z Z_{1,h}}\Big[&\frac{h}{\sqrt{|G|}}\sum_i\partial_{v_i}\big(\sqrt{|G|}G^{id}\big)\chi(v_d)\\ &-\chi(v_d)\Big(G^{dd}\theta'(v_d) + 2\sum_j G^{jd}\partial_{v_j}\hat f\Big) + hG^{dd}\chi'(v_d)\Big].\end{aligned} \tag{5.34}$$

此外，由$\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla_{f,\,h}\mathbf{f1}_{,\,h} = \frac{he^{-\frac{f}{h}}}{Z_1}{}_{,\,h}\ \boldsymbol{\ell}\cdot\nabla\phi_{1,\,h}$、(5.26)、(5.33)和(5.4)，我们推得在 $v(\mathsf{V}^{\delta_1,\,\delta_2}_{\Omega}(z))$上：

$$\begin{aligned}(2\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla_{f,h}\mathsf{f}_{1,h})\circ v^{-1} &= -\frac{he^{-\frac{1}{h}(\hat f+\theta)}}{N_z Z_{1,h}}\,\chi(v_d)\Big(\big[2\hat{\boldsymbol{\ell}}(0) + 2\,\mathrm{Jac}\,\hat{\boldsymbol{\ell}}(0)v\big]\cdot {}^tJ^{-1}\mathsf{e}_d + O(|v|^2)\Big)\\ &= -\frac{he^{-\frac{1}{h}(\hat f+\theta)}}{N_z Z_{1,h}}\,\chi(v_d)\Big(2\hat{\boldsymbol{\ell}}(0)\cdot {}^tJ^{-1}\mathsf{e}_d + 2\,\mathrm{Jac}\,\hat{\boldsymbol{\ell}}(0)v\cdot J(0)\,\mathsf{e}_d + O(|v|^2)\Big).\end{aligned} \tag{5.35}$$

为进一步计算 $P_h\mathbf{f}_{1,\,h}$ 在 $v(\mathsf{V}^{\delta_1,\,\delta_2}_{\Omega}(z))$上的值，我们分别考虑两种情形：$\nabla f(z)\neq 0$和 $\nabla f(z) = 0$。

˄情形 1，当 $\nabla f(z)\neq 0$：由于 $G = (\delta_{ij}) + O(|v|)$(见(5.4))，$\partial_{v_j} f = O(|v|)$当 $1\le j\le d-1$，˄且 $\partial_{v_d} f = \mu(z)$ (见(5.5))，我们有

$$\sum_{j=1}^d G^{jd}\partial_{v_j}\hat f = G^{dd}\mu(z) + O(|v|^2).$$

此外，由于 $\theta'(v_d) = -2\mu(z)$，我们由式（5.34）可推出

$$(\Delta_{f,h}\mathsf{f}_{1,h})\circ v^{-1} = \frac{h\chi(v_d)\,e^{-\frac{1}{h}(\hat f+\theta)}}{N_z Z_{1,h}}\big[O(h) + O(|v|^2)\big] + \frac{h^2e^{-\frac{1}{h}(\hat f+\theta)}}{N_z Z_{1,h}}G^{dd}\chi'(v_d).$$

ˆˆ 注意到，（Normal）意味着 $\ell(0) = 0$。因此，对关系 $\ell \cdot {}^t J^{-1} \nabla \hat{f} = (\ell \cdot \nabla f) \circ v^{-1} = 0$（见式（5.26））在 $v = 0$ 处作泰勒展开可知，对所有 $v \in \mathbb{R}^d$，$\mathrm{Jac}\, \hat{\ell}(0)\, v \cdot {}^t J^{-1}(0) \nabla \hat{f}(0) = 0$，ˆ进而利用式（5.4）和（5.5），$\mathrm{Jac}\, \ell(0)\, v \cdot J(0) \mathsf{e}_d = 0$。因此，利用式（5.35），

$$(2\ell \cdot \nabla_{f,h} \mathsf{f}_{1,h}) \circ v^{-1} = -\frac{h e^{-\frac{1}{h}(\hat{f}+\theta)}}{N_z Z_{1,h}}\, \chi(v_d) \times O(|v|^2).$$

因此，

$$(P_h \mathsf{f}_{1,h}) \circ v^{-1} = \frac{h \chi(v_d)\, e^{-\frac{1}{h}(\hat{f}+\theta)}}{N_z Z_{1,h}} \big[O(h) + O(|v|^2) \big] + \frac{h^2 e^{-\frac{1}{h}(\hat{f}+\theta)}}{N_z Z_{1,h}} G^{dd} \chi'(v_d).$$

由于 $\chi' = 0$ 在 $\mathbb{R}^-$（见（5.13）），由（5.7）、（5.24）、（5.28）及拉普拉斯方法可得，当 $h \to 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathsf{V}_{\Omega}^{\delta_1,\delta_2}(z)} |P_h \mathsf{f}_{1,h}|^2 &= \frac{1}{N_z^2 Z_{1,h}^2} \int_{v\left(\mathsf{V}_{\Omega}^{\delta_1,\delta_2}(z)\right)} O(h^4 + h^2|v|^4) e^{-\frac{2}{h}(\hat{f} - 2\mu(z) v_d)} dv + O\big(e^{-\frac{c}{h}}\big)\, e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0))} \\ &= O\big(h^{\frac{5}{2}}\big)\, e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f - f(x_0))} = O(h^2) \int_{\mathsf{V}_{\Omega}^{\delta_1,\delta_2}(z)} |\nabla \mathsf{f}_{1,h}|^2\, e^{-\frac{2}{h} f}, \end{aligned} \tag{5.36}$$

其中我们使用（5.29）得到最后一个等号。

ˆ 情形 2，当 $\nabla f(z) = 0$：由（5.35）及 $\ell(0) = 0$（见（1.9）），我们有

$$(2\ell \cdot \nabla_{f,h} \mathsf{f}_{1,h}) \circ v^{-1} = -\frac{h e^{-\frac{1}{h}(\hat{f}+\theta)}}{N_z Z_{1,h}}\, \chi(v_d) \big(2v \cdot {}^t \mathrm{Jac}\, \hat{\ell}(0) J(0) \mathsf{e}_d + O(|v|^2) \big).$$

ˆ 因此，利用（5.34），$G = (\delta_{ij}) + O(|v|)$（见（5.4））及 $\partial_{v_j} f = O(|v|)$ 对所有 $j = \{1, \ldots, d\}$:

$$\begin{aligned} (P_h \mathsf{f}_{1,h}) \circ v^{-1} &= \frac{h e^{-\frac{1}{h}(\hat{f}+\theta)}}{N_z Z_{1,h}} \chi(v_d) \Big[O(h) - 2G^{dd} |\mu(z)| v_d - 2 \sum_j G^{jd} \partial_{v_j} \hat{f} \\ &\quad - 2v \cdot {}^t \mathrm{Jac}\, \hat{\ell}(0) J(0) \mathsf{e}_d + O(|v|^2) \Big] + \frac{h^2 e^{-\frac{1}{h}(\hat{f}+\theta)}}{N_z Z_{1,h}} G^{dd} \chi'(v_d) \\ &= \frac{2h e^{-\frac{1}{h}(\hat{f}+\theta)}}{N_z Z_{1,h}} \chi(v_d) \Big[O(h) - |\mu(z)| v_d - \partial_{v_d} \hat{f} \\ &\quad - v \cdot {}^t \mathrm{Jac}\, \hat{\ell}(0) J(0) \mathsf{e}_d + O(|v|^2) \Big] + \frac{h^2 e^{-\frac{1}{h}(\hat{f}+\theta)}}{N_z Z_{1,h}} G^{dd} \chi'(v_d). \end{aligned}$$

ˆˆ 此外，我们有 $\partial_{v_d} f = v \cdot \mathrm{Hess}\, f(0) \mathsf{e}_d + O(|v|^2)$，而（Normal）意味着 $[\mathrm{Hess}\, f(z) + {}^t \mathrm{Jac}\, \ell(z)] n_\Omega(z) = \mu(z) n_\Omega(z)$；利用（5.4），在 v 坐标下可得（另见（5.6））：

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{Hess}\, \hat{f}(0) + {}^t \mathrm{Jac}\, \hat{\ell}(0)\, J(0) \big) \mathsf{e}_d &= {}^t J(0) \big(\mathrm{Hess}\, f(z) + {}^t \mathrm{Jac}\, \ell(z) \big) n_\Omega(z) \\ &= \mu(z)\, {}^t J(0) J(0) \mathsf{e}_d = \mu(z) \mathsf{e}_d. \end{aligned}$$

ˆˆ 因此，$|\mu(z)| v_d + \partial_{v_d} f + v \cdot {}^t \mathrm{Jac}\, \ell(0) J(0) \mathsf{e}_d = O(|v|^2)$，从而，

$$(P_h \mathsf{f}_{1,h}) \circ v^{-1} = \frac{2h \chi(v_d)\, e^{-\frac{1}{h}(\hat{f}+\theta)}}{N_z Z_{1,h}} [O(h) + O(|v|^2)] + \frac{h^2 e^{-\frac{1}{h}(\hat{f}+\theta)}}{N_z Z_{1,h}} G^{dd} \chi'(v_d).$$

因此，由于 $\chi'=0$ 在 0 附近，可由（5.8）、（5.24）、（5.30）、（5.31）以及拉普拉斯方法推出，当 $h\to 0$时，

$$\begin{aligned}\int_{V_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z)}|P_h \mathsf{f}_{1,h}|^2 &= \frac{h^{\frac{d}{2}}O(h^4)}{h\,h^{\frac{d}{2}}}\,e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f-f(x_0))}+O(e^{-\frac{c}{h}})\,e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f-f(x_0))}\\ &= O(h^3)e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f-f(x_0))}=O(h^2)\int_{V_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z)}|\nabla \mathsf{f}_{1,h}|^2\,e^{-\frac{2}{h}f}.\end{aligned}\tag{5.37}$$

将（5.36）和（5.37）代入（5.32），并利用（5.25）和（E1），即可得到：

$$\int_\Omega |P_h \mathsf{f}_{1,h}|^2 = O(h^2)\langle P_h \mathsf{f}_{1,h},\mathsf{f}_{1,h}\rangle.$$

因此 $\mathsf{f}_{1,h}$ 满足（E2）。

步骤 3。函数$\mathsf{f}_{1,h}$ 满足 （E3）。

回顾一下，根据命题 3 以及（无散），有 $P_h^*=\Delta_{f,h}-2\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla_{f,h}$。因此，前一步的计算表明，对于任意 $v(V^{\delta_1,\delta_2}_{\Omega}(z))$，$z\in\partial\mathbb{C}_{\min}\cap\partial\Omega$：

$$(P_h^*\mathsf{f}_{1,h})\circ v^{-1}=\begin{cases}\frac{h\chi(v_d)\,e^{-\frac{1}{h}(\hat{f}+\theta)}}{N_z Z_{1,h}}[O(h)+O(|v|^2)]+\frac{h^2e^{-\frac{1}{h}(\hat{f}+\theta)}}{N_z Z_{1,h}}G^{dd}\chi'(v_d) & \text{when } \nabla f(z)\neq 0,\\ \frac{h\chi(v_d)\,e^{-\frac{1}{h}(\hat{f}+\theta)}}{N_z Z_{1,h}}[O(h)+O(|v|)]+\frac{h^2e^{-\frac{1}{h}(\hat{f}+\theta)}}{N_z Z_{1,h}}G^{dd}\chi'(v_d) & \text{when } \nabla f(z)=0.\end{cases}$$

由此可知，当 $h\to 0$ 时，

$$\int_{V_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z)}|P_h^*\mathsf{f}_{1,h}|^2=\begin{cases}O(h^2)\int_{V_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z)}|\nabla \mathsf{f}_{1,h}|^2\,e^{-\frac{2}{h}f} & \text{when } \nabla f(z)\neq 0,\\ O(h)\int_{V_{\overline{\Omega}}^{\delta_1,\delta_2}(z)}|\nabla \mathsf{f}_{1,h}|^2\,e^{-\frac{2}{h}f} & \text{when } \nabla f(z)=0,\end{cases}$$

因此，根据（5.32）（将 P_h 替换为 P_h^*）、（5.29）和（5.31）：

$$\int_\Omega |P_h^*\mathsf{f}_{1,h}|^2=\begin{cases}O(h)\,h\,e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f-f(x_0))} & \text{when } \kappa_1^P=0,\\ O(h^2)\,h^{\frac12}\,e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f-f(x_0))} & \text{when } \kappa_2^P=0,\\ O(h^{\frac32})\,h^{\frac12}\,e^{-\frac{2}{h}(\min_{\partial\Omega} f-f(x_0))} & \text{when } \kappa_1^P\neq 0 \text{ and } \kappa_2^P\neq 0.\end{cases}$$

这证明 $\mathsf{f}_{1,h}$ 满足（E3），并完成了命题 22的证明。 □

Appendix

在本附录中，我们证明命题 3。

命题 3 的证明。设 $h>0$ 固定。我们先证明命题 3 中的第一条，并取 $u\in D(P_h)=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$。由于 $\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla f=0$，因此 $\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla_{f,h}=h\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla$ 根据（**Ortho**）以及关系 $\nabla_{f,h}:=he^{-\frac{f}{h}}\nabla e^{\frac{f}{h}}=h\nabla+\nabla f$，有

$$\int_\Omega(\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla_{f,h}u)\,\overline{u}=-\int_\Omega u\,(\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla_{f,h}\overline{u})-h\int_\Omega(\operatorname{div}\boldsymbol{\ell})|u|^2.$$

因此，有 $2\operatorname{Re}\langle\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla_{f,h}u,u\rangle_{L^2(\Omega)}=-h\int_\Omega$(散度 $\boldsymbol{\ell}$)$|u|^2$，因此，利用（1.13）和（1.14）：

$$\forall u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega),\quad \operatorname{Re}\langle P_h u,u\rangle_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega|\nabla_{f,h}u|^2-h\int_\Omega(\operatorname{div}\boldsymbol{\ell})|u|^2.\tag{5.38}$$

这意味着 $P_h + h\|\operatorname{div} \boldsymbol{\ell}\|_\infty : H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ 是增生的。此外，利用 Lax-Milgram 定理以及 P_h 的椭圆正则性，当 $\lambda > 0$ 足够大时，算子 $P_h + \lambda$ 可逆。因此，P_h 是极大拟增生的，因而也是闭的。此外，由于 $H_0^1(\Omega)$ 到 $\subset L^2(\Omega)$ 的紧嵌入，P_h 具有紧预解式。

现在我们证明 P_h 是扇形的。对所有 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，均有

$$\operatorname{Im} \langle P_h u, u\rangle_{L^2(\Omega)} = \operatorname{Im} \int_\Omega (2\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla_{f,h}u)\,\overline{u}.$$

因此，存在 $C > 0$，使得对所有 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 以及所有 $\varepsilon > 0$，均有

$$|\operatorname{Im} \langle P_h u, u\rangle_{L^2(\Omega)}| \le C\|\nabla_{f,h}u\|_{L^2}\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C\Big[\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla_{f,h}u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\Big].$$

T取 $\lambda > 0$并选择 $\varepsilon > 0$使得$1 - \varepsilon\frac{\lambda C}{2} \ge \frac{1}{2}$，利用式（5.38），可得 ，

$$\operatorname{Re} \langle P_h u, u\rangle_{L^2(\Omega)} - \lambda|\operatorname{Im} \langle P_h u, u\rangle_{L^2(\Omega)}| \ge \frac{1}{2}\|\nabla_{f,h}u\|^2_{L^2(\Omega)} - \Big(\frac{\lambda C}{2\varepsilon} + h\|\operatorname{div}\boldsymbol{\ell}\|_\infty\Big)\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

因此，对于某个 $a_h \in \mathbb{R}$，有 $\operatorname{Re}(P_h + a_h)u, u_{L^2(\Omega)} \ge \lambda|\operatorname{Im} P_h u, u_{L^2(\Omega)}|$。于是，$P_h$的数值域包含于扇形 $\{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Im} z| \le \lambda^{-1}\operatorname{Re}(z + a_h)\}$ 中，因此 P_h是扇形的。

现在我们来证明命题 3中的第二项。根据前面的论证，形式伴随算子

$$P_h^\dagger = \Delta_{f,h} - 2h\,\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla - 2h\operatorname{div}\boldsymbol{\ell} = \Delta_{f,h} - 2\boldsymbol{\ell}\cdot\nabla_{f,h} - 2h\operatorname{div}\boldsymbol{\ell}$$

P_h 赋予定义域 $D(P_h) = H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 后同样是极大拟增生的，具有紧预解式，且是扇形的。因此，为了得出结论，只需证明 $(P_{\dagger h}, D(P_h)) = (P_h^*, D(P_h^*))$，其中 $P_h^* : D(P_h^*) \to L^2(\Omega)$ 是 P_h 的伴随算子。不过，对于任意 $u, v \in D(P_h) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，由分部积分可得

$$\langle P_h u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, P_h^\dagger v\rangle_{L^2(\Omega)},$$

根据 $P_h^* : D(P_h^*) \to L^2(\Omega)$ 的定义，这意味着

$$(P_h^\dagger, D(P_h)) \subset (P_h^*, D(P_h^*)).$$

此外，由于 $(P_h^*, D(P_h^*))$ 是极大拟增生的（因为 P_h 也是），且 $(P_{\dagger h}, D(P_h))$ 也是极大拟增生的，因此必有 $(P_{\dagger h}, D(P_h)) = (P_h^*, D(P_h^*))$。

最后，我们来证明命题 3中的第三项。首先，根据椭圆正则性的标准结果（例如参见 [19, 第 6 节。3]），P_h（分别是P_h^*）的任意特征函数 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 均属于 $C^\infty(\Omega)$。此外，根据 [17, 定理 1.3、1.4 和 2.7]（另见 [19, 第 6.5 节定理 3 中陈述的稍弱结果。2]），P_h（分别是 P_h^*）有一个实特征值 $\lambda_{1,h}^P$（分别是 $\lambda_{1h}^{P^*}$），其代数重数为一，并且满足：

- 存在与之对应的特征函数 $u_{1,h}^P$（分别是 $u_{1h}^{P^*}$），该函数在 Ω 内为正，
- P_h（分别是 P_h^*）的任何其他特征值 λ均满足 $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_{1,h}^P$（分别是 $\operatorname{Re}\lambda > \lambda_{1h}^{P^*}$）。

此外，由于 $\sigma(P_h^*) = \overline{\sigma(P_h)}$（例如，参见 [30, 第 3]章第 6.6 节），可得 $\lambda_{1,h}^P = \lambda_{1h}^{P^*}$，因此只需证明 $\lambda_{1,h}^P > 0$，这可由弱最大值原理推出 [19, 定理 1，第 6.4 节。1]。事实上，根据（1.14），若情况并非如此，

不含零阶项的二阶椭圆算子 $L_h = -\frac{h}{2}\Delta + (\nabla f + \text{散度 } \ell) \cdot \nabla$ 将满足

$$L_h\big(e^{\frac{f}{h}} u_{1,h}^P\big) = \frac{\lambda_{1,h}^P}{2h} e^{\frac{f}{h}} u_{1,h}^P \le 0 \quad \text{in} \quad \Omega,$$

由此根据弱最大值原理可知，$\max_{\overline{\Omega}}(e^{\frac{f}{h}} u_{1,\,h}^P) = \max_{\partial\Omega}(e^{\frac{f}{h}} u_{1,\,h}^P) = 0$，这与 $u_{1,\,h}^P > 0$ 在 Ω 中矛盾。□

致谢
本研究得到 ANR-19-CE40-0010 项目“亚稳过程的定量分析”（QuAMProcs）的资助。
B.N. 获得克莱蒙 I-SITE CAP20-25 项目提供的 IA20Nectoux 资助。

References

1. N. Berglund，《克拉默斯定律：有效性、推导与推广》，《马尔可夫过程及相关领域》19（2013），第3期，459–490。2. N. Berglund 和 B. Gentz，《非二次鞍点势函数的艾林–克拉默斯定律》，《马尔可夫过程及相关领域》16（2010），第3期，549–598。3. J.-F. Bony、D. Le Peutrec 和 L. Michel，《福克–普朗克型微分算子的艾林–克拉默斯定律》，预印本见 arXiv，https://arxiv.org/abs/2201.01660（2022）。4. F. Bouchet 和 J. Reygner，《艾林–克拉默斯跃迁率公式向不可逆扩散过程的推广》，《亨利·庞加莱年刊》17（2016），第12期，3499–3532。5. A. Bovier、M. Eckhoff、V. Gayrard 和 M. Klein，《可逆扩散过程的亚稳态。I. 容量与退出时间的尖锐渐近》，《欧洲数学会杂志》6（2004），第4期，399–424。6. A. Bovier、V. Gayrard 和 M. Klein，《可逆扩散过程的亚稳态。II. 小特征值的精确渐近》，《欧洲数学会杂志》7（2005），第1期，69–99。7. N. Champagnat、K. A. Coulibaly-Pasquier 和 D. Villemonais，《准平稳分布指数收敛的判据及其在多维扩散中的应用》，《概率研讨班》XLIX，施普林格，2018，第165–182页。8. H. L. Cycon、R. G. Froese、W. Kirsch 和 B. Simon，《薛定谔算子：量子力学与整体几何中的应用》，学习版，《物理学教材与专著》，施普林格出版社，柏林，1987。9. M.V. Day，《随机扰动动力系统的指数趋平》，《工业与应用数学学会数学分析杂志》13（1982），第4期，532–540。10.，《小参数退出问题中的指数退出定律》，《随机学》8（1983），第4期，297–323。11.，《小参数退出问题的近期进展》，《随机学》20（1987），第2期，121–150。12.，《特征边界上小噪声扩散的条件退出》，《概率年刊》20（1992），第3期，1385–1419。13. G. Di Ges`u、T. Leli`evre、D. Le Peutrec 和 B. Nectoux，《跳跃马尔可夫模型与过渡态理论：准平稳分布方法》，《法拉第讨论》195（2017），469–495。14. G. Di Ges`u、T. Leli`evre、D. Le Peutrec 和 B. Nectoux，《首次退出点密度的尖锐渐近》，《偏微分方程年刊》5（2019），第1期，1–174。15.，《亚稳态的退出：退出点分布集中于低能鞍点，第一部分》，《纯粹与应用数学杂志》138（2020），242–306。16. M. Dimassi 和 J. Sj¨ostrand，《半经典极限中的谱渐近》，剑桥大学出版社，1999。17. Y. Du，《非线性偏微分方程的序结构与拓扑方法》，第2卷，世界科学出版社，2006。18. M. Eckhoff，《亚稳态下可逆扩散小特征值的精确渐近》，《概率年刊》33（2005），第1期，244–299。19. L.C. Evans，《偏微分方程》，第二版，《数学研究生丛书》，第19卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2010。

20. M.I. Freidlin 和 A.D. Wentzell，《动力系统的随机扰动》，第三版，《数学科学基础丛书》，第260卷，施普林格，2012，由 Joseph Sz¨ucs 从1979年俄文原版译出。21. A. Friedman，《随机微分方程及其应用》，第2卷，学术出版社，纽约—伦敦。《概率与数理统计》，第28卷，1976。22. A. Galves、E. Olivieri 和 M.E. Vares，《受小随机扰动的一类动力系统的亚稳态》，《概率年刊》15（1987），第4期，1288–1305。23. G. Gong、M. Qian 和 Z. Zhao，《被杀死的扩散过程及其条件化》，《概率论及相关领域》80（1988），第1期，151–167。24. A. Guillin、B. Nectoux 和 L. Wu，《利用李雅普诺夫函数研究强 Feller 马尔可夫过程的准平稳分布及其在次椭圆哈密顿系统中的应用》，预印本见 HAL，https://hal.science/Hal-03068461（2020）。25. B. Helffer、M. Klein 和 F. Nier，《通过 Witten 复形方法定量分析可逆扩散过程的亚稳态》，《当代数学》26（2004），41–85。26. B. Helffer 和 F. Nier，《通过 Witten 复形方法定量分析可逆扩散过程的亚稳态：带边界情形》，《法国数学会回忆录》（新丛刊）（2006），第105期，vi+89。27. R.A. Holley、S. Kusuoka 和 D.W. Stroock，《谱隙的渐近及其在模拟退火理论中的应用》，《泛函分析杂志》83（1989），第2期，333–347。28. H. Ishii 和 P.E. Souganidis，《带漂移的抛物方程的亚稳态：第一部分》，《印第安纳大学数学杂志》64（2015），第3期，875–913。29.，《带漂移的抛物方程的亚稳态：第二部分，拟线性情形》，《印第安纳大学数学杂志》66（2017），第1期，315–360。30. T. Kato，《线性算子的扰动理论》，《数学经典》，施普林格出版社，柏林，1995，1980年版重印。31. C. Landim、M. Mariani 和 I. Seo，《非自伴椭圆算子的狄利克雷原理与汤姆孙原理及其在非可逆亚稳扩散过程中的应用》，《理性力学与分析文献》231（2019），第2期，887–938。32. C. Landim 和 I. Seo，《势场中的非可逆随机游走的亚稳态与艾林–克拉默斯跃迁率公式》，《纯粹与应用数学通讯》71（2018），第2期，203–266。33. C. Le Bris、T. Leli`evre、M. Luskin 和 D. Perez，《并行副本动力学的数学形式化》，《蒙特卡罗方法及其应用》18（2012），第2期，119–146。34. D. Le Peutrec 和 L. Michel，《非可逆扩散过程的尖锐渐近》，《概率与数理物理》1（2020），第1期，3–53。35. D. Le Peutrec 和 B. Nectoux，《狄利克雷边界条件下 Witten 拉普拉斯算子的小特征值：边界上存在临界点的情形》，《偏微分方程分析》14（2021），第8期，2595–2651。36. J. Lee 和 I. Seo，《具有吉布斯不变测度的非可逆亚稳扩散 I：艾林–克拉默斯公式》，《概率论及相关领域》（2022），1–55。37. T. Leli`evre、F. Nier 和 G.A. Pavliotis，《使扩散过程趋于平衡的最优非可逆线性漂移》，《统计物理杂志》152（2013），第2期，237–274。38. T. Leli`evre、D. Le Peutrec 和 B. Nectoux，《过阻尼朗之万动力学的艾林–克拉默斯逃逸率：边界上存在鞍点的情形》，预印本见 arXiv，https://arxiv.org/abs/2207.09284（2022）。39. T. Leli`evre、M. Ramil 和 J. Reygner，《柱状区域中动理学 Fokker–Planck 方程的概率研究》，《演化方程杂志》22（2022），第2期，1–74。40. T. Leli`evre 和 G. Stoltz，《分子动力学中的偏微分方程与随机方法》，《数值数学学报》25（2016），681–880。41. F. Martinelli、E. Olivieri 和 E. Scoppola，《有限维与无限维动力系统的小随机扰动：退出时间的不可预测性》，《统计物理杂志》55（1989），第3–4期，477–504。42. P. Mathieu，《零白噪声极限中的谱、退出时间与长时间渐近》，《随机学》55（1995），第1–2期，1–20。43. B.J. Matkowsky 和 Z. Schuss，《退出问题：研究跨越势垒扩散的新方法》，《工业与应用数学学会应用数学杂志》36（1979），第3期，604–623。44. B.J. Matkowsky、Z. Schuss 和 C. Tier，《特征边界上具有临界点的扩散》，《工业与应用数学学会应用数学杂志》43（1983），第4期，673–695。45. L. Michel，《关于 Witten 拉普拉斯算子的小特征值》，《纯粹与应用分析》1（2019），第2期，149–206。

46. L. Miclo，低温下薛定谔算子谱的行为，数学科学通报 119 (1995)，第 6 期，529–554。47. B. Nectoux，零白噪声极限下有界区域平均退出时间的精确估计，《马尔可夫过程及相关领域》26 (2020)，第 3 期，403–422。48. ，过阻尼朗之万过程的平均退出时间：边界上存在临界点的情形，《偏微分方程通讯》46 (2021)，第 9 期，1789–1829。49. D. Perez、B.P. Uberuaga、Y. Shim、J.G. Amar 和 A.F. Voter，《加速分子动力学方法：简介与最新进展》，《计算化学年度报告》5 (2009)，79–98。50. R.G. Pinsky，关于长时间条件下保持在有界区域内的扩散过程收敛至极限正常返扩散过程，《概率年刊》13 (1985)，第 2 期，363–378。51. J. Sj¨ostrand 和 M. Zworski，《高阶谱问题的初等线性代数》，《傅里叶研究所年刊》（格勒诺布尔）57 (2007)，第 7 期，2095–2141。52. M. Sugiura，小参数退出问题与奇异摄动问题的渐近行为，琉球数学杂志 14 (2001)，79–118。53. S.R.S Varadhan，《扩散问题与偏微分方程讲义》，塔塔基础研究所，孟买，1980。54. S. Wiggins，《应用非线性动力系统与混沌导论》，第 2 卷，施普林格科学与商业媒体，2003。

D. Le Peutrec, Institut Denis Poisson, Université d'Orléans电子邮箱：dorian.le-peutrec@univ-orleans.frL. Michel, Institut Mathématique de Bordeaux, Université de Bordeaux电子邮箱：laurent.michel@math.u-bordeaux.frB. Nectoux, Laboratoire de Mathématiques Blaise Pascal, UCA电子邮箱：boris.nectoux@uca.fr