arXiv:2303.07037v1 [math.FA] 13 Mar 2023

无条件基与 Daugavet 重赋范

¨RAINIS HALLER、JOHANN LANGEMETS、YOEL PERREAU 和 TRIINU VEEORG

ABSTRACT. 我们为巴拿赫空间单位球面上的点引入一种新的直径概念，它自然地补充了 Δ-点的概念，但弱于 Daugavet 点的概念。我们证明，这一概念不仅可用于对 Daugavet 性质给出新的几何刻画，还可在巴拿赫空间的绝对和或射影张量积等多种情形下，重新得到关于 Daugavet 点的已有结果，甚至推出新的结果。最后，我们表明，这一概念为重新赋范问题带来了强有力的新思路；这些思路还可与文献中的已有构造结合，从而使每个具有无条件 Schauder 基的无限维巴拿赫空间经过重新赋范后都具有一个 Daugavet 点。

1. INTRODUCTION

本文研究 Daugavet 性质（DPr）的逐点版本，以及若干直径 2 性质（DD2P、DLD2P 和性质 $\mathfrak{D}$）的逐点版本，这些性质由 [3]和 [19]引入。若 X 是一个巴拿赫空间，我们分别用 B_X 和 S_X 表示其闭单位球和单位球面。我们还用 X^* 表示 X的拓扑对偶。为简便起见，本文只讨论实巴拿赫空间。

对于给定的 $x \in S_X$，我们记 $D(x)$ 为 x处所有范数为 1 的支撑泛函的集合，即满足 $x^*(x) = 1$ 的所有 $x^* \in S_{X^*}$ 的集合。 B_X的切片是指将 B_X 与一个开半空间相交所得到的任意非空子集 B_X。任何此类集合都可以写成以下形式

$$S(x^*, \alpha) := \{x \in B_X : x^*(x) > 1 - \alpha\}$$

其中 $x^* \in S_{X^*}$ 和 $\alpha > 0$。当需要指明所取切片的单位球时，我们将该集合记为 $S(B_X、x^*、\alpha)$。 B_X的相对弱开子集是指将 B_X 与 X 中关于弱拓扑的一个开集相交所得到的任意子集 B_X。

定义 1.1（[3, 19]）。设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x \in S_X$。我们称 x 为

(i) 超 Daugavet 点，若对于 B_X 的每个非空相对弱开子集 V，都有 $\sup_{y\in V} \|x - y\| = 2$；
(ii) 超 Δ 点，若对于每个包含 x 的 B_X 的非空相对弱开子集V，都有 $\sup_{y\in V} \|x - y\| = 2$；
(iii) Daugavet 点，若对于 B_X 的每个切片 S，都有 $\sup_{y\in S} \|x - y\| = 2$；(iv) Δ 点，若对于 B_X 的每个包含 x 的切片 S，都有 $\sup_{y\in S} \|x - y\| = 2$ ；(v) $\mathfrak{D}$ 点，若对于每个 $x^* \in D(x)$ 和 $\alpha > 0$，都有 $\sup_{y\in S(x^*,\ \alpha)} \|x - y\| = 2$。

我们还将考虑对偶空间中 (i)–(iv) 各点的自然弱* 版本，其中切片和相对弱开子集分别替换为弱* 切片（即由预对偶中的元素定义的切片）以及弱* 拓扑下的相对开子集。

根据 [4] 的结果，有限维空间不含 $\mathfrak{D}$-点（见 [1, 推论 5.3]）；但最近 [1, 定理 4.1] 表明，在无限维情形下， Δ-点是一个相当非等距概念：每个无限维巴拿赫空间都可以重新赋范，使其具有一个Δ-点；而每个不具有 Schur 性质的无限维巴拿赫空间，都可以重新赋范，使其具有一个超 Δ-点。

在 [1, 定理 2.1] 中还证明了， [24] 中构造的具有拉东–尼科迪姆性质和一个 Daugavet 点的 Lipschitz 自由空间同构于 ℓ_1 ，并且

本研究得到爱沙尼亚研究委员会资助，资助项目为 PRG1901、PSG487 和 SJD58。1

它在等距同构意义下是一个对偶空间。然而，无限维自反或超自反巴拿赫空间是否可以包含 Daugavet 点，这个问题仍未解决。本文通过为 ℓ_2 构造一种重新赋范，使其具有一个超 Daugavet 点，从而填补了这一空白。更准确地说，以下定理是本文的主要结果。

定理 1.2. 设 X 是一个具有无条件弱零 Schauder 基 (e_n) 及双正交泛函 (e_n^*)的无限维巴拿赫空间。那么，在 X 上存在一个等价范数 $|||\cdot|||$ ，使得

(i) e_1 是 $(X, |||\cdot|||)$中的超 Daugavet 点；
(ii) e_1^* 是 $(E, |||\cdot|||)$中的弱* 超 Daugavet 点，其中 $E := $ 由$\{e_n^*\}$张成。

特别地，若 (e_n) 表示 ℓ_2的单位向量基，则存在一种对 ℓ_2重新赋范的方式，使得 e_1 在新范数及其对偶范数下都是超 Daugavet 点。

结合这一结果、James 关于无条件基的经典结果中 [1], 的 ℓ_1-重新赋范，以及关于可补子空间的一些观察，我们最终将得到以下结论。

定理 1.3. 每个包含有补的无条件基序列的无限维巴拿赫空间，都可以重新赋范，使其拥有一个 Daugavet 点，并且其对偶空间中有一个弱* Daugavet 点。

特别地，我们对 [4, 问题 6.1] 给出了肯定的回答。该问题询问超自反巴拿赫空间是否可能包含 Daugavet 点；对于 [19, 问题 7.7] ，我们则给出了部分否定性回答。该问题询问能否找到 Daugavet 点或超达维特点的同构障碍。我们还通过构造一个具有超 Daugavet 点的非自反 M-嵌入空间，对 [1,问题 5.29]给出了肯定的回答。

定理 1.2 中构造背后的一些关键思想，实际上源自对单位球面上点的另一种直径性质的研究。这种性质尚未在文献中得到考察，但它自然地补充了 Δ-点的概念。

定义 1.4。设 X 是一个巴拿赫空间，且令 $x \in S_X$。如果对于 B_X 中每个不包含 x 的切片 S，都有 $\sup_{y\in S} \|x - y\| = 2$，我们就称 x 是一个 ∇-点。

显然，巴拿赫空间 X 的单位球面中的点 x 是 Daugavet 点，当且仅当它同时是一个 ∇-点和一个 Δ-点。我们将在下一节看到，事实上，如果 x 是一个 ∇-点和一个 $\mathfrak{D}$-点，它已经是一个 Daugavet 点。

有鉴于此，我们引入 ∇-点这一概念，主要是为了探究 Daugavet 点对巴拿赫空间几何的影响，并获得新的认识。事实上，文献中近期提出的大多数阻碍直径点存在的条件（例如 [4, 25, 17, 19, 1] 中的情形），实际上都源于对各种 Δ 条件的阻碍。少数例外包括： [3], 中关于绝对和的考量，以及 [14, 命题 3.1] 中观察到的凹陷点的距离 2。我们将陈述这些结果针对 ∇-点的类似结论，从而表明确实存在这样的情形：阻碍 Daugavet 点存在的正是这一概念。

当然，自然会有人问，是否存在不是 Daugavet 点的 ∇-点。下面这些简单却基本的例子表明，这样的点确实很多，也说明了为什么这一概念在某种意义上过于灵活，以至于无法排除巴拿赫空间良好的几何性质。全文中我们还会看到其他这类例子。不过，我们要指出，∇-条件的自然超版本并不会带来新的概念，因为很容易证明，任何“超 ∇-点”都会自动成为超 Daugavet 点（这直接源于弱拓扑是豪斯多夫的这一事实）。

例 1.5。 ℓ_1^n 和 ℓ_1 的单位向量基中的元素全都是 ∇-点。

特别要注意， $B_{\ell_1^n}$ 或 B_{ℓ_1} 的每个切片都包含一个 ∇-点，而根据 [3, 定理 3.1]， ℓ_1^n 和 ℓ_1都不包含 Δ-点（不过， S_{ℓ_1} 中每个具有无限支撑的元素都是一个

$\mathfrak{D}$-点，依据 [3, 命题 2.3]）。鉴于这些例子，不禁会想：单位球面完全由 ∇-点构成的巴拿赫空间是否必定包含 Daugavet 点。关于 ∇-点，我们的主要结果表明，这一性质实际上等价于 DPr。

定理 1.6. 设 X 为维数 $\dim X > 1$的巴拿赫空间。那么， X 具有 DPr，当且仅当其单位球面上的每一点都是一个 ∇点。

最后，我们简要介绍本文的组织结构和内容。在第 2 节中，我们将对 ∇点这一概念进行一般性研究。首先证明，同时为 ∇点和 $\mathfrak{D}$点的任意一点都是 Daugavet 点，并由此推得，∇点总是 Daugavet 点或强暴露点。基于这些结果，我们证明定理 1.6，并获得 DPr 关于 ∇点的一种新刻画。最后，我们陈述 ∇点到凹陷点的距离所具有的一项特定性质，并指出，任何包含 ∇点的严格凸空间都不具有 Radon–Nikod´ym 性质。

在第 3 节中，我们研究一些经典巴拿赫空间中的 ∇-点。在第 3.1 小节中，我们考察巴拿赫空间绝对和中的 ∇-点。首先，我们证明，若 N 是定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的一个绝对归一化范数，且不同于 ℓ_1-范数和 ℓ_∞-范数，那么对于任意巴拿赫空间X 和 Y，绝对和 $X\oplus_N Y$中的 ∇-点与 Daugavet 点的概念相同。其次，我们具体研究巴拿赫空间 ℓ_1-和与 ℓ_∞-和中的 ∇-点，并证明：若点 (x, y) 属于 $X \oplus_N Y$，且是 ∇-点但不是 Daugavet 点，则必有 $N = \|\cdot\|_1$ 和 $(\|x\|, \|y\|) = (1, 0)$，或 $(0, 1)$，或 $N = \|\cdot\|_\infty$和$(\|x\|, \|y\|) = (1, 1)$。最后，我们对这一背景下的这类点给出完整刻画。在第 3.2 小节中，我们考察一些特定函数空间中的 ∇-点。一方面，我们证明 $L_1(\mu)$-空间为存在非 Daugavet 点的 ∇-点提供了自然的框架。另一方面，我们证明，在每个无限维 $C(K)$-空间或 $C_0(L)$-空间中，以及一般的 L_1-预对偶中， ∇-点的概念都与其他所有直径概念相同。在第 3.3 小节中，我们给出张量积中 ∇-点概念的几个非平凡应用：已知的关于 Δ-点的传递结果可以与 ∇-点的性质结合，从而得到关于 Daugavet 点的新传递结果。最后，我们给出关于 ∇-点的部分具体传递结果，并开始探究超点的稳定性。

在第4节中，我们讨论 Daugavet 重赋范。首先，我们证明，由 ℓ_1-和相关的一些传递结果可自然推出，每个巴拿赫空间都可以重新赋范，使其具有一个 ∇-点。其次，我们将这一思路与[1, 第 3]节中重赋范方法的一个改编版本结合起来，得到本文的主要结果——定理 1.2。最后，我们注意到，如果巴拿赫空间 X 包含一个有补子空间 Y，且该子空间可以重新赋范，使其具有 Daugavet 点或超 Daugavet 点，那么 X 也可以重新赋范，使其具有 Daugavet 点或超 Daugavet 点。基于这一点，我们将定理 1.2 与 James 关于无条件基的经典结果以及 [1] 中的 ℓ_1-同构结合起来，得到每个具有无条件基的无限维巴拿赫空间（更一般地，具有可补无条件基本序列的空间）都可以重新赋范，使其具有 Daugavet 点。

全文中，我们将使用标准记号，通常遵循教科书 [5]或 [10]。特别地，若 A是赋范空间 X的非空子集，则分别用 span A和 conv A表示 A的线性张成和凸包；用 span$\underline{\ A}$和 ~~conv~~ A 表示它们各自的闭包。我们还用 ext B_X 表示 B_X的所有极端点组成的集合，用 dent B_X表示 B_X的所有凹陷点组成的集合。

2. ∇-points and the Daugavet property

我们先从以下几个简单的观察开始。

引理2.1. 设 X 是一个巴拿赫空间，且令 $x \in S_X$。那么 x 是一个 Daugavet 点，当且仅当它同时是一个 ∇-点和一个 $\mathfrak{D}$-点。

证明. 显然，Daugavet 点同时是一个 ∇-点和一个 Δ-点，因此也是一个 ∇-点和一个 $\mathfrak{D}$-点。反过来，假设 x 同时是一个 ∇-点和一个 $\mathfrak{D}$-点，并设$S := S(x^*, \alpha)$，其中 $x^* \in S_{X^*}$ 且 $\alpha > 0$。若 $x^* \in D(x)$，则 $\sup_{y\in S} \|x - y\| = 2$，因为 x 是一个$\mathfrak{D}$-点。另一方面，若 $x^* \notin D(x)$，则存在 $\beta > 0$ 使得 $x^*(x) \leqslant 1 - \beta$。若$\alpha \leqslant \beta$，则 $x \notin S$，且 $\sup_{y\in S} \|x - y\| = 2$，因为 x 是一个 ∇-点。若 $\alpha > \beta$，则 $S(x^*, \beta) \subset S$，所以 $\sup_{y\in S} \|x - y\| \geqslant \sup_{y\in S(x^*,\ \beta)} \|x - y\| = 2$ 由前一种情况可知。由此可得 x 是一个 Daugavet 点。

□

命题 2.2. 设 X 是一个巴拿赫空间。X 中所有 ∇-点构成X的一个闭子集。

证明。根据 ∇-点的定义，验证显然成立。事实上，假设 (x_n) 是 X 中一列 ∇-点，并且收敛到某个 $x \in X$。取 B_X 的一个切片 S，它不包含 x，并令 $\varepsilon > 0$。由于 $x_n \to x$，我们可以找到 $n \in \mathbb{N}$，使得 $x_n \notin S$ 且$\|x - x_n\| \leqslant \varepsilon/2$。于是，由于 x_n是一个 ∇-点，存在 $y \in S$使得 $\|x_n - y\| \geqslant 2 - \varepsilon/2$。因此$\|x - y\| \geqslant 2 - \varepsilon$，从而可知 x 也是一个 ∇-点。

□

现在我们将证明，∇-点总是 Daugavet 点或单位球中的强暴露点。

定理 2.3. 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x \in S_X$ 是一个 ∇-点。那么，x 要么是 Daugavet 点，要么是 B_X 中的强暴露点。

证明. 假设 x 不是 B_X 中的强暴露点。由引理2.1，要证明 x 是 Daugavet 点，只需证明 x 是一个 $\mathfrak{D}$-点。因此，固定 α、$\varepsilon > 0$ 和 $x^* \in D(x)$，并且不妨设 $\alpha < 1/2$。我们要证明存在 $y \in S(x^*、\ \alpha)$，使得 $\|x - y\| \geqslant 2 - \varepsilon$。根据假设，存在 $\beta \in (0、\ \alpha)$，使得对于每个 $\gamma > 0$，都有 $\operatorname{diam}\big(S(x^*, \gamma)\big) > 4\beta$。因此，取满足以下条件的 $\gamma > 0$：

$$1 - \frac{\alpha - \gamma}{2} < \frac{\beta}{\gamma + \beta},$$

并选取 $z \in B_X$ 使得 $x^*(z) > 1 - \gamma$ 且 $\|x - z\| \geqslant 2\beta$。然后取 $y^* \in \frac{1}{2}S_{X^*}$ 使得$y^*(z) - y^*(x) \geqslant \beta$，并固定 $\lambda \in (0, 1)$ 使得

$$\lambda(1 + \alpha - \gamma) + (1 - \lambda)y^*(z) = 1.$$

注意

$$\lambda = \frac{1 - y^*(z)}{1 + \alpha - \gamma - y^*(z)} = 1 - \frac{\alpha - \gamma}{1 + \alpha - \gamma - y^*(z)} < 1 - \frac{\alpha - \gamma}{2} < \frac{\beta}{\gamma + \beta}.$$

令 $z^* = \lambda x^* + (1 - \lambda)y^*$。则

$$\begin{aligned} z^*(x) &= \lambda x^*(x) + (1 - \lambda)y^*(x) \leqslant \lambda + (1 - \lambda)(y^*(z) - \beta) \\ &= \lambda + 1 - \lambda(1 + \alpha - \gamma) - (1 - \lambda)\beta = 1 - \lambda\alpha + \lambda\gamma + \lambda\beta - \beta < 1 - \lambda\alpha \end{aligned}$$

and

$$z^*(z) = \lambda x^*(z) + (1 - \lambda)y^*(z) > \lambda(1 - \gamma) + 1 - \lambda(1 + \alpha - \gamma) = 1 - \lambda\alpha.$$

由于 x 是一个 ∇-点，存在 $y \in B_X$ 使得 $z^*(y) > 1 - \lambda\alpha$ 且 $\|x - y\| \geqslant 2 - \varepsilon$。现在$y \in S(x^*, \alpha)$，因为

$$\lambda x^*(y) = z^*(y) - (1 - \lambda)y^*(y) > (1 - \lambda\alpha) - (1 - \lambda) = \lambda(1 - \alpha),$$

因此证毕。 □

利用前面的结果，我们现在可以证明本节的主要定理。

定理 2.4. 维数为 $\dim X > 1$ 的巴拿赫空间 X 具有 DPr，当且仅当其单位球面上的每个元素都是 ∇-点。

证明。由于每个 Daugavet 点都是 ∇-点，一个方向显然成立。因此，假设每个 $x \in S_X$ 元素都是 ∇-点。为了证明 X 具有 DPr，现在只需证明 X 具有局部直径二性质（即 B_X 的每个切片直径都为二）。事实上，这样一来， B_X 就不会有强暴露点；根据定理 2.3，单位球面上的所有元素都是 Daugavet 点。

因此，设 $S := S(x^*, \alpha)$ 是单位球的一个切片。由于 $\dim X > 1$，存在 $x \in S \cap S_X$ 使得 $x^*(x) < 1$。设 $\gamma \in (0, \alpha)$ 满足 $x^*(x) < 1 - \gamma$。于是 $x \notin S(x^*, \gamma)$，从而 $\sup_{y \in S(x^*,\ \gamma)} \|x - y\| = 2$，因为 x 是一个 ∇-点。特别地，由于 $S(x^*, \gamma) \subset S$ 且 $x \in S$，我们得到 S 的直径为 2，且 X 具有局部直径二性质，因而具有 DPr。□

注 2.5. 类似于 [3, 引理 2.2], ，容易证明，巴拿赫空间 X 单位球面中的点 x 是一个 ∇-点，当且仅当算子 $T := x^* \otimes x$ 对每个不属于 $D(x)$ 的 $x^* \in S_{X^*}$ 都满足 Daugavet 方程 $\|Id - T\| = 2$。因此，定理 2.4 可以改述为：维数大于或等于 2 的巴拿赫空间具有 DPr，当且仅当每个不是投影的秩一范数为一算子都满足 Daugavet 方程。

本节最后，我们陈述如下显而易见的 ∇-类比结果，并汇集该结果的一些应用： [14, 命题 3.1]

命题 2.6. 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x \in S_X$ 是一个 ∇-点。那么，对于 B_X 中满足 $y \neq x$的每个凹陷点 y，都有 $\|x - y\| = 2$。

在 [16], 中给出了一个具有 DPr 的严格凸赋范空间的例子。然而，该空间并不完备，具有 DPr 的严格凸巴拿赫空间是否存在，仍是一个开放问题。 [19, 问题 7.5] 中也曾提出，能否给出一个含有 Daugavet 点的严格凸巴拿赫空间。在下面的结果中，我们注意到，由命题 2.6 可立即得出：严格凸空间若要包含一个 ∇- 点，其单位球中除该点及其对径点外，不能有其他凹陷点。特别地，具有 Radon–Nikod´ym 性质的严格凸空间不能包含 ∇-点。

推论 2.7. 设 X 是严格凸空间，且 $x \in S_X$。如果 x 是一个 ∇-点，那么 $\operatorname{dent} B_X \subset \{\pm x\}$。

证明. 由于 X 是严格凸的，我们有

$$\{y \in B_X : \|x - y\| = 2\} = \{-x\}$$

对每个 $x \in S_X$都成立。因此，如果 x 是一个 ∇-点，那么由命题 2.6 可知， B_X 中唯一可能的凹陷点是 $\pm x$。□

回顾一下，若巴拿赫空间 X 中的每个点都是弱强极端的（亦称保持极端），则称该空间为弱中点局部一致凸（wMLUR）。文献 [2], 中构造了具有 DD2P 的 MLUR（因此也是 wMLUR）巴拿赫空间。我们不知道 [2, 定理 2.3] 中的空间X_D 是否有任何一个包含 Daugavet 点，但请注意，在此背景下，只需证明其中一个空间包含 ∇-点即可。

命题 2.8. 设 X 是一个无限维 wMLUR 巴拿赫空间。那么， X 中的每个 ∇-点都是超达维特点。

证明. 根据肖凯引理，对于任意给定巴拿赫空间的单位球中保持极端的点，切片构成相对弱拓扑下的邻域基。由此立即可知，wMLUR 空间 X 中的每个 ∇-点都是“超 ∇-点”，因此，正如前文所述，它是超 Daugavet 点。

□

最后，回顾一下，在具有 Radon–Nikod´ym 性质的巴拿赫空间中，每个切片都包含一个凹陷点。因此，我们立即得到，在这些空间中，关于∇-点的如下刻画。

命题 2.9. 设 X 是一个具有 Radon–Nikod ´ym 性质的巴拿赫空间，且设 $x \in S_X$。那么，当且仅当对于 B_X 中满足 $y \neq x$ 的每个凹陷点 y，都有 $\|x-y\| = 2$ 时，x 才是 X 中的一个 ∇-点。

与 Daugavet 点类似（见 [24, 定理 2.1]），这一刻画在每个 Lipschitz 自由空间中也成立。

命题 2.10. 设 M 为一个度量空间，且 $\mu \in S_{\mathcal{F}(M)}$。那么，$\mu$ 是一个 ∇-点，当且仅当对于 $B_{\mathcal{F}(M)}$ 中满足 $\nu \neq \mu$ 的每个凹陷点 ν，都有 $\|\mu-\nu\| = 2$。

证明. 一个方向由命题 2.6 得出。因此，假设对于满足 $\nu \neq \mu$ 的 $B_{\mathcal{F}(M)}$ 中的每个凹陷点 ν，都有 $\|\mu-\nu\| = 2$。固定 $\varepsilon > 0$ 以及一个切片 $S(f, \alpha)$，使得 $\mu \notin S(f, \alpha)$。如果 f 是局部的，那么根据 [14, 定理 2.6]，存在 $m_{uv} \in S(f, \alpha)$，使得 $\|\mu - m_{uv}\| \geqslant 2-\varepsilon$。如果 f 不是局部的，那么根据 [25, 命题 2.7]，存在一个凹陷点 $m_{uv} \in S(f, \alpha)$；由假设可知 $\|\mu - m_{uv}\| = 2$。因此，μ 是一个 ∇-点。□

3. ∇-points in classical Banach spaces

3.1. 绝对和。回顾一下，范数 N 在 $\mathbb{R}^2$ 上称为绝对范数，若 $N(a,b) = N(|a|,|b|)$ 对任意 $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ 均成立；若 $N(0,1) = N(1,0) = 1$，则称为归一化范数。若 X 和 Y 是巴拿赫空间，且 N 是 $\mathbb{R}^2$ 上的绝对归一化范数，则将 X 与 Y 的绝对和记为 $X \oplus_N Y$，即巴拿赫空间 $(X \times Y, \|\cdot\|)$，其中

$$\|(x,y)\| = N(\|x\|, \|y\|) \text{ for every } (x,y) \in X \times Y.$$

特别地，若 $N := \|\cdot\|_p$ 对某些 $p \in [1,\infty]$ 成立，则简记 $X \oplus_p Y$ 为 X 与 Y 的 ℓ_p-和。

巴拿赫空间绝对和中的 Daugavet 点研究始于 [3]，并于 [11] 完成。特别地，回顾一下，当 $1 < p < \infty$ 时，没有任何巴拿赫空间的 ℓ_p-和含有 Daugavet 点；更一般地，若 N 具有 [3, 定义 4.4] 中的性质 (α)，则对任意 X 和 Y，绝对和 $X \oplus_N Y$ 不含 Daugavet 点。此外还要回顾，Daugavet 点可以很好地通过 ℓ_1-和及 ℓ_∞-和传递；更一般而言，对于 A-八面体范数，也有正向传递结果，参见 [11, 第 2 节和第 3] 节。

正如我们在 [3, 第 4] 节 Δ 中所注意到的，相较于 Daugavet 点，Δ 点对于这种运算要灵活得多，因此，∇ 条件并不是在巴拿赫空间的绝对和中阻碍 Daugavet 点存在的条件。事实上，很容易验证，只要存在此类阻碍，阻止这些点存在的就是 ∇ 条件。但我们还能进一步说明。实际上，我们将证明，在巴拿赫空间的绝对和中，Daugavet 点与 (1 点只有在它们分别与 0)、(0 或 1)、ℓ_1^2 中的点相关，或者与 (1、1) 中的点相关时，才可能不同。

这些点的特殊性在有限维例子中显而易见。事实上，我们在例 1.5 中看到，(e_i) 中 ℓ_1^n 的单位向量基的每个元素都是 ∇ 点，因此，形如 $(x, 0)$ 或 $(0, y)$ 的元素，在 $x \in S_X$ 且 $y \in S_Y$ 的情况下，可以是 ∇ 点，而在 ℓ_1 和中却不是 Daugavet 点。相反，点 $\frac{1}{2}(e_1+e_2)$ 在 ℓ_1^2 中不是 ∇ 点，因此，关于点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 的两个 ∇ 点的 ℓ_1 和未必是 ∇ 点。同样，下面的例子表明，形如 (x, y) 且 $x \in S_X$、$y \in S_Y$ 的元素可以是 ∇ 点，而在 ℓ_∞ 和中却不是 Daugavet 点；另一方面，0 与一个 ∇ 点的 ℓ_∞ 和未必是 ∇ 点，因为 e_1 在 ℓ_∞^2 中不是 ∇。

例 3.1. 对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个 $\theta := (\theta_i) \in \{-1,1\}^n$，我们有 $\sum_{i=1}^n \theta_i e_i$ 是 ℓ_∞^n 中的一个 ∇-点。

因此，我们先证明：只要底层的绝对范数既不等于 ℓ_1-范数，也不等于 ℓ_∞-范数，Daugavet 点与 ∇-点的概念就相同。

定理 3.2. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间，N 是一个不同于 ℓ_1-范数和 ℓ_∞-范数的绝对归一化范数，且 $(x,y) \in S_{X \oplus_N Y}$。那么 (x,y) 是 ∇ 中的一个 $X \oplus_N Y$ 点，当且仅当它是一个 Daugavet 点。

证明. 由于每个 Daugavet 点都是一个 ∇点，只需证明：若假设 $(x,y)\in S_{X\oplus_N Y}$是一个 ∇点，则它是一个 Daugavet 点。因此，假设 $(x,y)\in S_{X\oplus_N Y}$是一个∇点。我们先证明，若 $x\neq 0$，则 $x/\|x\|$ 是一个 Daugavet 点。

首先注意，如果 $0<\|x\|<1$，那么我们实际上可以直接套用 [11, 定理 3.1]的证明。事实上，其中涉及的关键切片由如下形式的泛函定义$f:=(x^*,0)$，其中 $x^*\in S_{X^*}$。但是，由于根据假设我们有 $f(x,y)\leqslant\|x\|<1$，取足够小的参数 $\delta>0$，就能将 (x,y) 排除在相应的切片之外，此时便可用 ∇-条件代替 Daugavet 条件。细节留给读者。

现在假设 $\|x\|=1$。那么 $\|y\|<1$，因为 N 不同于 ℓ_∞-范数。固定$x^*\in S_{X^*}$和 $\alpha>0$。接着令 $y^*\in S_{Y^*}$满足 $y^*(y)\leqslant 0$，并令 $f:=(x^*,y^*)$。由于N不同于 ℓ_1-范数，我们有 $\|f\|>1$。令 $\varepsilon\in(0,1]$满足 $\|f\|>1+\varepsilon$。根据[11,引理 1.4]，存在 $\delta\in\big(0,\varepsilon\alpha\big)$使得 $\|y\|<1-\delta$, $\|f\|>1+\varepsilon+\delta$，并且对于每个$p,q,r\geqslant 0$，如果

$$2-\delta\leqslant N(p,q)\leqslant N(r,q)\leqslant 2\quad\text{and}\quad q<2-\delta,$$

于是 $|p-r|<\varepsilon^2$。由于 $y^*(y)\leqslant 0$，我们有 $f(x,y)\leqslant x^*(x)\leqslant 1$，因此，由于 (x,y)是一个 ∇-点，存在 $(u,v)\in B_{X\oplus_N Y}$使得 $f(u,v)>\|f\|-\delta$且 $\big\|(x,y)-(u,v)\big\|\geqslant 2-\delta$。于是

$$\|u\|\geqslant x^*(u)=f(u,v)-y^*(v)>\|f\|-\delta-\|v\|\geqslant\|f\|-\delta-1\geqslant\varepsilon.$$

我们还有

$$x^*(u)>\|f\|-\delta-\|v\|\geqslant\|x^*\|\|u\|+\|y^*\|\|v\|-\delta-\|v\|=\|u\|-\delta\geqslant\|u\|-\varepsilon\alpha\geqslant\|u\|(1-\alpha),$$

因此 $u/\|u\|\in S(x^*,\alpha)$。此外

$$2-\delta\leqslant N\big(\|x-u\|,\|y-v\|\big)\leqslant N\big(\|x\|+\|u\|,\|y-v\|\big)\leqslant 2$$

且 $\|y-v\|\leqslant\|y\|+\|v\|<2-\delta$。因此

$$\big|\|x\|+\|u\|-\|x-u\|\big|<\varepsilon^2<\varepsilon\|u\|,$$

and

$$\begin{aligned}\Big\|x-\frac{u}{\|u\|}\Big\|&\geqslant\frac{1}{\|u\|}\|x-u\|-\Big(\frac{1}{\|u\|}-1\Big)\|x\|\\&\geqslant\frac{1}{\|u\|}\big(\|x\|+\|u\|-\varepsilon\|u\|\big)-\Big(\frac{1}{\|u\|}-1\Big)\|x\|\\&=2-\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 x 是一个 Daugavet 点。类似地，我们可以证明，若 $y\neq 0$，则 $y/\|y\|$是一个 Daugavet 点。综上，根据第 [3, 节中的观察结果可知，(x,y) 是$X\oplus_N Y$中的一个 Δ-点；又由于根据假设它也是 ∇，我们推得 (x,y) 是一个 Daugavet 点，正如我们所希望的那样。□

由此，我们立即可以将 [3] 和 [11] 中的结果推论为：具有 $p\in(1、\infty)$ 的巴拿赫空间的 ℓ_p-和（以及当 N具有性质(α)时巴拿赫空间的 N-和）不含 ∇-点；此外，对于不同于 ℓ_1-范数和 ℓ_∞-范数的 A-八面体范数，已有关于 ∇-点的刻画，例如参见 [11,定理 2.2 和 3.1]。

作为本节的总结，现在只需对 ℓ_1-和与 ℓ_∞-和进行具体研究。对于 ℓ_1-和，我们有以下结论。

命题 3.3. 设 X 和 Y为巴拿赫空间，且令 $x\in S_X$。那么， x 是 X中的一个 ∇-点，当且仅当 $(x,0)$ 是 $X\oplus_1 Y$中的一个 ∇-点。

证明。设 $Z:=X\oplus_1 Y$，先假设 x 是 X 中的一个 ∇-点。固定 $\varepsilon>0$，并令$S:=S(B_Z,f,\alpha)$，其中 $f:=(x^*,y^*)\in S_{Z^*}$且 $\alpha>0$。然后假设 $(x,0)\notin S$。我们分两种情况讨论：

(a) 若 $\|x^*\|=1$，则 $x\notin S(B_X,x^*,\alpha)$。因此存在一个 $u\in S(B_X,x^*,\alpha)$，使得 $\|x-u\|\geqslant 2-\varepsilon$。现在 $(u,0)\in S$且 $\|(x,0)-(u,0)\|_1\geqslant 2-\varepsilon$。

(b) 若 $\|x^*\| < 1$，则 $\|y^*\| = 1$。求出 $y \in S_Y$，使得 $y^*(y) > 1 - \alpha$。于是 $(0, y) \in S$ 且 $\|(x, 0) - (0, y)\|_1 = \|x\| + \|y\| = 2$，因此证毕。

反过来，假设 $(x, 0)$ 是 Z 中的一个 ∇-点。固定 $\varepsilon > 0$，并令 $S := S(B_X, x^*, \alpha)$，其中 $x^* \in S_{X^*}$ 且 $\alpha > 0$。接着假设 $x \notin S$。令 $\delta = \min\{\alpha, \varepsilon/2\}$。于是 $(x, 0) \notin S(B_Z, f, \delta)$，其中 $f := (x^*, 0) \in S_{Z^*}$。由于 $(x, 0)$ 是 Z 中的一个 ∇-点，我们可以找到 $(u, v) \in S(B_Z, f, \delta)$，使得 $\|x - u\| + \|v\| \geqslant 2 - \delta$。于是 $u \in S(B_X, x^*, \delta) \subset S(B_X, x^*, \alpha)$。特别地，$\|v\| = 1 - \|u\| < \delta$，因此 $\|x - u\| \geqslant 2 - 2\delta \geqslant 2 - \varepsilon$。□

命题 3.4. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间，设 $x \in S_X$ 和 $y \in S_Y$，并设 a、$b > 0$ 满足 $a + b = 1$。若 $(ax$、$by)$ 是 $X \oplus_1 Y$ 中的一个 ∇-点，则 x 和 y 都是 Daugavet 点。

证明. 设 $Z := X \oplus_1 Y$，并假设 $(ax$、$by)$ 是 Z 中的一个 ∇-点。注意，由于 a、$b > 0$，我们有 $(ax$、$by)$ 不是 B_Z 中的极端点，因此不是强暴露的。所以根据定理 2.3，$(ax$、$by)$ 实际上是 Z 中的一个 Daugavet 点。由 [11, 定理 3.1] 可知，x 和 y 分别是 X 和 Y 中的 Daugavet 点。□

最后，对于 ℓ_∞-和，我们有如下结果。其中一个方向显然成立，另一个方向与 [11, 定理 3.2] 类似。细节留给读者。

命题 3.5. 设 X, Y 为巴拿赫空间，并设 $x \in B_X$ 和 $y \in B_Y$。那么，(x, y) 是 $X \oplus_\infty Y$ 中的一个 ∇-点，当且仅当满足以下两个条件之一：

(i) x 是一个 Daugavet 点，或 y 是一个 Daugavet 点；(ii) x 和 y 都是 ∇-点。

3.2. 函数空间。设 (Ω, Σ, μ) 是一个测度空间。众所周知，空间 $L_1(\mu)$ 具有 Daugavet 性质，当且仅当 μ 不含原子（例如参见 [27, 第 2 节，例 (b)]）。事实上，[19, 命题 4.12] 中指出，这实际上等价于 $L_1(\mu)$ 具有强直径 2 性质。基于 [3, 定理 3.1], , [19, 推论 4.1] 中证明了以下结果。

P命题 3.6. 设 $f \in S_{L_1(\mu)}$。那么以下断言等价：

(i) f 是超达维特点；(ii) f 是一个 Δ-点；(iii) f 的支撑不含原子。

如果 μ 含有原子，那么我们还可以证明，$L_1(\mu)$自然包含不是 Daugavet 点的 ∇-点，而且这些点恰好是由某个原子上的归一化示性函数及其相反数给出的点，从而自然地推广了例 1.5。

命题 3.7. 设 $f \in S_{L_1(\mu)}$，并假设 f 的支撑包含一个原子 A。那么，f 是一个 ∇-点，当且仅当 $f = \pm \frac{\mathbb{I}_A}{\mu(A)}$。

证明. 如果 supp f 包含一个原子 A，那么要么 $f = g + \theta\alpha_{\mathbb{I}_A}$ 满足 $g \in L_1(\mu)$ 非零，$\theta \in \{-1$、$1\}$ 和 $\alpha \in \left(0$、$\frac{1}{\mu(A)}\right)$；要么 $f = \frac{\theta}{\mu(A)}\mathbb{I}_A$ 满足 $\theta \in \{-1$、$1\}$。在第一种情况下，我们有

$$\left\| f - \frac{\theta}{\mu(A)}\mathbb{I}_A \right\| = \int_{\Omega\setminus A} |g|\, d\mu + (1 - \alpha\mu(A)) = 2 - 2\alpha\mu(A) < 2;$$

因此，f 到 $B_{L_1(\mu)}$ 中一个不同于 f 的凹陷点的距离严格小于 2，所以根据命题 2.6，f 不是一个 ∇-点。在第二种情况下，注意到 $f = (0$、$1)$ 属于巴拿赫空间 $L_1(\mu_{|\Omega\setminus A}) \oplus_1 \mathbb{R} \equiv L_1(\mu)$，因此命题 3.3 推出 f 是一个 ∇-点。

□

设 K 是一个紧豪斯多夫空间。众所周知，$C(K)$ 具有 Daugavet 性质，当且仅当 K 没有孤立点（例如参见 [27, 第 2 节，例 (a)]）。基于 [3,定理 3.4], , 以下结果已在 [19, 推论 4.3]中得到证明。

命题 3.8. 设 $f \in S_{C(K)}$。则以下断言等价：

(i) f 是一个超达维特点；(ii) f 是一个 Δ-点；
(iii) f 在 K的一个聚点处取得其范数。

我们在例 3.1 中看到，与 ℓ_1^n类似，空间 ℓ_∞^n 包含许多 ∇点。但与无限维 $L_1(\mu)$情形不同，我们现在将证明，命题 3.8 也给出了无限维 $C(K)$空间中 ∇点的刻画，因此在这一背景下，所有直径概念都相同。

命题 3.9. 设 K 是一个无限紧豪斯多夫空间。若函数 $f \in S_{C(K)}$ 在 K的某个聚点处不取到其范数，则它不是一个 ∇点。

证明. 考虑集合 $H := \{x \in K : |f(x)| = 1\}$。由于 K 是紧的，且 f 在 K的某个聚点处不取到其范数，因此集合 H 是有限的，特别地，它在 K中既开又闭。因此， $|f|$ 在 $K\backslash H$上取到其最大值，并且存在 $\varepsilon \in (0,1]$使得 $\left|f_{|K\backslash H}\right| \leqslant 1-\varepsilon$。现在任取 $x_0 \in K\backslash H$，对每个 $x \in H$，令 $\theta_x :=$ 符号 $f(x)$。考虑泛函 $\varphi := \frac{1}{|H|+1}\left(\sum_{x\in H}\theta_x\delta_x + \delta_{x_0}\right) \in S_{C(K)^*}$。我们有

$$\varphi(f) = \frac{|H| + f(x_0)}{|H|+1} \leqslant \frac{|H|+1-\varepsilon}{|H|+1} = 1 - \frac{\varepsilon}{|H|+1},$$

因此 $f \notin S\left(\varphi, \frac{\varepsilon}{|H|+1}\right)$。现在任取 $g \in S\left(\varphi, \frac{\varepsilon}{|H|+1}\right)$，并选取某个 $z \in K$。若 $z \notin H$，则 $|f(z)-g(z)| \leqslant |f(z)| + |g(z)| \leqslant 2-\varepsilon$。否则，

$$\theta_z g(z) = (|H|+1)\left(\varphi(g) - \left(\varphi(g) - \frac{\theta_z g(z)}{|H|+1}\right)\right) > |H| + 1 - \varepsilon - |H| = 1-\varepsilon,$$

因此，

$$|f(z)-g(z)| = |\theta_z - g(z)| = |1-\theta_z g(z)| < \varepsilon \leqslant 1.$$

于是 $\|f-g\| \leqslant 2-\varepsilon$，且 f 不是一个 ∇-点。

□

注 3.10。

(i) 设 L 是一个无限的局部紧豪斯多夫空间。我们可以类似地证明，若函数 $f \in S_{C_0(L)}$ 在 L的某个聚点处不取到其范数，则它不是一个 ∇-点。特别地，若 L没有聚点，则 $C_0(L)$不含 ∇-点。(ii) 若 X 是一个 L_1-预对偶，则 X^{**} 是一个 $C(K)$ 空间。因此，在 X中，所有直径概念——包括 ∇-点的概念——都一致。这些点的刻画见 [20, 定理 3.2]。

3.3. 射影张量积。巴拿赫空间射影张量积中 Δ点（分别为 Daugavet 点）的传递性，最早由 [18] （分别由 [6]）研究。我们在此总结这两篇论文中的结果：

命题 3.11。设 X 和 Y 为巴拿赫空间，且 $x_0 \in S_X$ 和 $y_0 \in S_Y$。
(a) 若 x_0 是一个 Δ点，则对每个 $y \in S_Y$ [18, , $x_0 \otimes y$ 都是 $X\widehat{\otimes}_\pi Y$中的 Δ点，见注 5.4]。
(b) 若 $x_0 \otimes y_0$ 是 $X\widehat{\otimes}_\pi Y$中的 Δ点，且 y_0 是强暴露点，则 x_0 是一个 Δ点，见命题 2.12(a)]。(c) 若 x_0 和 y_0 都是 Daugavet 点，则 $x_0 \otimes y_0$ 是 $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ [6,中的 Daugavet 点，见命题 2.12(b)]。(d) 若 $x_0 \otimes y_0$ 是 $X\widehat{\otimes}_\pi Y$中的 Daugavet 点，且 y_0 是凹陷点，则 x_0 是一个 Daugavet 点，见命题 2.12(c)]。

本小节旨在研究 ∇-点的类似稳定性结果。特别地，我们将证明，要得到 $x_0 \otimes y_0$ 是 [6, 命题 2.12，(b)], 中的 Daugavet 点，

只需假设其中一个点是 Daugavet 点，而另一个点是 ∇-点（见命题 3.14）。

我们首先指出下面这个简单的引理。对于 Daugavet 点方面的专家来说，它当然是众所周知的，但我们未能找到明确的出处。

引理 3.12. 设 X 为巴拿赫空间。若 $x \in S_X$ 是一个 Daugavet 点，则对于每个 B_X 的切片 S以及每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $y \in S$ 使得 $\|x \pm y\| \geqslant 2 - \varepsilon$。

证明. 设 x 是一个 Daugavet 点， S 是 B_X的一个切片，且 $\varepsilon > 0$。由于 x 是一个 Daugavet 点，˜，由备注 2.3], 可知，我们可以找到一个切片 $S \subset S$，使得

$$\|x - u\| \geqslant 2 - \varepsilon \qquad \text{for all } u \in \tilde{S}.$$

˜注意到 $-x$ 也是一个 Daugavet 点，因此我们可以找到一个 $y \in S$ 使得 $\| - x - y\| = \|x + y\| \geqslant 2 - \varepsilon$。因此， $\|x \pm y\| \geqslant 2 - \varepsilon$ 且 $y \in S$，正如我们所需。□

注记 3.13. 我们指出，引理 3.12 并不存在完整的 ∇ 类比。事实上，$(0, 1)$ 是 ∇-点，属于 ℓ_1^2，但若考虑 $B_{\ell_1^2}$ 的任意切片 S，使得 $(0, -1) \in S$，但 $(0, 1), (1, 0), (-1, 0) \notin S$，那么显然存在 $\varepsilon > 0$，使得对每个 $y \in S$ 都有 $\|(1, 0) + y\| \leqslant 2 - \varepsilon$。然而，对于 ∇- 点 x，以及既不包含 x 也不包含 $-x$ 的切片，该结论确实成立。

命题 3.14. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间。若 $x \in S_X$ 是 Daugavet 点，且 $y \in S_Y$ 是一个 ∇-点，则 $x \otimes y \in S_{X \hat{\otimes}_\pi Y}$ 是 Daugavet 点。

证明。我们沿用 [6, 命题 2.12，(b)]。令 $\varepsilon > 0$ 和 $S := S(B_{X \hat{\otimes}_\pi Y}, B, \alpha)$ 为任意切片。我们的目标是找到一个 $z \in S$，使得 $\|x \otimes y - z\| \geqslant 2 - \varepsilon$。取 $x_0 \in B_X$ 和 $y_0 \in B_Y$，使得 $B(x_0, y_0) > 1 - \alpha/2$.

首先考虑以下切片

$$S_1 := \left\{ x \in B_X \colon B(x, y_0) > \sup_{u \in B_X} B(u, y_0) - \frac{\alpha}{4} \right\}.$$

由于 x 是 Daugavet 点，根据引理 3.12，我们可以找到 $u_1 \in S_1$，使得 $\|x \pm u_1\| \geqslant 2 - \varepsilon$。现在看这个切片

$$S_2 := \left\{ y \in B_Y \colon B(u_1, y) > \sup_{v \in B_Y} B(u_1, v) - \frac{\alpha}{4} \right\}.$$

我们考虑两种情况：(a) $y \in S_2$ 和 (b) $y \notin S_2$。

(a) 假设 $y \in S_2$。那么我们可以取 $z := u_1 \otimes y$。事实上， $\|x \otimes y - u_1 \otimes y\| = \|x - u_1\| \cdot \|y\| \geqslant 2 - \varepsilon$ 并且

$$\begin{aligned} B(u_1, y) &> \sup_{v \in B_Y} B(u_1, v) - \frac{\alpha}{4} \\ &\geqslant B(u_1, y_0) - \frac{\alpha}{4} \\ &> \sup_{u \in B_X} B(u, y_0) - \frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha}{4} \\ &\geqslant B(x_0, y_0) - \frac{\alpha}{2} \\ &> 1 - \alpha. \end{aligned}$$

因此， $z \in S$ 和 $\|x \otimes y - z\| \geqslant 2 - \varepsilon$ 正如我们所希望的那样。

（b）假设 $y \notin S_2$。那么，由于 y 是一个 ∇-点，我们可以找到 $v_2 \in S_2$ 使得 $\|y - v_2\| \geqslant 2 - \varepsilon$。与（a）中类似的计算表明， $B(u_1, v_2) > 1 - \alpha$，也就是说， $z := u_1 \otimes v_2 \in S$。最后，我们也来证明 $\|x \otimes y - z\| \geqslant 2 - \varepsilon$。

由于 $\|x + u_1\| \geqslant 2 - \varepsilon$ 和 $\|y - v_2\| \geqslant 2 - \varepsilon$，我们可以找到 $x^* \in S_{X^*}$ 和 $y^* \in S_{Y^*}$，使得

$$x^*(x + u_1) \geqslant 2 - \varepsilon \qquad \text{and} \qquad y^*(y - v_2) \geqslant 2 - \varepsilon.$$

因此， $x^*(x)$、 $x^*(u_1)$、 $y^*(y)$、 $y^*(-v_2) \geqslant 1-\varepsilon$。定义双线性算子 $B_0(x$、 $y):=x^*(x)y^*(y)$ ，对所有 $x \in X$ 和 $y \in Y$均成立。于是 $\|B_0\|=1$ 和

$$\begin{aligned}\|x\otimes y-u_1\otimes v_2\| &\geqslant B_0(x\otimes y-u_1\otimes v_2)\\ &= x^*(x)y^*(y)-x^*(u_1)y^*(v_2)\\ &= x^*(x)y^*(y)+x^*(u_1)y^*(-v_2)\\ &\geqslant (1-\varepsilon)^2+(1-\varepsilon)^2=2(1-\varepsilon)^2.\end{aligned}$$

因此， $x\otimes y$ 是一个 ∇-点。 □

尽管我们不知道当初等张量的两个分量都是 ∇-点时，该初等张量是否也是一个 ∇-点，但至少可以说，这样的点必须与单位球中除其自身以外的所有凹陷点相距甚远。

命题 3.15. 设 X 和 Y 为巴拿赫空间。若 $x \in S_X$ 和 $y \in S_Y$ 是 ∇-点，则对每个满足 $z \neq x\otimes y$的凹陷点 $z \in B_{X\widehat{\otimes}_\pi Y}$，都有$\|x\otimes y-z\|=2$ 。

证明. 设 z 是 $B_{X\widehat{\otimes}_\pi Y}$中的一个凹陷点，且满足 $z \neq x\otimes y$。根据 [26, 推论 4], ，我们知道 $z=u\otimes v$，其中 u 是 B_X 的凹陷点， v 是 B_Y的凹陷点。我们将分情况论证得出结论：

(1) 首先假设 $x \neq u$ 和 $y=v$ （ $x=u$ 和 $y \neq v$ 的情形类似）。由于 x 是一个 ∇-点，根据命题 2.6，我们有 $\|x-u\|=2$。因此，

$$\|x\otimes y-z\|=\|x\otimes y-u\otimes y\|=\|x-u\|\cdot\|y\|=2.$$

(2) 现在假设 $x \neq u$ 和 $y \neq v$。

(a) 假设 $x=-u$ 和 $y=-v$。那么

$$\|x\otimes y-u\otimes v\|=\|(-u)\otimes(-v)-u\otimes v\|=2\|u\|\|v\|=2.$$

(b) 假设 $x \neq -u$ 和 $y=-v$ （ $x=-u$ 和 $y \neq -v$ 的情形类似）。由于 $-u$ 也是一个凹陷点，我们可以利用命题 2.6 得到 $\|x+u\|=2$。于是

$$\|x\otimes y-u\otimes v\|=\|x\otimes(-v)-u\otimes v\|=\|x+u\|\|v\|=2.$$

(c) 假设 $x \neq -u$ 和 $y \neq -v$。利用命题 2.6 两次，我们得到 t

$$\|x+u\|=2 \quad \text{and} \quad \|y-v\|=2.$$

令 $\varepsilon>0$。我们可以找到 $x^* \in S_{X^*}$ 和 $y^* \in S_{Y^*}$ ，使得

$$x^*(x+u) \geqslant 2-\varepsilon \qquad \text{and} \qquad y^*(y-v) \geqslant 2-\varepsilon.$$

因此， $x^*(x)$、 $x^*(u)$、 $y^*(y)$、 $y^*(-v) \geqslant 1-\varepsilon$。定义双线性算子 $B(r$、 $s):=x^*(r)y^*(s)$ ，对所有 $r \in X$ 和 $s \in Y$ 均成立。于是 $\|B\|=1$ 且

$$\begin{aligned}\|x\otimes y-u\otimes v\| &\geqslant B(x\otimes y-u\otimes v)\\ &= x^*(x)y^*(y)-x^*(u)y^*(v)\\ &= x^*(x)y^*(y)+x^*(u)y^*(-v)\\ &\geqslant (1-\varepsilon)^2+(1-\varepsilon)^2=2(1-\varepsilon)^2.\end{aligned}$$

因此， $\|x\otimes y-z\|=2$ ，正如我们所希望的那样。 □

注3.16。特别要注意，根据命题 2.9 可知，如果 $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ 具有拉东–尼科迪姆性质，那么只要 x 和 y 是 ∇-点， $x\otimes y$ 实际上就是 $X\widehat{\otimes}_\pi Y$ 中的一个 ∇-点。

现在我们来讨论命题 3.14 的逆命题。为此，我们陈述一个可用与 [14, 注 2.3] 类似的方法证明的引理，并将证明留给读者。

引理 3.17. 设 X 为一个巴拿赫空间，$x \in S_X$ 为 X中的一个 ∇-点，并设 $\varepsilon > 0$。如果 $\tilde{S}$是 B_X 的一个不包含 x的切片，那么存在 B_X 的一个切片 S 包含于 S 中，使得$\tilde{}$对每个 $y \in S$都有 $\|x - y\| > 2 - \varepsilon$。

注意，引理 3.17 给出如下结论：如果 $x \otimes y \in S_{X\hat{\otimes}_\pi Y}$ 是一个 ∇-点，S 是一个不包含 $x \otimes y$ 的 $B_{X\hat{\otimes}_\pi Y}$ 切片，并且 $\varepsilon > 0$，那么我们可以找到一个初等张量 $u \otimes v \in S$，使得 $\|x \otimes y - u \otimes v\| \geqslant 2 - \varepsilon$。

命题 3.18. 设 X 和 Y 是巴拿赫空间。若 $x \otimes y \in S_{X\hat{\otimes}_\pi Y}$ 是一个 ∇-点，且 y 是一个凹陷点，则 $x \in S_X$ 是一个 ∇-点。

证明. 我们沿用 [6, 命题 2.12, (c)]。设 $S(B_X、\ x^*、\ \alpha)$ 满足 $x \notin S(B_X、\ x^*、\ \alpha)$ 和 $\varepsilon > 0$。由于 y 是一个凹陷点，我们可以找到一个切片 $S(B_Y、\ y^*、\ \beta)$，使得 $y \in S(B_Y、\ y^*、\ \beta)$ 且 $\operatorname{diam}(S(B_Y、\ y^*、\ \beta)) \leqslant \varepsilon$。

对所有 $u \in X$ 和 $v \in Y$，定义双线性形式 $B(u, v) = x^*(u)y^*(v)$。考虑切片$S(B_{X\hat{\otimes}_\pi Y}, B, \gamma)$，其中 $\gamma = \min\{\alpha, \beta\}$。由于 $x \otimes y$ 是一个 ∇-点，且 $x \otimes y \notin S(B_{X\hat{\otimes}_\pi Y}, B, \gamma)$，根据引理 3.17，我们可以找到一个初等张量 $u_0 \otimes v_0 \in S(B_{X\hat{\otimes}_\pi Y}, B, \gamma)$，使得

$$\|x \otimes y - u_0 \otimes v_0\| \geqslant 2 - \varepsilon.$$

注意到

$$\begin{aligned} 2 - \varepsilon &\leqslant \|x \otimes y - u_0 \otimes v_0\| \\ &= \|(x - u_0) \otimes y + u_0 \otimes (y - v_0)\| \\ &\leqslant \|x - u_0\| + \|y - v_0\|. \end{aligned}$$

由于 $u_0 \otimes v_0 \in S(B_{X\hat{\otimes}_\pi Y}, B, \gamma)$，我们有

$$x^*(u_0)y^*(v_0) = B(u_0, v_0) > 1 - \gamma = 1 - \min\{\alpha, \beta\}.$$

因此，$x^*(u_0) > 1 - \alpha$ 和 $y^*(v_0) > 1 - \beta$，也就是说，$u_0 \in S(B_X, x^*, \alpha)$ 和 $v_0 \in S(B_Y, y^*, \beta)$。注意，$\|y - v_0\| < \varepsilon$，因为 $\operatorname{diam}(S(B_Y, y^*, \beta)) \leqslant \varepsilon$。最后，

$$\|x - u_0\| \geqslant 2 - \varepsilon - \|y - v_0\| > 2 - 2\varepsilon,$$

因此，x 是一个 ∇点，正如我们要证明的。 □

我们将以关于超 Δ点的一些结果，以及对超 Daugavet 点的一些观察结束本节。首先，我们证明超 Δ点很容易传递到射影张量积。

命题 3.19. 设 X 和 Y为巴拿赫空间。若 x 是一个超 Δ点，则对每个 $y \in S_Y$，$x \otimes y \in S_{X\hat{\otimes}_\pi Y}$都是一个超 Δ点。

证明. 设 $y \in S_Y$。由于 x 是一个超 Δ点，根据 [19, 命题 3.4，(2)], 存在一个(x_α) 网，它包含于 B_X 中，弱收敛到 x，且满足 $\|x_\alpha - x\| \to 2$。

取 $z_\alpha := x_\alpha \otimes y$。显然，$(z_\alpha) \subset B_{X\hat{\otimes}_\pi Y}$且

$$\|x \otimes y - x_\alpha \otimes y\| = \|x_\alpha - x\| \to 2.$$

最后，我们证明 z_α 弱收敛到 $x \otimes y$。事实上，设 $T \in (X\hat{\otimes}_\pi Y)^* = \mathcal{L}(Y, X^*)$。那么

$$T(x_\alpha \otimes y) = \langle Ty, x_\alpha \rangle \to \langle Ty, x \rangle = T(x \otimes y),$$

因为 x_α 弱收敛到 x，因此结论成立。 □

我们不知道超 Daugavet 点是否像 Daugavet 点那样能传递到射影张量积。不过，我们要指出，这些点也有一个类似于引理 3.12 的结果。

引理 3.20. 设 X 是一个巴拿赫空间，且 $x \in S_X$。若 x 是一个超 Daugavet 点，则对于 B_X 的任意相对弱开子集 V，以及任意 $\varepsilon > 0$，存在 $y \in V$ 使得 $\|x \pm y\| \geqslant 2 - \varepsilon$。特别地，对于每个 $y \in B_X$，我们可以在 S_X 中找到一个网 (y_a)，它弱收敛于 y，并且满足 $\|x \pm y_a\| \to 2$。

证明。设

$$\Delta_\varepsilon(x) := \{y \in B_X : \|x - y\| > 2 - \varepsilon\}.$$

在 [19, 命题 3.4] 中已经指出，集合 $\Delta_\varepsilon(x)$ 是 B_X 中的相对弱开子集。因此，由于 x 是一个超 Daugavet 点，我们得到 $W := V \cap \Delta_\varepsilon(x)$ 是 B_X 的一个非空相对弱开子集。于是 $-W \cap \Delta_\varepsilon(x)$ 也非空，且该集合中的任意元素 y 都满足$\|x \pm y\| > 2 - \varepsilon$。随后可以仿照 [19, 命题 3.4] 构造所需的网。□

4. 重赋范

我们的出发点是这样一个观察：每个巴拿赫空间都可以很容易地重新赋范，使其具有一个 ∇-点。事实上，由命题 3.3 和例 1.5 可立即得出，在任意给定巴拿赫空间的单位球上添加一个“ℓ_1-角”，便会自动产生一个 ∇-点。接下来，我们将把这一简单思路与 [9, 定理 2.4] 中所用重赋范方法的一个改编版本结合起来；该方法此前已用于 [1]，以构造一种对 ℓ_2 的重新赋范，使该空间及其对偶空间中都存在一个超Δ-点。

命题 4.1. 每个巴拿赫空间都可以重新赋范，使其具有一个 ∇-点。

证明. 对于有限维空间，该结论显然成立，因为正如我们在例 1.5 中已经看到的，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，ℓ_1^n 都包含一个 ∇-点。因此，设 X 是一个无限维巴拿赫空间。那么，对于 X的任意给定余维为 1 的子空间 Y，X 都与 $Y \oplus_1 \mathbb{R}$ 同构。由于 1 是 $\mathbb{R}$中的一个 ∇-点，由命题 3.3 可知，$(0, 1)$ 是 $Y \oplus_1 \mathbb{R}$中的一个 ∇-点，结论随即成立。

□

设 X 是一个具有 Schauder 基 (e_n)的巴拿赫空间。回顾一下，若对于每个 $x \in X$，级数 $x := \sum_{n\geqslant 1} a_n e_n$ 都无条件收敛，则称 (e_n) 为无条件的。按照 [5]，我们称 (e_n) 为 1-无条件的，如果对于每个 (a_n)，$(b_n) \in c_{00}$ 满足 $|a_n| \leqslant |b_n|$，都有

$$\left\| \sum_{n\geqslant 1} a_n e_n \right\| \leqslant \left\| \sum_{n\geqslant 1} b_n e_n \right\|.$$

下面的定理是本节的主要结果。

定理 4.2. 设 X 是一个无限维巴拿赫空间，具有无条件弱零 Schauder 基 (e_n) 及双正交泛函 (e_n^*)。则存在 X 上的一个等价范数 $|||\cdot|||$，使得

(i) e_1 是 $(X, |||\cdot|||)$ 中的一个超 Daugavet 点；(ii) e_1^* 是 $(E, |||\cdot|||)$ 中的一个弱* 超 Daugavet 点，其中 $E := \overline{\operatorname{span}}\{e_n^*\}$。

我们将分几个步骤证明定理 4.2。因此，从现在起，$\|\cdot\|$ 将是一个无限维巴拿赫空间，具有无条件弱零 Schauder 基 (e_n) 及双正交泛函 (e_n^*)。我们还将不失一般性地假设，相对于 X 的原范数，(e_n) 是归一化且 1-无条件的。为简便起见，提及这个特定范数时，我们将继续沿用前几节的记号。

设 $Y := \overline{\operatorname{span}}\{e_n\}_{n\geqslant 2}$，并设 A 为 Y 的正锥中所有有限支撑元素构成的集合。类似地，设 F 为 $\overline{\operatorname{span}}\{e_n^*\}_{n\geqslant 2}$ 的正锥中所有有限支撑元素构成的集合。

我们考虑等价范数 $|||\cdot|||$ on X，其单位球为

$$B_{(X,|||\cdot|||)} := \overline{\operatorname{conv}}\{\pm(e_1 + 2x) : x \in A \cap B_X\}.$$

由于 (e_n) 是 1-无条件的，每个有限支撑元素 $y \in B_Y$ 都可以写成 $y = y_+ - y_-$，其中 y_+、$y_- \in A \cap B_X$，由此立即可知 B_Y 包含于 $B_{(X,\ |||\cdot|||)}$。因此，

$$B_{Y\oplus_1\mathbb{R}e_1} = \operatorname{conv}(B_Y \cup \{\pm e_1\}) \subset B_{(X,|||\cdot|||)} \subset 3B_X,$$

且 $|||\cdot|||$ 确实是 X上的一个等价范数。

我们首先给出$B_{(E,\ |||\cdot|||)}$的几何描述，并推导范数 $|||\cdot|||$ 及其对偶范数的实用公式。

引理 4.3。空间 $(X, |||\cdot|||)$ 和空间 $(E, |||\cdot|||)$ 具有以下性质：

(i) 对每个具有有限支撑且满足 $z^* \in B_{(E,\ |||\cdot|||)}$ 的 $z^*(e_1) \geqslant 0$，存在 $\lambda \in [0,1]$ 和x^*，$y^* \in F \cap B_{X^*}$，它们具有不相交支撑，使得

$$z^* = \lambda(e_1^* - y^*) + (1-\lambda)\frac{1}{2}(x^* - y^*);$$

(ii) 空间 $(E, |||\cdot|||)$ 的单位球由下式给出

$$B_{(E,|||\cdot|||)} = \overline{\operatorname{conv}}\left\{ \pm (e_1^* - x^*), \frac{1}{2}(x^* - y^*) \colon x^*, y^* \in F \cap B_{X^*} \right\};$$

(iii) 对每个 $x \in X$，

$$|||x||| = \max\left\{ \left|e_1^*(x)\right|, \left|e_1^*(x) - \|x_+\|\right|, \left|e_1^*(x) + \|x_-\|\right|, \frac{1}{2}\big(\|x_+\| + \|x_-\|\big) \right\},$$

其中 x_+ 和 x_- 分别是 $x - e_1^*(x)e_1$ 的正部和负部；(iv) 对每个 $x^* \in E$，

$$|||x^*||| = \max\left\{ \left|x^*(e_1) + 2\|x_+^*\|\right|, \left|x^*(e_1) - 2\|x_-^*\|\right| \right\},$$

其中 x_+^* 和 x_-^* 分别是 $x^* - x^*(e_1)e_1^*$ 的正部和负部。

证明。为方便起见，我们先证明 (iv)，然后用它证明 (i) 和 (ii)。取定 $x^* \in E$，并令 x_+^* 和 x_-^* 分别为 $x^* - x^*(e_1)e_1^*$ 的正部和负部。于是 $x^* = x^*(e_1)e_1^* + x_+^* - x_-^*$。由于

$$B_{(X,|||\cdot|||)} = \overline{\operatorname{conv}}\{\pm(e_1 + 2x) \colon x \in A \cap B_X\},$$

我们得到

$$\begin{aligned} |||x^*||| &= \sup_{x \in A \cap B_X} \left|x^*(e_1 + 2x)\right| \\ &= \sup_{x \in A \cap B_X} \left|x^*(e_1) + 2x_+^*(x) - 2x_-^*(x)\right| \\ &= \max\left\{ \left|x^*(e_1) + 2\|x_+^*\|\right|, \left|x^*(e_1) - 2\|x_-^*\|\right| \right\}. \end{aligned}$$

最后一个等式在很大程度上依赖于这样一个事实：相对于原范数，(e_n) 是 1-无条件的。事实上，后者意味着

$$\|y^*\| = \sup\{y^*(x) : x \in A \cap B_X,\ \operatorname{supp} x \subset \operatorname{supp} y^*\}$$

对每个泛函 $y^* \in F$ 都成立。因此，由于 x_+^* 和 x_-^* 具有不相交支撑，这些泛函中的每一个都能在 $A \cap B_X$ 中找到一个范数化集，使另一个泛函在其上为零。

现在证明 (i)。固定具有有限支撑的 $z^* \in B_{(E,\ |||\cdot|||)}$ 和 $z^*(e_1) \geqslant 0$。令 z_+^* 和 z_-^* 分别为 $z^* - z^*(e_1)e_1^*$ 的正部和负部。如果 $z^*(e_1) = 1$，则由 (iv) 得到

$$\max\left\{ \left|1 + 2\|z_+^*\|\right|, \left|1 - 2\|z_-^*\|\right| \right\} = |||z^*||| \leqslant 1,$$

这意味着 $z_+^* = 0$ 和 $\|z_-^*\| \leqslant 1$。因此 $z^* = e_1^* - z_-^*$ 和 $z_-^* \in F \cap B_{X^*}$。

因此，假设 $z^*(e_1) \in [0,1)$。那么

$$z^* = z^*(e_1)e_1^* + z_+^* - z_-^* = z^*(e_1)\,(e_1^* - y^*) + \big(1 - z^*(e_1)\big)\frac{1}{2}\,(x^* - y^*)\,,$$

其中 $x^* = \frac{2}{1-z^*(e_1)} z_+^*$ 且 $y^* = \frac{2}{1+z^*(e_1)} z_-^*$。此外，

$$\max\left\{\left|z^*(e_1) + 2\|z_+^*\|\right|, \left|z^*(e_1) - 2\|z_-^*\|\right|\right\} = |||z^*||| \leqslant 1$$

因此

$$\frac{2\|z_+^*\|}{1 - z^*(e_1)} \leqslant 1 \quad \text{and} \quad \frac{2\|z_-^*\|}{1 + z^*(e_1)} \leqslant 1,$$

意为 $x^*, y^* \in F \cap B_{X^*}$。

接下来我们将证明 (ii)。由 (i) 可得

$$B_{(E,|||\cdot|||)} \subseteq \overline{\operatorname{conv}}\left\{ \pm (e_1^* - x^*), \frac{1}{2}(x^* - y^*) \colon x^*, y^* \in F \cap B_{X^*} \right\}.$$

由 (iv) 可得

$$|||e_1^* - x^*||| = \max\left\{\left|1 + 2\|0\|\right|, \left|1 - 2\|x^*\|\right|\right\} = 1$$

and

$$\frac{1}{2}|||x^* - y^*||| = \max\{\|x^*\|, \|y^*\|\} \leqslant 1$$

对所有 $x^*, y^* \in F \cap B_{X^*}$ 均成立，由此得到另一边的包含关系。

最后，让我们证明 (iii)。为此，我们先证明基 (e_n) 关于新范数也是单调的。于是，例如由 [5, 引理 3.2.3] 可得

$$|||x||| = \sup_{z^* \in B_{(E,|||\cdot|||)}} \left|z^*(x)\right|$$

对每个 $x \in X$ 都成立。因此，令 $n \in \mathbb{N}$，并令 P_n 为到 $\operatorname{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$ 上的投影。由于 (e_n) 关于原范数是 1-无条件的，因而是单调的，所以对每个 $x \in A \cap B_X$，都有 $P_n(x) \in A \cap B_X$。因此 $P_n(e_1 + 2x) = e_1 + 2P_n(x) \in B_{(X,\ |||\cdot|||)}$，由此显然可得$P_n\big(B_{(X,\ |||\cdot|||)}\big) \subseteq B_{(X,\ |||\cdot|||)}$。因此 $|||P_n||| \leqslant 1$，这正是我们想要的结论。

现在固定 $x \in X$，并令 x_+ 和 x_- 分别为 $x - e_1^*(x)e_1$ 的正部和负部。由 (ii) 可得

$$\begin{aligned}
|||x||| &= \sup_{z^* \in B_{(E,|||\cdot|||)}} \left|z^*(x)\right| \\
&= \max\left\{ \sup_{x^* \in F \cap B_{X^*}} |(e_1^* - x^*)(x)|, \frac{1}{2} \sup_{x^*, y^* \in F \cap B_{X^*}} |(x^* - y^*)(x)| \right\} \\
&= \max\left\{ \sup_{x^* \in F \cap B_{X^*}} \left|e_1^*(x) - x^*(x_+) + x^*(x_-)\right|, \frac{1}{2} \sup_{x^*, y^* \in F \cap B_{X^*}} \big(x^*(x_+) + y^*(x_-)\big) \right\} \\
&= \max\left\{ \left|e_1^*(x)\right|, \left|e_1^*(x) - \|x_+\|\right|, \left|e_1^*(x) + \|x_-\|\right|, \frac{1}{2}\big(\|x_+\| + \|x_-\|\big) \right\}.
\end{aligned}$$

再次强调，最后两个等式在很大程度上依赖于这样一个事实：相对于原范数，(e_n) 是 1-无条件的，因为后者意味着每个 $y \in A$ 都在集合上达到其范数

$$\{x^* \in F \cap B_{X^*} : \operatorname{supp} x^* \subset \operatorname{supp} y\},$$

并且特别是，x_+ 和 x_- 都存在一个 $F \cap B_{X^*}$ 中的赋范泛函，该泛函在另一个点处取值为零。□

特别要注意，对于每个 $x \in A \cap S_X$，都有 $|||x||| = 1$；对于每个$y \in A \cap B_X$，都有 $|||e_1 + 2y||| = 1$。此外，$S_{(X,\ |||\cdot|||)}$ 包含大量线段，稍后将证明它们非常有用。

推论 4.4. 对于任意具有不相交支撑的 $x \in A \cap S_X$ 和 $y \in A \cap B_X$，以及任意的 $\lambda \in [0, 1]$，我们有

$$|||\lambda x - (1 - \lambda)(e_1 + 2y)||| = 1.$$

证明. 固定具有不相交支撑的 $x \in A \cap S_X$ 和 $y \in A \cap B_X$，并固定 $\lambda \in [0、1]$。那么，根据引理 4.3 (iii)，我们有

$$|||\lambda x - (1-\lambda)(e_1 + 2y)||| = \max\left\{1-\lambda, 1, 1-\lambda, \frac{1}{2}\big(\lambda + 2(1-\lambda)\big)\right\} = 1.$$

□

类似地，注意到对于每个 $x^* \in F \cap S_{X^*}$，都有 $|||x^*||| = 2$；并且对于每个 $x^* \in F \cap B_{X^*}$，都有 $|||e_1^* - x^*||| = 1$。由这些观察，我们很容易就能推导出点 e_1 和 e_1^* 的一些直径性质。为方便读者，我们现在就证明以下两个推论。

推论 4.5. 点 e_1 是 $(X$ 中的一个超 Δ-点，而 e_1^* 是 $(E$ 中的一个弱* 超 Δ-点。

推论 4.6. 点 e_1 和 e_1^* 分别是 $(X$ 和 $|||\cdot|||)$ 中的 ∇-点 $y.$

推论 4.5 的证明。由于 (e_n) 是弱零的，因此我们有 $e_1 + 2e_n \to e_1$ 弱收敛。由推论 4.4 可得

$$|||e_1||| = |||e_1 + 2e_n||| = 1 \text{ and } |||e_1 - (e_1 + 2e_n)||| = 2\,|||e_n||| = 2$$

对每个 $n \geqslant 2$都成立。因此， e_1 是 $(X, |||\cdot|||)$中的一个超 Δ-点。

类似地， (e_n^*) 是弱* 零的，因此我们有 $e_1^* - e_n^* \to e_1^*$ 弱*。又因为对每个 $n \geqslant 2$, $|||e_1^* - (e_1^* - e_n^*)||| = |||e_n^*||| = 2$，所以可得 e_1^* 是 $(E, |||\cdot|||)$中的一个弱* 超 Δ-点。

□

推论 4.6 的证明。显然，$B_{(X,\ |||\cdot|||)}$ 等于以下集合的凸包的闭包

$$\{\pm e_1\} \cup \{\pm(e_1 + 2x) \colon x \in A \cap S_X\}.$$

因此，$B_{(X,\ |||\cdot|||)}$ 的每个切片都包含 $\pm e_1$，或对于某个 $x \in A \cap S_X$，包含 $\pm(e_1 + 2x)$。由推论 4.4 可得

$$|||e_1 - (e_1 + 2x)||| = 2\,|||x||| = 2 \text{ and } |||e_1 + (e_1 + 2x)||| = 2\,|||e_1 + x||| = 2$$

对每个 $x \in A \cap S_X$ 都成立，并且显然可得， e_1 是 $(X, |||\cdot|||)$ 中的一个 ∇-点。

从引理 4.3 的证明中也很容易看出，$B_{(E,\ |||\cdot|||)}$ 等于以下集合的凸包的闭包：

$$\{\pm e_1^*\} \cup \{\pm(e_1^* - x^*) \colon x^* \in S_{X^*}\} \cup \left\{\frac{1}{2}(x^* - y^*) : \ x^*, y^* \in F \cap S_{X^*},\ \operatorname{supp} x^* \cap \operatorname{supp} y^* = \varnothing\right\}.$$

利用引理 4.3 (iv)，可以很容易验证

$$|||e_1^* \pm (e_1^* - x^*)||| = \left|\left|\left| e_1^* - \frac{1}{2}(x^* - y^*) \right|\right|\right| = 2$$

对于支撑不相交的每个 $x^*, y^* \in F \cap S_{X^*}$ 都成立，因此如上所述可得， e_1^* 是 $(E, |||\cdot|||)$ 中的一个 ∇-点。

□

特别地，由推论 4.5 和 4.6 可直接得出， e_1 是 $(X, |||\cdot|||)$ 中的一个 Daugavet 点，而 e_1^* 是 $(E, |||.|||)$ 中的一个弱 * Daugavet 点。现在我们最终将证明，这些点分别是各自单位球中的超 Daugavet 点和弱* 超 Daugavet 点。

定理 4.2 的证明。我们先证明 (i)。取具有有限支撑的 $z \in B_{(X,|||\cdot|||)}$。我们将构造一个 $B_{(X,|||\cdot|||)}$ 中的序列 (w_n)，使得 $\|e_1 - w_n\| \to 2$，且 (w_n) 弱收敛到 z。

令 z_+ 和 z_- 分别为 $z - e_1^*(z)e_1$ 的正部和负部，并令 $\lambda := \frac{1+e_1^*(z)}{2} \in [0,1]$。然后定义

$$x := \begin{cases} \frac{1}{2\lambda} z_+ & \text{if } \lambda > 0, \\ 0 & \text{if } \lambda = 0, \end{cases} \quad \text{and} \quad y := \begin{cases} y = \frac{1}{2(1-\lambda)} z_- & \text{if } \lambda < 1, \\ 0 & \text{if } \lambda = 1. \end{cases}$$

注意，若 $\lambda = 0$，则 $e_1^*(z) = -1$；由引理 4.3 (iii) 可得 $z_+ = 0$。类似地，若 $\lambda = 1$，则 $z_- = 0$。因此，无论哪种情况，我们都有

$$z = \lambda(e_1 + 2x) - (1-\lambda)(e_1 + 2y).$$

由引理 4.3 (iii)，我们有 $\|z_+\| - e_1^*(z) \leqslant |||z||| \leqslant 1$，因此

$$\|x\| = \frac{1}{2\lambda}\|z_+\| \leqslant \frac{1 + e_1^*(z)}{2\lambda} = 1,$$

若 $\lambda \neq 0$。因此，对每个足够大的 $n \in \mathbb{N}$，都有 $\|x\| \leqslant 1$ 和 $\|x + e_n\| \geqslant \|e_n\| = 1$。于是存在 $a_n \in [0、1]$，使得 $x + a_n e_n \in S_X$。令 $w_n = z + 2\lambda a_n e_n$。根据构造，$w_n \in B_{(X,\ |||\cdot|||)}$；又由于 (e_n) 弱零，$w_n \to z$ 弱收敛。此外，$x + a_n e_n \in A \cap S_X$，并且当 $n \in \mathbb{N}$ 足够大时，$\operatorname{supp}(x + a_n e_n) \cap \operatorname{supp} y = \varnothing$，因此由推论 4.4 可得

$$|||e_1 - w_n||| = 2\,|||(1-\lambda)(e_1 + y) - \lambda(x + a_n e_n)||| = 2$$

如所需。最后，由于所有有限支撑元素构成的集合在 $B_{(X,|||\cdot|||)}$ 中稠密，这立即意味着，对于每个 $w \in B_{(X,|||\cdot|||)}$，都存在一个网 (w_α) in $B_{(X,|||\cdot|||)}$，它弱收敛于 w，并满足 $|||e_1 - w_\alpha||| \to 2$。因此，$e_1$ 是 $(X, |||\cdot|||)$ 中的超 Daugavet 点。

接下来证明 (ii)。取一个具有有限支撑的 $z^* \in B_{(E,|||\cdot|||)}$。我们将如上构造一个序列 (w_n^*) in $B_{(E,|||\cdot|||)}$，使得 $\|e_1^* - w_n^*\| \to 2$，且 (w_n^*) 弱收敛于 z^*。由于所有有限支撑泛函构成的集合在 $B_{(E,|||\cdot|||)}$ 中稠密，这将说明 e_1^* 是 $(E, |||\cdot|||)$ 中的弱超 Daugavet 点。

事实上，我们将证明 $\|e_1^* \pm w_n^*\| \to 2$，这使我们可以假设 $z^*(e_1) \geqslant 0$。于是由引理 4.3 (i)，存在 $\lambda \in [0,1]$ 和 $x^*, y^* \in F \cap B_{X^*}$，使得

$$z^* = \lambda(e_1^* - y^*) + (1-\lambda)\frac{1}{2}(x^* - y^*).$$

同样，当 $n \in \mathbb{N}$ 足够大时，$\|x^*\| \leqslant 1$ 和 $\|x^* + e_{2n}^*\| \geqslant \|e_{2n}^*\| = 1$。因此存在 $a_n \in [0,1]$，使得 $x^* + a_n e_{2n}^* \in S_{X^*}$。类似地，存在 $b_n \in [0,1]$，使得 $y^* + b_n e_{2n+1}^* \in S_{X^*}$。令

$$w_n^* = z^* + \frac{1-\lambda}{2} a_n e_{2n}^* - \frac{1+\lambda}{2} b_n e_{2n+1}^*.$$

由于 (e_n^*) 是弱* 零的，$w_n^* \to z^*$ 弱*。此外，当 $n \in \mathbb{N}$ 足够大时，$\operatorname{supp}(x^* + a_n e_{2n}^*) \cap \operatorname{supp}(y^* + b_n e_{2n+1}^*) = \varnothing$，因此由引理 4.3 (iv) 得

$$|||e_1^* - w_n^*||| = \left|\left|\left|(1-\lambda)e_1^* - \frac{1-\lambda}{2}(x^* + a_n e_{2n}^*) + \frac{1+\lambda}{2}(y^* + b_n e_{2n+1}^*)\right|\right|\right| = \max\{2, 0\} = 2$$

and

$$|||e_1^* + w_n^*||| = \left|\left|\left|(1+\lambda)e_1^* + \frac{1-\lambda}{2}(x^* + a_n e_{2n}^*) - \frac{1+\lambda}{2}(y^* + b_n e_{2n+1}^*)\right|\right|\right| = \max\{2, 0\} = 2.$$

结论由此得出。 □

注 4.7。

(i) 容易验证，点 e_1 是 $B_{(X,|||\cdot|||)}$ 的极端点。因此实际上，由 [19, Remark 3.14] 可知，除了是超 Daugavet 点之外，e_1 还是一个逆时针 Daugavet Δ-点（即满足一种类似 Δ 的条件，该条件涉及单位球的相对弱开子集的凸组合，参见 [19]）。类似地，e_1^* 是 $B_{(E,|||\cdot|||)}$ 的极端点，因此除了是弱* 超 Daugavet 点之外，它还是一个弱*逆时针 Daugavet Δ-点。在强正则空间（分别地，在弱* 强正则对偶空间）中，这

是我们对单位球中点所能要求的最佳直径性质，因为存在一个（弱*）逆时针 Daugavet 点意味着（弱*）对称直径二性质（见 [19, Proposition 3.12]）。

(ii) 实际上，经过对上述证明作一些技术性且较冗长的调整（这些调整再次在很大程度上依赖于无条件性），可以证明：对于每个 $w \in B_{(X,\,|||\cdot|||)}$，都存在一个 (w_n) 中的序列 $B_{(X,\,|||\cdot|||)}$，它弱收敛于 z，且满足 $|||e_1 - w_n||| \to 2$。因此，按照定义 5.22] 的表述，e_1 实际上是一个序列超 Daugavet 点。请注意，一般而言，这严格强于仅仅是一个超 Daugavet 点，因为存在一个同时具有 Daugavet 性质和 Schur 性质的巴拿赫空间 [15]。此外，可以轻易地修改序列 (w_n)（如上述证明的第二部分所示），使得对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $|||e_1 \pm w_n||| = 2$；因此，e_1 满足一个序列对称超 Daugavet 条件，该条件类似于引理 3.20 中的条件。目前尚不清楚这两种序列性质在一般情形下是否等价。

众所周知，每个收缩基都是弱零的（又称半收缩），而在不包含 ℓ_1 的空间中，每个无条件基都是收缩基。因此，我们立即得到以下推论。另一方面，值得注意的是，存在一些半收缩但非收缩的基（例如，$C[0,1]$的 Faber–Schauder 基）；事实上，利用张量积 [13]，可以构造出连续统个彼此不相似的此类基。此外，还存在一个没有收缩子序列的弱零序列[21]。在前述例子中，这些基都是条件的，但也存在非收缩的无条件半收缩基（例如参见 [22] 或 [7, 例子 2]）。

推论 4.8. 设 X 是一个具有无条件 Schauder 基的无限维巴拿赫空间。若 X 不包含 ℓ_1的副本，特别是若 X 是自反的，则可以对 X 重新赋范，使得 X 包含一个超 Daugavet 点，而 X^* 包含一个弱* 超 Daugavet 点。

注 4.9. 若在定理 4.2 中还假设双正交泛函序列 (e_n^*) 是弱零的，尤其是当空间 X 是自反的时，那么泛函 e_1^* 实际上也是 $(E, |||\cdot|||)$ 中的一个（对称序列）超 Daugavet 点。注意，[7, 例子 2]中的基是无条件的、有界完备且半收缩的；但由于它不是收缩的，该空间并非自反空间，因此存在这类非平凡例子。请记住，一般而言，对偶空间中点的直径性质远强于其弱* 对应性质，例如，$C[0,1]^*$ 中单位球里的每个点都是弱* 逆时针 Daugavet 点，而 $B_{C[0,1]^*}$包含凹陷点。

特别要指出，结合推论 4.8 与注 4.7 (i) 和注 4.9，我们得到以下定理。

定理 4.10. 设 (e_n) 是 ℓ_2的单位向量基。存在 ℓ_2 的一个重新赋范，使得e_1 在新范数及其对偶范数下都是一个极端超 Daugavet 点，因此也是一个 ccw Δ 点。

在 [1, 例 5.20], 中，使用了 ℓ_2 的重新赋范，使其拥有一个来自 [1, 定理 3.1] 的超 Δ点，从而构造出一个非自反 M-嵌入空间，其自身有一个超 Δ点，对偶空间中也有一个超 Δ点。利用定理 4.10，我们可以对超 Daugavet 点作出类似的构造。

推论 4.11. 存在一个非自反 M-嵌入空间 Y，使得 Y 及其对偶空间都含有一个超 Daugavet 点。

证明. 设 $X := (\ell_2, |||\cdot|||)$ 是 ℓ_2 的重新赋范，使得 e_1 在 X和 X^*中都是一个超 Daugavet 点。由于自反空间显然是 M-嵌入的，由 [12, 定理 III.1.6] 可知，空间 $Y := c_0(X)$ 是 M-嵌入的。于是 $Y^* \equiv \ell_1(X^*)$，并且由 [19, 注 3.28]可知，点 $(e_1, 0, 0, \dots)$ 在 Y和 Y^*中是一个超 Daugavet 点。

□

已在 [1, 定理 4.1]中证明，每个无限维巴拿赫空间都可以重新赋范，使其具有一个 Δ-点。因此，自然会提出以下问题。

问题 4.12. 每个无限维巴拿赫空间都可以重新赋范，使其具有一个 Daugavet 点吗?

根据定理 4.2 和 [1, 定理 2.1], ，如果 X 是无限维的，并且具有弱零无条件 Schauder 基，或者如果 $X := \ell_1$，答案是肯定的。结合这两个结果，我们现在将证明，更一般地说，对于每个具有无条件 Schauder 基的无限维巴拿赫空间，以及任何包含此类空间的有补副本的巴拿赫空间，答案都是肯定的。

请注意， Δ重赋范的若干关键要素 [1, 定理 4.1] 包括经典的范数延拓结果，以及众所周知的事实： Δ点会传递到超空间中。对于 Daugavet 点而言，情况已不再如此；例如，文献 [3] 证明了，巴拿赫空间的 ℓ_2和中绝不会包含此类点。不过，我们要指出，只要所考虑的点所在的空间是超空间中的有补子空间，我们仍然可以通过重新赋范得到某种类似的结果。

命题 4.13. 设 X 是一个巴拿赫空间。若 X 包含一个可补子空间 Y，且该子空间可以重新赋范，使其具有一个 Daugavet 点，则 X 也可以重新赋范，使其具有一个 Daugavet 点。此外，若 Y 可以重新赋范，使得 Y^* 包含一个（弱 *） Daugavet 点，则 X 也可以如此。对于（弱 *）超 Daugavet 点，结论同样成立。

证明. 由于 Y 是 X的有补子空间，因此 X 与某个巴拿赫空间 $Y \oplus_1 Z$ 同构。由于该空间也与 $(Y$ 同构， $|||\cdot|||)\oplus_1 Z$ 对于 Y上的每个等价范数 $|||\cdot|||$ 都成立，因此我们只需假设 Y 包含一个 Daugavet 点。但现在，若 $y \in S_Y$ 是一个 Daugavet 点，则由 [11, 命题 2.3] 可知， $x := (y, 0)$ 是 $Y \oplus_1 Z$中的一个 Daugavet 点。对于超 Daugavet 点，利用 [19, 注 3.28]可类似地得到结论。此外，由于该空间的对偶空间与 $(Y^*, |||\cdot|||) \oplus_\infty Z^*$等距同构，命题 4.13 中关于对偶空间的部分可由已知的关于 Daugavet 点和超 Daugavet 点在 ℓ_∞-和下的传递结果推出（见下文注释）。

□

注 4.14. 如果我们在前一个结果的证明中一开始取的是一个 ℓ_∞-和，而不是 ℓ_1-和，那么可以注意到，我们实际上会得到 X 的一种重新赋范，使其具有无穷多个（超）Daugavet 点。事实上，由 [11, 命题 2.4]可知，若 $y \in S_Y$是一个 Daugavet 点，那么对于每个 $z \in B_Z$， (y, z) 都是 $Y \oplus_\infty Z$ 中的一个 Daugavet 点。对于超 Daugavet 点，这同样可由 [19, 注 3.28]得出。

作为推论，我们得到，每个具有无条件基的巴拿赫空间都可以重新赋范，使其具有一个 Daugavet 点，并且其对偶空间中有一个弱* Daugavet 点。

推论 4.15. 设 X 是一个具有无条件基 (e_n)的巴拿赫空间。那么 X 可以重新赋范，使其具有一个 Daugavet 点。更准确地说：

(i) 如果 (e_n) 是收缩的，或者如果 (e_n) 既非收缩也非有界完备，那么 X 可以重新赋范，使其具有一个超 Daugavet 点，并且其对偶空间中有一个弱* 超 Daugavet 点；(ii) 如果 (e_n) 不是收缩的，那么 X 可以重新赋范，使该空间及其对偶空间中都具有一个 Daugavet 点。

证明。如果 (e_n) 是收缩的，那么这就是推论 4.8。其余情形直接由命题 4.13 以及 James 关于无条件基的经典结果得出：如果 (e_n) 不是有界完备的，那么 X 包含 c_0的一个补子空间副本；如果 (e_n) 不是收缩的，那么 X 包含 ℓ_1 的一个补子空间副本（参见例如 [5, 定理 3.3.2 和 3.3.1]）。结合 [1, 定理 2.1] 和 [25, 命题 5.1]，可得 ℓ_1 能够重新赋范，使该空间及其对偶空间中都具有一个 Daugavet 点。

□

再次运用命题 4.13，我们最终得到了引言中陈述的结果（定理 1.3）。

最后请注意，借助文献中的其他一些经典结果，我们还可以得到以下结论。

推论 4.16. 设 X 是一个巴拿赫空间。

(i) 若 X 可分且包含 c_0的一个副本，则 X 可重新赋范，使其具有一个超 Daugavet 点，并且其对偶空间中有一个弱* 超 Daugavet 点。(ii) 若 X^* 包含 c_0的一个副本，则 X 可重新赋范，使该空间及其对偶空间中均有一个 Daugavet 点。(iii) 若 X 包含 ℓ_∞的一个副本，则 X 可重新赋范，使该空间及其对偶空间中均有一个超 Daugavet 点。

证明. Sobczyk 在 [23]中证明了，可分巴拿赫空间中的 c_0 副本总是有补的。同一篇论文中还指出，可以利用 Phillips 先前的一个扩张结果，证明任意巴拿赫空间中的 ℓ_∞ 副本也具有同样性质。用现代术语来说，这是因为空间 c_0 是可分内射的，而空间 ℓ_∞ 是等距内射的。更多详情请参见 [5, 第 2 节。5] 此外，Bessaga 和 Pe lczy´ński 的一个著名结果表明，若巴拿赫空间 X 的对偶空间 X^* 包含 c_0的一个副本，则空间 X 包含 ℓ_1的一个有补副本（例如参见 [10,定理 4.4]）。

有了这些结果，结合命题 4.13、推论 4.15，以及一个众所周知的事实—— ℓ_∞作为一个 $C(K)$-空间，存在超 Daugavet 点（例如结合 [3, 推论 5.4]和 [19, 推论 4.3]）——便可立即推出推论 4.16。 ℓ_∞^* 也存在超 Daugavet 点，这一点可如下得到。首先，众所周知， ℓ_∞^* 包含空间 $L_1[0,1]$的一个等距副本。事实上， ℓ_∞ 包含 ℓ_1的一个等距副本，因此后者可由 [8] 中的结果推出。由于 Δ-点可传递到超空间，因此 ℓ_∞^* 包含Δ-点。现在，已知 ℓ_∞^* 与某个 $L_1(\mu)$-空间等距同构，由 [19, 推论 4.1]可知，这些点实际上是超 Daugavet 点。

□

注意，推论 4.16 (ii) 适用于任意无限维 Lipschitz 自由空间。此外，若以下问题得到肯定回答，则可立即改进这一结果。

问题 4.17. 能否对空间 ℓ_1 重新赋范，使其具有一个超 Daugavet 点?

请注意，目前尚不清楚来自 Veeorg 空间 [24] 的 Daugavet 分子是超 Δ 还是超 Daugavet 点。

References

[1] T. Abrahamsen, R. Aliaga, V. Lima, A. Martiny, Y. Perreau, A. Prochazka, and T. Veeorg, Delta 点及其对巴拿赫空间几何的影响。预印本，arXiv:2303.00511，2023 年。[2] T. A. Abrahamsen, P. Hájek, O. Nygaard, J. Talponen, and S. Troyanski, 直径 2 性质与凸性，Studia Math., 232 (2016)，第 227–242 页。[3] T. A. Abrahamsen, R. Haller, V. Lima, and K. Pirk, 巴拿赫空间中的 Delta 点和 Daugavet 点，Proc. Edinb. Math. Soc. (2), 63 (2020)，第 475–496 页。[4] T. A. Abrahamsen, V. Lima, A. Martiny, and Y. Perreau, 渐近几何与 Delta 点，Banach J. Math. Anal., 16 (2022)，第 57 号论文。[5] F. Albiac and N. J. Kalton, 巴拿赫空间理论专题，《数学研究生教材》第 233 卷，Springer，[Cham], 第二版，2016 年。Gilles Godefory 撰写前言。[6] S. Dantas, M. Jung, and A. Rueda Zoca, 射影张量积中的 Daugavet 点，Q. J. Math., 73 (2022)，第 443–459 页。[7] W. J. Davis and D. W. Dean, 关于基的巴拿赫空间直和，Studia Math., 28 (1966/67 年)，第 209–219 页。[8] S. J. Dilworth, M. Girardi, and J. Hagler, 含有L_1的等距副本的对偶巴拿赫空间，Bull. Polish Acad. Sci. Math., 48 (2000)，第 1–12 页。[9] S. J. Dilworth, D. Kutzarova, N. L. Randrianarivony, J. P. Revalski, and N. V. Zhivkov, 透镜与渐近中点一致凸性，J. Math. Anal. Appl., 436 (2016)，第 810–821 页。

[10] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, and V. Zizler, 巴拿赫空间理论，《CMS 数学丛书/加拿大数学会数学著作》，Springer，纽约，2011 年。线性与非线性分析的基础。[11] R. Haller, K. Pirk, and T. Veeorg, 巴拿赫空间绝对和中的 Daugavet 点和 Delta 点，《凸分析杂志》，28 (2021)，第 41–54 页。[12] P. Harmand, D. Werner, and W. Werner, M-理想在巴拿赫空间与巴拿赫代数中的应用，《数学讲义》第 1547 卷，Springer 出版社，柏林，1993 年。[13] J. R. Holub, Hilbert 型、Bessel 型及半收缩基，Studia Math., 37 (1970/71)，第 203–211 页。[14] M. Jung and A. Rueda Zoca, Lipschitz 自由空间中的 Daugavet 点与 Δ点，Stud. Math., 265 (2022)，第 37–55 页。
[15] V. Kadets and D. Werner, 具有 Schur 性质和 Daugavet 性质的巴拿赫空间，《美国数学会会刊》，132 (2004)，第 1765–1773 页。[16] V. M. Kadets, 关于 Daugavet 方程的一些评注，《数学问题》，19 (1996)，第 225–235 页。[17] A. Kamińska, H. J. Lee, and H. J. Tag, Orlicz-Lorentz 空间中的 Daugavet 性质与直径 2 性质。预印本，arXiv:2212.12149，2022 年。[18] J. Langemets and K. Pirk, 直径型直径二性质的稳定性，《罗马尼亚纯粹与应用数学评论》，RACSAM, 115 (2021)，第 13 页，编号 96。´,
[19] M. Martín, Y. Perreau, 巴拿赫空间单位球中元素的直径概念。预印本，arXiv:2301.04433，2023 年。 and A. Rueda Zoca, 巴拿赫空间射影对称张量积中的 Daugavet 性质，Banach J. Math. Anal., 16 (2022)，第 35 号论文，共 32 页。[20] M. Martín and A. Rueda Zoca, 一个不含[21] E. Odell的巴拿赫空间中的归一化弱零序列，且没有收缩子序列，Compositio Math., 41 (1980)，第 287–295 页。 l_1, 一个非收缩基的例子，《罗马尼亚纯粹与应用数学评论》，10 (1965)，第 961–966 页。
[22] A. Pełczyński and W. Szlenk, 空间[23] A. Sobczyk到其子空间 (m) 上的投影，《美国数学会通报》，47 (1941)，第 938–947 页。 (c_0), Lipschitz 自由空间中 Daugavet 点与 Delta 点的刻画，Studia Math., (2022)。[24] T. VeeorgLipschitz 函数空间中的 Daugavet 点与 Delta 点。预印本，arXiv:2206.03475, 2022 年。[25] ——, , 巴拿赫空间张量积中的凹陷点，《美国数学会会刊》，101 (1987)，第 122–126 页。
[26] D. WernerDaugavet 性质的最新进展，《爱尔兰数学会通报》，(2001)，第 77–97 页。

Institute of Mathematics and Statistics, University of Tartu, Narva mnt 18, 51009 Tartu, Estonia
电子邮箱地址：rainis.haller@ut.ee

Institute of Mathematics and Statistics, University of Tartu, Narva mnt 18, 51009 Tartu, Estonia
电子邮箱地址：johann.langemets@ut.ee
网址：https://johannlangemets.wordpress.com/

Institute of Mathematics and Statistics, University of Tartu, Narva mnt 18, 51009 Tartu,Estonia电子邮箱地址：yoel.perreau@ut.ee

Institute of Mathematics and Statistics, University of Tartu, Narva mnt 18, 51009 Tartu,Estonia电子邮箱地址：triinu.veeorg@ut.ee