arXiv:2303.06998v1 [math.GT] 13 Mar 2023

关于判定平凡有理3-缠结

BO-HYUN KWON

Abstract. 有理3-缠结分类中的一个重要问题是，如何判定给定的缠结是否为称作 ∞缠结的平凡有理3-缠结。作者[2] 提供了一种用于判定 ∞缠结的算法。本文利用桥弧替换，给出一种更简单的 ∞缠结判定方法。我们希望这种方法有助于证明许多应用问题，例如3桥结的分类。

1. Introduction

Conway [1] 于1970年给出了有理2-缠结的分类。这是一个完备的分类，因为他证明了每个有理2-缠结都由相应的有理数表示。作者 [2]给出了一种对有理三缠结进行分类的算法。遗憾的是，该算法不足以完全分类有理3-缠结，因为它仅用于区分给定的两个有理3-缠结，而不能将它们归入某个自然群。该算法的主要部分是判定由给定的两个有理3-缠结得到的经修改的有理3-缠结是否为称作 ∞缠结的平凡有理3-缠结。利用基本群论证判定 ∞缠结是一种基本方法，但该算法远优于传统方法。本文给出一种判定 ∞缠结的新方法。

2. The trivial rational 3-tangle, ϵ

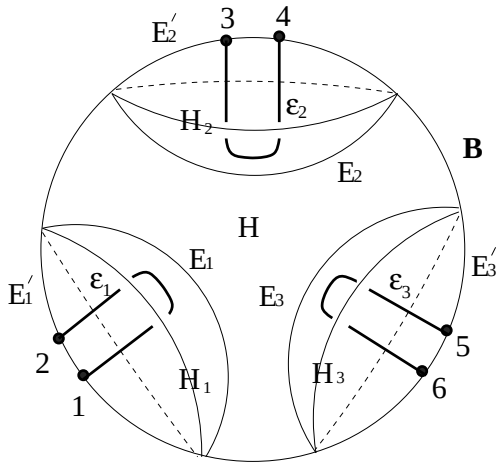


Figure 1. ∞-缠结中的三个压缩圆盘（B, ϵ）

考虑图1中的有序对 $T = (B, \epsilon = \epsilon_1 \cup \epsilon_2 \cup \epsilon_3)$，其中 B 是单位3维球。 B 中的这个平凡有理 3-缠结称为 ∞ 缠结或 ϵ。令 E_1、E_2 和 E_3 为

日期：2023年3月13日，星期一。

图1中 $B-\epsilon$ 里的三个两两不相交且不平行的压缩圆盘。于是，E_1、E_2 和 E_3 将 B 分成四个分支。令 H_i 为包含ϵ_i 和 $H=cl(B-(H_1\cup H_2\cup H_3))$的分支，其中 $cl(*)$表示 $*$的闭包。令 E_i' 为$\Sigma_{0,\ 6}$ 中的二穿孔圆盘，使得 $\partial E_i'=\partial E_i$ 和 $E_i\cup E_i'$ 在 B中围成球 H_i。令$E=E_1\cup E_2\cup E_3$、$E'=E_1'\cup E_2'\cup E_3'$和 $\partial E=\partial E'=\partial E_1\cup\partial E_2\cup\partial E_3$。令$\Sigma_{0,\ 6}=\partial B-\epsilon$和 $P=cl(\Sigma_{0,\ 6}-(E'))$，它们构成一个裤子曲面。

3. Bridge arc replacement

设 $\tau=\tau_1\cup\tau_2\cup\tau_3$ 是 B 中的一个有理3缠结，其中 τ_i 是 B 中正常嵌入的弧。如果对某个 $i\in\{1,2,3\}$，D 是 B 中的一个圆盘，且 $D^\circ\cap\tau=\emptyset$、$\partial D=\tau_i\cup\beta$ 和 $\tau_i\cap\beta=\partial\tau_i$，其中 β 是 S^2 中的一条简单弧，使得 $\beta^\circ\cap\tau=\emptyset$，则称该圆盘为桥圆盘。若简单弧 β（位于 $\Sigma_{0,\ 6}$中）与 τ 的一个分支共同围成一个桥圆盘，则称其为桥弧。我们注意到，有理3缠结存在一组三条两两不相交的桥弧。不过，同一个有理3缠结的这组桥弧（在同伦意义下）并不唯一。事实上，对于同一条有理3缠结的弦，存在无穷多条不同的桥弧。若小正则邻域的边界（取自 β 在 $\Sigma_{0,\ 6}$ 中的正则邻域）与 γ 同伦，则称简单闭曲线 γ 是由桥弧 β 得到的。

引理1。 设$\Sigma_{0,6}$上有两条不相交的桥弧 β_1和 β_2，它们属于(B,τ)，其中 τ是 B中的一个有理3缠结。设$\Sigma_{0,6}$ 上有一条连接剩下两个穿孔点的弧 β_3，且该弧与 $\beta_1\cup\beta_2$不相交。那么 γ_3也是(B,τ)中$\Sigma_{0,6}$上的一条桥弧。

证明。 我们首先断言，存在两个不相交的桥圆盘，使得它们分别包含桥弧 β_1 和 β_2。取一个由 β_1与 τ的一条弦围成的桥圆盘。然后沿该桥圆盘切割 B，并沿两个切割圆盘将其打开，得到一个有理2缠结。由于 β_2 与 β_1不相交，我们可以取一个由 β_2 与所得有理2缠结的一条弦围成的桥圆盘。将两个切割圆盘粘回去，得到原来的有理3缠结。这说明满足条件的两个不相交桥圆盘确实存在。此外，在有理2缠结中，若沿由 β_2 与一条弦围成的桥圆盘切开该缠结，则得到一个有理一缠结。显然，在不与沿桥圆盘打开的两个圆盘相交的前提下，任何连接该一缠结的两个端点（位于$\Sigma_{0,2}$ 上）的弧，都会与一条桥圆盘共同围成一个包含该有理一缠结的三维球。将两对桥圆盘粘回去，即可得到上述引理。□

设 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 是 $\Sigma_{0,6}$ 上一组互不相交的三条桥弧，其中 $T=(B,\tau)$。现在，我们考虑 β 在 P 中的子弧。我们假设不存在大边形，使得其一条边是 β 在 P 中的子弧。如果存在这样的 大边形，我们就可以对该子弧进行同伦变形，使大边形消失。对于 β，如果 β 在 ∂P 中某个分支的两个相邻端点都不属于 β_i（其中 $i=1,2,3$），我们就称 β 在 P 中是稠密的。我们假设 β 在 ∂P 中的各分支至少有两个连续的相邻端点包含在同一个 β_i 中，因此不满足图2所示的稠密定义。注意，两个连续端点会直接连接穿孔，而不经过其他连续端点。设 c_1 和 c_2 是上述说明的 β_i 的两条子弧。我们按照图 2 第一个图示定义两个方向（$+$）和（$-$）。如果两条子弧朝相反方向延伸时出现两个穿孔，我们就如图2第二个图示那样，取新弧来代替 β_i。根据引理1，新弧也是一条桥弧。此外，显然新选取的桥弧与 $\beta-\beta_i$ 不相交。同样，如果两条子弧朝相同方向延伸时出现两个穿孔，如第三个图示所示，我们就取一条新的桥弧，使其与剩余两条桥弧不相交，如图2第四个图示所示。这个过程称为桥弧替换，简称**BR**。

引理2。 设 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 是$\Sigma_{0,6}$上的一组三条互不相交的桥弧，其中 $T=(B,\tau)$。则存在 $\{\beta_1',\beta_2',\beta_3'\}$ 上的一组三条互不相交的桥弧，其中$\Sigma_{0,6}$ 在 T 中稠密。

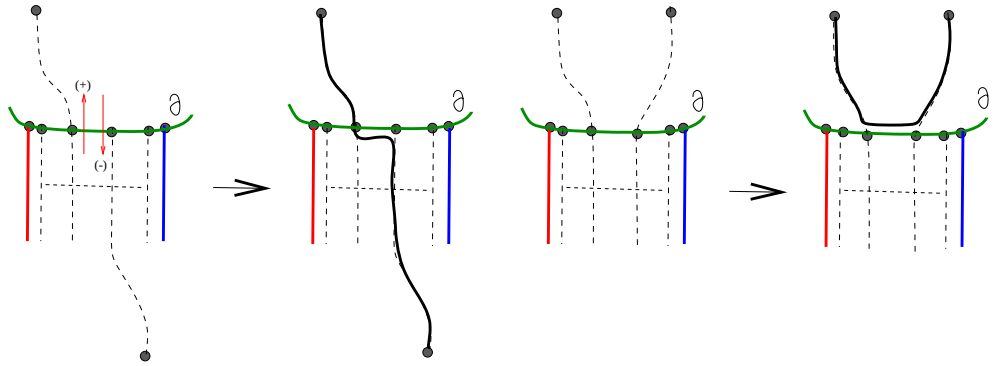


FIGURE 2. 桥弧替换，**BR**

证明。重复执行**BR**过程，就能得到在 P中稠密的一组桥弧，因为当这组桥弧不稠密时，**BR** 会减少端点的数量，而端点的数量是有限的。□

我们声称，过程 **BR** 可以检测 ∞-缠结。下述定理涵盖三种可能情况中的两种。

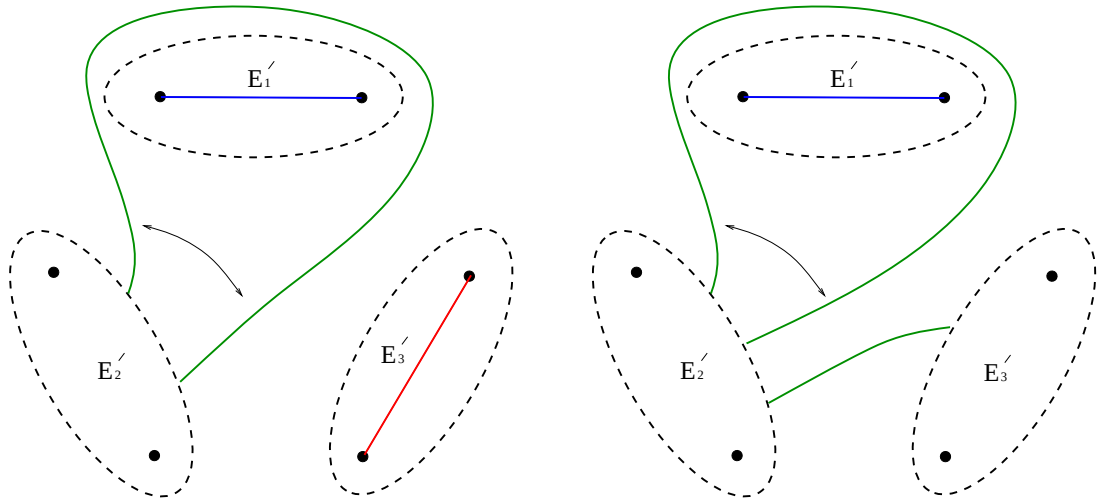


FIGURE 3. 在 P 中稠密的三条互不相交的简单弧 .

定理 3. 设 $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 是 $\Sigma_{0,6}$ 上的一组三条互不相交的桥弧，在 $T = (B, \epsilon)$ 中稠密，其中 P。那么 $\mathcal{B}$ 在同伦意义下唯一。特别地，由 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 分别得到的三条简单闭曲线，在同伦意义下分别为 ∂E_1、∂E_2、∂E_3。

前两种情形的证明。 我们注意到，若由 β_i 得到的简单闭曲线与 ∂E_j 同伦，则 β_i 在同伦意义下是连接 E'_j 中两个穿孔点的直弧。首先假设由 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 得到的两条简单闭曲线分别与∂E_i 和 ∂E_j 同伦，其中 $i \neq j$。于是得到图 3 中的第一个图示。显然，若该集合在 P中稠密，则剩下的桥弧也与连接 E'_k中两个穿孔点的直弧同伦。其次，假设其中一条与 ∂E_i 同伦，其中某个 i。于是得到图 3 中的第二个图示。我们注意到，不可能有

在此情形下，若该集合在 P 中稠密，则相对于 ∂E 存在一条波。这意味着不存在波。因此，由 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 得到的每条简单闭曲线都与 ∂E_j 中的某一条同伦，其中 $j = 1$，2，3。□

对于最后一种情况，我们假设它们都不同伦于 ∂E_i for some i。为了证明最后一种情况，我们采用构建用于分类有理3缠结的算法时所用的论证。

3.1. **简单闭曲线在$\Sigma_{0,6}$中的德恩参数化。**

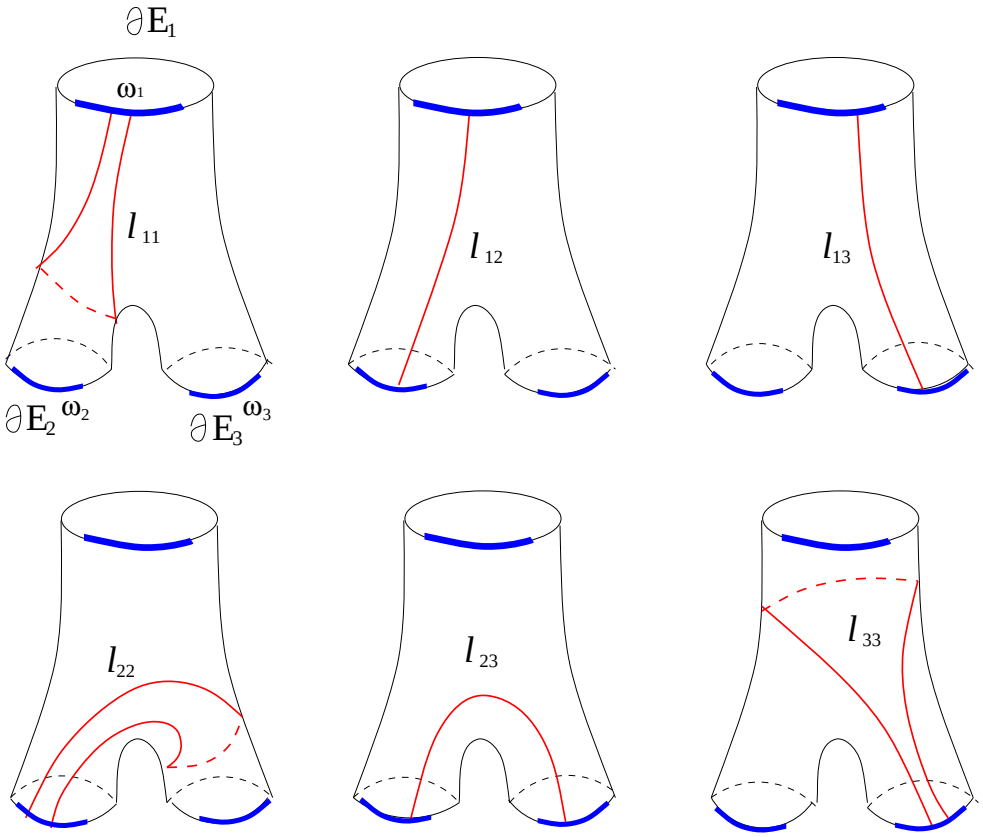


FIGURE 4. P中的标准弧

设 γ 是$\Sigma_{0,6}$中的一条简单闭曲线。假设 γ 与 ∂E_i相交。于是可以对γ 作同伦变形，使其仅在 ∂E_i 的一个特殊子弧 ω_i 处与 ∂E_i 相交。我们称 ω_i 为∂E_i中的窗口。于是 γ 在 P中有若干同类型的平行弧。将它们的弧类型记为 l_{ij}，如图4所示，称之为标准弧类型。（参见 [3]。）将弧类型为 l_{ij} 的平行弧数量记为 x_{ij}，称为 γ的权重。x_{ij} 与几何交数 $|\gamma \cap \omega_s|$ 之间存在如下关系。

引理4 ([2])**.** 设 $I_s = |\gamma \cap \omega_s|$，其中 $s \in \{1, 2, 3\}$。则 I_s 决定 x_{ij}。特别地，若$x_{ii} > 0$ 对某个 i成立，则 $x_{ij} = I_j$、$x_{ik} = I_k$ 和 $x_{ii} = \frac{I_i - I_j - I_k}{2}$。此外，若 $x_{ii} = 0$ 对所有 i成立，则 $x_{ij} = \frac{I_i + I_j - I_k}{2}$对互异的 i、j、k成立。

注意到， γ 可由 x_{ij} 以及 E_i'中的模式确定。因此，我们可以将γ 在$\Sigma_{0,6}$ 中参数化如下。

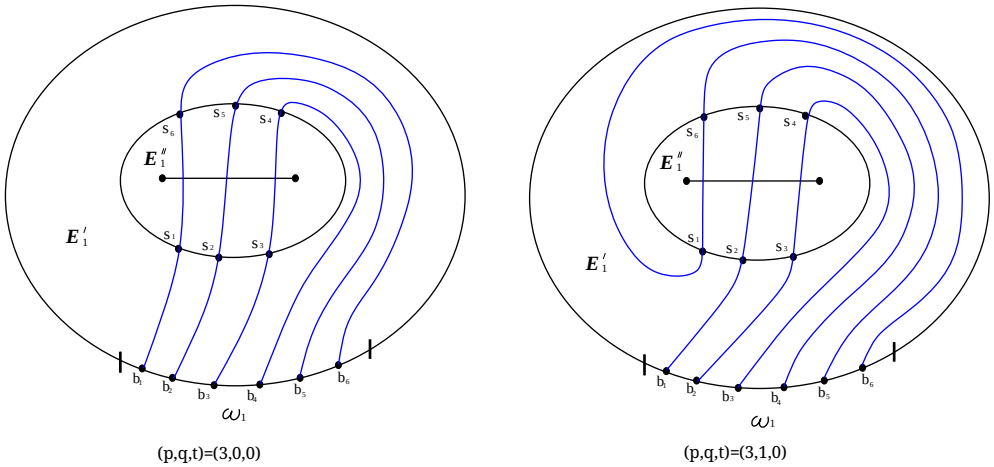


FIGURE 5. 二点穿孔圆盘中的参数化

定理 5 (德恩定理的特殊情形 [3])。 闭本质 *1*-流形可由$_{,6}$ 个参数组成的有序序列$(p_1, q_1, t_1, p_2, q_2, t_2, p_3, q_3, t_3)$ 进行参数化。（其中 p_i、 $q_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ 和 $t_i \in \mathbb{Z}$ 对应 $i = 1$、2、3。），其中 $2p_i = I_i$ 和 $2p_i = J_i$。

在图 5 的图示中， E_i''是 E_i' 中的内部二点穿孔圆盘，且其中仅有平行弧。然后，通过确定 b_i 与 s_j之间的连接模式， q_i 和 t_i 即可确定 E_i' 中所有弧的弧类型及其权重。

为了证明主定理，我们处理的是简单弧，而不是简单闭曲线。需要指出的是，本节中的论证是针对简单闭曲线，而非简单弧展开的。由简单弧得到的简单闭曲线可以用本节中的论证进行参数化。此外，简单弧 β_i 是桥弧，当且仅当由 β_i 得到的 γ_i在 $B - \epsilon$中围成一个压缩圆盘。因此，如果考虑以穿孔为端点之一的例外弧类型，就可以用简单弧而非简单闭曲线来展开全部论证。

4. STANDARD DIAGRAM AND THE PROOF OF THE LAST CASE

回顾一下， $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 是 Σ_0上的一组互不相交的桥弧$_{,\ 6}$，对应于 $T = (B,\ \epsilon)$。为了分析 β_i，我们取 $\Sigma_{0,\ 6}$，其中有三条互不相交且互不平行的简单闭曲线 ∂E_1， ∂E_2和 ∂E_3。令 $P' = \partial B - (\cup_{i=1}^{2} E_i'')$。现在，按照图 6，为每个 E_i''取赤道 e_i。于是，e_i 按照图 6将 E_i'' 分成 $E_i''^{+}$ 和 $E_i''^{-}$ 。注意，对于$i = 1$， 2， 3， ∂E_i 同伦于 $\partial E_i''$。现在，我们引入一个引理，帮助我们在一种特定形式的图示中实现 β，这种图示称为标准图。

引理 6 (引理 6.1 在 [2])。 设 N是 $B - \epsilon$ 中的一个压缩圆盘， h 是由支撑在 N' 上的顺时针半德恩扭转得到的同胚，其中 N' 是 Σ_0中的二穿孔圆盘$_{,\ 6}$ 使得 $\partial N = \partial N'$。那么，简单闭曲线 δ 在 $B - \epsilon$ 中围成一个压缩圆盘，当且仅当 $h(\delta)$ 在 $B^3 - \epsilon$中围成一个压缩圆盘。

我们注意到，引理 6 意味着，简单弧 β_i 是 $B - \epsilon$ 中的桥弧，当且仅当 $h(\beta_i)$ 是 $B - \epsilon$ 中的桥弧。

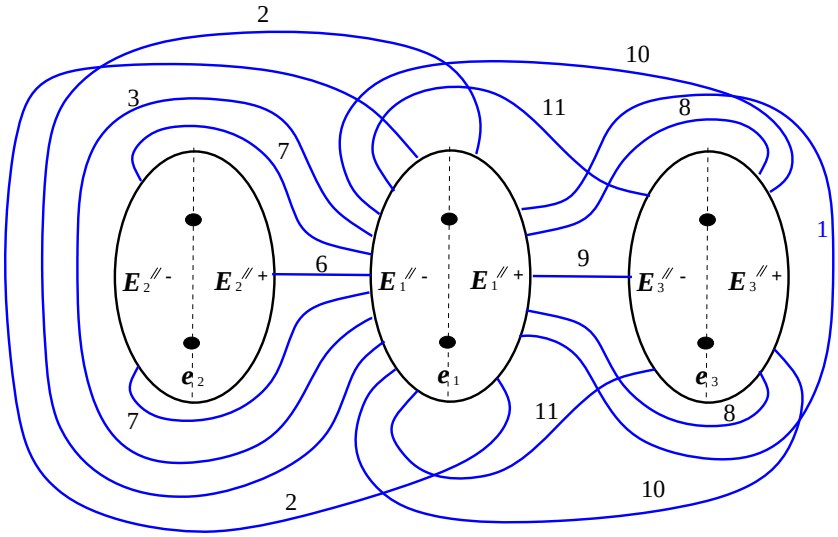


FIGURE 6. 标准图

令 γ_i 为由 β_i 得到的简单闭曲线，它可以用整数的有序序列 $(p_1,\ q_1,\ t_1,\ p_2,\ q_2,\ t_2,\ p_3,\ q_3,\ t_3)$ 参数化。现在，我们通过如下引理，研究简单闭曲线 γ_i'（它在 $\Sigma_{0,\,6}$ 中可能属于不同的同伦类），使得 $\gamma_i' \cap P'$ 的每个分支都同伦于图 6 所示两个图示之一中的 P' 里的某个给定实弧类型：取一个恰当的 t_i' 来代替 t_i。

引理7 (引理 8.2 in [2]). 假设 γ 由$(p_1, q_1, t_1, p_2, q_2, t_2, p_3, q_3, t_3)$参数化，且在 P 中具有 l_{11} 种弧类型。那么存在由$(p_1, q_1, t_1', p_2, q_2, t_2', p_3, q_3, t_3')$ 参数化的简单闭曲线 γ'，其中 $t_i' \in \mathbb{Z}$ 满足 $\gamma' \cap P'$ 的所有分支都同伦于图示中的某条弧。

如果简单闭曲线 γ 的所有分支都同伦于图 6 图示中的某条弧，我们就称它处于标准位置。图 6 中的图示称为标准图。设 β_i' 为简单弧，使得 γ_i' 是由 β_i' 得到的简单闭曲线。注意，$\beta_i' \cap P'$ 的各分支也由标准图中的弧类型表示。为说明这一点，只需考察 P' 中直接连接 E_i'' 中穿孔的分支，如图 7 所示。注意，γ 有两个分支（a）和（b），而 β 有一个分支（b'），它与分支（b）平行。原引理讨论的是一条简单闭曲线，而不是多条简单闭曲线的并。然而，应用上述引理时，单条简单闭曲线与多条简单闭曲线并无区别。它同样适用于 $\beta' = \beta_1' \cup \beta_2' \cup \beta_3'$。注意，扭转数 t_i 的变化会保持密度不变，因为沿 E_i'' 进行半德恩扭转只会将 $\partial E_i''$ 上所有端点的位置旋转 $180°$。还要注意，在 N' 上支撑、由引理 6 定义的半德恩扭转作用于 B 时，B 中的平凡有理 3-缠结 ϵ 保持不变。对于 β 的进一步修改，我们考虑以下两个引理和定理。

引理 8（引理 9.1，见 [2]）。若 A 是 $B^3 - \epsilon$中的一个压缩圆盘，则 $(\delta_1\delta_2^{-1})^{\pm 1}(\partial A)$ 也界定 $B^3 - \epsilon$中的一个压缩圆盘。（其中，δ_1 和 δ_2 分别是支撑在二点穿孔圆盘 C_1 和 C_2 上的顺时针半德恩扭转，如图 8 所示。）

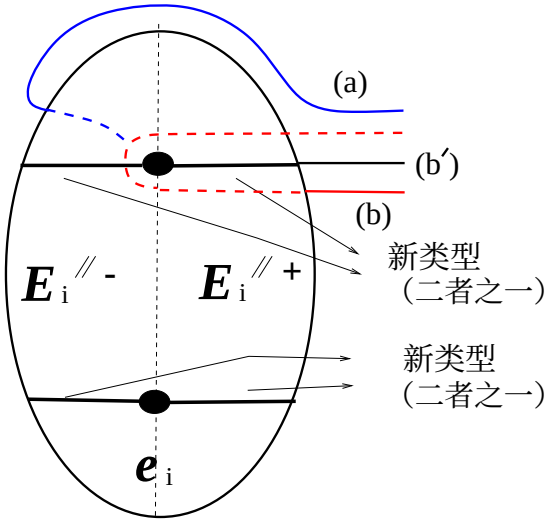


FIGURE 7.

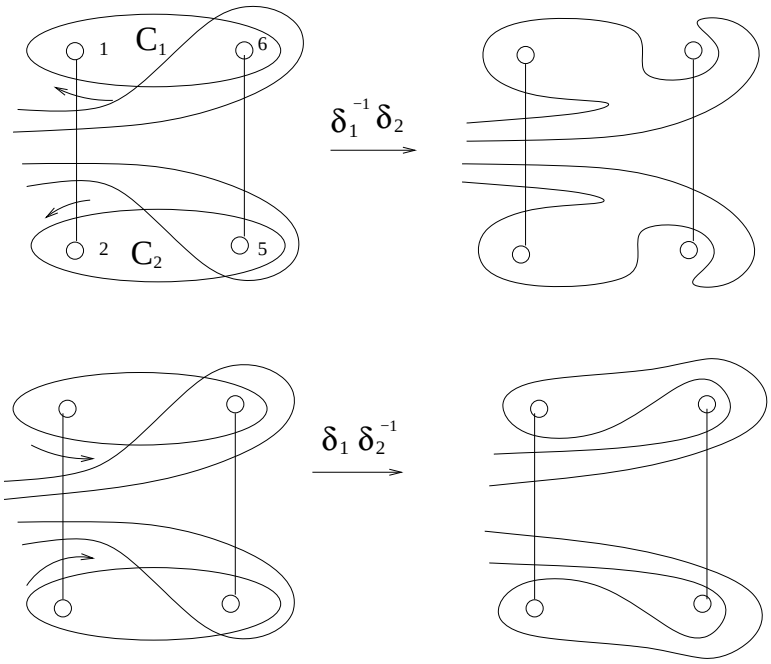


FIGURE 8. 半德恩扭转，以保持 $B^3 - \epsilon$ 中压缩圆盘的有界性

引理 9 （引理 9.2，见 [2]）。 假设 A 是 $B^3 - \epsilon$中的一个压缩圆盘。令 δ_3 为支撑在二穿孔圆盘E_4'上的逆时针半德恩扭转，如图 *9* 所示。那么， δ_3（∂A）也界定 $B^3 - \epsilon$中的一个压缩圆盘（A）。

定理 10 (定理 9.3（见 [2]）。 假设 A 是 $B^3 - \epsilon$ 中的一个压缩圆盘，且 ∂A 在 P' 中处于标准位置。那么，半德恩扭转之一 $(\delta_1\delta_2^{-1})^{\pm 1}$ 和 $\delta_3^{\pm 1}$ 会降低 ∂A 与 ∂E 的最小交数。

下面的 引理是证明主定理最后一种情形的核心思路 .

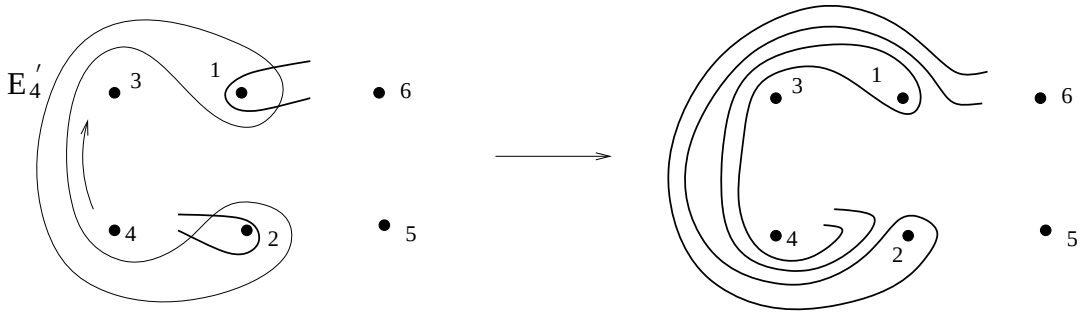


FIGURE 9. 一次半德恩扭转可保持 $B^3 - \epsilon$中压缩圆盘的有界性

引理 11. 设 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 是 $B - \epsilon$中由桥弧构成的互不相交的简单弧集合。假设 $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3$ 处于标准位置，并且每条弧相对于 $\partial E''$都有一个波。那么，对于 $j = 1$, 2、3，存在 $\partial E_i''$中 $\beta \cap P'$ 的两个相邻端点，它们属于某个i 中的同一个 β_j。

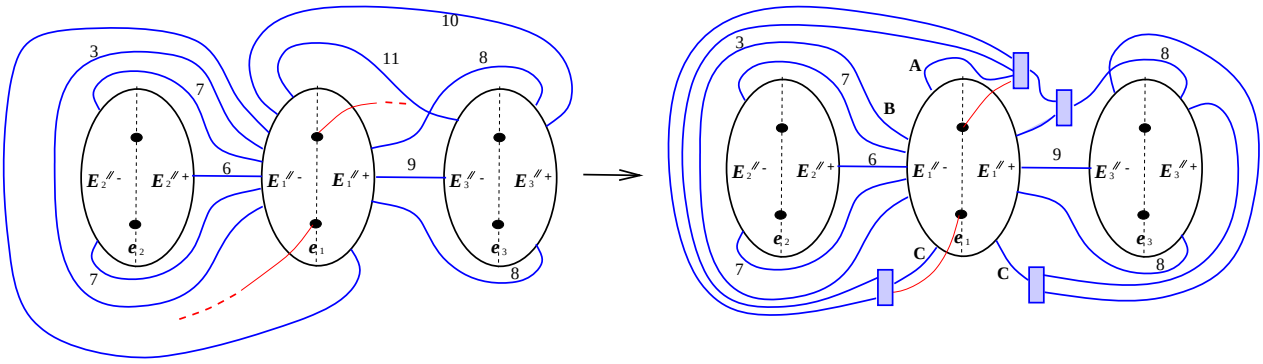


FIGURE 10.

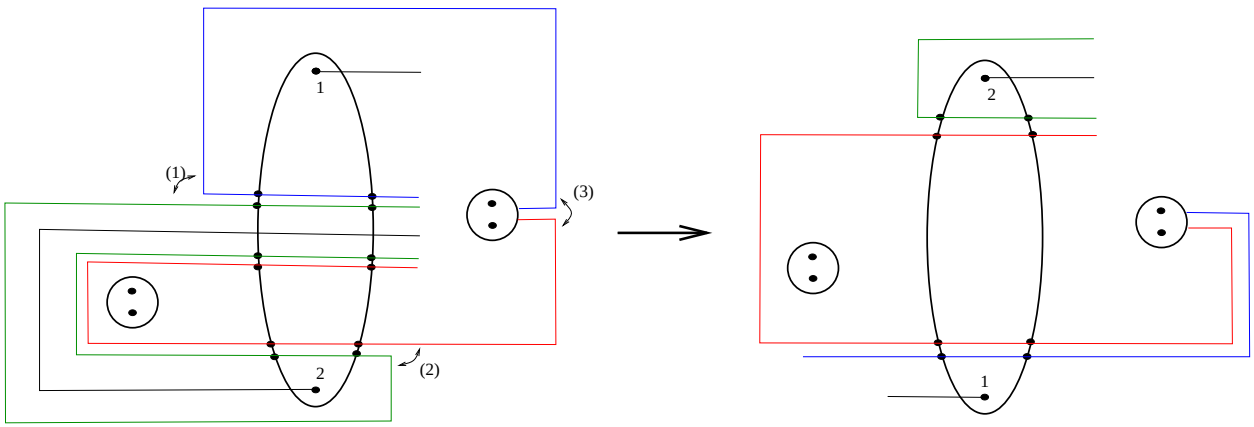


FIGURE 11.

证明。根据假设，所有 β_i 都有波，不失一般性，我们假设 β 具有类型1或类型3的子弧，如图 10 和图 12 的第一幅图所示。将引理 9 中的同胚 δ_3 应用于 β后，我们可以分别像图 10 和图 12 的第二幅图那样移除类型2的子弧。设m_k 为每种类型 k的权重。在图 10 的第二幅图中，我们注意到$\mathbf{A} = m_2$，$\mathbf{B} = m_3 - m_2$ 和$\mathbf{C} = m_{10} + m_{11}$。在图 12 的右图中，我们有$\mathbf{A} = m_2$和$\mathbf{B} = m_3 - m_2$。此外，在图 12 的下图中，我们有$\mathbf{A} = m_2 - m_3$，$\mathbf{B} = m_3$和$\mathbf{C} = m_2$，$\mathbf{D} = m_1 - m_2$，$\mathbf{E} = m_{7_2} + m_3 - m_2$，其中 7_2 是标准图中类型 7 的下轨。关于图 10 和图 12 中这些权重变化的详细信息，请参见 [2]中的定理 9.3。我们注意到，根据定理 10，每一步的同胚都会降低 P' 中子弧的总权重。

我们声称，这组新的桥弧在 P' 中是稠密的。为证明图 10 所述情形下的这一论断，请考察图 11 中的图示。由于 $\partial E_2''$ 和 $\partial E_3''$ 中的端点是固定的，只需研究 $\partial E_1''$ 中端点的排列模式。由于 β 在 P' 中是稠密的，图中三个位置 (1)，(2) 和 (3) 上所示的两条相邻弧应属于不同的桥弧。这说明右侧图示也满足密度规则。显然， $\partial E_1''$ 中除平行弧所标示的相邻端点之外，其他相邻端点也符合密度规则，因为它们的排列模式与先前对应的模式相同。

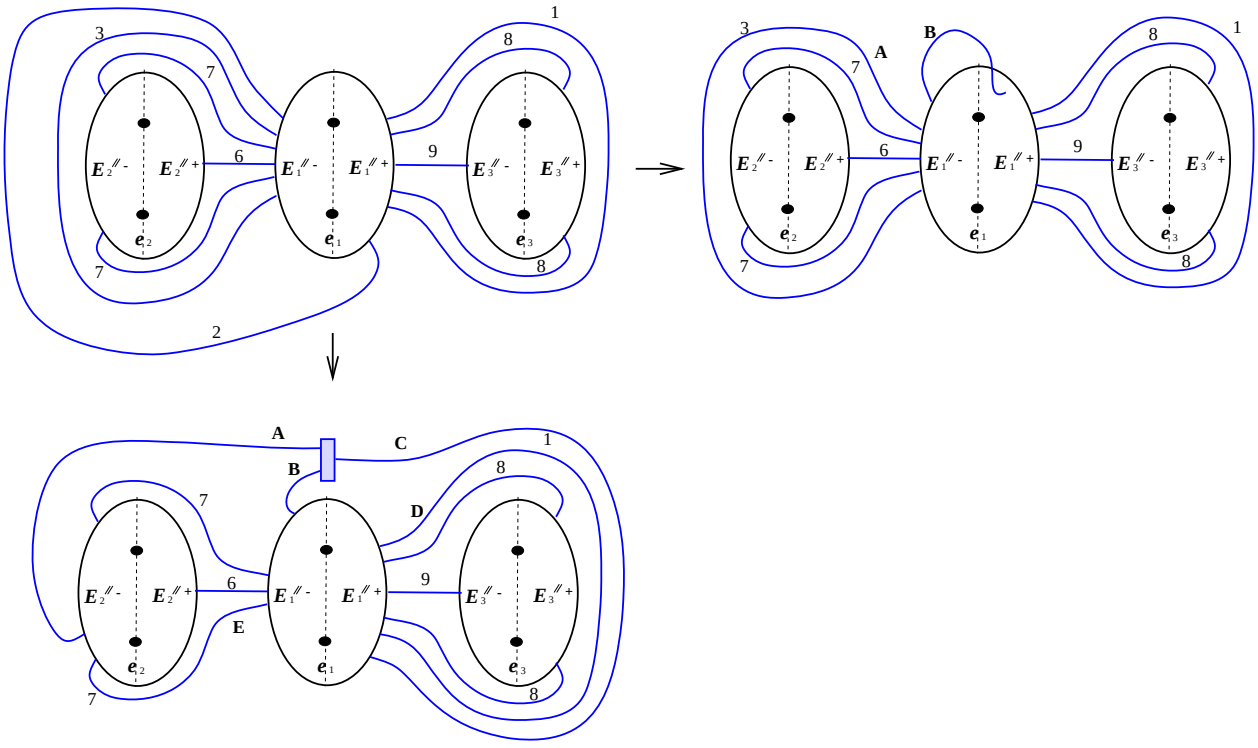


FIGURE 12.

同样，由图 13 可知，图 12 所述的修改后桥弧集合是稠密的。最后，我们会得到如图 14 所示的不具有类型2的四个图示。首先，假设如图示中所示， m_1 和 m_3 均为正

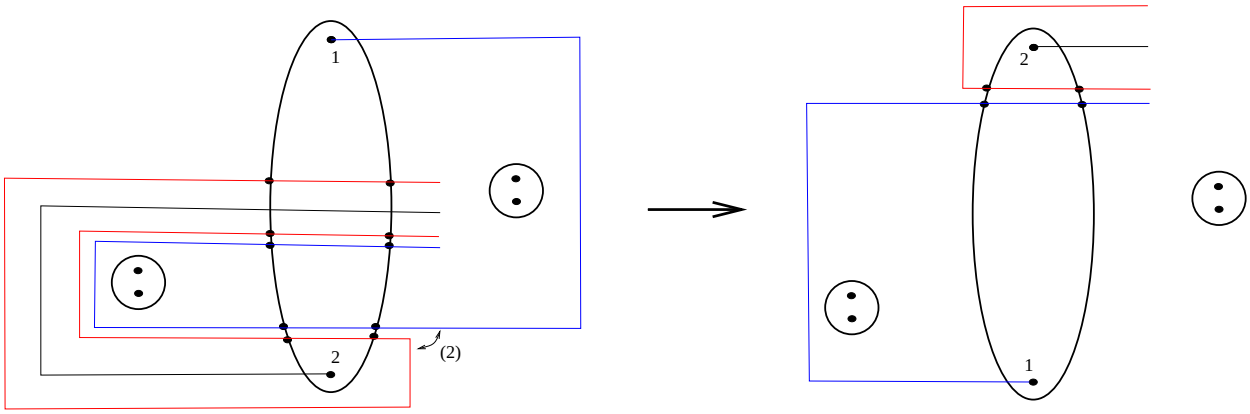


FIGURE 13.

（A）。那么， $\partial E_1''$ 中有两个相邻的端点，因为 E_1'' 中的两个穿孔点应当是某个相同 β_i 的两个端点，其中 $i = 1$，2，3。

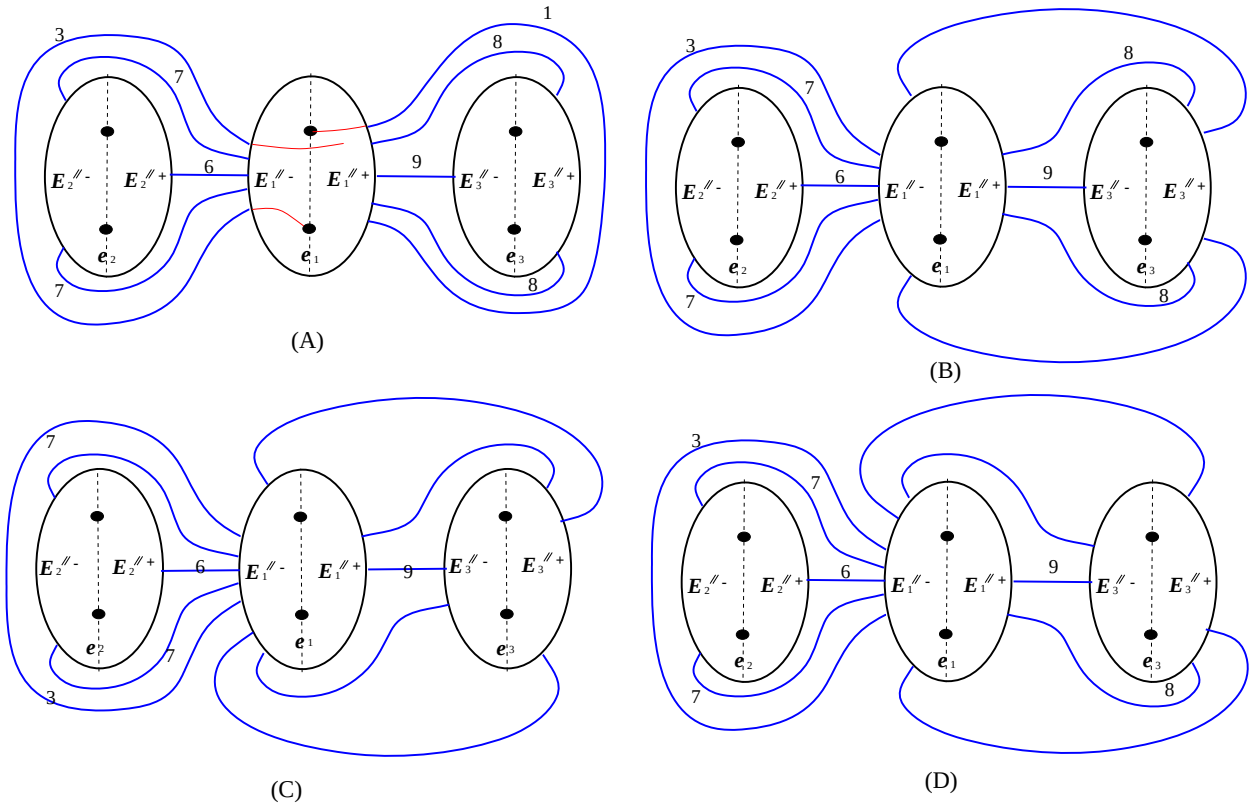


FIGURE 14.

对于其余情况，我们多次应用同胚 $(\delta_1^{-1}\delta_2)^{\pm 1}$，以得到如下更简单的图示。对于图示 (B)，我们多次应用同胚 $(\delta_1^{-1}\delta_2)$，得到图 11 中最右侧的图示。我们注意到，同胚 $(\delta_1^{-1}\delta_2)$ 保持密度不变。

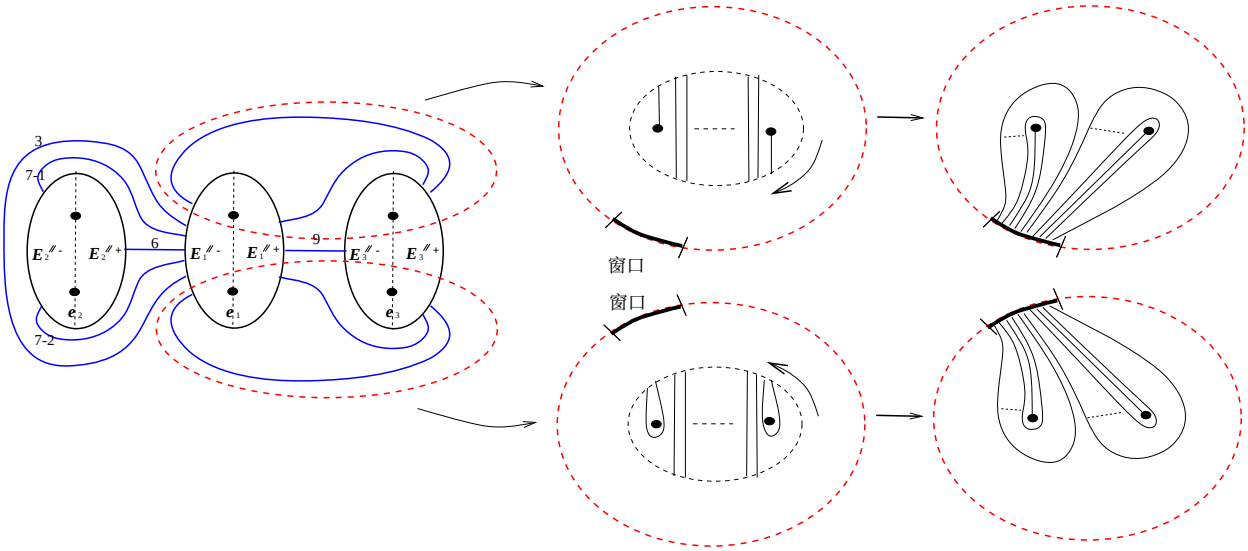


FIGURE 15.

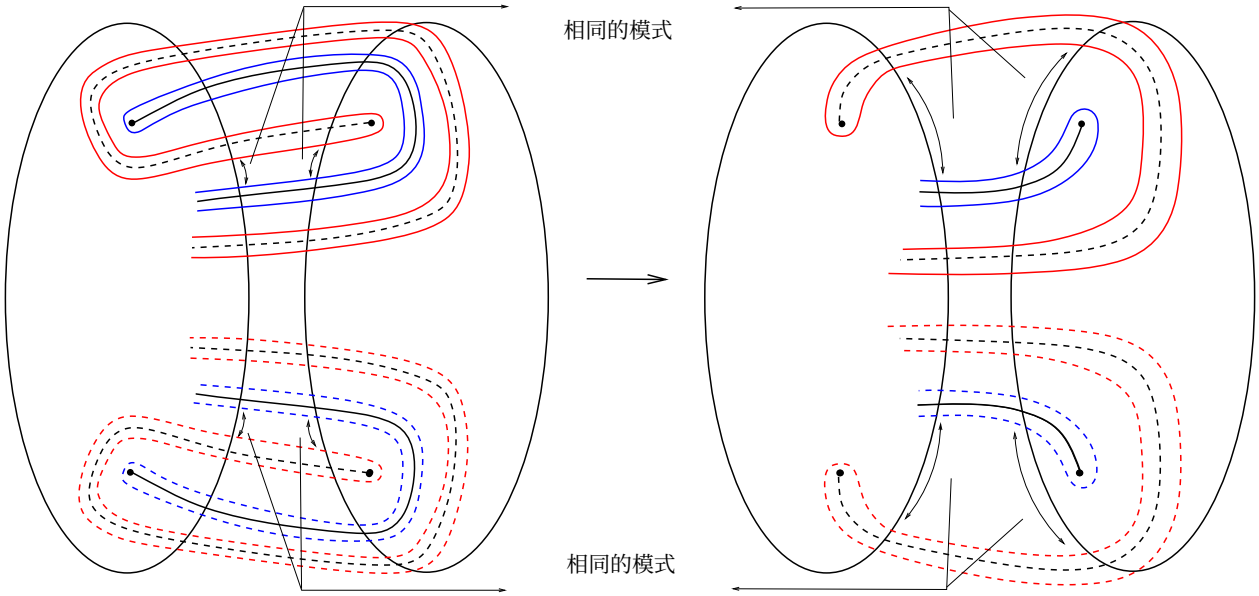


FIGURE 16.

现在考虑情形 (C) 和 (D)。由于这些情形彼此对称，只需考察情形 (D)。我们对图示 (D) 反复应用同胚 $(\delta_1^{-1}\delta_2)$，直到得到图 17 中最右侧的图示。我们注意到，同胚 $(\delta_1^{-1}\delta_2)$ 保持

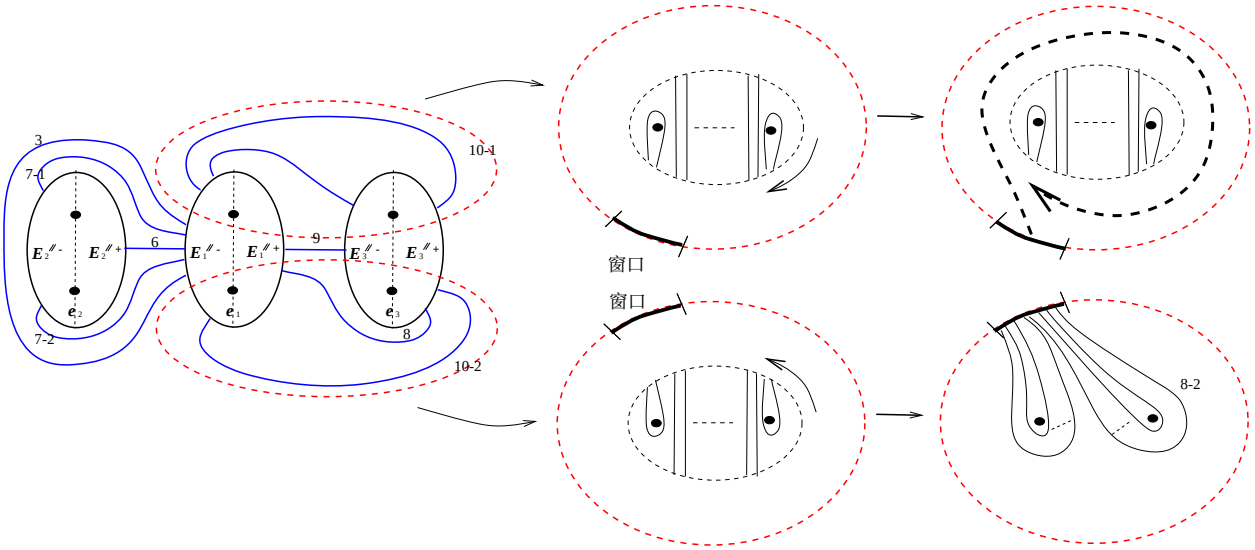


FIGURE 17.

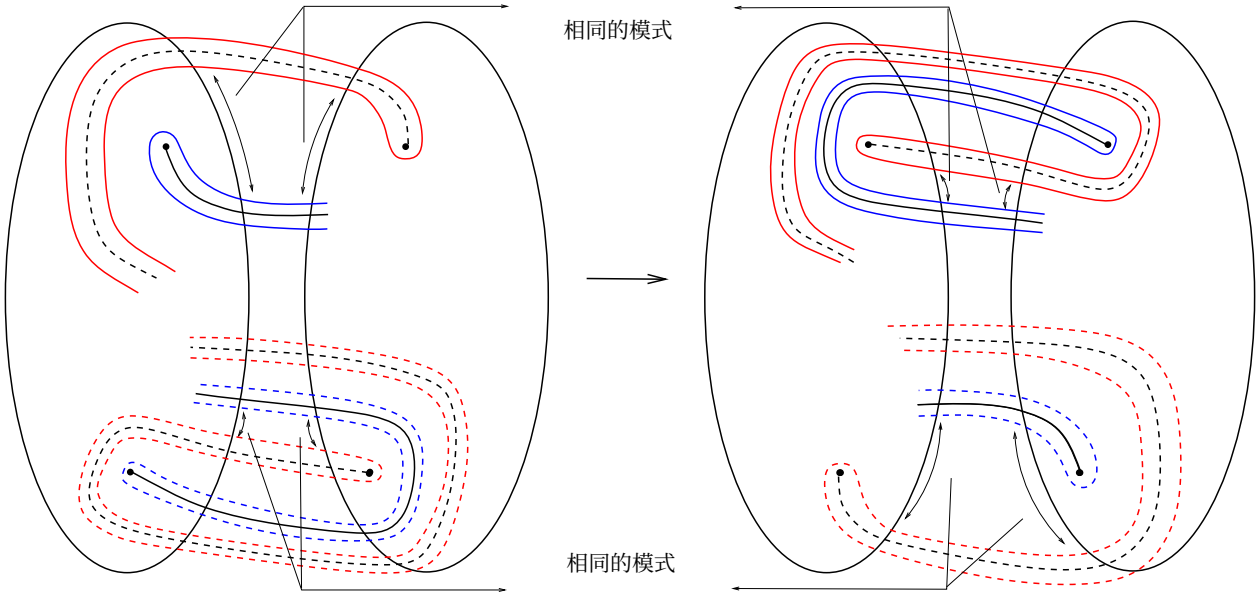


FIGURE 18.

密度不变，如图18所示。如果图示中包含最右侧的两个图示，那么该图示就是类型2。我们重复这一过程以消除类型2。注意，这一过程保持密度不变。由于 P' 中的子弧总权重有限，且本证明中提到的步骤会降低总权重，我们最终会得到一组桥弧，其中至少有一条与连接 E_i''中两个穿孔点的直弧同伦，对某个 $i \in \{1,2,3\}$成立。因此，只需考虑最终图示之前的图示。忽略对称情形后，我们得到图19中的两个图示 (a) 和 (b)。注意，若对图示 (a) 应用 $(\delta_1^{-1}\delta_2)$，就会得到连接 E_3''中两个穿孔点的桥弧。此外，我们对图示 (b) 应用 δ_3^{-1}

于是，我们得到连接 E_1'' 中两个穿孔点的桥弧。在 (a) 中，假设 β_1 与连接 E_1'' 中两个穿孔点的红色弧同伦。由于 β_2 和 β_3 也有一个波，显然 $\partial E_2''$ 中有两个相邻端点属于同一个 β_j，其中某个 $j = 2, 3$。类似地，在 (b) 中，$\partial E_2''$ 中有两个相邻端点属于同一个 β_j，其中某个 $j = 2, 3$。这意味着 $\delta_3^{\pm 1}$ 或 $(\delta_1^{-1}\delta_2)^{\pm 1}$ 无法保持密度。这与上述论证相矛盾。

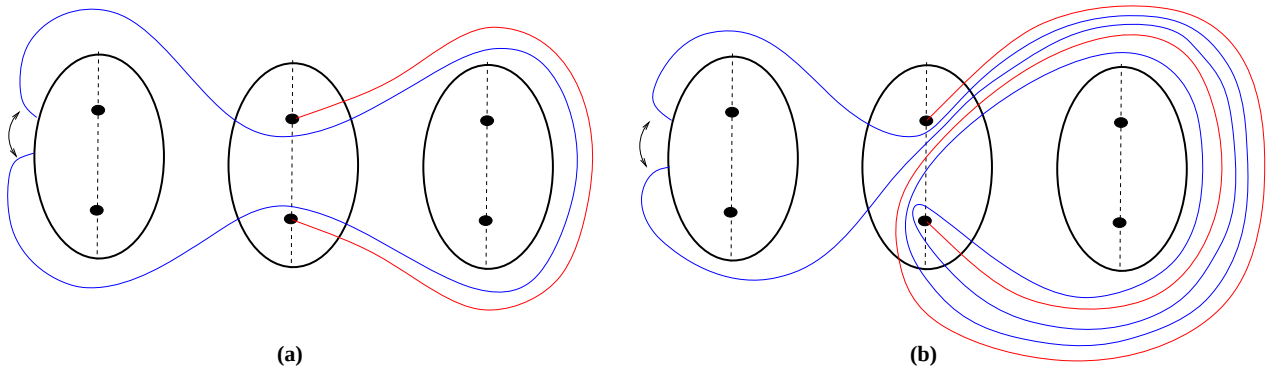


FIGURE 19.

□

现在，我们可以完成定理 3 的证明。

最后一种情形的证明。根据引理 11，不可能存在一组三条两两不相交的桥弧，其中至少一条含有波。因此，如果 β 在 P' 中稠密，那么 β_i 中没有一条含有波。这意味着这组桥弧应与 ∂E_1、∂E_2 和 ∂E_3同伦。□

ACKNOWLEDGEMENTS

本研究获韩国国家研究基金会（NRF）通过基础科学研究计划资助，该计划由教育部资助（NRF- 2020R1I1A1A01052279 和 NRF-2020R1A2C1A01009184）

REFERENCES

[1] J. Conway，《纽结与链环的枚举及其某些代数性质》，载于《抽象代数中的计算问题》（Pergamon，牛津出版社，1970年），第329–358页。[2] B. Kwon，《一种分类有理》3-缠结的算法，《结理论及其分支》24（2015），第1期，1550004（62页）。[3] R. C. Penner；J. L. Harer，《轨道道组合学》，《数学研究年刊》第125号，普林斯顿大学出版社，普林斯顿（新泽西州），1992年。xii+216 页。