arXiv:2303.07022v1 [math.CV] 13 Mar 2023

调和映射的稳定类

GANG LIU、SAMINATHAN PONNUSAMY 和 VICTOR V. STARKOV

Abstract. 令 $\mathcal{H}_0$ 表示单位圆盘 $\mathbb{D}$中所有保向调和映射 $f=h+\overline{g}$的集合，它们满足归一化条件 $h(0)=g(0)=g'(0)=0$ 且 $h'(0)=1$。本文通过具体例子研究 $\mathcal{H}_0$的若干子类的性质，包括包含关系和稳定性分析，以及系数界、增长、覆盖和畸变定理。作为应用，我们利用从属关系为这些子类建立了一些 Bohr 不等式。在这些子类中，有六类由满足以下条件的函数组成：对每个 $|\epsilon|=1$（或某个 $|\epsilon|=1$，或某个 $|\epsilon|\leq 1$），函数 $f=h+\overline{g}\in\mathcal{H}_0$ 在 $\mathbb{D}$ 中是单叶（或凸）的。简单分析表明，如果函数$f=h+\overline{g}$属于这六类中的某一给定类，那么对所有 $|\epsilon|=1$，函数 $h+\overline{\epsilon g}$都属于相应的类。我们称这些类为稳定类。

1. Introduction

设 $\mathbb{D}$ 为开单位圆盘， $\mathbb{T}$为单位圆。定义在 $\mathbb{D}$ 上的复值函数$f=u+iv$ 若其 u 和 v 都是 $\mathbb{D}$上的实值调和函数，则称其为调和函数。此类函数可表示为 $f=h+\overline{g}$，其中 h 和 g 在 $\mathbb{D}$上解析。它通常称为调和映射，而函数 h （分别为 g）称为 f的解析部分（分别为共解析部分）。Lewy 定理 [13] 指出，$f=h+\overline{g}$ 在 $\mathbb{D}$ 中局部单叶且保向，当且仅当 $h'(z)\neq 0$，并且其膨胀 $\omega_f=g'/h'$在 $\mathbb{D}$中满足条件 $|\omega_f|<1$。

设 $\mathcal{S}_H$ 为所有在 $\mathbb{D}$ 中满足归一化条件 $h(0)=g(0)=h'(0)-1=0$的单叶、保向调和映射 $f=h+\overline{g}$所构成的族。类 $\mathcal{S}_H$ 并非紧，而$\mathcal{S}_H^0:=\{f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_H:\ g'(0)=0\}$ 是紧的（见 [9, 第 78]页）。注意，经典单叶类 $\mathcal{S}$等价于集合 $\{f=h+\overline{g}\in\mathcal{S}_H:\ g(z)\equiv 0\}$。对于每个函数$f\in\mathcal{S}$，德布朗日定理 [8] 指出，对所有 $n\geq 2$，都有 $|f^{(n)}(0)/n!|\leq n$，且等号在科比函数 $k(z)=z/(1-z)^2$ 及其旋转处取到。这就解决了 Bieberbach猜想。对于类 $\mathcal{S}_H^0$，Clunie 和 Sheil-Small 提出了以下 Bieberbach猜想的调和类比。

猜想 A. ([7]) 对于 $f=h+\bar{g}\in\mathcal{S}_H^0$，其级数表示为

$$h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\quad and\quad g(z)=\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n,\ z\in\mathbb{D},\tag{1}$$

我们有

$$|a_n|\leq A_n,\ |b_n|\leq B_n\quad and\quad \big||a_n|-|b_n|\big|\leq A_n-B_n=n$$

File: arXiv-LiuSamyStarkov9_2022__final.tex, printed: 14-3-2023, 1.012010年数学主题分类。主要分类：30A10、30B10、30H05、31A05、30C62、30C80；次要分类：30C35、30C45。关键词和短语：调和映射、单叶、凸、从属关系、线性和仿射不变族、Bohr不等式。

对所有 $n \geq 2$，其中

$$A_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \quad and \quad B_n = \frac{(n-1)(2n-1)}{6}. \tag{2}$$

这些界在调和 Koebe 函数 $K(z)$ 上取到，该函数定义为

$$K(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} + \overline{\left(\frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3}\right)}. \tag{3}$$

尽管这一猜想对于一系列子类已得到解决，例如所有星形函数、近凸函数、凸函数、典型实函数或单方向凸函数组成的类（分别参见 [7, 19, 21]），但它仍是一个未解决问题。Ponnusamy 和 Sairam Kaliraj [16] 证明，猜想 A 中关于 a_n 和 b_n 的系数界结果对该类成立

$$\{f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^0 : \ h + e^{i\theta} g \in \mathcal{S} \text{ for some } \theta \in \mathbb{R}\}.$$

一个自然的问题是，这两个族$\mathcal{S}_H^0$ 和 $\mathcal{S}$中的函数之间是否存在联系？鉴于此，他们提出了一个猜想：对于每个函数 $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^0$，至少存在一个 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得 $h + e^{i\theta} g \in \mathcal{S}$。因此，这一猜想意味着猜想 A 中 $|a_n|$ 和 $|b_n|$ 的估计。出乎意料的是，该猜想在 [3] 中被证伪。因此，可以考虑一个较弱的猜想：对于每个函数$f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^0$，至少存在一个 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}}$ 使得 $h + \epsilon g \in \mathcal{S}$。这意味着猜想 A 中关于 $|a_2|$ 的尖锐估计（参见 [14]）。对于 $\mathcal{S}_H^0$ 和 $\mathcal{S}$中的凸调和映射族 $\mathcal{C}_H^0$ 和 $\mathcal{C}$， [16]中也提出了类似的猜想。遗憾的是，这一猜想也不成立（参见 [12]）。然而，当$f = h + \overline{g} \in \mathcal{C}_H^0$时，我们不知道是否存在至少一个 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}}$ 使得 $h + \epsilon g \in \mathcal{C}$。

我们并不打算解决上述猜想。不过，沿着上述较弱猜想的思路，我们将研究调和映射类 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 及相关类的一些性质，其中

$$\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{D}}) = \left\{ f = h + \overline{g} \in \mathcal{H}_0 : \ h + \epsilon g \in \mathcal{S} \ \text{ for some } \epsilon \in \overline{\mathbb{D}} \right\}.$$

这里， $\mathcal{H}_0$ 是定义在 $\mathbb{D}$ 中、满足 $h(0) = g(0) = g'(0) = 0$ 且 $h'(0) = 1$ 的保向调和映射 $f = h + \overline{g}$ 族。

本文结构安排如下。在研究 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 的一些性质之前，我们将在第 2 节介绍它的五个真子类。类 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 及其五个真子类将称为调和映射的稳定类，并分为数量相同的两组。由于这两组具有相似的结构，下面我们只介绍与 $\mathcal{S}$ 相关的一组结果。通过分析严格包含关系，我们发现第一组中的三个类所对应的函数具有不同的稳定性。在第 3 节中，我们将证明猜想 A 中前两个系数界对 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 中的函数成立。这意味着，如果 $\mathcal{S}_H^0 \subseteq \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 成立，那么我们就能部分解决猜想 A。不过，目前看来，要证明或否证它都十分困难。基于这样一个事实：如果 $\mathcal{F}$ 选自 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 的六个稳定子类中的任意一个，那么类 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 就是一个仿射与线性不变族，其中

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) := \left\{ F = f + \overline{b_1 f} : \ b_1 \in \mathbb{D} \ \text{ and } \ f \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}_0 \right\}.$$

在第 4 节中，我们将为 $\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}}))$ 的某些子类中的函数推导出一些增长、覆盖和畸变定理。作为应用，在第 5 节中，我们将为从属于 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 中函数的函数类及其子类建立若干 Bohr不等式。值得一提的是，对于 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 的两个不同稳定子类中的函数，尽管它们的稳定性不同，却具有一些共同性质；本文将在最后三节对其进行研究。

2. Stability analysis of $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ and its subclasses

本节的目的有三方面。首先，介绍调和映射稳定类的概念，因为类 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 及其五个真子类具有共同的代数刻画。其次，通过精确的例子，展示两组各含有 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 的三个稳定子类的不同稳定性；这些例子由它们之间的严格包含关系得出。最后，列出两个非稳定类 $\mathcal{S}_H^0$ 和 $\mathcal{C}_H^0$ 与 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 的六个稳定子类之间的若干包含关系。下面，对于给定的 $f=h+\overline{g}\in\mathcal{H}:=\mathcal{A}(\mathcal{H}_0)$，我们将频繁使用以下两个记号，

$$f_\epsilon=h+\overline{\epsilon g}\quad\text{and}\quad f^\epsilon=h+\epsilon g\ (\epsilon\in\overline{\mathbb{D}}).$$

$\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 的五个子类定义如下:

$$\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})=\left\{f\in\mathcal{H}_0:\ f^\epsilon\in\mathcal{C}\text{ for some }\epsilon\in\overline{\mathbb{D}}\right\},$$

$$\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})\ (\text{resp. }\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T}))=\{f\in\mathcal{H}_0:\ f^\epsilon\in\mathcal{S}\ (\text{resp. }\mathcal{C})\text{ for some }\epsilon\in\mathbb{T}\}$$

and

$$\mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T})\ (\text{resp. }\mathcal{H}_0(\mathcal{C},\mathbb{T}))=\{f\in\mathcal{H}_0:\ f^\epsilon\in\mathcal{S}\ (\text{resp. }\mathcal{C})\text{ for every }\epsilon\in\mathbb{T}\}.$$

显然，考虑函数 $z+\overline{z^2/2}$ 可得 $\mathcal{S}\subset\mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T})$ 和 $\mathcal{C}\subset\mathcal{H}_0(\mathcal{C},\mathbb{T})$。由 $\mathcal{C}\subset\mathcal{S}$ 可知，$\mathcal{H}_0(\mathcal{C},\mathbb{T})\subset\mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T})$、$\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T})\subset\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})$，以及 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})\subset\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$。注意，根据定义，$\mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T})\subseteq\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})\subseteq\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$，且 $\mathcal{H}_0(\mathcal{C},\mathbb{T})\subseteq\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T})\subseteq\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})$。

2.1. 调和映射的稳定类。若对于每个 $\epsilon\in\mathbb{T}$，只要 $f\in\mathcal{F}$，就有 $f_\epsilon\in\mathcal{F}$，则称族 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{H}$ 为调和映射的稳定类（下文为简便起见，也可称 $\mathcal{F}$ 是稳定的）。换言之，对于满足 $\epsilon_1\neq\epsilon_2$的任意一对 ϵ_1、$\epsilon_2\in\mathbb{T}$，$f_{\epsilon_1}\in\mathcal{F}$ 等价于 $f_{\epsilon_2}\in\mathcal{F}$。

“稳定”这一术语借用了 Chuaqui 与 Hern´andez [6], 以及 Hern´andez 与 Mart´ín [11]所研究的稳定映射概念。若保向调和映射 $f=h+\overline{g}$属于 $\mathbb{D}$，且对于每个 $\epsilon\in\mathbb{T}$，f_ϵ 在 $\mathbb{D}$ 中是单叶的（分别为凸的），则称其为稳定调和单叶（SHU；分别称为稳定调和凸，SHC）。已有证明表明，对于所有 $\epsilon\in\mathbb{T}$，调和映射 f_ϵ 是单叶的（分别为凸的），当且仅当解析函数 f^ϵ 对于所有此类 ϵ 都是单叶的（分别为凸的）（见 [11]）。这意味着，若 f 是 SHU（分别为 SHC），则对于每个 $\epsilon\in\mathbb{T}$，函数 f_ϵ 都是 SHU（分别为 SHC）。因此，集合 $\mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T})$（分别为 $\mathcal{H}_0(\mathcal{C},\mathbb{T})$）由类 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$中所有 SHU（分别为 SHC）函数组成。

下面介绍调和映射稳定类的一些简单性质。假设类 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 是稳定的。显然，$\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$、$\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2(\neq\emptyset)$ 和$\mathcal{F}_1\setminus\mathcal{F}_2(\neq\emptyset)$ 都是稳定的。此外，如果我们找到一个函数 $f\in\mathcal{F}_1\setminus\mathcal{F}_2$，那么我们知道

对于每个 $\epsilon \in \mathbb{T}$，都有 $f_\epsilon \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2$。这意味着，如果 $f = h + \overline{g} \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2$ 和 $g(z) \not\equiv 0$属于 $\mathbb{D}$，那么 $\mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2$ 中就有无穷多个函数。

若族 $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{H}_0$ 稳定，则族 $\mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$ 也稳定。为此，若 $F \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$，则存在常数 $b_1 \in \mathbb{D}$ 和函数 $f = h + \overline{g} \in \mathcal{F}_0$，使得 $F = f + \overline{b_1 f} = h + \overline{b_1} g + \overline{b_1 h + g}$。由于 $f \in \mathcal{F}_0$ 对每个 $\epsilon \in \mathbb{T}$ 都蕴含 $f_\epsilon \in \mathcal{F}_0$，经过简单计算可得

$$F_\epsilon = h + \overline{b_1} g + \overline{\epsilon(b_1 h + g)} = h + \overline{\epsilon g} + \overline{(b_1 \epsilon)(h + \overline{\epsilon g})} = f_\epsilon + \overline{(b_1 \epsilon) f_\epsilon} \in \mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$$

对每个 $\epsilon \in \mathbb{T}$ 都成立。容易看出，若 $\mathcal{F}_0$ 取以下七个族中的任意一个，则类 $\mathcal{F}_0$ 稳定：$\mathcal{H}_0$、$\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{D}})$、$\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \overline{\mathbb{D}})$、$\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \mathbb{T})$、$\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \mathbb{T})$、$\mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T})$ 和 $\mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T})$。其对应的 $\mathcal{A}(\mathcal{F}_0)$ 也同样如此。

2.2. $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{D}})$及其子类的稳定性分析。调和映射稳定类的稳定性分析，类似于在函数 f 被限制为属于 SHU 或 SHC 时，探究 f_ϵ 与 f^ϵ 之间的关系，正如 [11]中所研究的那样。我们先描述两个类 $\mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T})$和 $\mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T})$的稳定性。由 [11,定理7.1] 可知，如果 $f \in \mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T})$，即 f是从 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \mathbb{D})$到自身的稳定单叶映射，那么对每个 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}}$，都有 $f_\epsilon \in \mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T})$和 $f^\epsilon \in \mathcal{S}$。类似地，由 [11, 推论3.2]可知，如果 $f \in \mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T})$，即 f是从 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{D}})$到自身的稳定凸映射，那么对每个$\epsilon \in \overline{\mathbb{D}}$，都有 $f_\epsilon \in \mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T})$和 $f^\epsilon \in \mathcal{C}$。因此，类 $\mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T})$（分别为 $\mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T})$）可改写为

$$\mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T}) \text{ (resp. } \mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T})) = \left\{ f \in \mathcal{H}_0 : f^\epsilon \in \mathcal{S} \text{ (resp. } \mathcal{C}) \text{ for every } \epsilon \in \overline{\mathbb{D}} \right\}. \tag{4}$$

与两个类 $\mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T})$ 和 $\mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T})$ 的稳定性相比，前面提到的 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{D}})$ 的其余四个稳定子类稳定性较弱。事实上，基于具体例子所体现的两组严格包含关系，我们将通过两个表格展示它们在稳定性方面的差异。

我们断言 $\mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T}) \subset \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \mathbb{T}) \subset \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{D}})$。回顾一下，调和 Koebe 函数 $K = h + \overline{g}$定义于式 (3)，其中

$$h(z) = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n \quad \text{and} \quad g(z) = \frac{\frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} B_n z^n.$$

这里，A_n 和 B_n 由式 (2) 定义。直接计算可得 $K^\epsilon = h + \epsilon g$的如下幂级数表示:

$$K^\epsilon(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \varphi_n(\epsilon) z^n,$$

其中 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}}$ 和

$$\varphi_n(\epsilon) = \frac{1}{6}\left[(2n^2+1)(1+\epsilon) + 3n(1-\epsilon)\right] \text{ for all } n \geq 2.$$

那么，$K^\epsilon \in \mathcal{S}$ 仅当 $\epsilon = -1$ 时成立；在这种情况下，K^ϵ 退化为解析的科比函数$k(z) = z/(1-z)^2$,；否则，当 n 足够大时，它就会与德布朗热系数不等式矛盾。这意味着 $K \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \mathbb{T})$，但 $K \notin \mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T})$。

回顾一下， $\mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T}) \subseteq \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T}) \subseteq \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$。接下来，只需在$\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})\setminus\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})$中找到一个函数。令 $M = h + \overline{g}$，其中 $h(z) = k(z) = z/(1-z)^2$ 并且

$$g(z) = \frac{-z(24-35z+8z^2+z^3)}{6(1-z)^2} - 4\log(1-z) = -\frac{1}{6}z^2 + \cdots + \frac{5}{21}z^7 + \cdots .$$

显然， $g(0) = g'(0) = 0$。此外，简单计算可得

$$g'(z) = \frac{z(-1+z+z^2)(1+z)}{3(1-z)^3}$$

因此， $M \in \mathcal{H}_0$。我们将证明，只有当 $\epsilon = 0$ 时， $M^\epsilon \in \mathcal{S}$ $(\epsilon \in \overline{\mathbb{D}})$ 才成立。为此，我们首先设

$$M^\epsilon(z) = h(z) + \epsilon g(z) = z + \cdots + a_7(\epsilon)z^7 + \cdots$$

并考虑以下两个集合

$$R(\mathbb{D}) = \overline{\mathbb{D}} \cap \{z = x+iy : x \geq 0\} \text{ and } L(\mathbb{D}) = \overline{\mathbb{D}} \cap \{z = x+iy : x \leq 0\}.$$

若 $\epsilon \in R(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$，则有 $|a_7(\epsilon)| = |7 + (5/21)\epsilon| > 7$，这由德布朗日定理推出 $M^\epsilon \notin \mathcal{S}$ when$\epsilon \in R(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$。若 $\epsilon \in L(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$，则对于 $0 < r < (\sqrt{5}-1)/2$，可得

$$|(M^\epsilon)'(r)| = \left|1 - \frac{1}{3}r(1-r-r^2)\epsilon\right| \frac{1+r}{(1-r)^3} > \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

因为只要 $0 < r < (\sqrt{5}-1)/2$，就有 $1-r-r^2 > 0$。这表明，根据类 $\mathcal{S}$ 中函数的经典畸变定理（见 [15,定理 1.6]），只要$\epsilon \in L(\mathbb{D}) \setminus \{0\}$，就有 $M^\epsilon \notin \mathcal{S}$。因此，对所有 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$，由于$R(\mathbb{D}) \cup L(\mathbb{D}) = \overline{\mathbb{D}}$，可得 $M^\epsilon = h + \epsilon g \notin \mathcal{S}$。注意， $M^0(z) = k(z) \in \mathcal{S}$。由此可知， $M \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$，但$M \notin \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})$。因此，所需的严格包含关系 $\mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T}) \subset \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T}) \subset \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 得证。进一步分析得出表 1 中的以下结论，展示了它们不同的稳定性。注意参数 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}}$。

1	$\forall f \in \mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T})$	$\exists K \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T}) \setminus \mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T})$	$\exists M \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}}) \setminus \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})$
2	$f_\epsilon \in \mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T})$ 当且仅当 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}}$	$K_\epsilon \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})$ 当且仅当 $\epsilon \in \mathbb{T}$	$M_\epsilon \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 当且仅当 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}}$
3	$f^\epsilon \in \mathcal{S}$ 当且仅当 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}}$	$K^\epsilon \in \mathcal{S}$ 当且仅当 $\epsilon = -1\ (\in \mathbb{T})$	$M^\epsilon \in \mathcal{S}$ 当且仅当 $\epsilon = 0\ (\in \mathbb{D})$

TABLE 1. $\mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T})$、 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})$ 和 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 的稳定性分析

我们还指出， $\mathcal{H}_0(\mathcal{C},\mathbb{T}) \subset \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T}) \subset \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})$。考虑在 [7], 中研究的调和半平面映射 $L = h + \overline{g}$，其中

$$h(z) = \frac{z - z^2/2}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{2}z^n \quad \text{and} \quad g(z) = \frac{-z^2/2}{(1-z)^2} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2}z^n.$$

现在，经过直接计算可得

$$L^\epsilon(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \phi_n(\epsilon)z^n,$$

其中 $L^\epsilon = h + \epsilon g$ 且

$$\phi_n(\epsilon) = \frac{1}{2}\left[n(1-\epsilon) + (1+\epsilon)\right] \quad \text{for all } n \geq 2.$$

我们观察到 $|\phi_n(\epsilon)| > 1$ 当 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ 且 n 足够大时。因此，我们知道$L^\epsilon = h + \epsilon g \in \mathcal{C}$ 仅当 $\epsilon = 1$ 时成立，此时它退化为解析半平面函数$l(z) = z/(1-z)$。这表明 $L \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \mathbb{T})$，但 $L \notin \mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T})$。

所需结论可由以下观察轻易得出：$\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \overline{\mathbb{D}}) \setminus \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \neq \emptyset$，因为$\mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \subseteq \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \subseteq \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \overline{\mathbb{D}})$。令 $V_\alpha = h + \overline{g_\alpha}$，其中 $h(z) = l(z) = z/(1-z)$，并且

$$g_\alpha(z) = \frac{\alpha z^n}{1-z}, \quad 0 < |\alpha| \leq \frac{1}{2n-1} \quad \text{and} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}.$$

函数族 $V_\alpha \in \mathcal{H}_0$ 于 [16, 第 3 节1]中引入。下面我们将使用如下结果：若 $f \in \mathcal{C}$，则对所有 $z \in \mathbb{D}$，均有 $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}$（见 [20, 推论 2]）。固定 n 和 α。对于任意给定的 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \{0\}$，令 $z_0 = re^{i\varphi}(0 < r < 1)$ 和 $\varphi = (\pi - \arg \alpha - \arg \epsilon)/(n-1)$。我们可以推导出

$$\operatorname{Re} \frac{(V_\alpha)^\epsilon(z_0)}{z_0} = \frac{(1 - |\alpha\epsilon| r^{n-1})(1 - r\cos\varphi)}{1 + r^2 - 2r\cos\varphi} \to \frac{1 - |\alpha\epsilon|}{2} \quad (r \to 1^-).$$

由于 $\frac{1-|\alpha\epsilon|}{2} < \frac{1}{2}$，由连续性可得 $(V_\alpha)^\epsilon \notin \mathcal{C}$。注意 $(V_\alpha)^0(z) = l(z) \in \mathcal{C}$。因此，$V_\alpha \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \overline{\mathbb{D}}) \setminus \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \mathbb{T})$。由此，我们可以得到严格包含关系 $\mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \subset \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \subset \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \overline{\mathbb{D}})$。此外，我们还可以得到表 2 中的结论：这三个类中的每个类都有不同的稳定性。注意参数 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}}$。

1	$\forall f \in \mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T})$	$\exists L \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \setminus \mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T})$	$\exists V_\alpha \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \overline{\mathbb{D}}) \setminus \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \mathbb{T})$
2	$f_\epsilon \in \mathcal{H}_0$当且仅当 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}}$	$L_\epsilon \in \mathcal{H}_0^*$当且仅当 $\epsilon \in \mathbb{T}$	$(V_\alpha)_\epsilon \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \mathbb{D})$当且仅当 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}}$
3	$f^\epsilon \in \mathcal{C}$ 当且仅当 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}}$	$L^\epsilon \in \mathcal{C}$ 当且仅当 $\epsilon = -1 (\in \mathbb{T})$	$(V_\alpha)^\epsilon \in \mathcal{C}$ 当且仅当 $\epsilon = 0 (\in \mathbb{D})$

TABLE 2. $\mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T})$、$\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \mathbb{T})$ 和 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \overline{\mathbb{D}})$ 的稳定性分析

2.3. 与两个非稳定类的关系。我们断言，$\mathcal{S}_H^0$ 和 $\mathcal{C}_H^0$ 都不是稳定的。回忆一下，$K \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \mathbb{T}) \setminus \mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T})$。这意味着至少存在一个$\epsilon_0 \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$，使得 K_{ϵ_0}在 $\mathbb{D}$中不是单叶的。由 $K \in \mathcal{S}_H^0$（见 [7]）可知，$\mathcal{S}_H^0$不是稳定的。对于类 $\mathcal{C}_H^0$的非稳定性，类似于上述分析，根据 $L \in \mathcal{C}_H^0$（见 [7]）以及 $L \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \setminus \mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T})$这一事实可得。

接下来，我们考察 $\mathcal{S}_H^0$、$\mathcal{C}_H^0$与 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{D}})$ 的六个稳定子类之间的一些关系。由 [7, 定理 5.7] 和 [7, 定理 5.17] 可知，$\mathcal{C}_H^0 \subseteq \mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T})$ 和 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \overline{\mathbb{D}})$ 分别 $\subseteq \mathcal{S}_H^0$。注意，$k \in \mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T}) \setminus \mathcal{C}_H^0$ 且 $K \in \mathcal{S}_H^0 \setminus \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \overline{\mathbb{D}})$。因此，我们有

$$\mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T}) \subset \mathcal{C}_H^0 \subset \mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T}) \subset \mathcal{S}_H^0 \quad \text{and} \quad \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \overline{\mathbb{D}}) \subset \mathcal{S}_H^0.$$

然而，我们有 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \mathbb{T}) \not\subset \mathcal{S}_H^0$, $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{D}}) \not\subset \mathcal{S}_H^0$和 $\mathcal{S}_H^0 \not\subset \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \mathbb{T})$。根据上述分析，我们知道对于某个 $\epsilon_0 \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$，$K_{\epsilon_0} \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \mathbb{T}) \setminus \mathcal{S}_H^0$，这又意味着 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \mathbb{T}) \not\subset \mathcal{S}_H^0$，因此 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \overline{\mathbb{D}}) \not\subset \mathcal{S}_H^0$。对于 $\mathcal{S}_H^0 \not\subset \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \mathbb{T})$，只需找到一个函数 f使得 $f \in \mathcal{S}_H^0 \setminus \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S}, \mathbb{T})$。换言之，函数 $f = h + \overline{g} \in \mathcal{S}_H^0$ 是

满足条件 $h+\epsilon g \notin \mathcal{S}$，对所有 $\epsilon \in \mathbb{T}$均如此。构造这样的函数并不容易。有关一个包含技术细节的精确示例，请参阅近期的文章 [3]。

类似地，我们可以得到 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T}) \not\subset \mathcal{C}_H^0$, $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}}) \not\subset \mathcal{C}_H^0$ 和 $\mathcal{C}_H^0 \not\subset \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T})$。所需结论由以下事实推出：对某个 $\epsilon_0 \in \mathbb{T}\setminus\{1\}$， $L_{\epsilon_0} \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T}) \setminus \mathcal{C}_H^0$；此外，还可利用 [12]中构造的例子。

自然会问：以下七个族之间的精确包含关系是什么？ $\mathcal{S}_H^0$, $\mathcal{C}_H^0$, $\mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T})$, $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})$, $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$, $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T})$ 和 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})$。特别地，我们想知道以下包含关系是否成立：$\mathcal{S}_H^0 \subset \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 和 $\mathcal{C}_H^0 \subset \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})$。如果$\mathcal{S}_H^0 \subset \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$，那么我们就能部分解决猜想 A（见定理 1）。据我们所知，目前尚无法给出答案。

3. Coefficient bounds for functions in the subclasses of $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$

本节将求出 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 的六个稳定子类中函数的系数界。以下结果的证明与 [16, 定理 1] 类似。为求完整起见，我们给出一个略作修改的证明。

定理 1. 假设函数 $f=h+\bar{g}$ 属于 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 或 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})$，其中 h 和 g 由 (1) 给出。那么，对所有 $n\geq 2$，都有 $|a_n|\leq A_n$ 和 $|b_n|\leq B_n$，其中 A_n 和 B_n 由 (2) 定义。调和 Koebe 函数 K 使这些界取到等号。

Proof. 假设 $f=h+\bar{g}\in\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$。那么，对于某个 $\epsilon\in\overline{\mathbb{D}}$，有 $f^\epsilon(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\epsilon_n z^n\in\mathcal{S}$，其中 $f^\epsilon=h+\epsilon g$。根据德布朗日定理，对所有 $n\geq 2$，都有 $|\epsilon_n|\leq n$。由于 f 在 $\mathbb{D}$ 中保向，因此存在一个解析函数 $\omega(z)$，它属于 $\mathbb{D}$，且满足 $\omega(0)=0$，并且对所有 $z\in\mathbb{D}$，都有 $|\omega(z)|=|g'(z)/h'(z)|<1$，由此可轻易得到

$$\varphi'(z)=h'(z)(1+\epsilon\omega(z)) \quad \text{and} \quad g'(z)=\frac{\varphi'(z)\omega(z)}{1+\epsilon\omega(z)},$$

其中为方便起见，我们记作 $\varphi=f^\epsilon$。注意到，函数 $\varphi'(z)$（分别为 $\omega(z)(1+\epsilon\omega(z))$）的泰勒系数的模不超过函数 $\frac{1+z}{(1-z)^3}$（分别为 $\frac{z}{1-z}$）的对应系数。因此， $g'(z)$ 的泰勒系数 nb_n 不超过

$$\frac{1+z}{(1-z)^3}\cdot\frac{z}{1-z}=\frac{1}{6}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)n(2n-1)z^{n-1},$$

这意味着对于 $n\geq 2$，有 $|b_n|\leq B_n=(n-1)(2n-1)/6$。根据 $\varphi(z)$ 的定义，我们有 $h(z)=\varphi(z)-\epsilon g(z)$。因此，

$$|a_n|=|\epsilon_n-\epsilon b_n|\leq|\epsilon_n|+|b_n|\leq\frac{(n+1)(2n+1)}{6}=A_n \quad \text{for } n\geq 2.$$

注意， $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})\subset\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$ 且 $K\in\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})$。证明完毕。 □

容易得到以下结果。

推论 1. 设函数 $f(z)=h(z)+g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_n z^n}$属于 $\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}}))$ 或 $\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T}))$。则

$$|a_n|<\frac{1}{3}\left(2n^2+1\right) \quad \textit{and} \quad |b_n|<\frac{1}{3}\left(2n^2+1\right) \quad \textit{for all } n\geq 2.$$

接下来，我们讨论类 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})$ 和 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T})$ 中函数的系数界。

定理 2. 假设函数 $f=h+\bar{g}$ 属于 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})$ 或 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T})$，其中$h$ 和 g 由 (1) 给出。那么

$$|a_n|\le\frac{n+1}{2}\quad and\quad |b_n|\le\frac{n-1}{2}\quad for\ all\ n\ge 2.$$

调和半平面函数 L 可取到这些界。

Proof. 证明与定理 1 的证明类似。这里只给出证明概要。假设 $f=h+\bar{g}\in\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})$，则有 $f^\epsilon(z)=z+\sum_{n=2}^\infty\epsilon_n z^n\in\mathcal{C}$，其中某个$\epsilon\in\overline{\mathbb{D}}$.。一个基本事实是，对于所有 $n\ge 2$，都有 $|\epsilon_n|\le 1$ 。将定理 1 的证明中函数$\frac{1+z}{(1-z)^3}$ 在两处替换为 $\frac{1}{(1-z)^2}$，即可得到所需结果。此外，我们有$\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T})\subset\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})$ 和 $L\in\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T})$。□

推论 2. 假设函数 $f(z)=h(z)+g(z)=z+\sum_{n=2}^\infty a_n z^n+\overline{\sum_{n=1}^\infty b_n z^n}$属于 $\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}}))$ 或 $\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T}))$。则对于所有 $n\ge 2$，有 $|a_n|<n$ 和 $|b_n|<n$。

关于类 $\mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T})$ 和 $\mathcal{H}_0(\mathcal{C},\mathbb{T})$ 中函数的系数估计，请分别参见 [11],中的定理 8.1 和命题 8.2。

4. Growth, covering and distortion for subclasses of $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$

本节将沿用 [16, 定理 2、3 和 4]中的类似证明，为 $\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}}))$ 的一些子类中的函数建立增长、覆盖和畸变定理。这些结果基于以下关于仿射与线性不变族（ALIF）的引理。若 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{H}$ 既是仿射不变族（AIF），又是线性不变族（LIF），则称 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{H}$ 为 ALIF。此处，若一个族$\mathcal{F}\subseteq\mathcal{H}$ 满足对每个 $f\in\mathcal{F}$,

$$A_c(f(z))=\frac{f(z)+c\overline{f(z)}}{1+cg'(0)}\in\mathcal{F}\quad\forall\ c\in\mathbb{D},$$

且称 $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{H}$ 为线性不变族（LIF），若对每个 $f\in\mathcal{F}$,

$$K_\varphi(f(z))=\frac{f(\varphi(z))-f(\varphi(0))}{\varphi'(0)h'(\varphi(0))}\in\mathcal{F}\quad\forall\ \varphi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{D}),$$

其中 Aut($\mathbb{D}$) 表示单位圆盘 $\mathbb{D}$的共形自同构。

引理 1. 族 $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ 是一个 ALIF，其中 $\mathcal{F}$ 从以下六类中任取一类：$\mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T})$、 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})$、 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$、 $\mathcal{H}_0(\mathcal{C},\mathbb{T})$、 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T})$ 和 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})$。

Proof. 我们只证明 $\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}}))$ 是一个 ALIF，因为其余各族的证明类似。设给定 $f=h+\overline{g}\in\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}}))$。则存在一个常数$b_1\in\mathbb{D}$和一个函数 $f_0=h_0+\overline{g_0}\in\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$，使得 $f=f_0+\overline{b_1 f_0}$，其中 $h_0+\epsilon g_0\in\mathcal{S}$对某个 $\epsilon\in\overline{\mathbb{D}}$成立。

类 $\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}}))$ 是一个 ALF，因为

$$A_c(f(z))=f_0(z)+\frac{c+\overline{b_1}}{1+b_1c}\overline{f_0(z)}\in\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}}))\quad\forall\ c\in\mathbb{D}.$$

为了完成证明，我们只需证明类 $\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}}))$ 是一个线性不变族。考虑映射 $K_\varphi(f(z)) := H(z)+G(z)$，其中 $\varphi\in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$。直接计算可得 $\overline{K_\varphi(f(z))} = F_0(z) + B_1F_0(z)$，其中 F_0 和 B_1 由下式定义

$$F_0(z) = H_0(z)+\overline{G_0(z)} = \frac{H(z)-\overline{B_1}G(z)}{1-|B_1|^2}+\overline{\left(\frac{G(z)-B_1H(z)}{1-|B_1|^2}\right)} \quad \text{and} \quad B_1 = \frac{\varphi'(0)g'(\varphi(0))}{\overline{\varphi'(0)h'(\varphi(0))}},$$

分别。显然， $F_0\in\mathcal{H}_0$ 和 $B_1\in\mathbb{D}$。

接下来我们将证明 $F_0\in\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$。令

$$\rho = \frac{\overline{\varphi'(0)}}{\varphi'(0)}\frac{\epsilon\overline{h_0'(\varphi(0))}+\overline{g_0'(\varphi(0))}}{h_0'(\varphi(0))+\epsilon g_0'(\varphi(0))} = \frac{\overline{\varphi'(0)}}{\varphi'(0)}\frac{\overline{h_0'(\varphi'(0))}}{h_0'(\varphi'(0))}\frac{\epsilon+\overline{\omega_{f_0}(\varphi(0))}}{1+\epsilon\omega_{f_0}(\varphi(0))},$$

其中 $\omega_{f_0}(\varphi(0)) = g_0'(\varphi(0))/h_0'(\varphi(0))$。显然， $\rho\in\overline{\mathbb{D}}$。直接计算可得 $H_0(z)+\rho G_0(z) = K_\varphi((h_0+\epsilon g_0)(z))$。由于 $h_0+\epsilon g_0\in\mathcal{S}$ 且族 $\mathcal{S}$ 是一个线性不变族，我们知道 $H_0+\rho G_0\in\mathcal{S}$，这意味着 $F_0\in\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$。注意，当且仅当 $\rho\in\mathbb{T}$时， $\epsilon\in\mathbb{T}$ 成立。证明完毕。□

一个基本事实是，族 $\mathcal{S}_H = \mathcal{A}(\mathcal{S}_H^0)$是一个ALIF。受以下关于 $\mathcal{S}_H^0$的增长与覆盖定理启发，我们可以为 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$的子类得到相应的定理。此外，我们需要一个关于ALIF的畸变定理，以便为受限类中的函数建立畸变定理。现在我们列出这两个结果。为方便起见，令 $\alpha(\mathcal{F}) = \sup_{f\in\mathcal{F}\subseteq\mathcal{H}}|a_2(f)|$。

Lem定理 A.（[9, 定理，第 97] 页）每个函数 $f\in\mathcal{S}_H^0$ 都满足以下不等式

$$\frac{1}{2\alpha}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^\alpha\right]\le|f(z)|\le\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\alpha-1\right], \quad r=|z|<1.$$

特别地，每个函数 $f\in\mathcal{S}_H^0$ 的值域都包含圆盘 $|w|<\frac{1}{2\alpha}$。这里，$\alpha=\alpha(\mathcal{S}_H)$。

引理 B.（[10, 定理 1]）设 $\mathcal{F}$ 是一个 ALIF。设 $\mathcal{F}_0=\{f=h+\overline{g}\in\mathcal{F}: \ g'(0)=0\}$且 $\alpha=\alpha(\mathcal{F}_0)$。假设 $f\in\mathcal{F}$ 满足 $b_1=f_{\bar{z}}(0)$。那么，对于任意 $z\in\mathbb{D}$，映射 f 的雅可比行列式 J_f 满足以下界

$$\left(1-|b_1|^2\right)\frac{(1-|z|)^{2\alpha-2}}{(1+|z|)^{2\alpha+2}}\le J_f(z)\le\left(1-|b_1|^2\right)\frac{(1+|z|)^{2\alpha-2}}{(1-|z|)^{2\alpha+2}}.$$

此外，对于任意满足 $0<|z|=r<1$的 z，以下不等式

$$|h'(z)|\le(1+r|b_1|)\frac{(1+r)^{\alpha-3/2}}{(1-r)^{\alpha+3/2}} \quad and \quad |g'(z)|\le(r+|b_1|)\frac{(1+r)^{\alpha-3/2}}{(1-r)^{\alpha+3/2}}$$

成立。这些界对于单叶近凸调和函数类是精确的。当近凸函数 $f(z)=K+\overline{b_1K}$取等号，其中 K 是调和 Koebe 函数。

在 [9] 中指出，对于任意满足 $\alpha=\alpha(\mathcal{M})$ 的 ALIF $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{S}_H$，引理 A 仍然成立。因此，若将引理 A 中的类 $\mathcal{S}_H$ 和 $\mathcal{S}_H^0$ 分别替换为 $\mathcal{S}_H\cap\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}}))$

（分别为 $\mathcal{S}_H \cap \mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T}))$）以及 $\mathcal{S}_H^0 \cap \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$（分别为 $\mathcal{S}_H^0 \cap \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})$），则通过类似的证明可以得到定理 3 的相应结果。证明基于引理 1 以及这样一个事实：当 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 都是 ALIF 时，$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ ($\neq \emptyset$) 是 ALIF。此外，我们利用推论 1 得到 $\alpha(\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}}))) = \alpha(\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T}))) = 3$，以及 $K \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T}) \cap \mathcal{S}_H^0$。同理，应用推论 2、引理 1 和引理 A，可以得到定理 4。我们指出，$\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}}) \subset \mathcal{S}_H^0$，因此，$\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})) \subset \mathcal{A}(\mathcal{S}_H^0) = \mathcal{S}_H$。

定理 3（增长与覆盖定理 I）每个函数 $f \in \mathcal{S}_H^0 \cap \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$（分别为 $f \in \mathcal{S}_H^0 \cap \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})$）均满足以下不等式

$$\frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^3\right] \leq |f(z)| \leq \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^3 - 1\right], \quad r=|z|<1.$$

特别地，每个函数 $f \in \mathcal{S}_H^0 \cap \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$（分别为 $f \in \mathcal{S}_H^0 \cap \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})$）的值域都包含圆盘 $|w|<\frac{1}{6}.$。上述不等式是尖锐的，且等号在调和 Koebe 函数 K 处成立。

定理 4（增长与覆盖定理 II）每个函数 $f \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})$（分别为 $f \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T})$）均满足以下不等式

$$\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2\right] \leq |f(z)| \leq \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 - 1\right], \quad r=|z|<1.$$

特别地，每个函数 $f \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})$（分别为 $f \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T})$）的值域都包含圆盘 $|w|<\frac{1}{4}.$。上述不等式是尖锐的，且等号在调和半平面函数 L 处成立。

关于 $\mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T})$ 和 $\mathcal{H}_0(\mathcal{C},\mathbb{T})$ 中函数的增长与覆盖定理，请参阅 [11,命题 8.3]。

接下来，应用定理 1 和定理 2 以及引理1和B，可以轻易得到以下两个结果。注意，

$$\alpha(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})) = \alpha(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})) = 5/2$$

and

$$\alpha(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})) = \alpha(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T})) = 3/2.$$

定理 5（畸变定理 I）设 $f = h + \overline{g}$ 属于 $\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}}))$ 或$\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T}))$，且满足 $b_1 = f_{\bar{z}}(0)$。则映射 f 的雅可比行列式 J_f 对任意 $z \in \mathbb{D}$均满足以下界

$$\left(1-|b_1|^2\right)\frac{(1-|z|)^3}{(1+|z|)^7} \leq J_f(z) \leq \left(1-|b_1|^2\right)\frac{(1+|z|)^3}{(1-|z|)^7}.$$

此外，对于任意满足 $0<|z|=r<1$ 的 z，不等式

$$|h'(z)| \leq (1+r|b_1|)\frac{(1+r)}{(1-r)^4} \quad and \quad |g'(z)| \leq (r+|b_1|)\frac{(1+r)}{(1-r)^4}$$

成立。这些界是精确的。当 K 为调和 Koebe 函数时，近凸函数$f = K + \overline{b_1 K}$取到等号。

定理6。（畸变定理II）设 $f = h + \overline{g}$ 属于 $\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \overline{\mathbb{D}}))$ 或$\mathcal{A}(\mathcal{H}_0^*(\mathcal{C}, \mathbb{T}))$，且 $b_1 = f_{\bar{z}}(0)$。则映射 f 的雅可比行列式 J_f 满足以下界，其中 f 具有任意 $z \in \mathbb{D}$

$$\left(1 - |b_1|^2\right) \frac{1 - |z|}{(1 + |z|)^5} \leq J_f(z) \leq \left(1 - |b_1|^2\right) \frac{1 + |z|}{(1 - |z|)^5}.$$

此外，对于任意满足 $0 < |z| = r < 1$ 的 z，不等式

$$|h'(z)| \leq \frac{1 + r|b_1|}{(1 - r)^3} \quad and \quad |g'(z)| \leq \frac{r + |b_1|}{(1 - r)^3}$$

成立。这些界是锐利的。等号在凸函数 $f = L + \overline{b_1 L}$ 处取到，其中 L 是调和半平面函数。

接下来，我们将为 $\mathcal{A}(\mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T}))$ 和 $\mathcal{A}(\mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T}))$ 中的函数建立畸变定理。比较最后两个定理，可以很容易地看出，证明中存在一些差异。

定理7。（畸变定理III）设 $f = h + \overline{g} \in \mathcal{A}(\mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T}))$ 且 $b_1 = f_{\bar{z}}(0)$。那么，映射 f 的雅可比行列式 J_f 对任意 $z \in \mathbb{D}$ 均满足以下界

$$\left(1 - |b_1|^2\right) \frac{(1 - |z|)^2}{(1 + |z|)^6} \leq J_f(z) \leq \left(1 - |b_1|^2\right) \frac{(1 + |z|)^2}{(1 - |z|)^6}.$$

此外，对于任意满足 $0 < |z| = r < 1$ 的 z，不等式

$$|h'(z)| \leq \frac{1 + r}{(1 - r)^3} \quad and \quad |g'(z)| \leq \min\{1, r + |b_1|\} \frac{1 + r}{(1 - r)^3}$$

成立。前三个不等式是尖锐的，当函数$f = k + \overline{b_1 k}$中 k 为科比函数时，等号成立。

Proof. 由 [11, 定理8.1] 可得 $\alpha(\mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T})) = 2$。利用引理1和B，可得前两个不等式。

接下来考虑最后两个不等式。设$f = h + \overline{g} \in \mathcal{A}(\mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T}))$，且 $b_1 = f_{\bar{z}}(0)$。那么存在函数 $f_0 = h_0 + \overline{g_0} \in \mathcal{H}_0(\mathcal{S}, \mathbb{T})$，使得 $f = f_0 + \overline{b_1 f_0}$。显然，我们有$h = h_0 + \overline{b_1} g_0$，且 $g = b_1 h_0 + g_0$ 属于 $\mathbb{D}$。由（4）可知，对每个 $\epsilon \in \overline{\mathbb{D}}$，都有 $h_0 + \epsilon g_0 \in \mathcal{S}$，因此 $h \in \mathcal{S}$ 且 $h_0 \in \mathcal{S}$。由此，第三个不等式可由 $\mathcal{S}$中函数的经典畸变定理得到。对于最后一个不等式，一方面，由于 f 是保向的，我们有 $|g'| < |h'|$ 属于 $\mathbb{D}$。另一方面，根据施瓦茨–皮克引理，可得

$$|g'(z)| = |b_1 h_0'(z) + g_0'(z)| = |h_0'(z)||b_1 + \omega_{f_0}(z)| \leq (|b_1| + |z|)|h_0'(z)|,$$

因此，所需结果由第三个不等式得出。证明完毕。 □

类似地，我们可以得到与式(4)相关的以下结果， [11, 命题8。2]该结果与引理1和B有关。

定理8.（畸变定理IV）设 $f = h + \overline{g} \in \mathcal{A}(\mathcal{H}_0(\mathcal{C}, \mathbb{T}))$ 且 $b_1 = f_{\bar{z}}(0)$。则映射 f 的雅可比行列式 J_f 在任意 $z \in \mathbb{D}$ 下满足以下界

$$\left(1 - |b_1|^2\right) \frac{1}{(1 + |z|)^2} \leq J_f(z) \leq \left(1 - |b_1|^2\right) \frac{1}{(1 - |z|)^2}.$$

此外，对于任意满足 $0<|z|=r<1$的 z，不等式

$$|h'(z)|\le\frac{1}{(1-r)^2}\quad and\quad |g'(z)|\le\min\{1,r+|b_1|\}\frac{1}{(1-r)^2}$$

成立。前三个不等式是锐的，且当函数$f=l+\overline{b_1}l$满足 $l(z)=z/(1-z)$ 时等号成立。

5. Bohr inequalities for functions in the subclasses of $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}}\quad)$

本节将为从 $\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$子类中的函数从属的函数建立一些 Bohr不等式。所得结果是先前已知结果（[1, 定理 1]）的推广，该结果为从属单叶函数的解析函数类建立了Bohr不等式。此结果导出了经典Bohr不等式，它断言：若 $|z|=r\le 1/3$，且 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，其中 $|f(z)|\le 1$ 属于 $\mathbb{D}$，则 $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n\le 1$ 成立。事实上，Bohr 对 $|z|\le 1/6$ 得到了该结果（见 [5]），后来 Wiener、Riesz 和 Schur 分别将其改进为 $|z|\le 1/3$。常数 $1/3$ 是最优的，称为 Bohr半径。

有必要回顾调和映射的从属关系这一概念。对于定义在 $\mathbb{D}$中的两个调和映射 $f=h+\overline{g}$和 $F=H+\overline{G}$，若存在一个在 $\mathbb{D}$ 中解析的函数 ω，满足 $\omega(0)=0$且 $|\omega(z)|<1$，使得 $f(z)=F(\omega(z))$，即 $h(z)=H(\omega(z))$且 $g(z)=G(\omega(z))$（见 [18]），则称 f 从属于F，记作 $f\prec F$。显然，对于解析函数，$h\prec H$ 和 $g\prec G$ 满足从属关系。特别地，当 H 在 $\mathbb{D}$中单叶时，关系 $h\prec H$ 等价于条件$h(0)=H(0)$且 $h(\mathbb{D})\subset H(\mathbb{D})$。一般而言，这种几何性质无法推广到调和映射之间的从属关系。下文中，我们分别用 $S(F)$和dist($F(0)$ $\partial F(\mathbb{D})$)表示从属于固定函数 F 的所有函数 f 构成的类，以及点 $F(0)$到区域 $F(\mathbb{D})$的边界 $\partial F(\mathbb{D})$的距离。

下面我们将多次用到以下结果。

引理 C.（[2, 推论 2.2] 和 [4, 引理 1]）设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是 $\mathbb{D}$ 中的两个解析函数，其泰勒级数展开分别为 $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 和 $g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k$，其中 $z\in\mathbb{D}$。若 $f(z)\prec g(z)$，则

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|r^k\le\sum_{k=0}^{\infty}|b_k|r^k\quad for\ all\quad r\le\frac{1}{3}.$$

数值 $1/3$ 是最佳的。

$1/3$ 是尖锐的这一事实已在 [17] 中得到证明，且最后一个不等式对一般的拟从属 [2] 成立。

定理9. 设 $f(z)=h(z)+g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n+\overline{\sum_{n=1}^{\infty}b_nz^n}\in S(F)$，且 $F\in\mathcal{S}_H^0\cap\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$或 $F\in\mathcal{S}_H^0\cap\mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\mathbb{T})$。则

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,r^n+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\,r^n\le\operatorname{dist}(F(0),\partial F(\mathbb{D}))$$

对于 $|z|=r\le r_1=0.115013\ldots$，其中 r_1是 $3r^3-3r^2+9r-1=0$在 (0, 1) 中的唯一根。数值 r_1 是最优的。

Proof. 我们只考虑情形 $F \in \mathcal{S}_H^0 \cap \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$，因此可以假设$F = H + \overline{G}$，其中 $H(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} A_n z^n$ 且 $G(z) = \sum_{n=2}^{\infty} B_n z^n$。记号$f \in S(F)$意味着 $h \prec H$ 和 $g \prec G$。由引理 C 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n \le r + \sum_{n=2}^{\infty} |A_n| r^n \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n \le \sum_{n=2}^{\infty} |B_n| r^n$$

对于 $|z| = r \le 1/3$。由于 $F \in \mathcal{S}_H^0 \cap \mathcal{H}_0^*(\mathcal{S},\overline{\mathbb{D}})$，根据定理 3，我们有

$$\operatorname{dist}(F(0), \partial F(\mathbb{D})) \ge 1/6.$$

为了完成证明，只需证明锐不等式

$$r + \sum_{n=2}^{\infty} |A_n| r^n + \sum_{n=2}^{\infty} |B_n| r^n \le \frac{1}{6}$$

对 $|z| = r \le r_1$成立。

由定理 1 可得

$$\begin{aligned} r + \sum_{n=2}^{\infty} |A_n| r^n + \sum_{n=2}^{\infty} |B_n| r^n \le & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6} r^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6} r^n \\ = & \frac{r - \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{6}r^3}{(1-r)^3} + \frac{\frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{6}r^3}{(1-r)^3} \\ = & \frac{r + \frac{1}{3}r^3}{(1-r)^3} \end{aligned}$$

只要 $3r^3 - 3r^2 + 9r - 1 \le 0$，它就小于或等于 $1/6$。由此可得 $|z| = r \le r_1$所需的不等式，而调和 Koebe 函数表明数值 r_1 是最佳可能的。注意， K 将 $\mathbb{D}$ 单叶映到裂平面 $\mathbb{C} \setminus \{w = u + iv$ 上： $u \le -1/6,\ v = 0\}$ （见 [7]）。证明完毕。□

类似地，由引理 C、定理 2 和定理 4 可得以下结果。其尖锐性可由调和半平面映射 L 看出。证明略。

定理 10. 设 $f(z) = h(z) + g(z) = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n} + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} \in S(F)$，且 $F \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\overline{\mathbb{D}})$ 或 $F \in \mathcal{H}_0^*(\mathcal{C},\mathbb{T})$。那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, r^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\, r^n \le \operatorname{dist}(F(0), \partial F(\mathbb{D}))$$

对 $|z| = r \le r_2 = 3 - 2\sqrt{2} \approx 0.171573$，数值 r_2 是最优的。

将引理 C、定理 8.1、 [11] 中的命题 8.2 和命题 8.3 结合起来，容易得到以下结果。

定理 11. 设 $f(z) = h(z) + g(z) = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n} + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} \in S(F)$ 且 $F \in \mathcal{H}_0(\mathcal{S},\mathbb{T})$（分别为 $F \in \mathcal{H}_0(\mathcal{C},\mathbb{T})$）。那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, r^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|\, r^n \le \operatorname{dist}(F(0), \partial F(\mathbb{D}))$$

对于 $|z| = r \leq 3-2\sqrt{2}$（分别为 $|z| = r \leq 1/3$）。数值 $3-2\sqrt{2}$（分别为 $1/3$）是最优的。

利益冲突。作者声明，对于本文的发表不存在任何利益冲突。

致谢。研究部分获得了中国湖南省自然科学基金（编号：2021JJ30057）、湖南省科技计划项目（编号：2016TP1020）以及湖南省应用特色学科“双一流”建设项目（湘教通[2018]469）的资助。作者谨向审稿人致以谢意，感谢他们提出的宝贵意见，帮助改进本文。

References

1. Y. Abu Muhanna, 《从属关系与有界调和类中的 Bohr 现象》, 《复变函数理论与应用》 55(11) (2010), 1071–1078。 2. S. A. Alkhaleefah, I. R. Kayumov 和 S. Ponnusamy, 《关于具有固定零系数的 Bohr 不等式》, 《美国数学会会刊》147(12) (2019), 5263–5274。 3. M. Aydogan, D. Bshouty, A. Lyzzaik 和 F. M. Sakar, 《关于单叶调和映射的剪切》, 《复分析与算子理论》13 (2019), 2853–2862。 4. B. Bhowmik 和 N. Das, 《某些单叶函数的从属族的 Bohr 现象》, 《数学分析及其应用》462(2) (2018), 1087–1098。 5. H. Bohr, 《关于幂级数的一个定理》, 《伦敦数学会会刊》13(2) (1914), 1–5。 6. M. Chuaqui 和 R. Hern´andez, 《单叶调和映射与线性连通域》, 《数学分析及其应用》332(2) (2007), 1189–1194。 7. J. G. Clunie 和 T. Sheil-Small, 《单叶调和函数》, 《芬兰科学院年刊》Ser. A. I. 9 (1984), 3–25。 8. L. de Branges, 《Bieberbach猜想的证明》, 《数学学报》154(1-2) (1985), 137–152。 9. P. Duren, 《平面调和映射》, 剑桥大学出版社, 纽约, 2004。 10. S. Yu. Graf 和 O. R. Eyelangoli, 《调和映射线性不变族与仿射不变族中的微分不等式》, 《俄罗斯数学》.(Iz. VUZ) 54(10) (2016), 60–62。 11. R. Hern´andez 和 M. J. Mart´ın, 《解析映射与调和映射的稳定几何性质》, 《剑桥哲学会数学会刊》155 (2013), 343–359。 12. I. R. Kayumov, S. Ponnusamy 和 L. A. Xuan, 《凸单叶调和映射的旋转》, 《数学科学通报》155 (2019), 1–9。 13. H. Lewy, 《关于某些一一映射中雅可比行列式不消失的问题》, 《美国数学会通报》42 (1936), 689–692。 14. G. Liu 和 S. Ponnusamy, 《调和前施瓦茨导数及其应用》, 《数学科学通报》152(3) (2019), 150–168。 15. C. Pommerenke, 《单叶函数》, Vanden-hoek and Ruprecht, Gottingen, 1975。 16. S. Ponnusamy 和 A. Sairam Kaliraj, 《关于 Clunie 和 Sheil-Small 的单叶调和映射系数猜想》, 《印度科学院院刊》125(3) (2015), 277–290。 17. S. Ponnusamy, R. Vijayakumar 和 K.-J. Wirths, 《准从属类中 Bohr 现象的改进》, 《数学分析及其应用》506(1) (2022), 10页, 文章编号 125645。 18. L. E. Schaubroeck, 《平面调和函数的从属关系》, Complex Variables 41 (2000), 163–178。 19. T. Sheil-Small, 《平面调和映射的常数》, J. London Math. Soc. 42 (1990), 237–248。 20. T. J. Suffridge, 《关于单位圆盘凸映射的一些评述》, 《杜克数学杂志》 37 (1970), 775–777。 21. X. Wang, X. Liang 和 Y. Zhang, 《近凸单叶调和映射的精确系数估计》, 《数学分析及其应用》 263 (2001), 501–509。

G. Liu, College of Mathematics and Statistics (Hunan Provincial Key Laboratory of Intelligent Information Processing and Application), Hengyang Normal University,Hengyang, Hunan 421002, China.
电子邮箱地址：liugangmath@sina.cn

S. Ponnusamy, Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Madras, Chennai-600 036, India;

Lomonosov Moscow State University, Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia.电子邮箱地址：samy@iitm.ac.in

V. V. Starkov, Department of Mathematics, University of Petrozavodsk, ul. Lenina33, 185910 Petrozavodsk, Russia.电子邮箱地址：vstarv@list.ru