arXiv:2303.07028v1 [math.RT] 13 Mar 2023

有限切瓦利群$F_4(q)$的特征标表（ q 为 2 的幂）

MEINOLF GECK

Abstract. 设 q 为一个素数幂， $F_4(q)$为定义在含有 q 个元素的有限域上的切瓦利群。Marcelo–Shinoda（1995）确定了 $F_4(q)$的幺幂特征标在所有幺幂元上的取值，将 Kawanaka 和 Lusztig 先前的工作推广到了小特征情形。假设 q 是 2 的幂，我们将说明如何构造 $F_4(q)$的完整特征标表。

1. Introduction

设 p 为一个素数，$k = \overline{\mathbb{F}}_p$ 为含有 p 个元素的域的代数闭包。设 $\boldsymbol{G}$为定义在 k 上的连通约化代数群，并假设 $\boldsymbol{G}$ 定义在有限子域 $\mathbb{F}_q \subseteq k$上，其中 q 是 p的幂。令 $F\colon \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$ 为相应的 Frobenius 映射。其不动点有限群 $\boldsymbol{G}^F$ 称为“李型有限群”。我们要解决的问题是计算 $\boldsymbol{G}^F$的特征标表。Lusztig 的工作 [11], [14] 为解决这一问题提出了一般性方案。

然而，在具体例子中，仍有一些技术性问题——有时还相当棘手——需要解决。本文展示了如何处理群 $\boldsymbol{G}^F = F_4(q)$ 的情形，其中 q 是 2 的幂。Shinoda [19] 已对共轭类进行了分类；所有幺幂特征标在幺幂元上的取值也已由 Marcelo–Shinoda [17] 确定。另一个关键要素是， $\boldsymbol{G}$ 的 F-不变尖点特征层（定义见 [14] 及其中的参考文献）的特征函数，已明确表示为 $\boldsymbol{G}^F$ 的不可约特征标的线性组合。在 Shoji [20],[21], 早期工作的基础上，这一结果已在 [17], [5] 中实现。

在第 2 节中，我们介绍基本记号，并汇集 Lusztig 理论中的一些一般结果；我们以著作 [2], [6] 作为参考。在第 3 节和第 4 节中，我们聚焦于 $\boldsymbol{G}^F = F_4(q)$。首先考察 $\boldsymbol{G}^F$ 的幺幂特征标。然后讨论 Lusztig 上同调诱导函子中涉及的二变量格林函数的一些问题；该函子最终使我们能够考察非幺正特征。

如上所述， $\boldsymbol{G}^F = F_4(q)$的特殊之处在于，半单元的中心化子可能具有的根系相当受限。（见下文注释 3.1。）对于特征 2 下的 E_6 型 $\boldsymbol{G}$ ，若假设 $\boldsymbol{G}$ 具有

日期：2023年3月6日。2020年数学主题分类。主要分类 20C33；次要分类 20G40。关键词和短语：切瓦利群、Lusztig 诱导、幺幂特征标。

连通中心和单连通导出子群，则情形完全类似。本文的续篇将讨论这一情形，以及特征 2 下 E_7 型群的情形。Hetz [7]最近确定了这些群的幺幂特征标在幺幂元上的取值。

据我所知，Frank L¨ubeck 已经基于一些假设，编制了 $F_4(q)$ 的电子版“通用”特征标表。这些假设涉及某些 F-不变特征层在 $\boldsymbol{G}$ 上的特征函数取值。根据本文的结果，现在应该可以验证这些假设（或作适当调整）。

1.1. 记号与约定。有限群 Γ 的（复）不可约特征标集合记为 $\mathrm{Irr}(\Gamma)$。我们在一个固定的子域 $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ 上进行讨论，该子域在 $\mathbb{Q}$ 上代数，并且在复共轭下不变且“足够大”；也就是说， $\mathbb{K}$包含足够多的单位根，并且 $\mathbb{K}$ 是 Γ 及其所有子群的分裂域。特别地，对于所有 $\chi \in \mathrm{Irr}(\Gamma)$ 及 $g \in \Gamma$，都有 $\chi(g) \in \mathbb{K}$ 。令 $\mathrm{CF}(\Gamma)$ 表示 Γ 上取值于 $\mathbb{K}$的类函数空间。在 $\mathrm{CF}(\Gamma)$ 上有标准内积 $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ ，其定义为 $\langle f, f'\rangle_\Gamma := |\Gamma|^{-1}\sum_{g\in\Gamma} f(g)f'(g)$，其中 $f, f' \in \mathrm{CF}(\Gamma)$；这里 $x \mapsto \overline{x}$表示由复共轭给出的 $\mathbb{K}$ 的自同构。我们将 $\mathrm{Irr}(\Gamma)$ 的所有整数线性组合构成的子集记为 $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(\Gamma) \subseteq \mathrm{CF}(\Gamma)$。最后，若 $C \subseteq \Gamma$ 是 Γ 的任意一个（非空）共轭类并集子集，则将 C 的（归一化）示性函数记为$\varepsilon_C \in \mathrm{CF}(\Gamma)$，也就是说，我们有

$$\varepsilon_C(g) = \begin{cases} |\Gamma|/|C| & \text{if } g \in C, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

注意，若 C是 Γ 和 $g \in C$的单个共轭类，则对任意$f \in \mathrm{CF}(\Gamma)$， $f(g) = \langle f, \varepsilon_C\rangle_\Gamma$。因此，计算 $\rho \in \mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F)$的值这一问题，等价于求出 ρ 与 Γ的各个共轭类示性函数的内积。

2. Lusztig induction and uniform functions

设 $\boldsymbol{G}$、F如引言中所述。给定 $\boldsymbol{G}$的一个 F-稳定极大环面 $\boldsymbol{T}$以及$\theta \in \mathrm{Irr}(\boldsymbol{T}^F)$，我们得到一个广义特征标$R_{\boldsymbol{T},\,\theta}^{\boldsymbol{G}} \in \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F)$，它由 Deligne 和 Lusztig [1] 引入（另见 [6, §2.2]）。我们还需要将$R_{\boldsymbol{T},\,\theta}^{\boldsymbol{G}}$作如下推广。

2.1. 若 F-稳定闭子群 $\boldsymbol{L} \subseteq \boldsymbol{G}$ 是某个（不一定 F-稳定的）抛物子群 $\boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{G}$中的 Levi 补，则称其为“正则子群”。给定这样一对（$\boldsymbol{L}$， $\boldsymbol{P}$），我们得到一个算子

$$R_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}} \colon \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\boldsymbol{L}^F) \to \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F) \qquad (\text{“Lusztig induction”; see [2, §9.1]}).$$

分别以 $\boldsymbol{G}^F$ 幺幂 和 $\boldsymbol{L}^F$ 幺幂 表示 $\boldsymbol{G}^F$ 和 $\boldsymbol{L}^F$中幺幂元的集合，则存在相应的二变量格林函数

$$Q_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}} \colon \boldsymbol{G}^F_{\mathrm{uni}} \times \boldsymbol{L}^F_{\mathrm{uni}} \to \mathbb{Q} \qquad (\text{see [2, §10.1]}).$$

若 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{T}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 中一个 F-稳定的极大环面（且 $\boldsymbol{B}\subseteq\boldsymbol{G}$ 是包含 $\boldsymbol{T}$的 Borel子群），则 $\boldsymbol{T}^F$幺幂 $=\{1\}$和 $Q_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{G}}$: $\boldsymbol{G}_{\mathrm{uni}}^F\to\mathbb{Q}$, $u\mapsto Q_{\boldsymbol{T}\subseteq\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{G}}(u,1)$，是最初在 [1], 中引入的“通常”格林函数；也就是说，对于所有 $u\in\boldsymbol{G}^F$幺幂，我们有 $Q_{\boldsymbol{T}}^{\boldsymbol{G}}(u)=R_{\boldsymbol{T},\,1}^{\boldsymbol{G}}(u)$。

2.2. 设 $\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}$ 如上，且 $\psi\in\mathrm{Irr}(\boldsymbol{L}^F)$。存在一个特征标公式，用 ψ 的取值以及 $\boldsymbol{G}$ 和形如 $C_{\boldsymbol{G}}^{\circ}(s)$的群的二变量格林函数表示 $R_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}(\psi)$的取值，其中 $s\in\boldsymbol{G}^F$ 为半单；参见 [2,命题 10.1。2], [13, 命题 6.2] 给出了精确表述。为供后文参考，我们这里只陈述以下特殊情形：

$$\text{(a)}\qquad R_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}(\psi)(u)=\sum_{v\in\boldsymbol{L}_{\mathrm{uni}}^F}Q_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}(u,v)\psi(v)\qquad\text{for all } u\in\boldsymbol{G}_{\mathrm{uni}}^F.$$

我们还陈述以下一个有用公式。设 $g\in\boldsymbol{G}^F$，并考虑 g的 Jordan 分解，即写作 $g=su=us$，其中 $s\in\boldsymbol{G}^F$ 为半单，$u\in\boldsymbol{G}^F$ 为幺幂。若 $C_{\boldsymbol{G}}^{\circ}(s)\subseteq\boldsymbol{L}$，则

$$\text{(b)}\qquad \rho(g)=\sum_{\psi\in\mathrm{Irr}(\boldsymbol{L}^F)}\left\langle R_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}(\psi),\rho\right\rangle_{\boldsymbol{G}^F}\psi(g)\qquad\text{for all } \rho\in\mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F).$$

此结果见于 K. D. Schewe 的博士论文（波恩数学论丛，第 165 卷，1985年）；证明参见 [6, 推论 3.3.13]之后的注记。

2.3. 记 $\mathfrak{X}(\boldsymbol{G},F)$ 为所有有序对 $(\boldsymbol{T},\theta)$ 的集合，其中 $\boldsymbol{T}\subseteq\boldsymbol{G}$ 是一个 F-稳定的极大环面，且 $\theta\in\in\mathrm{Irr}(\boldsymbol{T}^F)$。根据 [10, 第 16], 页，类函数 $f\in\in\mathrm{CF}(\boldsymbol{G}^F)$ 称为“一致的”，如果 f 可以写成广义特征标 $R_{\boldsymbol{T},\,\theta}^{\boldsymbol{G}}$关于各种有序对 $(\boldsymbol{T},\theta)\in\mathfrak{X}(\boldsymbol{G},F)$ 的 $\mathbb{K}$-线性组合。如果 f 是一致的，那么有（见 [2, 命题 10.2.4]）：

$$f=|\boldsymbol{G}^F|^{-1}\sum_{(\boldsymbol{T},\theta)\in\mathfrak{X}(\boldsymbol{G},F)}|\boldsymbol{T}^F|\langle f,R_{\boldsymbol{T},\theta}^{\boldsymbol{G}}\rangle_{\boldsymbol{G}^F}R_{\boldsymbol{T},\theta}^{\boldsymbol{G}}.$$

例如，若 C 是 $\boldsymbol{G}^F$ 的半单元素共轭类，则示性函数 ε_C（如 (1.1) 中所示）是一致的；见 [2, 推论 10.3.4]。

定理 2.4. 设 $\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{G}$ 的任意一个 F-稳定共轭类。那么，集合 $\boldsymbol{C}^F$ 的示性函数 $\varepsilon_{\boldsymbol{C}^F}$ 是一致函数。（注意，一般而言，$\boldsymbol{C}^F$ 是 $\boldsymbol{G}^F$ 的若干共轭类之并。）

证明。参见 [4]的附录；这是 Lusztig [10, 2.16]提出的猜想。另见 [2,推论 13.3.5] 以及 [6, 定理 2.7.11]。□

例 2.5. 设 $g\in\boldsymbol{G}^F$，并假设 $C_{\boldsymbol{G}}(g)$ 是连通的。令 $\boldsymbol{C}$ 为 g的 $\boldsymbol{G}$-共轭类。由于 $C_{\boldsymbol{G}}(g)$ 是连通的，$C:=\boldsymbol{C}^F$ 是 $\boldsymbol{G}^F$ 的一个共轭类；见例 1.4. [6, 10]。现在，根据定理 2.4，ε_C 是一致的。令 $\rho\in\mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F)$。回忆 (1.1)，对任意 $(\boldsymbol{T},\theta)\in\mathfrak{X}(\boldsymbol{G},F)$，有 $\rho(g)=\langle\rho,\varepsilon_C\rangle_{\boldsymbol{G}^F}$ 和 $\langle\varepsilon_C,R_{\boldsymbol{T},\,\theta}^{\boldsymbol{G}}\rangle_{\boldsymbol{G}^F}=R_{\boldsymbol{T},\,\theta^{-1}}^{\boldsymbol{G}}(g)$。

因此，利用 (2.3)，我们得到以下公式：

$$\rho(g) = |\boldsymbol{G}^F|^{-1} \sum_{(\boldsymbol{T},\theta)\in\mathfrak{X}(\boldsymbol{G},F)} |\boldsymbol{T}^F|\,\langle R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{T},\theta}, \rho\rangle_{\boldsymbol{G}^F}\, R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{T},\theta^{-1}}(g).$$

这表明，值 $\rho(g)$ 由重数 $\langle R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{T},\,\theta}, \rho\rangle_{\boldsymbol{G}^F}$ 以及值 $R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{T},\,\theta}(g)$ 决定，其中 $(\boldsymbol{T},\theta)$ 遍历 $\mathfrak{X}(\boldsymbol{G},F)$ 中的所有数对。

2.6. 若 $\rho\in\mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F)$ 中的特征标满足：对于某个 F-稳定的极大环面 $\boldsymbol{T}\subseteq\boldsymbol{G}$，有 $\langle R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{T},\,1}, \rho\rangle_{\boldsymbol{G}^F}\neq 0$，则称其为“幺幂”特征标。我们用 $\mathrm{Uch}(\boldsymbol{G}^F)$ 表示 $\boldsymbol{G}^F$ 的幺幂特征标集合。正如 Lusztig 的著作 [11], 所示，这些特征标在 $\boldsymbol{G}^F$ 的特征标理论中发挥着特殊作用；关于 $\boldsymbol{G}^F$ 任意特征标的许多问题，都可以归结为幺幂特征标。

3. The unipotent characters for F_4 in characteristic 2

从现在起，我们假设 $p=2$ 且 $\boldsymbol{G}$ 是 F_4 型的单群。设 $F\colon \boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$ 是一个 Frobenius 映射，使得 $\boldsymbol{G}^F = F_4(q)$，其中 q 是 2 的幂。令 $\mathfrak{Y}(\boldsymbol{G},s)$ 为所有数对 $(\boldsymbol{T},s)$ 的集合，其中 $\boldsymbol{T}\subseteq\boldsymbol{G}$ 是一个 F-稳定的极大环面，且 $s\in\boldsymbol{T}^F$。$\boldsymbol{G}^F$ 在 $\mathfrak{X}(\boldsymbol{G},F)$ 及 $\mathfrak{Y}(\boldsymbol{G},F)$ 上有自然作用；参见 [6, 2.3.20 和 2.5.12]。由于 $\boldsymbol{G}\cong\boldsymbol{G}^*$ 是“自对偶”的（依照 [6, 定义 1.5.17] 的含义），因此存在一个双射对应

$$\mathfrak{X}(\boldsymbol{G},F)\ \mathrm{mod}\ \boldsymbol{G}^F \quad\leftrightarrow\quad \mathfrak{Y}(\boldsymbol{G},F)\ \mathrm{mod}\ \boldsymbol{G}^F \qquad (\text{see [6, Cor. 2.5.14]}).$$

若 $(\boldsymbol{T},\theta)\leftrightarrow(\boldsymbol{T},s)$ 以这种方式对应，我们记作 $R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{T},\,s} := R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{T},\,\theta}$（见 [6, 定义 2.5.17]）。为了计算 $\boldsymbol{G}^F$ 的特征标，我们假设以下信息已知且可通过表格查得：

(A1) $\mathfrak{Y}(\boldsymbol{G},F)$ 的参数化，以及 $\boldsymbol{G}^F$ 的所有共轭类的参数化。(A2) 对所有 $\rho\in\mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F)$ 和 $(\boldsymbol{T},s)\in\mathfrak{Y}(\boldsymbol{G},F)$，重数 $\langle R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{T},\,s},\rho\rangle$。(A3) 对所有 $g\in\boldsymbol{G}^F$ 以及所有 $(\boldsymbol{T},s)\in\mathfrak{Y}(\boldsymbol{G},F)$，值 $R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{T},\,s}(g)$。(A4) 对每个正则 $\boldsymbol{L}\subsetneq\boldsymbol{G}$，$\psi\in\mathrm{Irr}(\boldsymbol{L}^F)$，$u\in\boldsymbol{L}^F$ 单幺 的 $\psi(u)$ 值。

注3.1。$\boldsymbol{G}^F$ 的共轭类由 Shinoda [19]确定。[19] 中的表格给出了 (A1) 所需的分类和参数化。由于 $\boldsymbol{G}$ 的中心平凡，因此可以通过 Lusztig 在[11]中的“主定理4.23”获得 (A2) 中的信息；另见 [6, §2.4、§4.2]。为获得 (A3)，使用 [1,§4] 中的特征标公式（另见 [6, 定理2.2.16]）来计算$R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{T},s}(g)$。这涉及 $\boldsymbol{G}$ 以及形如 $\boldsymbol{H}_s = C_{\boldsymbol{G}}(s)$的群的格林函数，其中 $s\in\boldsymbol{G}^F$ 为半单元；注意，对于我们的 $\boldsymbol{G}$，任何半单元的中心化子都是连通的。通过查看 [19, 表III], 可知，$\boldsymbol{H}_s$ 要么是极大环面，要么是正则子群（根系类型为 F_4, B_3, C_3, $A_1\times A_2$, B_2, A_2, $A_1\times A_1$ 或 A_1），要么 $\boldsymbol{H}_s$ 的根系类型为 $A_2\times A_2$。$\boldsymbol{G}^F$本身的格林函数已由 Malle[15]确定；其他情形见 L¨ubeck [9, Tabelle 16]。计算$R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{T},\theta}(su)$时遇到的其他技术问题见 [5, §3] 和 [9, §2]（例如，需要处理对所有满足 $x^{-1}sx\in\boldsymbol{T}$的 $x\in\boldsymbol{G}^F$ 求和）；在 [9, §6], 中对此作了详细说明，所讨论的群为 $\boldsymbol{G}^F = \mathrm{CSp}_6(q)$。最后，(A4) 中所需的值可从

Enomoto [3] （类型 B_2）、Looker [8], L¨ubeck [9, Tabelle 27] （类型 B_3, C_3）以及 Steinberg[22] （类型 A_1, A_2）。

$\boldsymbol{G}^F$ 的半单元素的 $\boldsymbol{G}^F$-共轭类代表元记为$h_0, h_1, \ldots, h_{76}$，见 [19, 表 II],，其中 $h_0 = 1$；注意，某些 h_i 仅在 $3 \mid q-1$ 或 $3 \mid q+1$ 时才出现，或者仅当 q 足够大时才出现。现在我们逐一考察这些元素，并说明如何确定任意幺幂特征标$\rho \in \mathrm{Uch}(\boldsymbol{G}^F)$ 在形如 $h_i u$ 的元素上的取值，其中 $u \in C_{\boldsymbol{G}}(h_i)^F$ 是幺幂的。

在我们的群 $\boldsymbol{G}$ 中，有 37 个幺幂特征标；这里采用 Lusztig 著作中的记号 [11, 第 371 页 /372])。

3.2. 若 $s = h_0 = 1$，则 Marcelo–Shinoda 已明确确定了 $\rho \in \mathrm{Uch}(\boldsymbol{G}^F)$ 和 $u \in \boldsymbol{G}^F$ 幺幂的取值 $\rho(u)$；参见 [17, 表 6.A]。这依赖于 $\boldsymbol{G}^F$ 的格林函数（可从 [15] 获得），也依赖于 Lusztig 特征层理论所产生的“广义 Green 函数”的相关知识。[12, §24] 中描述了一种计算这些函数的算法；其中涉及某些“Y_t-函数”（定义于 [12, (24.2.3)]）的归一化这一微妙问题。Marcelo–Shinoda [17]并未详细说明他们如何确定这些归一化。但利用 Hetz [7, §4.1.4] 的论证（其中解决了特征 2 下 E_6 型群的类似问题），可以独立验证 [17, 表 5] 中的取值是正确的。

3.3. 令 $s = h_3$（若 $3 \mid q-1$）或 $s = h_{15}$（若 $3 \mid q+1$）。则 $\boldsymbol{H}_s = C_{\boldsymbol{G}}(s)$ 具有 $A_2 \times A_2$ 型根系。令 $u \in \boldsymbol{H}_s^F$为幺幂元素， $\boldsymbol{C}$ 为 su 的 $\boldsymbol{G}$-共轭类。

(a) 首先假设 u 不是正则幺幂元素。通过查看 [19, 表 IV],，我们看到 $C_{\boldsymbol{G}}(su)$ 是连通的。因此，我们可以结合 (A2)、(A3) 应用例 2.5，以确定 $\rho(su)$，甚至对所有 $\rho \in \mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F)$ 也如此。

(b) 现在假设 u是正则幺幂元素。我们回顾 [5, §7.6]中的一些事实。（注意，在 [5, §7.6] 中假设 $p \neq 2$，3，但相关讨论原样也适用于$p = 2$。）集合 $\boldsymbol{C}^F$在 $\boldsymbol{G}^F$中分成 3 个共轭类，我们将它们简单记为 C_1、C_2、C_3。我们可以选取记号，使得 $C_1 = C_1^{-1}$且 $C_2^{-1} = C_3$。明确的代表元见 [19, 表 IV]；对于 $g_i \in C_i$ 和 $i = 1$，2、3，有 $|C_{\boldsymbol{G}}(g_i)^F| = 3q^4$。令$\chi_0 := \varepsilon_{\boldsymbol{C}^F}$ 为集合 $\boldsymbol{C}^F$ 上的示性函数（如 (1.1) 中所示）。令 $1 \neq \theta \in \mathbb{K}$ 为一个固定的三次单位根。于是我们考虑 $\boldsymbol{G}^F$的幺幂特征标的以下线性组合:

$$\chi_1 := \tfrac{1}{3}q^2\big([12_1] + F_4^{\mathrm{II}}[1] - [6_1] - [6_2] + 2F_4[\theta] - F_4[\theta^2]\big),$$
$$\chi_2 := \tfrac{1}{3}q^2\big([12_1] + F_4^{\mathrm{II}}[1] - [6_1] - [6_2] - F_4[\theta] + 2F_4[\theta^2]\big).$$

如 [5, §7.6], 中所述，类函数 χ_1, χ_2 是 F-不变尖点特征层在 $\boldsymbol{G}$上的特征函数（相差一个标量倍数）；此外，其取值

χ_0, χ_1, χ_2 如下所示：

	C_1	C_2	C_3	$g \in \boldsymbol{G}^F \setminus \boldsymbol{C}_s^F$
χ_0	q^4	q^4	q^4	0
χ_1	q^4	$q^4\theta$	$q^4\theta^2$	0
χ_2	q^4	$q^4\theta^2$	$q^4\theta$	0

因此，$\varepsilon_{C_1} = \chi_0 + \chi_1 + \chi_2$，$\varepsilon_{C_2} = \chi_0 + \theta^2\chi_1 + \theta\chi_2$，$\varepsilon_{C_3} = \chi_0 + \theta\chi_1 + \theta^2\chi_2$。

现在任取 $\rho \in \mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F)$，并令 $g_i \in C_i$ for $i = 1, 2, 3$。根据定理 2.4，χ_0 是一致的，因此我们可以利用 (A2)、(A3) 以及公式 (2.3) 确定 $\langle \rho, \chi_0 \rangle_{\boldsymbol{G}^F}$。根据 χ_1, χ_2 的定义，ρ 与 χ_1, χ_2 的内积已知。因此，我们可以明确求出 $\rho(g_i) = \langle \rho, \varepsilon_{C_i} \rangle_{\boldsymbol{G}^F}$。

3.4. 设 $s = h_i$，其中 $i \notin \{0, 3, 15\}$。在这些情况下，$\boldsymbol{L} = C_{\boldsymbol{G}}(s)$ 要么是极大环面，要么是一个真正则子群，其根系类型为 $B_3, C_3, A_1 \times A_2, B_2, A_2, A_1 \times A_1$ 或 A_1。设 $u \in \boldsymbol{L}^F$ 为幺幂元，$\boldsymbol{C}$ 为 su 的 $\boldsymbol{G}$-共轭类。令 $\rho \in \mathrm{Uch}(\boldsymbol{G}^F)$。为计算 $\rho(su)$，我们使用公式 (2.2) 中的 Schewe公式。首先注意，若 $\psi \in \mathrm{Irr}(\boldsymbol{L}^F)$ 满足 $\big\langle R_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}(\psi)\ \rho \big\rangle_{\boldsymbol{G}^F} \neq 0$，则必有 $\psi \in \mathrm{Uch}(\boldsymbol{L}^F)$；见 [6, 命题 3.3.21]。此外，由于 s 位于 $\boldsymbol{L}^F$ 的中心，我们有 $\psi(su) = \psi(u)$。（这是幺幂特征标的一般性质；见 [6, 命题 2.2.20]。）因此，Schewe公式为：

$$\rho(su) = \sum_{\psi \in \mathrm{Uch}(\boldsymbol{L}^F)} \big\langle R_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}(\psi), \rho \big\rangle_{\boldsymbol{G}^F} \psi(u).$$

根据 (A4)，$\psi \in \mathrm{Uch}(\boldsymbol{L}^F)$ 和 $u \in \boldsymbol{L}^F$ 幺幂的 $\psi(u)$ 值已明确给出。重数 $\langle R_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}(\psi)\ \rho \rangle_{\boldsymbol{G}^F}$（对于 $\rho \in \mathrm{Uch}(\boldsymbol{G}^F)$ 和 $\psi \in \mathrm{Uch}(\boldsymbol{L}^F)$）也可以明确确定；参见 [6, §4.6], ，尤其是 [6, 命题 4.6.18]。在 Michel 版本的 CHEVIE 中，可以通过函数 `LusztigInductionTable`获得这些结果。下面通过一个例子加以说明。

TABLE 1. 特征 2 下类型 B_2 的幺幂特征标

	A_1	A_2	A_{31}	A_{32}	A_{41}	A_{42}
$\lvert C_{\boldsymbol{G}}(u)^F \rvert$：	$q^4(q^2-1)(q^4-1)$	$q^4(q^2-1)$	$q^4(q^2-1)$	q^4	$2q^2$	$2q^2$
ψ_0	1	1	1	1	1	1
ψ_9	$\frac{1}{2}q\ (q+1)^2$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$\frac{q}{2}$	$\frac{q}{2}$	$-\frac{q}{2}$
ψ_{10}	$\frac{1}{2}q\ (q-1)^2$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$\frac{q}{2}$	$\frac{q}{2}$	$-\frac{q}{2}$
ψ_{11}	$\frac{1}{2}q(q^2+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$\frac{q}{2}$	$-\frac{q}{2}$	$\frac{q}{2}$
ψ_{12}	$\frac{1}{2}q(q^2+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$\frac{q}{2}$	$-\frac{q}{2}$	$\frac{q}{2}$
ψ_{13}	q^4	.	.	.	.	.

（参见 Enomoto [3]；记号同 [6, 例 3.3.30 和 2.7.22]。）

例3.5。设 $\rho = F_{\mathrm{II}_4}[1] \in \mathrm{Uch}(\boldsymbol{G}^F)$（一个尖点幺正特征）。设 $s = h_{53}$；则 $\boldsymbol{L} = C_{\boldsymbol{G}}(s)$ 是一个类型为 B_2 的正则子群，其中 $|\boldsymbol{L}^F| = q^4(q^2+1)(q^2-1)(q^4-1)$；参见 [19, 表III]。我们希望确定 $\rho(h_{53}u)$ 的值，其中 $u \in \boldsymbol{L}^F$ 是幺幂元。$\boldsymbol{L}^F$ 的幺幂特征标在幺幂元上的取值见表 1。使用 Michel 的 `LusztigInductionTable`，我们得到

$$\langle R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}(\psi_{10}), \rho\rangle_{\boldsymbol{G}^F} = 1 \qquad \text{and} \qquad \langle R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}(\psi_i), \rho\rangle_{\boldsymbol{G}^F} = 0 \quad \text{for } i \neq 10.$$

因此，由Schewe公式可得 $\rho(h_{53}u) = \psi_{10}(u)$。——对于(3.4)中的任意 $s = h_i$，完全类似的过程同样适用。

4. Non-unipotent characters for F_4 in characteristic 2

我们沿用上一节的记号，其中 $\boldsymbol{G}$ 在特征2下是 F_4 型的单群。现在说明如何确定 $\boldsymbol{G}^F$的非幺正特征的取值。首先回顾Lusztig分类中关于$\mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F)$的一些事实。设 $s \in \boldsymbol{G}^F$为半单元。定义 $\mathscr{E}(\boldsymbol{G}^F, s)$为满足以下条件的所有 $\rho \in \mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F)$所成的集合：对于某个 F-稳定的极大环面 $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{G}$，有$\langle R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{T},s}, \rho\rangle \neq 0$，且 $s \in \boldsymbol{T}$。已知每个$\rho \in \mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F)$都属于某个 s对应的 $\mathscr{E}(\boldsymbol{G}^F, s)$；此外，$\mathscr{E}(\boldsymbol{G}^F, s)$仅取决于 s的$\boldsymbol{G}^F$-共轭类。若 s, $s' \in \boldsymbol{G}^F$满足 $\mathscr{E}(\boldsymbol{G}^F, s) \cap \mathscr{E}(\boldsymbol{G}^F, s') \neq \varnothing$，则$s, s'$是 $\boldsymbol{G}^F$-共轭的。（关于这些内容，参见例如 [6, §2.6]；另请回忆 $\boldsymbol{G} \cong \boldsymbol{G}^*$。）最后，根据 [11], 的“主定理4.23”，存在一个双射 $\mathscr{E}(\boldsymbol{G}^F, s) \leftrightarrow \mathrm{Uch}(\boldsymbol{H}_s^F)$，其中 $\boldsymbol{H}_s = C_{\boldsymbol{G}}(s)$；这称为特征的“Jordan分解”。接下来分4步确定以下信息：

步骤 1：所有二变量格林函数 $Q^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}$ 的取值。步骤 2：对所有 $\rho \in \mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F)$ 和 $u \in \boldsymbol{G}^F_{\mathrm{uni}}$，取值 $\rho(u)$。步骤 3：对任意 $\psi \in \mathrm{Irr}(\boldsymbol{L}^F)$，分解 $R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}(\psi)$。步骤4：对任意 $\rho \in \mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F)$ 和任意 $g \in \boldsymbol{G}^F$，取值 $\rho(g)$。

4.1. 我们说明如何解决步骤 1。设 $\boldsymbol{L} \subsetneq \boldsymbol{G}$，并令 $\mathrm{Uch}(\boldsymbol{L}^F) = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$。(A4) 中的信息（见第 3 节）尤其表明，$n$ 也是 $\boldsymbol{L}^F$ 中幺幂元共轭类的数目。令 $v_1, \dots, v_n$ 为这些共轭类的代表元。然后，再次利用 (A4)，我们还可以验证矩阵 $(\psi_i(v_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ 是可逆的。（例如，见表 1。）令 $u_1, \dots, u_N$ 为 $\boldsymbol{G}^F$ 中幺幂元共轭类的代表元；根据 [19, 定理 2.1]，我们有 $N = 35$。然后将特征标公式 (2.2)(a) 写成一个方程组：

$$(\spadesuit) \qquad R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}(\psi_i)(u_k) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, Q^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}(u_k, v_j)\psi_i(v_j) \quad \text{for } 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant N,$$

其中，对于所有 j，$c_j := [\boldsymbol{L}^F : C_{\boldsymbol{L}}(v_j)^F]$。另一方面，如（3.4）中所解释的，我们可以确定任意 $\rho \in \mathrm{Uch}(\boldsymbol{G}^F)$ 的重数 $m(\psi_i, \rho) := \langle R^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}(\psi_i)\ \rho\rangle_{\boldsymbol{G}^F}$。因此，

我们得到方程

$$R_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}(\psi_i)(u_k)=\sum_{\rho\in\mathrm{Uch}(\boldsymbol{G}^F)} m(\psi_i,\rho)\rho(u_k)\qquad \text{for } 1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant k\leqslant N.$$

因此，由于根据 (3.2) 已知 $\rho(u_k)$ 对于 $\rho\in\mathrm{Uch}(\boldsymbol{G}^F)$ 的取值，便可显式计算 $R_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}(\psi_i)(u_k)$ 的取值。现在我们可以对 (♠) 求逆，从而得到所有 $Q_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}(u_k,v_j)$ 对于 $1\leqslant j\leqslant n$, $1\leqslant k\leqslant N$ 的取值。（Malle–Rotilio [16,§2.2] 中也出现了类似的论证。）

4.2. 我们说明如何解决步骤 2。与上一节一样，我们考虑半单元素列表 $h_0,h_1,\dots,h_{76}\in\boldsymbol{G}^F$。设 $\rho\in\mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F)$。存在某个 $s\in\{h_0,h_1,\dots,h_{76}\}$，使得 $\rho\in\mathscr{E}(\boldsymbol{G}^F,s)$。若 $s=h_0$（单位元），则 ρ 是幺幂元，所需的取值已由 (3.2) 给出。现在假设 $s\in\{h_3,h_{15}\}$，其中 $C_{\boldsymbol{G}}(s)$ 的根系为 $A_2\times A_2$ 型。根据 [6, Lemma 2.4.18] 中的讨论（该讨论源自 Lusztig 的著作 [11]），我们知道 ρ 是一致类函数。（该讨论中出现的群 $\boldsymbol{W}_{\lambda,n}$ 同构于 $C_{\boldsymbol{G}}(s)$ 的魏尔群；参见 [6, (2.5.10)]，并再次注意 $\boldsymbol{G}\cong\boldsymbol{G}^*$。）因此，根据第 3 节中的 (A2)、(A3)，已知 $u\in\boldsymbol{G}^F$ uni 的 $\rho(u)$ 取值。最后，设 $s=h_i$，其中 $i\notin\{0,3,15\}$。那么，与 (3.4) 中一样，$\boldsymbol{L}:=C_{\boldsymbol{G}}(s)\subsetneqq\boldsymbol{G}$ 是一个正则子群。在这种情况下，Lusztig 已证明，对某个 $\psi\in\mathscr{E}(\boldsymbol{L}^F,s)$，有 $\rho=\pm R_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}(\psi)$；参见 [6, Theorem 3.3.22]。因此，为了确定 $u\in\boldsymbol{G}^F_{\mathrm{uni}}$ 的 $\rho(u)$，我们可以再次使用特征标公式 (2.2)(a)，结合对 $Q_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}$ 的了解（见步骤 1）以及 $v\in\boldsymbol{L}^F_{\mathrm{uni}}$ 的 $\psi(v)$ 取值（见 (A4)）。

4.3. 我们说明如何解决步骤 3。假设 $\boldsymbol{L}\subsetneqq\boldsymbol{G}$，并令 $\psi\in\mathrm{Irr}(\boldsymbol{L}^F)$ 任意。存在某个半单 $s\in\boldsymbol{L}^F$，使得 $\psi\in\mathscr{E}(\boldsymbol{L}^F,s)$。令 $\mathscr{E}(\boldsymbol{G}^F,s)=\{\rho_1,\dots,\rho_r\}$。于是，根据 [6, 命题 3.3.20],，我们有

$$(*)\qquad R_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}(\psi)=\sum_{i=1}^{r} m(\psi,\rho_i)\rho_i\qquad \text{where } m(\psi,\rho_i)\in\mathbb{Z} \text{ for } 1\leqslant i\leqslant r.$$

若 $s=1$ 且 $\psi\in\mathrm{Uch}(\boldsymbol{L}^F)$，我们可以像 (3.4) 中那样使用 Michel 的 `LusztigInductionTable`。现在假设 $s\neq 1$。此时可以利用这样一个事实：$R_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}$ 与特征标的 Jordan 分解相容；见 [6, 定理 4.7.2]。不过，既然我们可以使用步骤 1 和 2 的结果，也可以如下论证。再次令 $u_1,\dots,u_N$ 为 $\boldsymbol{G}^F$ 中幺幂元共轭类的代表元。利用 (2.2)(a)、(A4) 和步骤 1，我们可以计算出以下值：

$$R_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}(\psi)(u_k)=\sum_{v\in\boldsymbol{L}^F_{\mathrm{uni}}} Q_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}(u_k,v)\psi(v)\qquad \text{for } 1\leqslant k\leqslant N.$$

与（$*$）比较，我们得到方程

$$\sum_{i=1}^{r} m(\psi,\rho_i)\rho_i(u_k)=R_{\boldsymbol{L}\subseteq\boldsymbol{P}}^{\boldsymbol{G}}(\psi)(u_k)=\text{known value}\qquad \text{for } 1\leqslant k\leqslant N.$$

利用步骤 2，我们可以验证矩阵 $(\rho_i(u_k))_{1\leqslant i\leqslant r,\ 1\leqslant k\leqslant N}$ 的秩为 r，其中 $r\leqslant N$。（对于 $s=1$，这并不成立。）因此，上述方程唯一确定了 $1\leqslant i\leqslant r$ 对应的数值 $m(\psi,\rho_i)$。

4.4. 我们说明如何解决步骤4。设 $\rho\in\mathrm{Irr}(\boldsymbol{G}^F)$，且 $g\in\boldsymbol{G}^F$ 任意。取满足 $\rho\in\mathscr{E}(\boldsymbol{G}^F,h_i)$ 的 $i\in\{0,1,\dots,76\}$。若 $i=0$，则 $h_0=1$，ρ 是幺幂的，并且根据第 3 节，我们知道 ρ 的取值。接下来，设 $i\in\{3,15\}$。那么，正如（4.2）中所述，ρ 是一致的，因此可通过（A2）、（A3）计算 ρ 的取值。最后，设 $i\notin\{0,3,15\}$。写作 $g=su=us$，其中 $s\in\boldsymbol{G}^F$ 是半单的，$u\in\boldsymbol{G}^F$ 是幺幂的。若 $s=1$，则根据步骤 2，已知对 $u\in\boldsymbol{G}^F$ uni 而言 $\rho(u)$ 的取值。现在设 $s\neq1$。若 $C_{\boldsymbol{G}}(s)$ 的类型为 $A_2\times A_2$，则根据（3.3），$\rho(su)$ 已知。否则，我们处于（3.4）所述的情形，其中 $\boldsymbol{L}:=C_{\boldsymbol{G}}(s)\subsetneqq\boldsymbol{G}$ 是一个正则子群。设 $\psi\in\mathrm{Irr}(\boldsymbol{L}^F)$，且令 $(\boldsymbol{T},\theta)\in\mathfrak{X}(\boldsymbol{L},F)$ 满足 $\langle R_{\boldsymbol{T},\theta},\psi\rangle_{\boldsymbol{L}^F}\neq0$；那么，根据 [6, 命题 2.2.20],，我们有$\psi(su)=\theta(s)\psi(u)$。因此，结合（A4）以及步骤 3 的结果，应用 Schewe公式可得 $\rho(su)$ 的取值。

致谢。感谢 Jonas Hetz 和 Gunter Malle 对早期版本提出意见。本文是德国研究联合会（Deutsche Forschungs- gemeinschaft）SFB-TRR 195 项目（项目编号286237555）的成果。

References

[1] P. Deligne and G. Lusztig, 《有限域上约化群的表示》, 《数学年刊》103（1976）, 103–161。[2] F. Digne and J. Michel, 《李型有限群的表示》, 伦敦数学会学生文本丛书, 第21卷, 第2版, 剑桥大学出版社, 2020。[3] H. Enomoto, 《有限辛群 Sp(4, q) 的特征标》, $q=2^f$, 《大阪数学杂志》9（1972）, 75–94。[4] M. Geck, 《李型有限群特征标理论入门指南》, 载于《局部表示理论与单群》（编者：R. Kessar、G. Malle、D. Testerman）, 第63–106页, EMS讲义系列, 欧洲数学会, 苏黎世, 2018。[5] M. Geck, 《例外型有限切瓦利群特征标值的计算》, George Lusztig 专刊, 《纯粹与应用数学季刊》, 即将出版；预印本见 arXiv:2105.00722。
[6] M. Geck and G. Malle, 《李型有限群的特征标理论：导论》, 剑桥高等数学研究丛书187, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2020。[7] J. Hetz, 《李型有限群的复不可约特征标与特征层》, 博士论文, 斯图加特大学, 2023。[8] J. C. Looker, 《Sp(6, q) 的复不可约特征标》, q；博士论文, 悉尼大学, 1977；在线版见 https://ses.library.usyd.edu.au/handle/2123/2533。[9] F. Lübeck, 《奇数 q 下的群 CSp$_6(q)$ 与偶数 q 下的 Sp$_6(q)$ 的特征标表》, 博士论文, 海德堡大学, 1993；在线版见 www.math.rwth-aachen.de/~Frank.Luebeck/preprints/。[10] G. Lusztig, 《有限切瓦利群的表示》, C.B.M.S.数学区域会议系列, 第39卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 1977。
[11] G. Lusztig, 《有限域上约化群的特征标》, 《数学年刊研究》第107卷, 普林斯顿大学出版社, 1984。

[12] G. Lusztig, 《特征层 V》, Adv. Math. 61（1986）, 103–155。[13] G. Lusztig, 《有限切瓦利群在幺幂元处的特征标值》, J. Algebra 104（1986）, 146–194。[14] G. Lusztig, 《关于不可约特征标计算的说明》, J. Amer. Math. Soc. 5（1992）, 971–986。[15] G. Malle, 《特征 2 下 F_4 型与 E_6 型群的格林函数》, Comm. Algebra 21（1993）, 747–798。
[16] G. Malle and E. Rotilio, 《8 维旋量群的二参数格林函数》; 预印本见 arXiv:2003.14231。[17] R. M. Marcelo and K. Shinoda, 《 F_4 型切瓦利群的幺幂特征标在幺幂元处的取值》, Tokyo J. Math. 18（1995）, 303–340。[18] J. Michel, 《GAP3 的 CHEVIE 软件包开发版本》, J. Algebra 435（2015）, 308–336。网页：https://webusers.imj-prg.fr/~jean.michel/chevie/chevie.html。[19] K. Shinoda, 《特征 2 有限域上 F_4 型切瓦利群的共轭类》, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 21（1974）, 133–150。[20] T. Shoji, 《约化群的特征层与近似特征标》, Adv. Math. 111（1995）, 244–313。[21] T. Shoji, 《约化群的特征层与近似特征标, II》, Adv. Math. 111（1995）, 314–354。[22] R. Steinberg, 《GL(3, q)、GL(4, q)、PGL(3, q) 与 PGL(4, q) 的表示》, Canadian J. Math. 3（1951）, 225–235。

Lehrstuhl für Algebra, FB Mathematik, Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 57, 70569 Stuttgart, Germany电子邮件地址：meinolf.geck@mathematik.uni-stuttgart.de