arXiv:2303.07002v1 [cs.CG] 13 Mar 2023

局部化并球双过滤

MichaelKerber ！

格拉茨工业大学几何研究所，奥地利

MatthiasSöls ！

格拉茨工业大学几何研究所，奥地利

摘要

我们提出了对持久同调经典并球过滤的一种扩展：固定一点 q，我们将注意力集中在以 q 为中心的球上，其半径由第二个尺度参数控制。我们讨论了绝对变体，其中并集仅限于 q-球；以及相对变体，其中考虑 q-球相对于其边界的同调。有趣的是，这些自然构造得到的双过滤单纯复形，对于任何有限的 k 都不是 k-临界的。尽管如此，我们证明这些双过滤可以精确且高效地计算，并提供了一个使用 CGAL 库的原型实现。我们还指出，近期针对二参数持久性的一些算法进展（通常假设对于某个有限的 k 满足 k-临界性）也适用于 ∞-临界情形。

2012 年 ACM 学科分类 计算理论 → 计算几何；计算数学 → 代数拓扑学

关键词与短语 拓扑数据分析、多参数持久性、持久局部同调

补充材料 原型实现可见： `https://bitbucket.org/mkerber/demo_absolute_2d/src/master/`。

经费支持 作者感谢奥地利科学基金（FWF）的支持。*Michael Kerber*：奥地利科学基金（FWF）资助项目 P 33765-N*Matthias Söls*：奥地利科学基金（FWF）：资助项目 W1230

致谢 作者感谢 Anton Gfrerrer 和 Thomas Pock 提供的宝贵讨论 s.

1 引言

近年来，多参数持久同调 理论日益受到关注。该理论通过使用多个尺度参数对数据集进行过滤，并观察改变参数组合时拓扑性质如何变化，从而扩展了（单参数）持久同调理论。大多数标准示例定义了两个尺度参数，其中第一个参数基于数据集内的距离，第二个参数则基于数据集的局部密度。之所以选择这两个参数，是为了提高数据集对离群点的鲁棒性。

局部化双过滤。 我们提出一种不同类型的双过滤，其中第二个参数控制数据的局部性 。设 P 是欧几里得空间$\mathbb{R}^d$ 中的一个有限数据点集， $q \in \mathbb{R}^d$ 是另一个点，我们称其为中心。对于两个实数 s， $r \geq 0$，我们定义

$$L_{s,r} = \left(\bigcup_{p \in P} B_s(p) \right) \cap B_r(q)$$

其中 $B_\alpha(x)$ 是以 x 为中心、半径为 $\sqrt{\alpha}$ 的球（开平方并非标准做法，但在后文中会很方便）。换言之，我们考虑数据点周围的球并（如同持久同调的许多应用中所做的那样），但只关注中心周围的一个

邻域。显然，对于 $s \leq s'$ 和 $r \leq r'$，$L_{s,\,r} \subseteq L_{s',\,r'}$，因此 $L := (L_{s,\,r})_{s,\,r \geq 0}$ 是一个嵌套的空间序列。我们将空间集 L 定义为绝对局部化双滤过，示意见图1。本文旨在计算该双过滤的组合表示：一个单纯复形双过滤，对于参数的每一种取值 $(s,\ r)$，它都与绝对局部化双滤过同伦等价。

或者，我们考虑这样一种变体：将 $L_{s,r}$ 位于 $B_r(q)$边界上的所有点都视为同一点（见图 2）。这种版本会产生一种双过滤，我们称之为相对局部化双滤过。有时，它能揭示 q 周围更多的局部信息（如图 2 所示），在应用中也更常用（见下文相关工作）。同样，我们希望得到一种等价的单纯描述。

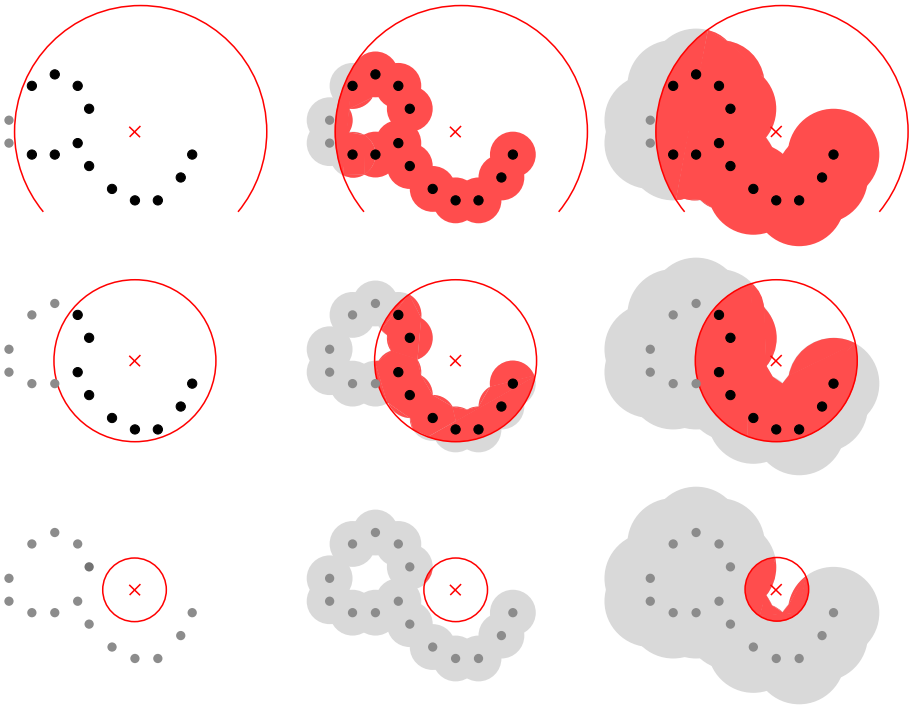


图1 $L_{s,r}$示意图。半径 s 控制 P 中各点周围的半径（黑点），并沿水平方向增大。中心点（红色十字）的半径 r 沿垂直方向增大。集合 $L_{s,r}$ 以深红色标出。

这些局部化双过滤的一个有趣特征是，拓扑变化会沿着由 s 和 r张成的二维参数空间中的曲线发生。或许最简单的例子是令 $d = 1$, $q = 0$ 和 $P = \{1\}$。那么，当且仅当 $r + s \geq 1$时，$L_{s,r} \neq \emptyset$。因此，空区域和非空区域在参数空间中由一条直线分隔。这意味着任何等价的单纯双过滤都是 ∞-临界的，也就是说，不存在整数 k 使其为 k-临界。图 3 展示了 k-临界性的示意图。

鉴于 ∞-临界单纯双过滤源自如此简单的构造，我们提出这样一个问题：此类双过滤是否允许进行高效的算法处理？本文聚焦于第一步，即生成此类双过滤。这需要为每个单形计算其进入曲线，也就是该单形存在与否的参数空间区域之间的边界（见图 3）。一种自然的想法或许是将问题归约到 k-临界情形，用 ∞ 个阶梯线段（由水平和垂直线段组成的序列）近似进入曲线。不过，若要确保近似精确， 的值可能相当大，这会使算法处理变得复杂，并为问题引入另一个参数。此外，采用近似方法并不令人满意，尤其是对于生成这一步而言，因为它只是计算流程中的第一步：尽管离散化或许足以应付许多任务，却会限制后续步骤的可能性。因此，我们主张改为计算一种精确表示。

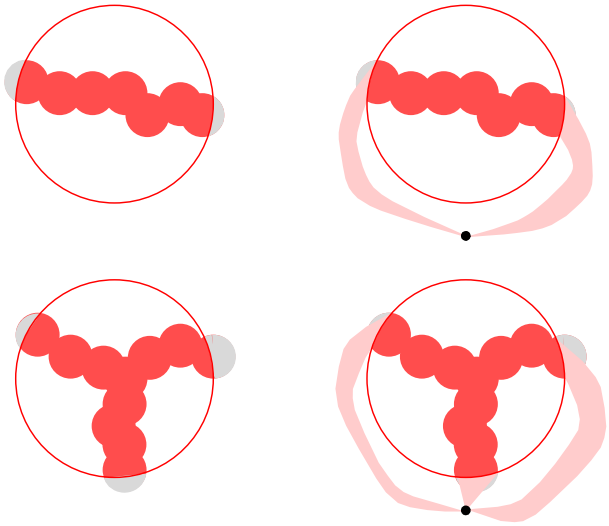


图 2 左：$L_{s,r}$ 中的两个例子均为可缩空间，因此无法通过同调方法进一步区分。右：$L_{s,r}$ 相对于$L_{s,r} \cap \partial B_r(q)$的商空间，可以通过将球边界上的所有点与一个（虚拟）顶点锥接来可视化，此处该顶点绘制为黑点。在上方的例子中，所得空间有一个孔洞，而下方的例子有两个。因此，这些空间的同调发生变化，从而能够将它们区分开来。

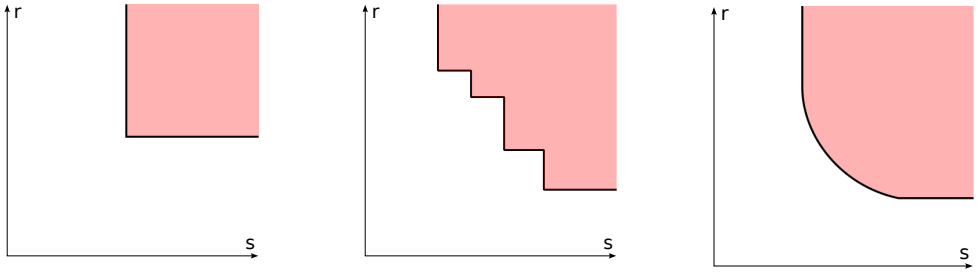


图 3 单纯双过滤参数空间中一个固定单形的活跃区域和进入曲线，分别对应于 1-临界（左）、4-临界（中）和 ∞-临界（右）的情形。关于 k-临界性的更正式定义，参见例如 [21]。

用含有 k 个阶梯线（由一系列水平和垂直线段组成）的阶梯线来表示。不过，为了确保近似准确，k 的值可能相当高，这会使算法处理变得复杂，并为问题引入另一个参数。此外，采用近似方案并不令人满意，尤其是在生成步骤中——它只是计算流程的第一步：尽管离散化或许足以应对许多任务，却会限制后续步骤的可能性。因此，我们主张改为计算一种**精确**表示。

贡献。 我们给出了精确且高效地计算绝对和相对局部化双过滤的算法。每个单形进入双过滤的时刻由二维参数空间中的一条曲线描述，该曲线由线段和抛物线弧组成。

在绝对情形下，利用 α 复形（又称德劳内复形）和持久神经定理，可以构造单纯双过滤。为了确定一个（德劳内）单形的进入曲线，我们在由 s 参数化的对偶沃罗诺伊多胞体上求解一个凸最小化问题。我们证明，所得解在

沃罗诺伊多胞体内构成一条折线链，且每条线段对应参数空间中进入曲线的一段弧。我们还介绍了一种高效算法，可按每个单形摊销常数时间计算所有单形的进入曲线。

在相对情形中，我们使用针对对的持久神经定理的一种变体。然而，沃罗诺伊划分不满足该神经定理的前提条件；我们展示了如何细分平面输入的沃罗诺伊胞来解决这一问题。单形的进入曲线由与绝对情形相同的凸优化问题确定，但现在要求得到最大解，并且可以用类似的方法处理。

我们提供了一个基于 Cgal 库、用于平面绝对情形的原型实现[1] 。该软件使我们能够可视化局部化双过滤的进入曲线，并为后续研究 ∞-临界双过滤的算法处理提供起点。我们通过证明此类双过滤的条形码模板可以采用与 1-临界情形相同的策略计算，说明其算法处理已指日可待。

相关工作。对绝对（相对）局部化双过滤应用带域系数的同调函子，可得到我们称为绝对（相对）局部化持久模的持久模。相对局部化持久模的水平切片和垂直切片在文献中称为持久局部同调（*PLH*）模，参见综述 [28]。

Bendich 等人最早研究了局部同调的持久版本。 [6] 他们利用该方法，根据点云推断分层空间的局部同调。他们的 PLH 模通过扩展持久图来定义， [18] 并通过葡萄园 [19]考虑其固有的两个参数（在我们的记法中为 s 和 r ）。借助 PLH 研究分层空间的工作在 [8], 中得以延续，其中分层空间中的点被聚类到同一层。在 [6] 和 [8], 中，研究者利用修改后的 α 复形计算 PLH 模。Skraba 和 Wang [41] 定义了 PLH 的两种变体，并展示了如何通过 Vietoris-Rips 复形近似计算这两种变体。Ahmed、Fasy 和 Wenk 还提出了一项应用：定义了一种基于 PLH 的图上距离，用于道路网络比较 [1]。

上述工作依赖于 PLH 的相对版本。Stolz [42]使用一种类似于绝对局部化持久模水平切片的持久模，进行抗离群点地标选择。Von Rohrscheidt 和 Rieck [43] 考虑三参数持久模（的样本），以衡量给定点的一个邻域偏离欧几里得空间的程度，从而获得点云的“流形性”。这些三参数持久模是通过从 $L_{s,\ r}$中移除开球 B_t^o（q）得到的。$L_{s,\ r} \cap \partial B_r$（$q$）的过滤的 PLH 模$_{s\geq 0}$ 与多尺度局部主成分分析相结合，用于从数据集中提取机器学习所需的相关特征 [7] 。持久局部（上）同调变体的其他应用还包括 [23], [44] 和 [45]。

我们的工作提出了适用于多参数持久性的双过滤。由点集输入构造双过滤的其他自然方法包括密度-Rips 双过滤 [15],度-Rips 双过滤 [35, 39, 40] 以及多重覆盖过滤 [20, 27]; 关于这些方法在稳定性方面的比较，见 [11] 。在所有这些方法中，第二个尺度参数都用于表示一个点的密度；这与我们的方法不同，在我们的方法中，它表示的是相对于某个点的局部性 q。

近年来，多参数持久性中的计算问题受到了广泛关注，包括用于可视化 [35], 分解 [12, 24], 压缩 [2,29, 36] 和距离 [10, 32, 33]的算法。在上述所有方法中，假设输入

[1] https://bitbucket.org/mkerber/demo_absolute_2d/src/master/

是一个至少为 k-临界（通常甚至是 1-临界）的单纯双过滤，因此这些算法都无法直接应用于本研究中计算得到的过滤。

我们研究中出现的 ∞-临界双过滤所产生的持久模满足 Miller [38] 的驯性条件。在 [38] 中，奠定了对上述 k-临界情形进行大幅推广的基础。然而，这一工作更偏重理论；与之相对，我们提出了一种初步设定，用于具体的算法处理，并可沿着 [37] 中建议的路线继续推进（见第 20 节）。

2 绝对情形

为形式化地陈述我们的问题，我们需要以下概念：对于 $s,\ r \in \mathbb{R}$，若 $s \le s'$ 且 $r \le r'$，则记作 $(s,\ r) \le (s',\ r')$。双过滤是由拓扑空间组成的集合 $X := (X_{s,\ r})_{s,\ r\ge 0}$，满足：若 $(s,\ r) \le (s',\ r')$，则 $X_{s,\ r} \subseteq X_{s',\ r'}$。若每个 $X_{s,\ r}$ 都是某个单纯复形 K 的子复形，则称该双过滤为有限单纯。

双过滤的映射 $\phi :\ X \to Y$ 是一族连续映射 $(\phi_{s,\ r} :\ X_{s,\ r} \to Y_{s,\ r})_{s,\ r\ge 0}$ 这些映射与 X 和 Y 的包含映射相容。若存在映射 $\phi : X \to Y$，使得每个 $\phi_{s,\ r}$ 都给出一个同伦等价（即存在映射 $\psi : Y \to X$，使得每个 $\psi_{s,\ r}$ 都是 $\phi_{s,\ r}$的同伦逆），则称两个双过滤等价。

对于 $\mathbb{R}^d$ 中的有限点集 P，下文称其为站点，以及一个中心点 $q \in \mathbb{R}^d$（不一定是站点），我们考虑由下式定义的双过滤 L

$$L_{s,r} = \left(\bigcup_{p\in P} B_s(p) \right) \cap B_r(q)$$

其中 $B_s(p)$ 表示距离 p 不超过 $\sqrt{s}$ 的点集。我们的目标是计算一个与 L 等价的有限单纯双过滤。

局部化阿尔法复形。过滤 $L_{s,\ \infty}$ 是并球过滤，是持久同调（单参数）中的标准过滤类型之一。众所周知，α 复形 [26] 为计算等价的单纯表示提供了一种切实可行的方法（至少在 d 较小时如此）。接下来我们概述这一技术；唯一的区别是，我们根据 $B_r(q)$ 对 α 复形进行局部化，这引入了第二个参数，但在理论上不会造成问题：

对于站点 p，其 沃罗诺伊区域 是 $\mathbb{R}^d$ 中满足 p 是最近站点的点集：

$$\mathrm{Vor}(p) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - p\| \le \|x - p'\| \ \forall p' \in P\}.$$

每个 Vor(p) 都是闭集且凸。受限覆盖 $\mathcal{U}_{s,\ r} := \{U_{s,\ r}(p) \mid p \in P\}$ 定义如下：

$$U_{s,r}(p) := B_s(p) \cap B_r(q) \cap \mathrm{Vor}(p).$$

对于每个 $s,\ r \ge 0$，都有 $\bigcup_{p\in P} U_{s,\ r}(p) = L_{s,\ r}$。局部化阿尔法复形 是神经 $\mathcal{U}_{s,\ r}$，也就是说，它是一个抽象单纯复形，用于编码受限覆盖元素的交叠模式：

$$A_{s,r} := \mathrm{Nrv}\,\mathcal{U}_{s,r} = \{\{p_0, \ldots, p_k\} \subseteq P \mid U_{s,r}(p_0) \cap \ldots \cap U_{s,r}(p_k) \neq \emptyset\}.$$

参见图4中的示意图。所有 $U_{s,r}(p)$ 都是闭集且为凸集，并且 $U_{s,r}(p) \subseteq U_{s',r'}(p)$ 对于 $(s, r) \le (s',r')$ 成立。在这些条件下，持久神经定理 [4, 17] 保证，对于每个 $s, r \ge 0$，$L_{s,r}$ 与 $A_{s,r}$ 之间存在同伦等价，而且，

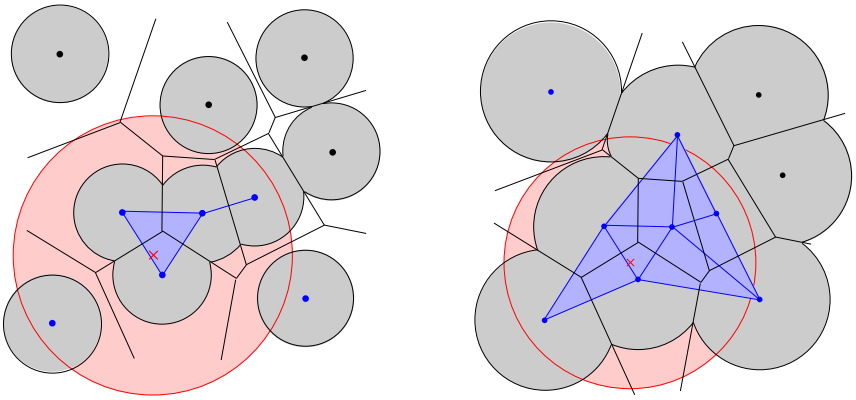


图4 沃罗诺伊区域、受限覆盖 $U_{s,\,r}$（灰色）以及局部化阿尔法复形 $A_{s,\,r}$，对应于 $(s,\ r)$ 的两种不同取值。右侧的上方蓝色顶点确实不连通，尽管灰色球彼此相交，因为它们并未在（红色）中心圆内相交。

这些同伦等价与 $L_{s,r}$ 和 $A_{s,r}$的包含映射相容。因此，这些双过滤是等价的。

假设这些站点处于一般位置，即对于 $1 \le k \le d-1$，至多有 $k+2$ 个站点位于同一个 k 维球面上，则复形 $A_{s,\,r}$ 是 P 的德劳内三角剖分 的子复形。已知其规模至多为 $O(n^{\lceil d/2 \rceil})$ [3]，并且可以高效计算，尤其是在维数 2 和 3 [31, 46] 中。

入口曲线。我们进一步说明“计算”有限单纯双过滤A的含义：计算 P 的德劳内三角剖分，即可得到属于 A 的所有单形。对于每个单形 $\sigma \in A$，我们希望计算其活跃区域的显式表示，定义如下：

$$R_\sigma := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma \in A_{s,r}\}.$$

$\le$ 在 $\mathbb{R}^2$中的活跃区域是闭集，这意味着，如果 $(x,y) \in R_\sigma$，那么以 (x,y) 为锚点的整个右上象限也属于 R_σ。我们称活跃区域的边界为 σ的入口曲线 。图 5 展示了一族入口曲线的示例。

为了理解入口曲线的结构，我们对 $\sigma = (p_0, \ldots, p_k)$定义多胞体$V_\sigma := \mathrm{Vor}(p_0) \cap \ldots \cap \mathrm{Vor}(p_k)$。然后，令 p 为 σ中的某个点，我们有，$\sigma \in A_{s,r}$ 当且仅当 $V_\sigma \cap B_s(p) \cap B_r(q) \neq \emptyset$。由于 V_σ 是凸的，因此存在唯一的点 $\hat{}p \in V_\sigma$，其到 p 的距离最小；同样，也存在唯一的点 $\hat{}q \in V_\sigma$，其到 q 的距离最小。我们记 $s_0 := \mathrm{k}p - \hat{}p\mathrm{k}^2$, $s_1 := \mathrm{k}p - \hat{}q\mathrm{k}^2$，以及 $r_1 := \mathrm{k}q - \hat{}q\mathrm{k}^2$。

▶ **引理 1.** 活跃区域 R_σ 位于半平面 $s \ge s_0$内。此外，限制在半平面 $s \ge s_1$内时，R_σ 由直线 $r = r_1$界定，即该直线以上的区域属于 R_σ，而直线以下的区域则不属于。

证明。第一部分由定义可知：对于 $s < s_0$，交集 $V_\sigma \cap B_s(p)$ 为空。同理，对于 $r < r_1$，交集 $V_\sigma \cap B_r(q)$ 为空，因此 R_σ 包含于半平面 $r \ge r_1$内。此外，对于 $s \ge s_1$，点 $\hat{}q$ 位于 $V_\sigma \cap B_s(p)$ 中，因此交集 $V_\sigma \cap B_s(p) \cap B_r(q)$ 非空，当且仅当 $\hat{}q \in B_r(q)$，这等价于 $r \ge r_1$。◀

接下来需要计算 s-范围 $[s_0, s_1]$ 内的进入曲线。为此，我们要计算每个这样的 s 所对应的最小 r 值，使得 $V_\sigma \cap B_s(p) \cap B_r(q) \neq \emptyset$。反过来，这个最小的 r 值就是 q 到集合 $V_\sigma \cap B_s(p)$ 的距离。我们将在下一小节研究这个几何

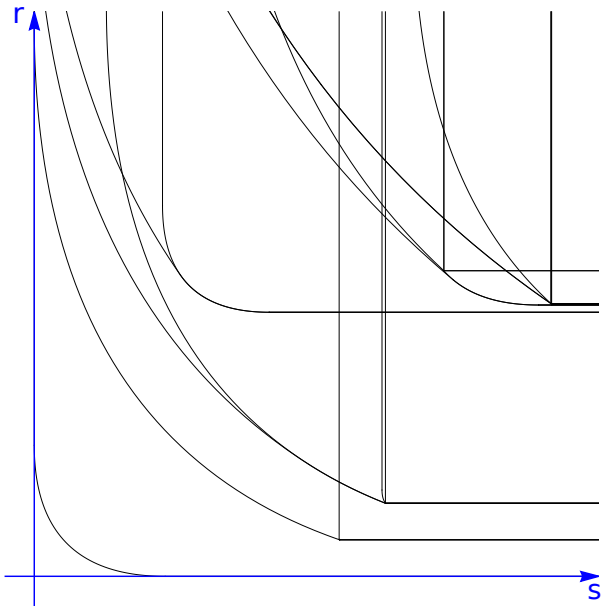


图 5 包含 25 个输入点的平面绝对局部双滤过的入口曲线剖面。

问题；求解结果将给出活跃区域 R_σ 的边界的参数化，该参数化由线段和抛物线弧构成。

最小化路径。稍微推广上一段的设定，设 p、$q \in \mathbb{R}^d$，并设 V 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个闭凸多面体，也就是说，它是 $\mathbb{R}^d$ 中有限多个闭半空间的交集。设 $\hat{}p$、$\hat{}q$ 分别为 V 中到 p 和 q 距离最小的点。注意，如果 $p \in V$，则可能有 $p = \hat{}p$；否则则有 $\hat{}p \in \partial V$。q 的情形也同样如此。我们令 $s_0 := \mathrm{k}p - \hat{}p\mathrm{k}^2$，并令 $s_1 := \mathrm{k}p - \hat{}q\mathrm{k}^2$。对于任意 $s \in [s_0, s_1]$，交集 $V \cap B_s(p)$ 非空；我们用 γ_s 表示该交集中距离 q 最近的点。图 6 展示了 $d = 2$ 情形。接下来两个命题的证明很初等，只用到 V 的凸性，以及由此可知，限制在 V 上的到 q 的距离函数只有一个局部极小值。证明见附录 A。

▶ **引理 2.** 我们有 $kp - \gamma_s k^2 = s$。特别地，函数 $kp - \gamma_s k^2$ 在 $s \in [s_0, s_1]$上严格递增。

▶ **引理 3.** 函数 $\gamma\colon [s_0, s_1] \to \mathbb{R}^d, s \mapsto \gamma_s$ 连续且为单射。

由此可知，γ 在 $\mathbb{R}^d$ 中定义了一条路径，我们称之为 (V, p, q) 的最小化路径 。平面中的一条最小化路径如图 6 所示（蓝色）。由于以下引理，我们今后不失一般性地假设只考虑满足 V为满维的实例 (V, p, q)。根据勾股定理即可轻松得出该结论——见附录 A。

▶ **引理 4** (降维). 设 V 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个多胞体，且包含于一个仿射子空间W中。设 p, $q \in \mathbb{R}^d$和 p', q'分别是 p和 q到 W的正交投影。那么，(V, p, q) 的最小化路径与(V, p', q') 的最小化路径相同，参数化仅相差一个平移。

凸多胞体 V 的一个面是 V 与超平面 H 的交集，其中V 全部位于 H所确定的某个闭半空间内。

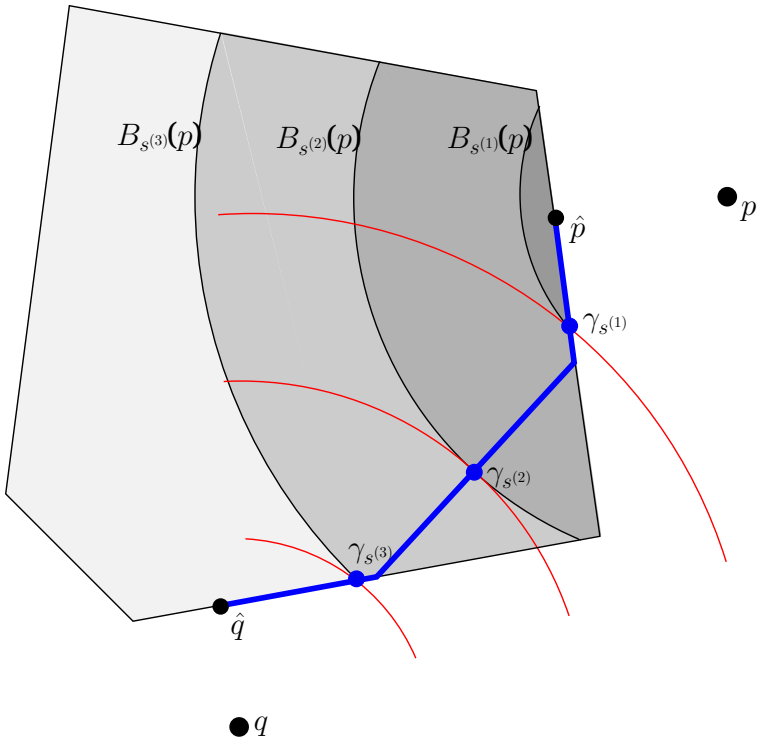


图 6 对于三个半径 $s^{(1)} < s^{(2)} < s^{(3)}$，集合 $V \cap B_{s_i}(p)$ 及其对应的点 γ_{s_1}，γ_{s_2}，γ_{s_3} 如图所示。事实上，所有点 γ_s 都位于从 $\hat{p}$ 到$\hat{q}$的蓝色曲线上。红色弧线是以 q 为中心的圆上的弧，表明 γ_{s_i} 确实是 s_i的最小化点。

▶ **引理5** （面引理）。 设 γ 是(V, p, q) 的最小化路径，且 F 是 V的一个面。那么， $\gamma \cap F$ （即 γ沿着 F延伸的部分）是(F, p, q)的最小化路径的子集。

证明。 设 x 是 $\gamma \cap F$上的一个点。根据定义， $x = \gamma_s$ 对于某个 s，也就是说， x 是 q 在 $V \cap B_s(p)$中的最近点。由于 $F \subseteq V$， x 也是 q 在 $F \cap B_s(p)$中的最近点，因此 x 位于 F的最小化路径上。 ◀

根据面引理，我们知道，(V, p, q) 的最小化路径中沿着 ∂V 的部分，与其各个面的最小化路径重合。接下来需要理解 V内部的最小化路径。理解这条子路径的核心概念是下面这个简单的定义：

▶ **定义6.** 桥 $V, p, q)$ 的桥是（可能为空的）线段 $V \cap pq$，其中 pq是 p 与 q之间的线段。 —

▶ **引理7** (桥引理). 设 γ 表示(V, p, q)的最小化路径。那么， 桥 e 是 γ的子集。此外， γ 上不属于桥的每个点都位于 ∂V上。

证明。 取桥上的一个点 x ，并令 $s := \|x - p\|^2$。容易验证 $s \in [s_0, s_1]$。我们论证 $x = \gamma_s$：事实上，点 x 是 q 在 $B_s(p)$ (因为它位于pq上) 的最近点；而且，由于它也位于 $\overline{V}$中，因此它使子集 q到 $V \cap B_s(p)$的距离最小。至此，第一部分得证。

对于第二部分，反设存在某个点 $y = \gamma_s$ ，对于某个$s \in [s_0, s_1]$ ，它位于 V 的内部，但不在桥上。由于 y 必须位于

$V \cap B_s(p)$ 的边界上，且不在 ∂V 上，因此它必定位于$\partial B_s(p)$ 的某个球面片内部。将到 q 的距离函数限制在（$d-1$）维球面 $\partial B_s(p)$ 上，除与边界相交的位置外没有局部极小值；但由于 y 不在桥上，它并非该极小值点。因此，沿球面片的某个方向移动会减小到 q 的距离，这与假设 $y = \gamma_s$ 矛盾。◀

桥引理告诉我们，最小化路径在 V 的内部至多沿着一条线段（即桥）经过；在桥之前和之后，路径可能会有位于边界上的子路径。图 6 给出了三个子路径都存在的例子。

▶ **定理 8** (结构定理)。 (V, p, q) 的最小化路径是一条简单路径，从 $\hat{}p$ 出发，到 $\hat{}q$ 结束，且路径上的每个点都位于 V 某个面的桥上。特别地，该路径是一条折线链。

证明。 显然，该路径从 $\hat{}p$ 到达 $\hat{}q$，并且由于 γ 是单射，因此该路径是简单的。由于路径上的每个点 x 都位于某个面 F的相对内部，面引理表明 x 位于 (F, p', q')（其中 p', q' 是 F在子空间中的投影），而桥引理表明 x 位于 F的桥上。因此，该路径包含于有限条线段的并集中，故为一条折线路径。◀

算法。 设 σ 为一个德劳内单形， V 为其沃罗诺伊多胞体， p 为最近站点之一。我们首先采用自然的方法计算 $(V,\ p,\ q)$ 的最小化路径。然后，对于最小化路径上的每条线段 ab，我们使用参数化

$$s = \|p - ((1-t)a + tb)\|^2 \qquad r = \|q - ((1-t)a + tb)\|^2, \tag{1}$$

该参数化对于 $t \in [0, 1]$ 会产生进入曲线的一支。 s 和 r 都是关于 t的二次多项式，因此所得曲线是抛物线或直线——简单证明见附录 C。

为计算最小化路径，我们概述构造，并将细节留待附录 B：我们计算点 $\hat{}p$ 和 $\hat{}q$，它们分别是该路径的起点和端点。然后计算 V及其所有面的桥。这会得到一组线段，我们据此计算诱导图，其顶点为各桥的端点（在此图中，如果另一条桥的端点位于某条桥的内部，则可将该桥拆分为若干子线段）。可以对该图定向，使得沿每条边前进时，到 p 的距离都会增大。在此图中，我们从 $\hat{}p$ 走到 $\hat{}q$ 以计算最小化路径；唯一需要的判定谓词是在顶点 x 处确定接下来沿哪条边前进。这条边是使到q 的距离下降最多的边，可通过计算限制在各出边上的、到 q 的（平方）距离函数的梯度轻松确定。

下面简述该算法的复杂度分析，具体细节仍见附录 B：设 N 为德劳内三角剖分的大小。计算所有德劳内单形上的所有桥，所需时间与 N成线性关系。设 f为 V的面的数量，则为 V构造的图由 f 条桥组成。由于桥不会（严格意义上）相交，为 V构造的图仍有 $O(f)$ 条边，寻找最小化路径的遍历也在$O(f)$内完成。由此可立即得出复杂度界。

▶**定理 9**。 设 P 是 $\mathbb{R}^d$ 中处于一般位置的点，其中 d 为常数。设 N 为 P 的德劳内三角剖分的规模。我们可以在 $O(N)$ 时间内计算所有德劳内单形的入口曲线。

3 实现

我们使用 Cgal 库实现了平面上的绝对局部化双过滤。我们的代码会计算德劳内三角剖分 [46]，并使用针对平面的简化算法，为每个单形计算最小化路径。德劳内顶点的最小化路径示意见图 7：从 p 出发，沿着桥前进，直到碰到边界。路径必须沿边界的两个方向之一继续前进，并沿边界行进，直到遇到 $\hat{}q$（见图 7 中的红色路径）。可以通过将 q 投影到桥所碰到的边界线段的支撑直线上，并朝投影点 q' 的方向前进，来确定应沿哪个方向前进（桥也可能碰到边界上的一个顶点；我们的原型忽略了这种退化情况）。

此实现所需的所有几何谓词均可在 Cgal [13] 的几何核中轻松获取。对于绝对平面问题，可以仅使用德劳内三角剖分，从而避免显式构造沃罗诺伊多胞体；但对于其他变体，这可能行不通。无论哪种情况，Cgal 的精确几何计算范式都能保证，所获得的参数化是输入数据对应的单纯双过滤的精确表示。

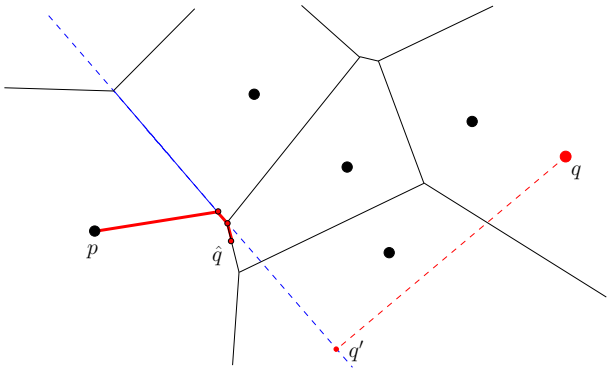


图 7 平面中沃罗诺伊区域最小化路径的示意图。

4 相对情形

相对局部化双过滤。为更好地契合本节研究的情形，我们重新定义 $(s,r) \leq (s',r')$，使其满足 $s \leq s'$ 和 $r \geq r'$。利用这个偏序集，我们可以仿照第 2 节定义双过滤、有限单纯双过滤以及等价关系。我们将这些概念推广到对：成对双过滤是由拓扑空间（或单纯复形）对构成的集合 $(X,A) := (X_{s,r}, A_{s,r})_{s,r\geq 0}$，满足 X 和 A 是双过滤，且 $A_{s,r} \subseteq X_{s,r}$。若 X 是有限单纯双过滤，且 $A_{s,r}$ 是 $X_{s,r}$ 的子复形（这意味着 A 也是有限单纯的），则称其为有限单纯成对双过滤。若存在等价关系 ϕ：$X \to Y$，使得限制映射 $(\phi|_{A_{s,r}})_{s,r\geq 0}$ 给出 A 与 B 之间的等价关系，则称两个成对双过滤 (X,A) 和 (Y,B) 等价。

对于有限点集 P、中心 q 和 s，$r \geq 0$，令 $L_s = \bigcup_{p\in P} B_s(p)$ 表示球并，令 $B_r^o(q)$ 表示中心周围的开球。那么，相对局部化双滤过 就是以下空间对的集合

$$(L, L^{\mathfrak{C}}q) := (L_s, L_s \setminus B_r^o(q))_{s,r\geq 0}.$$

事实上，很容易验证，这一构造得到一个空间的双过滤（注意 r 参数上的反变性）。我们的计算任务是找到一个与之等价的有限单纯对双过滤。

这个双过滤有何意义？首先请注意，一般而言，一对双过滤 (X, A) 会诱导出一个（相对）持久模 $(H_n(X_{s,r}, A_{s,r}))_{s,r\geq 0}$，从而得到

$$H_n((L, L^{\mathfrak{C}}q)) = (H_n(L_s, L_s \setminus B_r^o(q)))_{s,r\geq 0},$$

我们称之为局部相对持久模。根据切除定理以及所有的对都是“良对”这一事实 [30], ，我们有同构 [41]

$$H_n(L_s, L_s \setminus B_r^o(q)) \cong H_n(L_s \cap B_r(q), L_s \cap \partial B_r(q)) \cong \tilde{H}_n(L_s \cap B_r(q)/(L_s \cap \partial B_r(q)))$$

其中 $\tilde{H}$ 表示约化同调。这些同构意味着，局部化相对持久模在逐点意义上对应于图 2（右）中所考察的空间。此外，切除同构与包含映射 $L_s \subseteq L_{s'}$ 相交换；对于 $s \leq s'$，这意味着局部化相对持久模的各行（固定 r）都同构于模 $(H_n(L_s \cap B_r(q) \; L_s \cap \partial B_r(q)))_{s\geq 0}$，该模已在 [6], [8], [41] 中研究过。此外，双过滤的各列（固定 s ）也已在 [41] 中得到研究。因此，局部化相对双过滤同时编码了以往工作中研究过的两类局部持久同调模（基本概念总结见附录 D）。

我们还指出，通过广为人知的锥化构造 [30,p.125]，相对局部化持久模的计算可以轻易地归约为绝对同调的情形，从而得到同构 $H_n(X, A) \cong H_n(X \cup \omega * A)$。对于拓扑空间对 (X, A)，其中 ω 表示一个新顶点。这些同构具有函子性，因此一对双过滤的相对持久模与一个双过滤的绝对持久模同构（使用约化同调）。此外，如果对 (X, A) 是有限单纯的，那么 $X \cup \omega * A$ 也是有限单纯的。

对的神经。为了得到一对等价的有限单纯复形，我们将为 L_s 和 $L_s \setminus B_r^o(q)$ 定义合适的覆盖，并构造相应的神经复形。对于一个（紧）拓扑空间 X，若由闭集构成的覆盖 $\mathcal{U}_X$ 满足：良好 当且仅当其任意子族中各覆盖元素的交集为空或可缩，则称该覆盖为良好覆盖。特别地，闭凸覆盖（如第 2 节中所用）是良好覆盖，因为凸集是可缩的，而凸集的非空交集仍为凸集。

对于一对空间 (X, A)，其中 $A \subseteq X$ 为闭集， X 的闭覆盖 $\mathcal{U}_X$ 通过将每个覆盖元素限制到 A，在 A 上诱导出一个覆盖$\mathcal{U}_A$ 。如果 $\mathcal{U}_X$ 和 $\mathcal{U}_X$ 都是良覆盖，并且 $\mathcal{U}_A$ 也是良覆盖，我们就称覆盖 适用于这对 (X, A)。根据此定义，我们得到如下持久神经定理的版本；它可直接由 [4] 的结果推出，我们在附录 A 中概述其论证。

▶ 定理 *10*（偶对的函子性神经定理）。设 $A \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^d$ 和 U_X 是偶对 (X, A) 的良覆盖。那么，空间 X和 $Nrv\, U_X$通过映射 $\phi\colon X \to Nrv\, U_X$等价，并且 ϕ 到 A 的限制映射给出 A 和 $Nrv\, U_A$之间的同伦等价。此外，映射 ϕ 具有函子性，这意味着如果 $X \subseteq X'$ 和 $A \subseteq A'$，覆盖 $U_{X'}$ 由扩大 U_X 的每个元素（或保持不变）得到，且是偶对 (X', A') 的良覆盖，那么映射 ϕ 和 ϕ' 与包含映射 $X \to X'$ 和 $Nrv\, U_X \to Nrv\, U_{X'}$可交换，而限制到 A和 A' 上的映射与包含映射$A \to A'$ 和 $Nrv\, U_A \to Nrv\, U_{A'}$可交换。

这个（相当繁复的）定理在我们的情形下推出了以下简单推论：如果我们能为球并 L_s找到一个（良）覆盖的过滤$\mathcal{U}_s$，使得对于每个 $r \geq 0$，在 $L_s \setminus B_q^o(r)$ 上的诱导覆盖 $\mathcal{U}_{s,r}$ 都是良覆盖，那么偶对 $(\mathrm{Nrv}\,\mathcal{U}_s, \mathrm{Nrv}\,\mathcal{U}_{s,r})_{s,r\geq 0}$ 就是一个与局部化相对双过滤等价的有限单纯成对双过滤。

平面上的良覆盖。 为 $(L_s, L_s \setminus B_r^o(q))$ 构造良覆盖的一种自然尝试，是考虑由 P 的沃罗诺伊区域所诱导的覆盖，即 $\{\mathrm{Vor}(p) \cap B_s(p) | p \in P\}$，与第 2 节中的做法类似。虽然该覆盖对 L_s 是良覆盖，但对这个对而言并非良覆盖，因为移除一个（开）球可能会导致覆盖元素及其交集不可缩；图 8 展示了若干问题。

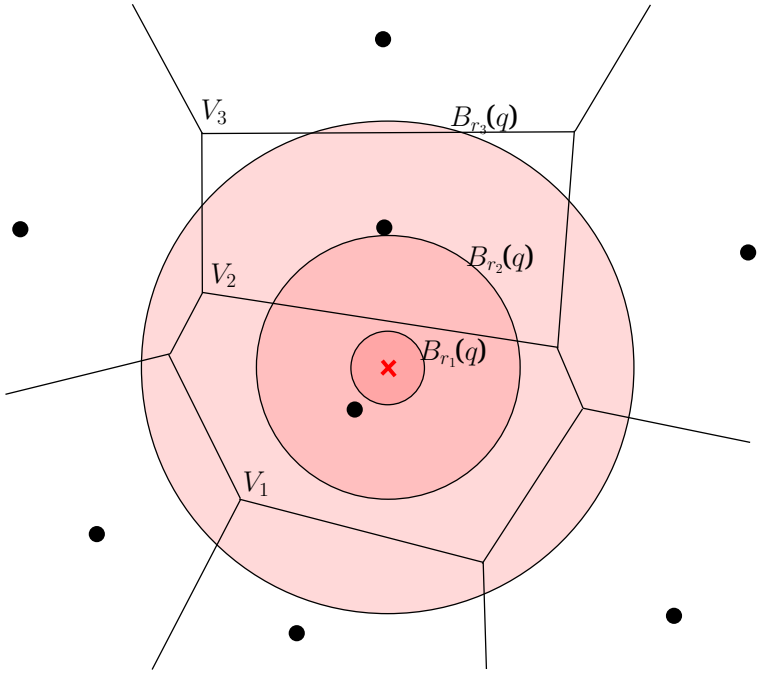


图 8 从沃罗诺伊覆盖中移除一个球 $B_r(q)$ 时出现的问题：当半径为 r_1 时，沃罗诺伊区域 V_1 变得非单连通。对于 r_2，沃罗诺伊区域 V_1 和 V_2 的交集包含两个连通分支。对于 r_3，沃罗诺伊区域 V_2 不连通。

虽然沃罗诺伊覆盖本身不适用，但我们证明，经过适当细分，将沃罗诺伊胞划分为凸片后，所得的诱导覆盖对于这一对 $(L_s,\ L_s \setminus B_r^o(q))$ 是良好的。我们将给出这一构造，并顺带非正式地解释它为何能消除图 8 中可见的所有妨碍良好的障碍。

这一构造分为两部分：首先，我们沿直线 pq 切割包含 q 的沃罗诺伊胞 $\mathrm{Vor}(p)$，将其分成两片（为简便起见，假设 q 位于某个沃罗诺伊胞的内部）。这次初始切割尤其确保 q 不再位于某个覆盖集的内部；这是必要条件，因为否则，移除一个足够小的开球 $B_r^o(q)$，就会在针对 $L_s \setminus B_r^o(q)$ 的诱导覆盖中产生一个非单连通集（参见图 8 中的半径 r_1）。这次切割还避免了这样的情形：$\mathrm{Vor}(p) \cap B_s(p)$ 因为 $B_r(q)$ 从内部接触 $B_s(p)$而变得不连通；详情请参阅附录 A 中引理 16 的证明。

为了理解构造的第二部分，我们将线段或射线 e问题的 称为问题边，条件是限制在 e 上的到 q 的距离函数在 e 的内部存在局部极小值

。这等价于这样的性质： q 在该线段的支撑直线上的正交投影落在 e 上。观察图 8 可知，对于半径 r_2 和 r_3，问题都源于一条问题边（对于 r_2， V_1 与 V_2 之间的边是问题边；对于 r_3， V_2 与 V_3 之间的边是问题边）。

在构造的第二部分中，我们遍历 P 的 Voronoi 图中的所有问题边。对于每一条这样的边 e，令 $\hat{q}$ 表示 q 在该边上的正交投影。线段 $q\hat{q}$ 穿过与 e 相邻的一个多边形 P，我们用这条线段将 P 切割成两部分。至此，细分的描述结束。我们将得到的二维多边形集合记为 $S_2(P, q)$。图 9 展示了一个示例。请注意，此处引入的切割会将每条问题边切割成两条非问题子边，同时也避免了移除 $B_r(q)$ 时多边形变得不连通。

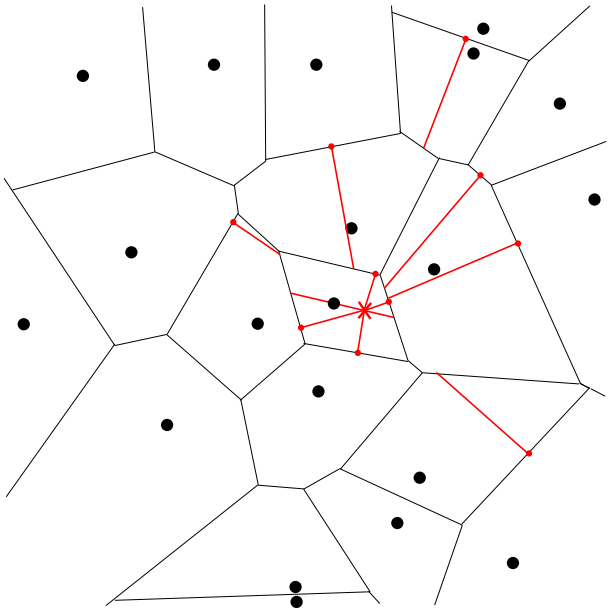


图 9 细分 $S_2(P, q)$ 的示意图。细分线以红色标示。

重要的是，所有引入的切割都是位于经过 q 的直线上的线段。这意味着任意两条切割都不会相交。此外，由切割产生的边都不可能是问题边。由此得到以下定理，其完整证明见附录 A

▶ **定理 11.** 覆盖 $\{L_s \cap V \mid V \in S_2(P,q)\}$ 对 $(L_s, L_s \setminus B_r^o(q))_{s,r\geq 0}$ 是良好的。

每次切割都会使多边形数量增加一个，边的数量至多增加 3。由于每条 Voronoi 边至多引入一次切割，此外还有一次初始切割，因此细分的复杂度为 $O(n)$。

入口曲线。接下来要计算由$S_2(P,q)$诱导的神经中每个单形的入口曲线。假设存在能够诱导良覆盖的细分，所述方法也可推广到更高维；但为简洁起见，我们仅描述平面情形。在这种情况下，每个单形 σ 都表示由 $S_2(P,q)$定义的平面细分中的一个多边形、边或顶点，我们将其记作 V。注意， σ 有两条入口曲线：一条对应 L_s，另一条对应 $L_s \setminus B_r^o(q)$。前者很容易描述：由于 L_s 不依赖于 r，入口曲线由形如 $s = \|p - \hat{p}\|^2$, 的直线确定，其中 p 是 V 的最近站点，$\hat{p}$ 是 V中距离 p 最近的点。

对于 $L_s \setminus B_r^o(q)$，我们固定 s，并寻找使 $B_s(p) \cap V \setminus B_r^o(q)$非空的最大 r。这等价于寻找 $V \cap B_s(p)$上距离 q最远的点，这与第 2 节讨论的问题恰好相反。为简洁起见，我们仅讨论有界多胞体 V的情形，并将其推广到无界多胞体的（直接）方法推迟至附录 B。我们令 q^* 为 V 中距离 q最远的点， $s_0 := \|p - \hat{}p\|^2$ 以及 $s_1 := \|p - q^*\|^2$。对于 $s \in [s_0, s_1]$，我们将 Γ_s 定义为集合 $V \cap B_s(p)$中距离 q 最远的点。

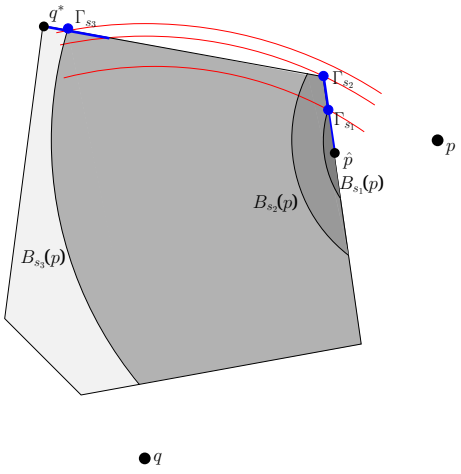


图 10 如图 6 所示，对于相同的（V， p， q）， Γ_s 的示意图。点 Γ_{s_2} 在一段 s取值范围内仍是最大点，而最大化“路径”（蓝色）会在某个 s取值处跳变

最大化问题不如最小化问题那样性质良好：对于一般的多胞体 V，点 Γ_s 可能并不唯一，而且 Γ的像可能存在不连续性；参见图 10 中的示例。然而，这些问题是由 $B_s(p) \cap V$ 边界上的局部极值引起的，对于 $S_2(P, q)$ 的多胞体，可以排除这些极值。因此，我们可以定义最大化曲线 $\Gamma : [s_0, s_1] \to \Gamma_s$ 并推得（证明见附录）：

▶ **引理 12. </style}对于 (P, q)，点 Γ_s 是唯一的，曲线 Γ 是连续的。**

曲线 Γ 的结构与其最小化对应对象 γ相似。降维引理和面引理对 Γ也成立，证明完全相同。我们将反桥 定义为 V 与从 p 出发、沿方向 $-pq$ 的射线的交集（见图 11）。由此可得，反桥是 Γ的一部分，而 Γ 的其余部分位于 ∂V上；其证明与桥引理类似。由此得到

▶**定理 13 (结构定理，最大化版本). 最大化路径 Γ 是 V所有面的反桥之并的子集。特别地，它是一条折线链。**

该定理还推导出一种计算 σ 进入曲线的方法：构造并遍历由反桥得到的图。我们省略进一步细节，这些细节与最小化情形类似，并得到与定理 9 相同的界。

5 ∞-临界双过滤的条形码模板

本节将说明，通过非线性进入曲线表示双过滤，并不会妨碍对其进行高效的算法处理。我们重点讨论 Lesnick 和 Wright [35] 引入的条形码模板 计算问题。其思路如下：限制

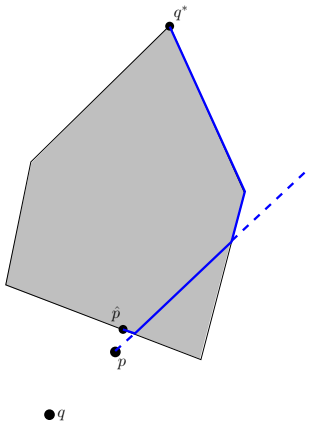


图 11 图示了一个多边形的最大化路径：其边界上只有一个局部极小值和一个局部极大值。该路径沿着反桥穿过内部。

将双过滤限制在一条正斜率的直线上（称为切片），即可得到单参数过滤，进而得到持久条形码。虽然我们无法为双过滤 [15], 关联一个持久条形码，但所有切片上的条形码所构成的集合，能够提供有关该双过滤的大量信息。软件库 RIVET[2] 可将有限单纯双过滤的这些切片条形码可视化。为加快可视化步骤，RIVET 会预先计算所有组合条形码，也就是说，它会将单形按相同顺序进入过滤的切片归为一组——众所周知，条形码在组合意义上仅取决于这一顺序，而不取决于具体的临界值。粗略地说，条形码模板就是所有这些组合条形码的集合。条形码模板也被用于精确计算双过滤的匹配距离 [10, 32]。

上述所有方法都假设双过滤是 1-临界的。用我们的记号来说，这意味着每个单形 σ 的活跃区域都是某个点$v_\sigma \in \mathbb{R}^2$的右上象限。我们认为这一限制并无必要：事实上，组合条形码由切片与所有单形的入口曲线相交的顺序决定。对于 $\mathbb{R}^2$中的一个点的有限集 M，一条非垂直直线将 M 划分为（，，），分别表示直线上方、直线下方和直线上的点。

▶**引理 14**。 令 I 表示入口曲线对的交点集合。如果两个切片对 I具有相同的划分，那么它们具有相同的组合条形码。

证明。 设 ℓ_1， ℓ_2 是条形码不同的切片。这意味着，至少有一对单形$(\sigma,\ \tau)$ 的入口曲线交叉顺序不同。因此，当连续地将 ℓ_1 变换为 ℓ_2时，我们必须经过这些入口曲线的一个交点，因而划分会发生变化。◀

利用标准的点线对偶 [22, 第 8] 章（它已知能保持点与直线的上下顺序），我们立即得到：

▶**推论 15.** 设$\mathrm{dual}(I)$ 为I中所有点的对偶所得到的直线排列。该排列的每个区域都与一组具有相同组合条形码的切片对偶。

[2] https://rivet.readthedocs.io/en/latest/index.html#

我们指出，这一结果推广了广为研究的 1-临界情形：在此情形下，每个 σ 都由一条从点 v_σ 出发的竖直射线和一条水平射线组成，而 σ 和 τ 的曲线相交于 v_σ 与 v_τ的连接处。因此， I 是所有顶点的临界值两两连接的并集。

从计算角度来看，唯一的复杂之处在于计算入口曲线的交点；与 1-临界情形相比，这些曲线的结构更为复杂。不过，如果曲线是半代数的（且次数较低），就像本文研究的情形一样，那么计算这些交点是可行的，而且已有高效的软件可用 [9]。

6 结论

一方面，局部化持久模是适合用于进一步开展 ∞-临界多参数持久性算法研究的一类实例。另一方面，由于该模的一维子模已在应用背景下得到研究，我们希望该模本身也能用于实际应用。

我们的工作还有许多自然的后续问题：最直接的问题是，将我们的相对方法推广到更高维度时，唯一的障碍是细分方案目前仅针对 $\mathbb{R}^2$ 得到了证明。另一项未来工作是在平面上实现绝对情形之外的方法。鉴于所有底层几何基本操作均由 Cgal 库提供，这些实现完全可以实现。

我们尚未讨论的一个方面是稳定性。一个自然的假设是，如果 P 和P' 以及中心 q 和 q' 在 L_∞距离下彼此相距不超过 ε，那么 (P, q) 和 (P', q') 对应的局部化双过滤是 ε-交错的 [16, 34]。如果我们重新定义 $B_\alpha(x)$ 这一概念，将其定义为以 x 为中心、半径为 α 的球（而非本文中的 $\sqrt{\alpha}$），那么这一结论成立（且证明直接）。虽然我们对球采用的非标准定义使我们无法得出这一结论，但我们指出，这种定义简化了入口曲线的描述。采用标准定义时，第 2 节中的式 (1) 的参数化会涉及平方根，因此无法得到抛物线弧。本文选择优先采用更简洁的入口曲线。

我们希望，初步的尝试能够促成一种多参数持久性的算法处理，使其能够以与单参数情形相当的效率处理 ∞-临界过滤。一个自然的后续问题是，能否高效计算 ∞-临界过滤的极小表示，从而推广 [29, 36]最近提出的方法。

以某个中心为参照对并球过滤进行局部化，可以获得关于该中心附近点集的更精细信息。我们提出一个问题：在拓扑数据分析的众多应用领域中，能否以及如何利用这些信息？我们推测，即使数据集不存在规范中心位置，选取中心样本并分析其局部化双过滤的整体，也能比并球过滤提供更具判别力的拓扑代理。

参考文献

1 Mahmuda Ahmed、Brittany Terese Fasy 和 Carola Wenk。基于局部持久同调的映射间距离。载于第*22*届 *ACM SIGSPATIAL* 地理信息系统进展国际会议（*ACM SIGSPATIAL GIS 2014*）论文集，第 43–52 页。 doi:10.1145/2666310.2666390。2 Ángel Javier Alonso、Michael Kerber 和 Siddharth Pritam。双滤过图中的滤过支配。载于*2023*年算法工程与实验研讨会论文集（*ALENEX*），第 27–38 页。 doi:10.1137/1.9781611977561.ch3。3 Franz Aurenhammer、Rolf Klein 和 Der-Tsai Lee。*Voronoi* 图与 *Delaunay* 三角剖分。世界科学出版社，2013年。 doi:10.1142/8685。

4 Ulrich Bauer、Michael Kerber、Fabian Roll 和 Alexander Rolle。《函子性神经定理及其变体的统一视角》，2022年。 doi:10.48550/ARXIV.2203.03571。5 Paul Bendich。《使用交与局部同调的持久版本分析分层空间》。博士论文，杜克大学，2008年。网址：https://hdl.handle.net/10161/680。6 Paul Bendich、David Cohen-Steiner、Herbert Edelsbrunner、John Harer 和 Dmitriy Morozov。《从采样的分层空间推断局部同调》。载于第48届 IEEE 计算机科学基础年会（FOCS 2007），第 536–546 页。 doi:10.1109/FOCS.2007.45。7 Paul Bendich、Ellen Gasparovic、John Harer、Rauf Izmailov 和 Linda Ness。《机器学习应用中的多尺度局部形状分析与特征选择》。载于2015年国际神经网络联合会议（IJCNN），第 1–8 页。 doi:10.1109/IJCNN.2015.7280428。8 Paul Bendich、Bei Wang 和 Sayan Mukherjee。《局部同调迁移与分层学习》。载于2012年 ACM-SIAM 离散算法年会（SODA）论文集，第 1355–1370 页。 doi:10.1137/1.9781611973099.107。9 Eric Berberich、Michael Hemmer 和 Michael Kerber。《适用于非线性几何应用的通用代数核》。载于第二十七届计算几何研讨会（SoCG 2011）论文集，第 179–186 页。 doi:10.1145/1998196.1998224。10 Håvard Bakke Bjerkevik 和 Michael Kerber。《二参数持久性的精确匹配距离的渐近改进》，2021年。 doi:10.48550/ARXIV.2111.10303。11 Andrew J. Blumberg 和 Michael Lesnick。《二参数持久同调的稳定性》。计算数学基础，2022年。 doi:10.1007/s10208-022-09576-6。12 Magnus Bakke Botnan、Steffen Oppermann 和 Steve Oudot。《通过秩分解为多参数持久性构造有符号条形码》。载于第38届计算几何国际研讨会（SoCG 2022），第 19:1–19:18 页。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2022.19。13 Hervé Brönnimann、Andreas Fabri、Geert-Jan Giezeman、Susan Hert、Michael Hoffmann、Lutz Kettner、Sylvain Pion 和 Stefan Schirra。二维与三维线性几何核。载于《CGAL 用户与参考手册》。CGAL 编委会，5.5.1 版，2022年。网址：https://doc.cgal.org/5.5.1/Manual/packages.html#PkgKernel23。14 Owen Byer、Felix Lazebnik 和 Deirdre L. Smeltzer。《欧几里得几何方法》。美国数学协会，2010年。15 Gunnar E. Carlsson 和 Afra Zomorodian。《多维持久性的理论》。离散与计算几何，42:71–93，2009年。 doi:10.1007/s00454-009-9176-0。16 Frédéric Chazal、David Cohen-Steiner、Marc Glisse、Leonidas J. Guibas 和 Steve Oudot。《持久模及其图表的邻近性》。载于第二十五届计算几何研讨会（SoCG 2009）论文集，第 237–246 页。 doi:10.1145/1542362.1542407。17 Frédéric Chazal 和 Steve Oudot。《迈向欧几里得空间中基于持久性的重建》。载于第二十四届计算几何研讨会（SoCG 2008）论文集，第 232–241 页。 doi:10.1145/1377676.1377719。18 David Cohen-Steiner、Herbert Edelsbrunner 和 John Harer。《利用庞加莱对偶与勒夫谢茨对偶扩展持久性》。计算数学基础，9:79–103，2009年。doi:10.1007/s10208-008-9027-z。19 David Cohen-Steiner、Herbert Edelsbrunner 和 Dmitriy Morozov。《通过线性时间更新持久性来构造藤蔓与葡萄园》。载于第二十二届计算几何研讨会（SoCG 2006）论文集，第 119–126 页。 doi:10.1145/1137856.1137877。20 René Corbet、Michael Kerber、Michael Lesnick 和 Georg Osang。《多重覆盖双滤过的计算》。离散与计算几何，2023年。 doi:10.1007/s00454-022-00476-8。21 René Corbet、Ulderico Fugacci、Michael Kerber、Claudia Landi 和 Bei Wang。《多参数持久同调的一个核》。Computers & Graphics: X，2，2019年。 doi:10.1016/j.cagx.2019.100005。22 Mark de Berg、Otfried Cheong、Marc J. van Kreveld 和 Mark H. Overmars。《计算几何：算法与应用》，第3版。施普林格，2008年。

23 Tamal Dey、Fengtao Fan 和 Yusu Wang。基于局部同调的维数检测。载于《第26届加拿大计算几何会议论文集》（CCCG 2014）。网址：http://www.cccg.ca/proceedings/2014/papers/paper40.pdf。24 Tamal K. Dey 和 Cheng Xin。用于分解多参数持久性模的广义持久性算法。《应用与计算拓扑学杂志》，6：271–322，2022年。doi:10.1007/s41468-022-00087-5。25 Albrecht Dold。《代数拓扑学讲义》。施普林格柏林海德堡，1995年。26 Herbert Edelsbrunner 和 John Harer。《计算拓扑学：导论》。美国数学学会，2010年。27 Herbert Edelsbrunner 和 Georg Osang。欧几里得球的多重覆盖持久性。《离散与计算几何》，65：1296–1313，2021年。 doi:10.1007/s00454-021-00281-9。28 Brittany Terese Fasy 和 Bei Wang。探索拓扑数据分析中的持久局部同调。载于《2016年 IEEE 声学、语音与信号处理国际会议》（ICASSP），第6430–6434页。 doi:10.1109/ICASSP.2016.7472915。29 Ulderico Fugacci、Michael Kerber 和 Alexander Rolle。二参数持久同调的压缩。《计算几何》，109，2023年。 doi:10.1016/j.comgeo.2022.101940。30 Allen Hatcher。《代数拓扑学》。剑桥大学出版社，2005年。31 Clément Jamin、Sylvain Pion 和 Monique Teillaud。三维三角剖分。载于《CGAL 用户与参考手册》。CGAL 编委会，第5.5.1版，2022年。网址： https://doc.cgal.org/5.5.1/Manual/packages.html#PkgTriangulation3。32 Michael Kerber、Michael Lesnick 和 Steve Oudot。二参数持久性模上匹配距离的精确计算。载于《第35届计算几何国际研讨会》（SoCG 2019），第46:1–46:15页。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2019.46。33 Michael Kerber 和 Arnur Nigmetov。二参数持久性的匹配距离的高效近似。载于《第36届计算几何国际研讨会》（SoCG 2020），第53:1–53:16页。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2020.53。34 Michael Lesnick。多维持久性模上的交错距离理论。《计算数学基础》，15：613–650，2015年。 doi:10.1007/s10208-015-9255-y。35 Michael Lesnick 和 Matthew Wright。二维持久性模的交互式可视化，2015年。 doi:10.48550/ARXIV.1512.00180。36 Michael Lesnick 和 Matthew Wright。二参数持久同调的极小表示与双分次贝蒂数的计算。《SIAM应用代数与几何杂志》，6：267–298，2022年。 doi:10.1137/20M1388425。37 Ezra Miller。实多参数持久性模的数据结构，2017年。 doi:10.48550/ARXIV.1709.08155。38 Ezra Miller。偏序集上的模的同调代数，2020年。 doi:10.48550/ARXIV.2008.00063。39 Alexander Rolle。带离群点的环带的度量Rips复形。载于《第38届计算几何国际研讨会》（SoCG 2022），第58:1–58:14页。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2022.58。40 Alexander Rolle 和 Luis Scoccola。稳定且一致的基于密度的聚类，2020年。doi:10.48550/ARXIV.2005.09048。41 Primoz Skraba 和 Bei Wang。基于样本近似局部同调。载于《2014年 ACM-SIAM 离散算法年会论文集》（SODA），第174–192页。doi:10.1137/1.9781611973402.13。42 Bernadette J. Stolz。用于持久同调的抗离群点子采样技术，2021年。doi:10.48550/ARXIV.2103.14743。43 Julius von Rohrscheidt 和 Bastian Rieck。TOAST：奇点追踪拓扑算法，2022年。 doi:10.48550/ARXIV.2210.00069。

44 Bei Wang、Brian Summa、Valerio Pascucci 和 Mikael Vejdemo-Johansson。高维数据中的分支与环状特征。*IEEE* 可视化与计算机图形学汇刊，17：1902–11，2011年。doi:10.1109/TVCG.2011.177。45 Matthew Wheeler、Jose Bouza 和 Peter Bubenik。作为神经网络性能拓扑摘要的激活景观。载于*2021*年 *IEEE* 大数据国际会议（*Big Data*），第3865–3870页。doi:10.1109/BigData52589.2021.9671368。46 Mariette Yvinec。二维三角剖分。载于*CGAL* 用户与参考手册。CGAL 编委会，第5.5.1版，2022年。网址：https://doc.cgal.org/5.5.1/Manual/packages.html#PkgTriangulation2。

缺失的证明

引理 2 的证明。首先注意，根据定义，$s = s_1$ 的陈述成立。根据定义，$\gamma_s \in B_s(p)$，因此 $\|p - \gamma_s\|^2 \leq s$。反设对于某个 $s \in [s_0, s_1)$，有 $\|p - \gamma_s\|^2 < s$。这意味着 γ_s 位于 $B_s(p)$ 的内部，因此存在一个足够小的$\varepsilon > 0$，使得 $B_\varepsilon(\gamma_s) \subset B_s(p)$，进而也有 $B_\varepsilon(\gamma_s) \cap V \subset B_s(p) \cap V$。然而，由于凸性，限制在 V 上的到 q的距离函数，除 $\hat{}q$之外没有局部极小值，并且对于 $s < s_1$，$\gamma_s \neq \hat{}q$。因此，存在一个点属于 $B_\varepsilon(\gamma_s) \cap V$，且它比 γ_s更接近 q，这与 γ_s 的定义矛盾。

引理 3 的证明。对于连续性，考虑一个收敛到 s 的序列 $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$。序列 (γ_{s_n}) 有界，因为每个 γ_s 都属于 $B_{s_1}(p)$。因此，只需证明序列 (γ_{s_n}) 的任意聚点都等于 γ_s。

因此，考虑一个聚点 $x \in \mathbb{R}^d$，并假设 $x \neq \gamma_s$ 成立以导出矛盾。令 (t_n) 表示 (s_n) 的一个子序列，使得 (γ_{t_n}) 收敛到 x。由于所有 γ_{t_n} 都属于 V，且 V 是闭集，因此 $x \in V$。此外，根据前一个引理，并且由于到 p 的平方距离函数是连续的，我们有 $\|p-\gamma_{t_n}\|^2 = t_n$。因此，$\|p - x\|^2 = s$。于是，$x \in V \cap B_s(p)$。由于 $\gamma_s \in V \cap B_s(p)$ 也成立，根据凸性，线段 $x\gamma_s$ 也位于该集合中。注意，将到 p 的平方距离函数限制在线段上时，它没有局部极大值，因此，在 $x\gamma_s$ 的内部，到 p 的平方距离在整个范围内都严格小于 s。

由于 q 在 $V \cap B_s(p)$ 中的最近点唯一，且假设 $x \neq \gamma_s$，我们有 $\mathrm{k}q - x\mathrm{k}^2 > \mathrm{k}q - \gamma_s\mathrm{k}^2$。距离函数的连续性意味着，存在以 x 为中心的邻域 U_x 和以 γ_s 为中心的邻域 U_{γ_s}，使得从 q 到U_x 中任意一点的距离都严格大于从 q 到 U_{γ_s}中任意一点的距离。取一点 $y \in U_{\gamma_s} \cap x\gamma_s$。如前所述，它到 p 的平方距离为 $s' < s$。另一方面，由于 γ_{t_n} 收敛到 x，且 t_n 收敛到 s，我们可以找到某个 $m \in \mathbb{N}$，使得 $s' < t_m$，并且 γ_{t_m} 位于 U_x 中。根据定义，γ_{t_m} 是 q 在 $V \cap B_{t_m}(p)$ 中的最近点。但 y 也位于 $V \cap B_{s'}(p) \subseteq V \cap B_{t_m}(p)$ 中，而且它到 q 的距离更小，这就产生了矛盾。这证明了连续性。单射性直接由前一个引理得出。

引理 4 的证明。根据勾股定理，到 q距离最小的点，到 q' 的距离也最小，这意味着 (V, p, q) 和 (V, p, q') 的最小化路径相同。此外，由于 $\delta := \sqrt{\|p - p'\|}$，我们有 $V \cap B_s(p) = V \cap B_{s-\delta}(p')$。因此，$(V, p, q')$ 和 (V, p', q') 的最小化路径仅相差参数平移 δ。

定理 10 的证明。我们采用 [4] 中的记号。根据其定义 1.2，在覆盖空间范畴中，存在一个态射 $(A, U_A) \to (X, U_X)$。由此得到以下空间的交换图

20 局部化球并双过滤

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{\rho_S^{(A)}} & \mathrm{Blowup}(U_A) & \xrightarrow{\rho_N^{(A)}} & \mathrm{Nrv}(U_A) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \xleftarrow{\rho_S^{(X)}} & \mathrm{Blowup}(U_X) & \xrightarrow{\rho_N^{(X)}} & \mathrm{Nrv}(U_X) \end{array}$$

其中，Blowup(X) 是该覆盖的膨胀复形，可以将其视为空间 X 与神经 Nrv(U_X) 的乘积空间，而 ρ_S, ρ_N 是典范投影映射。由于竖直箭头是包含映射，因此 $\rho_S^{(A)}$ 是 $\rho_S^{(X)}$ 在 A 上的限制， ρ_N 映射也同样如此。由于覆盖 U_A 和 U_X 都是良覆盖，映射 ρ_N 是同伦等价（ [4] 中定理 5.9 的第 2a 部分）。此外，我们的覆盖“足够好”，满足推论 5.16（见 [4], ）的所有前提，因此也能保证映射 ρ_S 是同伦等价。最后，取 $\rho_S^{(X)}$ 的同伦逆 $\tau_S^{(X)}$，可以立即看出，它在 A 上的限制是 $\rho_S^{(A)}$ 的同伦逆。 $\rho_N^{(X)}$ 的同伦逆也同样如此，由此证明了定理的第一部分。函子性直接由同一个图和相同的论证得出，分别使用覆盖空间之间的态射 $(X, U_X) \to (X', U_{X'})$ 和 $(A, U_A) \to (A', U_{A'})$。

定理 11 的证明。 所需的主要技术结果是：对于 $S_2(P, q)$ 中的任意多边形，与 L_s 相交时不会出现额外的局部极值。

▶ **引理 16**。 对于每个多边形 $V \in S_2(P, q)$，若 $V \cap L_s \neq \emptyset$，则限制在 $V \cap L_s$ 边界上的到 q 的距离函数只有一个局部极小值。因此，它也只有一个局部极大值，并且集合

$$\partial(V \cap L_s) \setminus B_r^o(q)$$

对每个 $r \geq 0$ 都是空集或连通的。

由此可轻易证明， $S_2(P, q)$ 诱导的覆盖对于这对对象 $(L_s, L_s \setminus B_r^o(q))$ 是良好的：首先，显然它对于 L_s 是良好的，因为所有诱导覆盖元素都是凸的。对于 $L_s \setminus B_r^o(q)$，两个覆盖元素的交集是 $S_2(P, q)$ 中两个多边形交集的子集。根据我们的构造，这样的边在其内部没有距离函数的局部极小值，因此，移除 $B_r^o(q)$ 后，交集仍是连通的线段，这意味着两个覆盖元素的交集是可缩的。高阶交集只会出现在点上，这同样没有问题。

剩下需要证明的是每个覆盖元素都是可缩的。因此，固定 $V \in S_2(P, q)$，并考虑在固定 (s, r) 时的诱导覆盖元素 $V \cap L_s \setminus B_r^o(q)$。这个集合中的每个点，都可以通过沿着与 q 相反的方向移动，直到碰到边界，从而与 $\partial(V \cap L_s)$ 中不属于 $B_r^o(q)$ 的某个点道路连通。引理 16 证明了所有这些边界点彼此连通，因此该覆盖元素是连通的。

剩下需要证明每个覆盖元素都是单连通的。事实上， $V \cap L_s$ 是单连通的，唯一可能破坏这一点的情况是 $B_r^o(q)$ 完全落在 V 内。不过，构造 $S_2(P, q)$ 时的初始切割确保 q 不在任何多边形的内部。至此，定理 11 的证明完成；剩下的只有证明引理 16。

引理 16 的证明。 我们首先注意到 $V \cap L_s = V \cap B_s(p)$ 对于一个（唯一的）站点 p，因为 V 是某个站点 p的沃罗诺伊区域的子集。因此， $\partial(V \cap B_s(p))$ 由线段组成

这些线段属于 ∂V，而圆弧属于 $B_s(p)$。显然，值 γ_s 定义为距 q 距离最小的（唯一）点，它位于边界上（否则，q 会位于 V 内部，而这被 $S_2(P,q)$ 的构造排除），并且是一个局部极小值。我们证明不存在其他局部极小值。

假设 x 是 $\partial(V \cap B_s(p))$ 上的一个局部极小值。令 $r := \|q-x\|^2$。根据 x 的位置，分为三种情况，而它们都能得出结论：$x = \gamma_s$：

- x 位于 ∂V 的一条线段 e 的内部。这意味着 x 是 q 在包含 e 的 Voronoi 边 e' 上的投影；根据定义，这条边存在问题。按照构造，对于与 V 相邻且离 q 更近的多边形，会在 x 处进行切割。根据假设，x 位于 ∂V 的一条线段的内部，因此 V 必须是离 q 更远的多边形。但这意味着 x 是 $B_r(q)$ 与 V 的唯一交点，因此 $x = \gamma_s$。

- x 位于 $\partial(V \cap B_s(p))$ 的一个顶点处。分为两种子情况：如果 x 是两条线段相交处的点（夹角小于 π），那么只有当 x 是 V 与 $B_r(q)$ 交集中的唯一点时，$B_r(q)$ 才能在 x 处与 V 接触。这再次意味着 $x = \gamma_s$。如果 x 是 $B_s(p)$ 的一条线段与一段圆弧相交处的点，那么该线段与圆在 x 处的切线之间的夹角必然小于 π，因此同样的论证也适用。

- 最后一种情况是，x 位于 $B_s(p)$的一段圆弧内部。注意，直线 pq与 $B_s(p)$相交于两点，而局部极小值唯一可能的位置是距离 q较近的那个交点。现在，如果 q 位于 $B_s(p)$内部，这意味着 q 比 x更靠近 p；又由于 x 位于 p的沃罗诺伊区域内，q也位于其中。因此，V 源自包含 q的沃罗诺伊区域，而 $S_2(P,\ q)$的初始切割是用直线 pq切割该区域的。这与假设 x 位于一段圆弧内部相矛盾。因此，q 位于 $B_s(p)$上或其外部，从而 x 位于线段 pq 上。因此，x位于$(V,\ p,\ q)$的桥上，而桥引理推出 $x = \gamma_s$。 —

这证明了引理的第一部分。由于 $\partial(V \cap B_s(p))$与一个圆同胚，两个局部最大值将意味着存在两个局部极小值，这与第一部分矛盾。最后，由于 $\partial(V \cap L_s) \setminus B_r^o(q)$只是距离函数的一个上水平集，若有两个连通分支，就意味着存在两个局部最大值，每个连通分支中各有一个。

◀

引理 12 的证明。 $V \in S_2(P,q)$ 的以下两个性质直接由引理 16 得出。

▶ **引理 17。** $V \cap B_s(p)$ 上距离 q 最远的点是唯一的。

证明。 首先注意，每个最远点都必然位于边界上，并且也是边界上的一个最远点。如果存在两个不同的最远点，那么它们也都是到 q 的距离函数在边界上的局部极大值，这与引理 16 矛盾。◀

▶**引理 18。** 到 q 的距离除在 q^* 处外没有局部极大值。

证明。 假设还存在另一个局部极大值。同样，该极大值和 q^*也都是边界上的局部极大值。当 s 足够大时，这意味着这两个点也是 $V \cap B_s(p)$的局部极大值，这再次与引理 16 矛盾。◀

重新检查引理 2 的证明，第二个引理使我们能够运用类似的论证来证明，对于所有满足$\|p-\Gamma_s\|^2 = s$ 的 s，都有$\|p-\hat{}p\|^2 \le s \le \|p-q^*\|^2$。第一个引理保证，引理 3 的证明对于最大化路径 Γ同样成立。

B 计算细节

构造桥。给定一个点集 $P \subset \mathbb{R}^d$、一个德劳内单形 $\sigma = \{p_0, \ldots, p_k\}$以及一个 $q \in \mathbb{R}^d$，其中 d 为常数。我们用 V 表示$p_0, \ldots, p_k$的沃罗诺伊区域的交集。令 $p := p_0$，并希望构造(V, p, q)的桥。

首先，我们计算 p 和 q 在支撑 V 的子空间 S 上的投影 p' 和 q'。这可以通过迭代投影到平分超平面（p, p_1.....，（p, p_k）来完成，耗时 $O(k) = O(d) = O(1)$。V 是 S 中半空间的交集，可以通过 σ 的余面轻松获得：若 $\{p_0, \ldots\ldots, p_k, p_{k+1}\}$ 是一个余面，则对应的半空间由 p 与 p_{k+1} 的平分超平面界定，且包含 p_0。

设 $f = f_\sigma$ 为 σ 的余面数量。为了计算桥，我们通过 $tp' + (1-t)q'$ 对经过 p' 和 q' 的直线进行参数化，并计算该直线与 V 的每个边界半空间的交集（这需要计算该直线与 S 中边界超平面的交集）。由此得到一个参数范围（∞, t_0] 或 $[t_0, \infty)$，所有这些范围的交集构成区间 $[t_1, t_2]$，再将其与 $[0,1]$ 求交即可得到桥。此过程耗时 $O(f)$。

因此，设 N 为德洛内三角剖分中的单形数量，计算所有桥的总成本为

$$\sum_{\sigma \in \mathrm{Del}(P)} O(f_\sigma) = O\Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Del}(P)} \#\{\text{co-facets of } \sigma\}\Big) = O\Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Del}(P)} \#\{\text{facets of } \sigma\}\Big)$$
$$= O\Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{Del}(P)} (d+1)\Big) = O(N).$$

图构造的细节。再设 V 为一个沃罗诺伊多胞体。我们构造一个图 G，其顶点是 V 的各个面的桥的端点，边则由这些桥诱导而成。注意，除了端点之外，桥都穿过面的内部。由于各面的内部互不相交，因此两条桥不会相交。不过，一条桥 b_1 的端点可能位于另一条桥 b_2 的内部，因此一条桥可能会为 G 贡献多条边。在这种情况下，我们称 b_1 将 b_2 分裂。每次分裂都会使边的数量增加一。我们证明，一条桥至多只能被分裂 2^{d+1} 次；由于 d 是常数，这也是一个常数。事实上，多胞体 W' 的桥只有在 W' 是 W 的余面时，才可能分裂 W 的桥。不过，W 的余面数量至多为 2^{d+1}，因为 W 是由 $k \le d+1$ 个站点定义的沃罗诺伊多胞体$\{p_1, \ldots\ldots, p_k\}$，而每个余面都由这些站点的一个子集定义。

计算 G 的算法因而十分直接：设 σ 为与 V对应的德劳内单形。对于德劳内复形中 σ 的每个余面 τ，我们遍历 τ 中作为 σ 余面的所有面，将其桥分割，并检查是否有一个桥端点位于 τ的桥上。如果是，则相应地分割该桥。完成对 τ的桥的分割后，我们将所得的细分桥段加入 G。根据上述分析，设 V的面数为 m，构造 G 的复杂度为 $O(m)$。

关于如何计算最小化路径的细节。给定上述用于 V的图 G，我们计算 (V, p, q) 的最小化路径。首先，我们将 G 视为有向的，使得沿每条边到 q 的距离都在减小。根据定义和结构定理（定理 8），最小化路径必须是沿 G的一条有向路径。

我们首先计算路径的起点 $\hat{p}$。该点是 G 的一个顶点：根据结构定理，它包含在某个桥中；但它不可能位于该桥的内部，否则，沿着桥朝 p 移动，就会得到一个到 p 距离更小的 V 中的点

，这与 $\hat{}p$ 的最小性矛盾。因此，我们只需计算 G 每个顶点到 p 的距离并取最小值，就能在 $O(m)$ 时间内找到 m 为 V 的面数的 $\hat{}p$ 。同样的论证表明，$\hat{}q$ 也可以在 $O(m)$ 时间内计算得到。

要构造最小化路径，我们只需沿着 G 的边从 $\hat{}p$ 出发，直到遇到 $\hat{}q$。对于路径上的每个顶点 x ，我们都需要确定哪条出边构成最小化路径。对于每条出边，到 q 的平方距离都会减小，而最小化路径会沿着平方距离下降最快的边前进。这可以通过导数轻松确定：对于每条出边 e，令 ℓ 为支撑该边的直线。沿着 ℓ 到 q 的平方距离函数是二次函数，因此其导数是直线。我们计算所有出边在 x 处的导数，并沿着导数最小的边前进。如果两个或更多导数相等，我们就选择二阶导数（它是一个常数）最小的边。注意，不可能有两条边的一阶导数和二阶导数都相等，因为这意味着到 q 的平方距离保持不变，这与最小化路径的唯一性相矛盾。

寻找下一条边的复杂度与出边的数量成正比。由于每条边在行走过程中至多被考虑一次，计算最小化路径的复杂度为 $O(m)$。

综合以上结果，计算桥需要 $O(N)$ 时间（其中 N 为德劳内单形的数量），而计算 σ 的最小化路径需要 $O(m_\sigma)$ 时间，其中 m_σ 为 σ的余面的数量。因此，总复杂度为

$$
\begin{aligned}
&O(N) + \sum_{\sigma \in \mathrm{Del}(P)} O(m_\sigma) = O(N + \sum_{\sigma \in \mathrm{Del}(P)} \#\{\text{co-faces of } \sigma\}) \\
&= O(N + \sum_{\sigma \in \mathrm{Del}(P)} \#\{\text{faces of } \sigma\}) = O(N + N \cdot 2^{d+1}) = O(N).
\end{aligned}
$$

Γ_s **对于无界多边形**。 如果 V 无界，那么 q^*（即 V中距 q 最远的点）不存在。相反，容易看出，对于 $s \to \infty$，$\|q - \Gamma_s\| \to \infty$ 。因此，与绝对情形以及有界多边形的情形不同，进入曲线最终不会变为常数，而是在朝向 ∞ 的 s方向上包含一段非恒定弧。

尽管如此，曲线 Γ 在这种情形下仍然是连续单射曲线，而且结构定理（定理 13）在这种情形下也成立，证明完全相同，只是折线链包含一条射线。这条射线要么是反桥（如果它有一段无限延伸的部分位于 V中），要么是 V的一条无界边界边的一部分。随后，按照第 2 节中的公式 (1) 对该射线进行参数化，其中 a 是射线的起点， b 是射线上任意其他点，而 t 在 $[0, \infty$中取值。这仍然得到一条射线或一段（无界）抛物弧。

C 参数化曲线

本节的目标是证明：

▶ **定理 19.** 设 p、 q、 a、 b 是 $\mathbb{R}^d$ 中的点。那么参数化曲线

$$s = \|p - ((1-t)a + tb)\|^2 \tag{2}$$
$$r = \|q - ((1-t)a + tb)\|^2 \tag{3}$$

其中 $t \in [0,1]$ 是抛物线或直线的一段弧。

证明。 将参数化改写为向量形式，可得

$$\begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} = ut^2 + vt + w$$

与 u， v， $w \in \mathbb{R}^2$。如果 u 和 v 线性相关，我们可以得到一条直线的方程，这一点很容易验证。否则，存在一个仿射变换，将 (u, v) 映射到 (e_1, e_2)，经过适当平移后，参数化为

$$\begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} = e_1 t^2 + e_2 t = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

这是一个抛物线。注意到仿射变换会将抛物线映射为抛物线 [14,定理 12.12]，即可完成证明。◀

D 同调

相对同调。 给定一个拓扑空间 X 及其子空间 $A \subseteq X$，商链群 ∂_n 上诱导的边界映射 $C_n(X)/C_n(A) \to C_{n-1}(X)/C_{n-1}(A)$ 构成一个链复形，其相对同调群为 相对同调群 $H_n(X, A) := \ker(\partial_n)/\mathrm{im}(\partial_{n+1})$。因此，在考虑相对同调时，我们在某种意义上会“忽略”子空间 A 。

相对同调与绝对同调之间存在一种联系，能极大地增进我们的直觉：如果 A 是 X 的非空闭子空间，且它是 X 中某个邻域的变形收缩，那么空间对 (X, A) 称为一个良对。对于良对~，有 $H_n(X, A) \cong H_n(X/A)$。（详情参见 [30] 。）

局部同调。 给定一点 $q \in X$， X 在 q 处的 n 维局部同调群 定义为相对同调群 $H_n(X, X \setminus q)$。这些群研究 X 在 q 附近的局部拓扑结构。假设在 X 中单点是闭集，则由切除定理可得，对于 q [30] 的任意开邻域 U，$H_n(X, X \setminus q) \cong H_n(U, U \setminus q)$。此外，注意到若 X 是一个 m 维流形，则对于 $n \neq m$ [25]，局部同调群是平凡的。参见 [23] ，了解一种检测由点云采样得到的流形维数的算法。

持久局部同调模。 为考虑噪声的影响， [6]引入了局部同调的持久版本。Skraba 和 Wang [41]对这一概念进行了改编，研究了两种持久模。在给出定义之前，先回顾一些记号：与之前一样， $P \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有限点集， $L_s = \bigcup_{p \in P} B_s(p)$，而 q是中心。对于 $s < s'$、$r > r'$ 以及所有由包含关系诱导的映射， r型的持久局部同调模由下图给出

$$\cdots \to H_n(L_s, L_s \setminus B_r^o(q)) \to H_n(L_s, L_s \setminus B_{r'}^o(q)) \to \cdots, \tag{4}$$

s型的其中一种由下式给出

$$\cdots \to H_n(L_s \cap B_r(q), L_s \cap \partial B_r(q)) \to H_n(L_{s'} \cap B_r(q), L_{s'} \cap \partial B_r(q)). \tag{5}$$

这里研究了两种情形：对于 r型模，固定偏移集 L_s 并改变局部范围；而对于 s型模，则在固定的半径球内对形状进行加厚。

与经典局部同调群的联系由以下直接极限给出 [5].$H_n(L_s, L_s \setminus q) = \lim_{r \to 0} H_n(L_s, L_s \setminus B_r^o(q)) = \lim_{r \to 0} H_n(L_s \cap B_r(q) L_s \cap \partial B_r(q))$。