arXiv:2303.06976v1 [math.GR] 13 Mar 2023

块的稳定函子等价

Serge Bouc 和 Deniz Yılmaz

摘要

设 k 是特征为 $p>0$ 的代数闭域， R 是交换环， $\mathbb{F}$ 是特征为 0 的代数闭域。我们引入了 R 上稳定对角 p-置换函子的范畴 $\overline{\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_k}}$。我们证明范畴 $\overline{\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_k}}$ 是半单的，并根据简单对角 p-置换函子给出其简单对象的参数化。

我们还引入了有限群的块之间关于 R 的稳定函子等价这一概念。我们证明，若 G 是有限群，且 kG 的块幂等元 b 具有阿贝尔亏群 D 和弗罗贝尼乌斯惯性商 E，则存在关于 $\mathbb{F}$ 的稳定函子等价，将数对 (G,b) 与 $(D\rtimes E,1)$ 对应起来。

关键词：块、对角 p-置换函子、函子等价、弗罗贝尼乌斯惯性商。

MSC2020：16S34、20C20、20J15。

1 引言

过去几十年来，人们研究了有限群的块之间的各种等价概念，例如辉煌 Morita 等价、辉煌 Rickard 等价、 p-置换等价、同型和完美等距（[Br90], [BX08], [BP20]）。这些等价与模表示论中的重要猜想有关，例如 Brou´e 阿贝尔亏群猜想（ [L18]中的猜想 9.7.6）、Puig 有限性猜想（ [L18]中的猜想 6.4.2）以及 Donovan 猜想（ [L18]中的猜想 6.1.9）。

最近，我们在 [BY22] 中引入了另一种块等价，即函子等价，并使用了对角 p-置换函子的概念：设 k 为特征 $p>0$的代数闭域， $\mathbb{F}$ 为特征 0 的代数闭域， R 为交换环。记 Rpp_k^{Δ}为如下范畴：其对象为有限群；对于有限群 G和 H，从 H到 G的态射为对角p-置换（kG,kH）-双模的格罗滕迪克群 $RT^{\Delta}(G,H)$。从 Rpp_k^{Δ}到 ${}_R$Mod 的 R-线性函子称为对角p-置换函子。对于有限群 G及其块幂等元 b 这一对（G,b），我们关联一个定义明确的、取值于 R上的对角 p-置换函子，记作 $RT^{\Delta}_{G,b}$。若（H,c）是另一对这样的对象，则称（G,b）与（H,c）在 R上函子等价，当且仅当函子$RT^{\Delta}_{G,b}$与 $RT^{\Delta}_{H,c}$同构。

在 [BY22] 中，我们证明了 $\mathbb{F}$ 上对角 p-置换函子范畴是半单的，对简单函子进行了参数化，并给出了该分解的三种等价描述

：函子 $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,\,b}$ 可用简单函子来描述（[BY22，推论 6.15 和定理 8.22]）。我们证明了在 $\mathbb{F}$ 上的函子等价保持简单模的同构类数量、普通特征数量以及缺陷群（[BY22，定理 10.5]）。此外，我们证明对于给定的有限 p-群 D，在 $\mathbb{F}$ 上至多有有限多个对 (G,b)，其中 G 是有限群，b 是 kG 的块幂等元，且这些对在函子等价意义下视为相同（[BY22，定理 10.6]）；我们还在 Brou´e 的阿贝尔亏群猜想情形下，给出了两个块在 $\mathbb{F}$ 上函子等价的充分条件（[BY22，定理 11.1]）。

本文引入稳定对角 p-置换函子和稳定函子等价的概念。我们用 $\overline{Rpp_k^{\Delta}}$表示将 Rpp_k^{Δ}中所有可经平凡群分解的态射商去后得到的商范畴。 R 上的稳定对角 p-置换函子是一个从$\overline{Rpp_k^{\Delta}}$到 $_R$ Mod的 R-线性函子；等价地，它是一个在平凡群处取零的对角 p-置换函子。特别地，满足 $L\neq 1$ 的简单对角 p-置换函子$S_{L,\,u,\,V}$是（简单）稳定对角 p-置换函子。我们的首个主要结果如下。

1.1 定理 $\overline{\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_k}}$ 上的稳定对角 p-置换函子范畴是半单的。简单稳定对角 p-置换函子恰为满足 $L\neq 1$ 的简单对角 p-置换函子$S_{L,\,u,\,V}$。

给定有限群 G 及 kG的一个块幂等元 b ，我们定义一个稳定对角 p-置换函子$RT^{\Delta}_{G,\,b}$，其定义与$RT^{\Delta}_{G,\,b}$类似，见定义 4.1。注意，当且仅当 b的缺陷为 0 时，$RT^{\Delta}_{G,\,b}$才是零函子。若两个数对(G,b)和(H,c)在 R 上对应的函子$RT^{\Delta}_{G,\,b}$与$RT^{\Delta}_{H,\,c}$同构，则称它们在 R 上稳定函子等价。对于块代数 kGb，用 $k(kGb)$和 $l(kGb)$分别表示 b的不可约普通特征数和不可约 Brauer 特征数。

1.2 定理 令 b 为 kG 的一个块幂等元，并令 c 为 kH的一个块幂等元 .

(i) 对于任意满足 $L\neq 1$的简单对角 p-置换函子 $S_{L,u,V}$，$\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$与 $\mathbb{F}T^{\Delta}_{H,c}$中 $S_{L,u,V}$的重数相同，当且仅当数对 (G,b) 和 (H,c) 在 $\mathbb{F}$上稳定函子等价。在此情形下，数对 (G,b) 和 (H,c) 在 $\mathbb{F}$ 上函子等价，当且仅当 $l(kGb)=l(kHc)$。

(ii) 若数对 (G,b) 和 (H,c) 在 $\mathbb{F}$上稳定函子等价，则 b和 c具有同构的缺陷群，并且有

$$k(kGb)-l(kGb)=k(kHc)-l(kHc)\,.$$

我们还考虑具有阿贝尔缺陷群且惯性商为弗罗贝尼乌斯群的块 t.

1.3 定理 令 G 为一个有限群，b 为 kG 的一个块幂等元，且其阿贝尔缺陷群 D非平凡。令 $E=N_G(D,e_D)/C_G(D)$表示 b的惯性商。假设 E 在 $D\setminus\{1\}$上自由作用。那么存在一个稳定函子等价，它在 $\mathbb{F}$上建立了 (G,b) 与 $(D\rtimes E,1)$ 之间的对应关系。

1.4 推论 假设采用定理 1.3 中的记号。

(i) 存在一个在 $\mathbb{F}$ 上的函子等价，使 (G,b) 与 $(D\times E,1)$ 等价，当且仅当$l(kGb)=l(k(D\rtimes E))$。

(ii) 假设 E 是阿贝尔群。当且仅当 (G,b) 与 $(D\rtimes E,1)$ 是 p-置换等价时，存在一个关于 $\mathbb{F}$ 的函子等价，将 (G,b) 映到 $(D\rtimes E,1)$。

在第2节中，我们回顾对角 p-置换函子以及块之间的函子等价。在第3节中，我们引入稳定对角 p-置换函子的范畴，并证明定理 1.1。在第4节中，我们引入块之间稳定函子等价的概念，并证明定理 1.2。最后，在第5节中，我们证明定理 1.3 和推论 1.4。

2 预备知识

(a) 设 (P, s) 为一对，其中 P 是一个 p-群，s 是一个作用于 P 的 p'-群的生成元。我们将相应的半直积记作 $P\langle s\rangle := P \rtimes \langle s\rangle$。若存在群同构 $f\colon P\langle s\rangle \to Q\langle t\rangle$，将 s 映到 t 的一个共轭元，则称两对 (P, s) 和 (Q, t) 同构，并记作 $(P, s) \cong (Q, t)$。我们令 $\mathrm{Aut}(P, s)$ 表示对 (P, s) 的自同构群，并令 $\mathrm{Out}(P, s) = \mathrm{Aut}(P, s)/\mathrm{Inn}(P\langle s\rangle)$。回顾 [BY20]，若 $C_{\langle s\rangle}(P) = 1$，则称一对 (P, s) 为一个 D^{Δ}-对。

(b) 设 G 和 H 为有限群。我们用 $T(G)$ 表示 p-置换kG-模的格罗滕迪克群，用 $T^{\Delta}(G, H)$ 表示 p-置换 (kG, kH)-双模的格罗滕迪克群，其不可分解直和项具有扭曲对角顶点。令 Rpp_k^{Δ} 表示以下范畴：

- 对象：有限群。
- $\mathrm{Mor}^{Rpp_k^{\Delta}}(G, H) = R \otimes_{\mathbb{Z}} T^{\Delta}(H, G) = RT^{\Delta}(H, G)$.
- 复合由双模的张量积诱导。
- $\mathrm{Id}_G = [kG]$。

从 Rpp_k^{Δ} 到 ${}_R\mathsf{Mod}$的 R-线性函子称为 R上的对角 p-置换函子。连同自然变换，对角 p-置换函子构成一个阿贝尔范畴$\mathcal{F}_{Rpp_k}^{\Delta}$。

(c) 回顾 [BY22]，范畴$\mathcal{F}_{\mathbb{F}pp_k}^{\Delta}$ 是半单的。此外，简单的对角 p-置换函子在同构意义下由三元组(L, u, V)的同构类参数化，其中(L, u)是一个 D^{Δ}-对，而 V是一个简单的 $\mathbb{F}\mathrm{Out}(L, u)$-模（关于简单函子的更多细节，参见 [BY22，第6节和 7]）。

(d) 令 G 为一个有限群，b 为 kG的一个块幂等元。回顾 [BY22]，块对角 p-置换函子 $RT_{G,b}^{\Delta}$ 定义如下：

$$\begin{aligned} RT_{G,b}^{\Delta} : Rpp_k^{\Delta} &\to {}_R\mathsf{Mod} \\ H &\mapsto RT^{\Delta}(H, G) \otimes_{kG} kGb\,. \end{aligned}$$

参见 [BY22，第 8] 节，其中给出了 $\mathbb{F}T_{G,b}^{\Delta}$ 关于简单函子 $S_{L,u,V\text{的分解}}$.

(e) 设 b 是 kG 的一个块幂等元，c 是 kH 的一个块幂等元。若相应的对角 p-置换函子 $RT_{G,b}^{\Delta}$ 和 $RT_{H,c}^{\Delta}$ 在 $\mathcal{F}_{Rpp_k}^{\Delta}$ ([BY22，定义 10.1]) 中同构，则称这两对 (G, b) 和 (H, c) 在 R 上函子等价。根据 [BY22，引理 10.2]，两对 (G, b) 和 (H, c) 在 R 上函子等价，当且仅当存在 $\omega \in bRT^{\Delta}(G, H)c$ 和 $\sigma \in cRT^{\Delta}(H, G)b$，使得

$$\omega \cdot_G \sigma = [kGb] \quad \text{in} \quad bRT^{\Delta}(G, G)b \quad \text{and} \quad \sigma \cdot_H \omega = [kHc] \quad \text{in} \quad cRT^{\Delta}(H, H)c\,.$$

3 稳定对角 p-置换函子

I本节我们引入稳定对角 p-置换函子的范畴。

设 G 为有限群，令 $P(G)$ 表示由 $T(G)$ 中不可分解投射 kG-模生成的子群。再令 $T(G)$ 表示商群 $T(G)/P(G)$。对于 $X \in T(G)$，~~我~~我们用 $\overline{X}$ 表示 X 在 $T(G)$ 中的像。若 H 是另一个~~有限群，~~则类似地定义 $P(G,H)$ 和 $T^{\Delta}(G,H)$。

3.1 引理 对于有限群 G 和 H，有 $P(G,H) = T^{\Delta}(G,1) \circ T^{\Delta}(1,H)$

证明 这是由以下事实得到的：投射不可分解 $k(G\times H)$-模具有如下形式： $P \otimes_k Q$ ，其中 P 和 Q 分别是投射不可分解的 kG -模和 kH-模。 □

3.2 定义 令 $\overline{Rpp_k^{\Delta}}$ 表示以下范畴：

- 对象：有限群。
- $\mathrm{Mor}^{\overline{Rpp_k^{\Delta}}}(G,H) = R \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{T^{\Delta}(H,G)} = \overline{RT^{\Delta}(H,G)}.$
- 复合由双模的张量积诱导。
- $\mathrm{Id}_G = \overline{[kG]}$。

3.3 定义 一个 R-线性函子 $\overline{Rpp_k^{\Delta}} \to {}_R\mathrm{Mod}$ 称为关于 R 的稳定对角 p-置换函子。稳定对角 p-置换函子与自然变换一起构成阿贝尔范畴 $\overline{\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_k}}$。

3.4 备注 函子

$$\Gamma : \overline{\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_k}} \to \mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_k}$$

通过与投影 $Rpp_k^{\Delta} \to \overline{Rpp_k^{\Delta}}$复合，可将 $\overline{\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_k}}$ 描述为 $\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_k}$的一个全子范畴。此外， Γ 有一个左伴随 Σ，其构造如下：若 F 是定义在 R 上的对角p-置换函子，且 G 是一个有限群，则令

$$\overline{F}(G) := F(G)/RT^{\Delta}(G,\mathbf{1})F(\mathbf{1})\,.$$

那么 $\overline{F}$ 是一个对角 p-置换函子，等于 F 除以由 $F(1)$生成的子函子所得的商。显然， $\overline{F}$在平凡群处取值为零，因此它是一个稳定对角 p-置换函子。函子 Σ: $F \mapsto \overline{F}$ 是上述函子 Γ的左伴随。特别地， $\overline{\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_k}}$ 是 $\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_k}$的一个反射子范畴。

设 G 是一个有限群。回顾一下，根据 [BY22, 推论 8.23(i)], ，简单对角 p-置换函子 $S_{1,1,\mathbb{F}}$ 在可表函子 $\mathbb{F}T^{\Delta}(-,G)$ 中的重数等于简单 kG-模的同构类数目 $l(kG)$。令 $\mathcal{I}(-,G)$ 表示 $\mathbb{F}T^{\Delta}(-,G)$ 中所有与 $S_{1,1,\mathbb{F}}$ 同构的简单子函子的和。再令 $\mathbb{F}\mathrm{Proj}(-,G)$ 表示 $\mathbb{F}T^{\Delta}(-,G)$ 的子函子，它将有限群 H 映至 $\mathbb{F}\mathrm{Proj}(H,G)$。

3.5 引理 可表函子 $\mathbb{F}T^{\Delta}(-,G)$ 的子函子 $\mathcal{I}(-,G)$ 与 $\mathbb{F}\mathrm{Proj}(-,G)$ 同构。

证明 对于有限群 G 和 H，投射不可分解$k(G\times H)$-模的同构类数，或者等价地，简单 $k(G\times H)$-模的同构类数，等于 $G\times H$ 中 p'-元素的共轭类数。因此，取值 $\mathbb{F}\mathrm{Proj}(H,G)$ 的 $\mathbb{F}$-维数等于

$$l(k(G\times H))=l(kG)l(kH)$$

w这等于 $l(kG)S_{1,\ 1,\ \mathbb{F}}(H)$ 的 $\mathbb{F}$-维数，进而等于 $\mathcal{I}(H,G)$ 的 $\mathbb{F}$-维数。注意， $\mathbb{F}\mathrm{Proj}(-,G)$ 与下列函子同构

$$\mathbb{F}T^{\Delta}(-,1)\circ\mathbb{F}T^{\Delta}(1,G)\,.$$

此外，对于 $L\neq 1$，$S_{L,\ u,\ V}(1)=0$，因此 $\mathbb{F}T^{\Delta}(1,G)=\mathcal{I}(1,G)$。所以，有

$$\mathbb{F}\mathrm{Proj}(-,G)\cong\mathbb{F}T^{\Delta}(-,1)\circ\mathbb{F}T^{\Delta}(1,G)=\mathbb{F}T^{\Delta}(-,1)\circ\mathcal{I}(1,G)\subseteq\mathcal{I}(-,G)\,.$$

由于对于任意有限群 H， $\mathbb{F}\mathrm{Proj}(H,G)$ 和 $\mathcal{I}(H,G)$ 的 $\mathbb{F}$-维数相同，因此可得 $\mathbb{F}\mathrm{Proj}(-,G)\cong\mathcal{I}(-,G)$。□

定理 1.1 的证明：对于有限群 G，可表对角 p-置换函子$\mathbb{F}T^{\Delta}(-,G)$ 可分解为简单函子的直和 $S_{L,\ u,\ V}$，因此我们有

$$\mathbb{F}T^{\Delta}(-,G)\cong\mathcal{I}(-,G)\bigoplus_{\substack{(L,u,V)\\ L\neq 1}}S_{L,u,V}^{m_{L,u,V}}\,,$$

其中 $m_{L,\ u,\ V}$ 是非负整数，(L,u,V) 遍历由D^{Δ}-对 (L,u) 的一组同构类，其中 $L\neq 1$，而 $\mathbb{F}\mathrm{Out}(L,u)$-模 V 是简单模。由引理 3.5，可表稳定对角 p-置换函子 $\mathbb{F}T^{\Delta}(-,G)$ 同构于以下直和

$$\bigoplus_{\substack{(L,u,V)\\ L\neq 1}}S_{L,u,V}^{m_{L,u,V}}$$

其中各项都是简单对角 p-置换函子，且这些简单函子都是简单稳定对角 p-置换函子。由于函子范畴 $\overline{\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathbb{F}pp_k}}$ 由可表函子生成，结论得证。□

4 稳定函子等价

设 G 和 H 是有限群。

4.1 定义 设 b kG 的一个块幂等元。稳定对角 p-置换函子 $RT^{\Delta}_{G,b}$ 定义如下：

$$\begin{aligned}\overline{RT^{\Delta}_{G,b}}:\overline{Rpp^{\Delta}_{k}}&\to {}_{R}\mathsf{Mod}\\ H&\mapsto\overline{RT^{\Delta}(H,G)\otimes_{kG}kGb}\,.\end{aligned}$$

关于 $RT^{\Delta}_{G,b}$ 的定义，参见第 2(d) 节，并注意 $RT^{\Delta}_{G,b} = \Sigma\left(\underline{RT^{\Delta}_{G,b}}\right)$。

4.2 定义 设 b 是 kG 的一个块幂等元，且 c 是 kH 的一个块幂等元。若它们对应的稳定对角 p-置换函子 $RT^{\Delta}_{G,\,b}$ 和 $RT^{\Delta}_{H,\,c}$ 在 $\overline{\mathcal{F}^{\Delta}_{Rpp_R}}$ 中同构，则称这两对 (G,b) 和 (H,c) 在 R 上稳定函子等价。

4.3 引理 设 b 是 kG 的一个块幂等元，且 c 是 kH 的一个块幂等元。

(a) 两对 (G,b) 和 (H,c) 在 R 上稳定函子等价，当且仅当存在 $\omega \in bRT^{\Delta}(G,H)c$ 和 $\sigma \in cRT^{\Delta}(H,G)b$，使得

$$\omega \cdot_G \sigma = [kGb] + [P] \quad in \quad bRT^{\Delta}(G,G)b \quad and \quad \sigma \cdot_H \omega = [kHc] + [Q] \quad in \quad cRT^{\Delta}(H,H)c$$

对于某些 $P \in R\mathrm{Proj}(kGb, kGb)$ 和 $Q \in R\mathrm{Proj}(kHc, kHc)$。

(b) 若两对 (G,b) 和 (H,c) 在 R 上函子等价，则它们也在 R 上稳定函子等价。

证明 由米田引理可知，(G,b) 与 (H,c) 在 R 上稳定函子等价，当且仅当存在 $\overline{\omega} \in bRT^{\Delta}(G,H)c$ 和 $\overline{\sigma} \in cRT^{\Delta}(H,G)b$，使得

$$\overline{\omega} \cdot_G \overline{\sigma} = \overline{[kGb]} \quad \text{in} \quad \overline{bRT^{\Delta}(G,G)b} \quad \text{and} \quad \overline{\sigma} \cdot_H \overline{\omega} = \overline{[kHc]} \quad \text{in} \quad \overline{cRT^{\Delta}(H,H)c}.$$

因此 (a) 得证，而 (b) 显然。 □

定理 1.2 的证明：(i) 第一个陈述由定理 1.1 推出；第二个陈述成立是因为简单函子 $S_{1,\,1,\,\mathbb{F}}$ 在 $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,\,b}$ 中的重数等于 $l(kGb)$。

(ii) 第一个陈述由 [BY22，定理 10.5(iii)] 的证明推出，第二个陈述由 [BY22，定理 10.5(ii)] 的证明推出。 □

5 具有 Frobenius 惯性商的块

(a) 设 G 为有限群，b 为 kG 的一个块幂等元，且其亏群D为非平凡阿贝尔群。设 (D, e_D) 为一个极大 b-Brauer 对，并令 $E = N_G(D, e_D)/C_G(D)$ 表示 b 的惯性商。假设 E 在 $D \setminus \{1\}$ 上自由作用。

E 在 $D \setminus \{1\}$ 上的作用是自由的这一条件，等价于要求 $D \rtimes E$ 是一个弗罗贝尼乌斯群。令 $\mathcal{F}_b$ 为 b 相对于(D, e_D)的融合系统。那么，$\mathcal{F}_b$ 等于由 $D \rtimes E$所确定的、定义在 D 上的融合系统 $\mathcal{F}_{D\rtimes E}(D)$。

(b) 设$S_{L,u,V}$ 是一个简单的对角 p-置换函子，满足 L 非平凡且同构于 D的一个子群。回顾一下，根据 [BY22，定理 8.22] ，$S_{L,u,V}$ 在$\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,b}$ 中的重数等于 $\mathbb{F}$维数的

$$\bigoplus_{(P,e_P)\in[\mathcal{F}_b]} \bigoplus_{\pi\in[N_G(P,e_P)\backslash\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L,u)/\mathrm{Aut}(L,u)]} \mathbb{F}\mathrm{Proj}(ke_PC_G(P),u) \otimes_{\mathrm{Aut}(L,u)_{\overline{(P,e_P,\pi)}}} V\,,$$

其中 $[\mathcal{F}_b]$ 表示 $\mathcal{F}_b$中对象的同构类集合，$\mathcal{P}_{(P,e_P)}$是群同构 $\pi\colon L \to P$的集合，其中 $\pi i_u \pi^{-1} \in \mathrm{Aut}^{\mathcal{F}_b}(P, e_P)$，而 $\mathrm{Aut}(L,u)_{(P,e_P,\pi)}$ 是 $\mathrm{Aut}(L,u)$ 中稳定 G-轨道 (P, e_P, π) 的稳定子~~群。由~~于 b是一个具有弗罗贝尼乌斯惯性商的块，该块

$kC_G(P)e_P$ 对于 D的每个非平凡子群 P都是幂零的，参见例如 [L18, 定理 10.5.2]。因此，我们有 $l(ke_PC_G(P)) = 1$，故重数公式化简为

$$\bigoplus_{(P,e_P)\in[\mathcal{F}_b]}\ \bigoplus_{\pi\in[N_G(P,e_P)\backslash\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L,u)/\mathrm{Aut}(L,u)]} V^{\mathrm{Out}(L,u)_{\overline{(P,e_P,\pi)}}}.$$

令 $\mathcal{Q}_{D\rtimes E,\ p}$ 表示由 $D\rtimes E$ 的 p-子群 P 和 $N_{D\rtimes E}(P)$ 的 p'-元素 s 构成的配对 (P,s) 的集合。再令 $[\mathcal{Q}_{D\rtimes E,p}]$ 表示 $\mathcal{Q}_{D\rtimes E,\ p}$ 在共轭映射下的 $D\rtimes E$-轨道代表元集合。根据 [BY22 的推论 7.4]，$S_{L,\ u,\ V}$ 在 $\mathbb{F}T^{\Delta}_{D\rtimes E}$ 中的重数等于以下对象的 $\mathbb{F}$-维数:

$$\bigoplus_{\substack{(P,s)\in[\mathcal{Q}_{D\rtimes E,p}]\\(\tilde{P},\tilde{s})\cong(L,u)}} V^{N_{D\rtimes E}(P,s)},$$

~其中，对于一对 $(P,s)\in\mathcal{Q}_{D\rtimes E,\ p}$，满足 $(P,\tilde{s})\cong(L,u)$，我们固定一个同构 $\phi_{P,\ s}\colon L\to P$，使得对所有 $l\in L$，都有 $\phi_{P,\ s}({}^{u}l) = {}^{s}\phi_{P,\ s}(l)$；并通过群同态将 V 视为一个 $\mathbb{F}N_{D\rtimes E}(P,s)$-模

$$N_G(P,s)\to\mathrm{Out}(L,u) \tag{1}$$

将 $g\in N_G(P,s)$ 映射到 $\phi_P^{-1}{}_{,s}\circ i_g\circ\phi_{P,s}$ 在 $\mathrm{Out}(L,u)$ 中的像。

(c) 令 $\mathcal{P}_b(G,L,u)$ 表示由满足 $(P,e)\in\mathcal{F}_b$ 且 $\pi\in\mathcal{P}_{(P,e_P)}(L,u)$ 的三元组 (P,e,π) 构成的集合。~此外，令 $\mathcal{Q}_{D\rtimes E,p}(L,u)$ 表示 $\mathcal{Q}_{D\rtimes E,p}$ 中满足 $(P,\tilde{s})\cong(L,u)$ 的有序对 (P,s) 所构成的集合。

如果 $(P,e,\pi)\in\mathcal{P}_b(G,L,u)$，那么根据定义，$\pi i_u\pi^{-1}\in\mathrm{Aut}_{\mathcal{F}_b}(P,e_P)$，并且由于 $\mathcal{F}_b$ 等于 $\mathcal{F}_{D\rtimes E}(D)$，可知存在 $N_{D\rtimes E}(P)$ 的一个 p'-元 s，使得 $\pi i_u\pi^{-1} = i_s$。由 BY22 引理 3.3] 可得 ~，从而 $(P,\tilde{s})\cong(L,u)$，因此我们有一个映射

$$\Psi:\mathcal{P}_b(G,L,u)\to\mathcal{Q}_{D\rtimes E,p}(L,u),\quad (P,e,\pi)\mapsto(P,s).$$

5.1 引理 映射 Ψ 诱导一个双射

$$\overline{\Psi}:[G\backslash\mathcal{P}_b(G,L,u)/\mathrm{Aut}(L,u)]\to[\mathcal{Q}_{D\rtimes E,p}(L,u)].$$

证明 首先证明映射 $\overline{\Psi}$ 定义良好。设 (P,e,π) 和 (Q,f,ρ) 是$\mathcal{P}_b(G,L,u)$中的两个元素，且属于同一个 $G\times\mathrm{Aut}(L,u)$-轨道。我们需要证明 $\overline{\Psi}(P,e,\pi) = \overline{\Psi}(Q,f,\rho)$。记 $\Psi(P,e,\pi) = (P,s)$，并且 $\Psi(Q,f,\rho) = (Q,t)$。设 $g\in G$ 和 $\varphi\in\mathrm{Aut}(L,u)$ 满足

$$g\cdot(P,e,\pi)\cdot\varphi = (Q,f,\rho).$$

于是，(P,e) 和 (Q,f) 在 $[\mathcal{F}_b]$ 中属于同一个同构类，因此 P和 Q 是 $D\rtimes E$-共轭元，因为 $\mathcal{F}_b = \mathcal{F}_{D\rtimes E}(D)$。因此，存在 $h\in D\rtimes E$ 使得 $i_g = i_h\colon P\to Q$。于是$\rho = i_g\pi\varphi = i_h\pi\varphi\colon L\to Q$。由于 $\varphi\in\mathrm{Aut}(L,u)$，有 $\varphi\circ i_u = i_u\circ\varphi$。因此，

$$i_t = \rho i_u\rho^{-1} = i_h\pi\varphi i_u\varphi^{-1}\pi^{-1}i_{h^{-1}} = i_h\pi i_u\pi^{-1}i_{h^{-1}} = i_hi_si_{h^{-1}} = i_{hsh^{-1}}.$$

这表明 $(Q,t) = h\cdot(P,s)$，因此映射 $\overline{\Psi}$ 定义良好。

~现在我们证明 $\overline{\Psi}$ 是满射。设 $(P,s)\in\mathcal{Q}_{D\rtimes E,p}(L,u)$。由于 $(P,\tilde{s})\cong(L,u)$，再次由 [BY22 引理 3.3], 可知，存在 $\pi\colon L\to P$ 使得 $\pi i_u = i_s\pi$，即 $\pi i_u\pi^{-1} = i_s\colon P\to P$。

由于 $\mathcal{F}_{D\rtimes E}(D) = \mathcal{F}_b$，可知存在 $g \in N_G(P,e)$ 使得 $i_s = i_g$，因此 $(P,e,\pi) \in \mathcal{P}_b(G,L,u)$，且 $\overline{\Psi}(P,e,\pi) = (P,s)$。因此，$\overline{\Psi}$ 是满射。

最后，我们证明 $\overline{\Psi}$ 是单射。设 (P,e,π)、$(Q,f,\rho) \in \mathcal{P}_b(G,L,u)$ 为满足 $\overline{\Psi}(P,e,\pi) = \overline{\Psi}(Q,f,\rho)$ 的元素。记 $(P,s) = \Psi(P,e,\pi)$，且 $(Q,f) = \Psi(Q,f,\rho)$。那么存在 $h \in D \rtimes E$ 使得

$$h \cdot (P,s) = (Q,t)\,.$$

同样，存在 $g \in G$ 使得 $i_g = i_h :\ P \to Q$。定义

$$\varphi := \pi^{-1} \circ i_g^{-1} \circ \rho : L \to L\,.$$

有

$$\begin{aligned}\varphi \circ i_u &= \pi^{-1} \circ i_g^{-1} \circ \rho \circ i_u = \pi^{-1} \circ i_g^{-1} \circ i_t \circ \rho = \pi^{-1} \circ i_g^{-1} \circ i_g \circ i_s \circ i_g^{-1} \circ \rho \\ &= \pi^{-1} \circ i_s \circ i_g^{-1} \circ \rho = i_u \circ \pi^{-1} \circ i_g^{-1} \circ \rho = i_u \circ \varphi\end{aligned}$$

这说明 $\varphi \in \mathrm{Aut}(L,u)$。此外，有

$$g \cdot (P,e,\pi) \cdot \varphi = (Q,f,\rho)$$

因此，映射 $\overline{\Psi}$ 是单射。 □

5.2 引理 设 $(P,e,\pi) \in [G\backslash\mathcal{P}_b(G,L,u)/\mathrm{Aut}(L,u)]$，且 $(P,s) = \overline{\Psi}(P,e,\pi) \in [\mathcal{Q}_{D\rtimes E,p}]$。那么 $N_{D\rtimes E}(P,s)$ 在 $\mathrm{Out}(L,u)$ 中的像等于 $\mathrm{Out}(L,u)_{\overline{(P,e,\pi)}}$。

证明 我们有 $\pi i_u \pi^{-1} = i_s$，因此 $N_{D\rtimes E}(P,s)$ 的像为

$$\begin{aligned}N_{D\rtimes E}(P,s) &\to \mathrm{Out}(L,u) \\ h &\mapsto \overline{\pi^{-1} \circ i_h \circ \pi}\end{aligned}$$

注意，由于 ${}^h s = s$，我们有 $i_h i_s = i_s i_h$，即 $i_h \pi i_u \pi^{-1} = \pi i_u \pi^{-1} i_h$。因此像为

$$\begin{aligned}\{\overline{\pi^{-1} i_h \pi} \mid h \in D \rtimes E, i_h : P \to P,\ {}^h s = s\} &= \{\overline{\pi^{-1} i_g \pi} \mid g \in N_G(P,e), i_g \pi i_u \pi^{-1} = \pi i_u \pi^{-1} i_g\} \\ &= \{\overline{\pi^{-1} i_g \pi} \in \mathrm{Out}(L,u) \mid \pi^{-1} i_g \pi = i_g, g \in N_G(P,e)\} \\ &= \mathrm{Out}(L,u)_{\overline{(P,e,\pi)}}\end{aligned}$$

这正是要证明的。 □

定理 1.3 的证明：我们需要证明，对于任意 $L \neq 1$，简单对角 p-置换函子 $S_{L,\ u,\ V}$ 在 $\mathbb{F}T^{\Delta}_{G,\ b}$ 中的重数与在 $\mathbb{F}T^{\Delta}_{D\rtimes E}$ 中的重数相等。但这可由引理 5.1 和引理 5.2 得出。 □

推论 1.4 的证明：(i) 部分由定理 1.2(i) 和定理 1.3 得出。(ii) 部分由 [L18, 定理 10.5.10] 得出。 □

参考文献

[Br90] M. Broué: 完美同型、块类型、导出范畴。Ast´erisque 第 181-182 期（1990），61–92。[BP20] R. Boltje, P. Perepelitsky: p群代数块之间的 P. Perepelitsky: p-置换等价。arXiv:2007.09253。[BX08] R. Boltje, B. Xu: 关于 p-置换等价：介于 Rickard 等价与同型之间。《美国数学会汇刊》360(10)（2008），5067–5087。[BY20] S. Bouc, D. Yilmaz: 对角 p-置换函子。《代数杂志》556（2020），1036–1056。[BY22] S. Bouc, D. Yilmaz: 对角 p-置换函子、半单性与块的函子等价。《数学进展》411（2022），108799。[L18] M. Linckelmann: 有限群代数的块理论。第二卷。剑桥大学出版社，剑桥，2018。

Serge Bouc，CNRS-LAMFA，皮卡第大学，33 rue St Leu，80039，亚眠，法国。serge.bouc@u-picardie.fr Deniz Yılmaz，数学系，比尔肯特大学，06800 安卡拉，土耳其。d.yilmaz@bilkent.edu.tr