分诊算法节时效果的评估

Yee Lam Elim Thompson[1] Gary M Levine[1] Weijie Chen[1] Berkman Sahiner[1] Qin Li[1] Nicholas Petrick[1] Jana G Delfino[1] Miguel A Lago[1] Qian Cao[1] Qin Li[1*] Frank W Samuelson[1]

[1] 美国食品药品监督管理局 YeeLamElim.Thompson@fda.hhs.gov

arXiv:2303.07050v1 [stat.AP] 13 Mar 2023

摘要

过去十年间，人工智能（AI）算法在推动医疗保健各方面转型方面展现出良好前景。其中一项应用是根据算法的二元输出对患者的放射医学影像进行分诊。这类基于人工智能的优先级排序软件称为计算机辅助分诊与通知（CADt）。其主要益处是加快对含有时间敏感性发现的影像进行放射影像审阅。然而，随着CADt设备在临床工作流程中日益普及，目前仍缺乏定量方法来评估设备在缩短患者等待时间方面的效果。本文提出一种基于排队论的数学框架，用于计算使用CADt设备前后每幅患者影像的平均等待时间。我们研究了四种工作流程模型，其中包含多个放射科医生（服务台）和优先级类别，并考察了不同人工智能诊断性能、放射科医生阅片率及患者影像（顾客）到达率的情形。鉴于模型较为复杂，我们采用一种称为递归降维技术的近似方法。我们定义了一项性能指标，用以衡量设备的节时效果。我们开发了一款软件工具，用于模拟影像审阅/解读的临床工作流程、验证理论结果，并给出所定义性能指标的置信区间。定量结果表明，在工作繁忙且人员短缺的情况下，分诊设备更为有效，这与临床直觉和模拟结果一致。尽管本研究旨在满足评估CADt设备的需求，但本文提出的框架也可应用于任何根据二元输出对顾客进行优先级排序的算法。

引言

人工智能（AI）和机器学习（ML）技术的快速发展，有望从多个方面改变医疗保健。一个新兴领域是将人工智能/机器学习作为医疗器械软件（SaMD）应用于放射影像，通过分诊具有时间敏感性发现的患者影像，供医生阅片（van Leeuwen 等，2022）。这类设备称为计算机辅助分诊与通知（CADt）设备，医疗人工智能算法判定为阳性的影像会在放射科医生的阅片队列中优先处理。CADt设备的主要益处是提高对大血管闭塞（LVO）、颅内出血（ICH）、气胸等严重且时间紧迫的疾病及时诊断和治疗的可能性。2018年，美国食品药品监督管理局（FDA）通过 *de novo* 途径，批准首个用于疑似大血管闭塞性卒中患者的CADt设备上市（美国食品药品监督管理局，2018）。此后，多项研究表明，使用CADt设备能够改善患者治疗和临床结局（Hassan 等，2020；Yahav-Dovrat 等，2021；Barreira 等，2018；Hassan 等，2021）。这些分析大多侧重于评估CADt设备时的诊断性能，但在临床环境中，对真正患病（存在阳性信号）的患者影像所能节省的时间，尚缺乏明确的定量估算。因此，本研究旨在填补这一空白，开发一种基于排队论的工具，以评估CADt设备在特定临床场景中的节时效果。

图1展示了使用和未使用CADt设备时的放射科医生工作流程。在不使用CADt设备的标准护理中，放射科医生按照先进先出（FIFO）的原则阅览患者影像。根据排队论，服务台是放射科医生，顾客则是患者影像。放射科医生有时会被紧急病例打断，例如医师要求立即阅览某位患者的特定影像。为将这些急诊病例与阅片队列中的病例区分开来，我们将阅片列表中的影像称为“非急诊”影像。如果工作流程中纳入CADt设备，该设备只分析非急诊患者影像。标记为AI阳性的病例会被标记出来，或在放射科医生的阅片列表中提前，从而获得更高的优先级；放射科医生会在阅览所有AI阴性患者影像之前先阅览这些病例。与不使用CADt的情景一样，放射科医生也可能被急诊病例打断，而这些病例始终具有高于其他影像的优先级。总体而言，不使用CADt时，队列包含两个优先级类别；而在有CADt情景中，队列包含三个优先级类别。

需要指出的是，尽管本文提出的数学框架应用于放射科诊所，但也可用于评估其他排队环

*秦丽博士已离开美国食品药品监督管理局，目前担任阿斯利康转化医学部主任。她在美国食品药品监督管理局任职期间为本项工作作出了贡献。

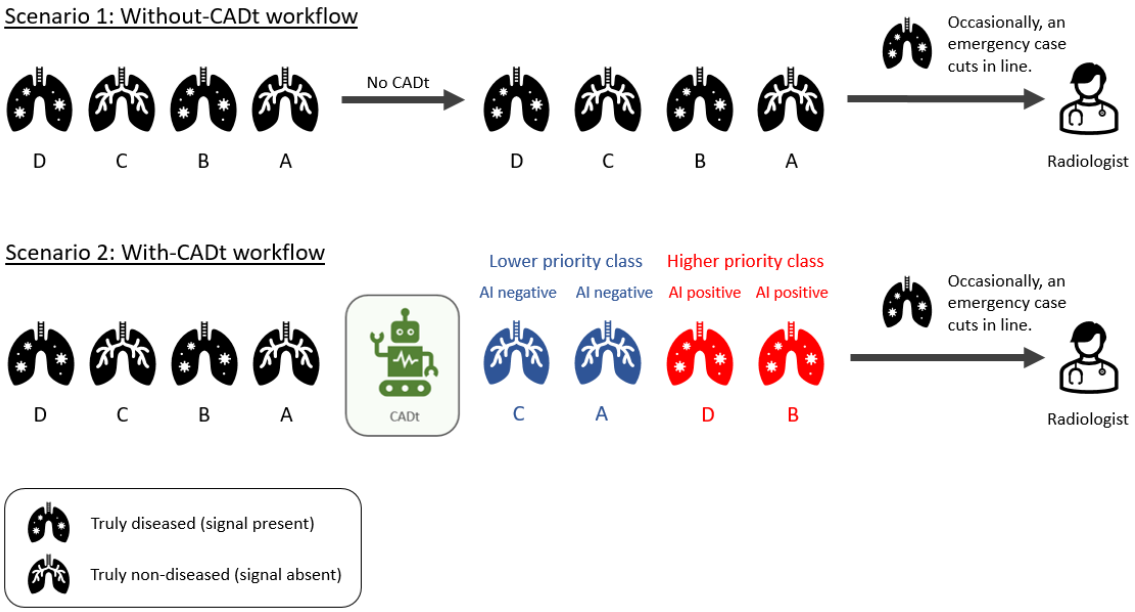


图1：不使用和使用 CADt 设备的放射科医生工作流程。上图：不使用CADt的情景，患者影像按照到达顺序进行阅片。下图：有CADt工作流程，先阅览AI阳性患者影像，再阅览AI阴性影像。在这两种情景中，放射科医生都可能被急诊病例打断。所有卡通图标均取自 Microsoft PowerPoint 应用程序。

境中的判别算法。例如，算法可能会尝试识别所需服务时间较短的顾客或任务，并将其划入更高的优先级类别，从而降低顾客的平均整体等待时间。

参数

应用排队论之前，先定义几个参数来描述临床场景。

- $f_{\text{急诊}}$患者影像占全部患者影像的比例。
- λ 是所有患者影像的泊松到达率。患者影像可分为若干亚组，每个亚组i 的泊松到达率为 $\lambda_i = p_i\lambda$，其中 p_i 是图像子组 i 占全部患者影像的比例。
- 疾病患病率 π 定义于非急诊患者群体中，即

$$\pi = \frac{\text{Number of diseased, non-emergent cases}}{\text{Number of non-emergent cases}}. \quad (1)$$

- CADt 的诊断性能由其敏感度（Se）和特异度（Sp）定义，这两项指标也在非急诊患者影像中定义，即

$$\text{Se} = \frac{\text{Number of AI-positive, diseased, non-emergent cases}}{\text{Number of diseased, non-emergent cases}},$$

and

$$\text{Sp} = \frac{\text{Number of AI-negative, non-diseased, non-emergent cases}}{\text{Number of non-diseased, non-emergent cases}}.$$

- $N_{\text{放射科医生}}$ 表示现场放射科医生的人数。通常，诊所始终至少有一名放射科医生。对于规模较大的医院，白天可能会有多名放射科医生。
- 放射科医生的阅片率用 μ 表示。对于急诊（最高优先级）病例，假定阅片时间 T_{em}服从指数分布，平均阅片率为 $\mu_{\text{em}} = 1/T_{\text{em}}$。对于非急诊图像，平均阅片率取决于放射科医生的诊断，即患病图像为 μ_D，非患病图像为 μ_{ND}。因此，在不使用CADt的情景中，非急诊（较低优先级）病例的阅片时间服从超指数分布，其均值（$1/\mu_{\text{nonEm}}$）由两个亚组的平均阅片率以及疾病患病率 π 决定。

$$\frac{1}{\mu_{\text{nonEm}}} = \frac{\pi}{\mu_D} + \frac{1-\pi}{\mu_{ND}}. \quad (2)$$

在有CADt情景中，AI阳性（中优先级）和AI阴性（最低优先级）类别的平均阅片率分别用 μ_+ 和 μ_- 表示。AI阳性组由真阳性（TP）和假阳性（FP）患者组成，AI阳性病例为真阳性的概率由阳性预测值（PPV）定义。因此，

$$\frac{1}{\mu_+} = \frac{\text{PPV}}{\mu_D} + \frac{1-\text{PPV}}{\mu_{ND}}. \quad (3)$$

同样，AI阴性的平均阅片率为

by

$$\frac{1}{\mu_-} = \frac{1-\text{NPV}}{\mu_D} + \frac{\text{NPV}}{\mu_{ND}}, \tag{4}$$

其中，阴性预测值是AI阴性病例为真阴性（TN）的概率。

- ρ 是交通强度，定义为 $\rho = \lambda/\mu_{\text{eff}}$，其中 μ_{eff}是考虑所有优先级类别后的有效阅片率，N_{rad} 是在排队系统中的放射科医生。ρ 的范围为 0 到 1：0 表示没有患者影像到达，1 则意味着医院极度拥挤。
- 关于排队策略，在不使用 CADt 设备时，患者影像按照到达时间的先后顺序阅片，即先进先出（FIFO）。在使用 CADt 的场景中，我们考虑采用抢占式恢复优先级调度：无论是否使用 CADt 设备，只要更高优先级的患者影像进入系统，较低优先级患者影像的阅片就会中断，之后再继续。尽管在现实中，当 CADt 设备标记出更高优先级的病例时，一些放射科医生可能更愿意先完成当前较低优先级影像的阅片（这属于非抢占式恢复优先级），但许多 CADt 设备的设计假定放射科医生会立即阅片处理标记出的病例。因此，本研究假设采用抢占式恢复优先级。

为评估给定 CADt 设备在由上述参数定义的临床场景中的节时效果，我们首先在章节中定义四种放射科医生工作流程模型。对于每种模型，我们提供马尔可夫链矩阵，以计算使用和不使用 CADt 两种情景下各优先级类别的平均等待时间。章节介绍了为验证理论结果并提供理论平均时间节省置信区间而开发的内部模拟软件。章节定义了一项用于量化 CADt 设备节时效果的指标，并讨论通过理论分析和模拟得出的结果。

放射科医师工作流程模型

我们考虑四种放射科医生工作流程模型：

- 模型 A：基准模型（$N_{\text{放射科医生}}= 1$，$f_{\text{急诊}}= 0$，以及 $\mu_D = \mu_{ND}$）
- 模型B：模型 A，但包含急诊患者影像（$N_{\text{放射科医生}}= 1$，$f_{\text{急诊}}> 0$，以及 $\mu_D = \mu_{ND}$）
- 模型C：模型B，但有两名放射科医生（$N_{\text{放射科医生}}= 2$，$f_{\text{急诊}}> 0$，以及 $\mu_D = \mu_{ND}$）
- 模型 D：模型B，但患病与非患病影像的阅片率不同（$N_{\text{放射科医生}}= 1$, $f_{\text{急诊}}> 0$，以及 $\mu_D \neq \mu_{ND}$）

对于每个模型，都会进行两项计算：一项假设不使用CADt的情景，另一项假设使用CADt设备。每种情景都有一组状态，用于跟踪不同优先级类别中的患者影像数量。各状态之间的转移率构成一个随机马尔可夫链矩阵，并据此采用矩阵几何法计算各状态的概率（Stewart 2009）。对于涉及多名放射科医师和多个优先级类别的模型，我们采用 Harchol-Balter 等人（2005）提出的递归维数约简（RDR）方法，以便进行计算。随后，应用利特尔定律（Stewart 2009）计算所涉及的每个优先级类别中每张患者影像的平均等待时间。

模型 A：基准模型

我们首先从一个简单模型入手：没有急诊患者影像（$f_{\text{em}} = 0$），只有一名放射科医生在岗（$N_{\text{rad}} =1$），且患病与未患病亚组的阅片率相同（$\mu_D = \mu_{ND}$）。

模型 A 在不使用CADt的情景下 首先，我们考虑不使用CADt的情景。鉴于 $f_{\text{em}} = 0$，只有一个优先级类别（非急诊亚组），到达率 λ 即为非急诊患者影像的到达率 λ_{nonEm}。当 $\mu_D = \mu_{ND}$ 且只有 1 名放射科医生在岗时，非急诊亚组的有效阅片率为 $\mu_{\text{nonEm}} = \mu_D = \mu_{ND}$。因此，模型 A 转化为经典的 M/M/1/FIFO 排队模型（Stewart 2009）。其转移图如图 2 所示，由此可得状态概率 p_n：

$$p_{n_{\text{nonEm}}} = \rho_{\text{nonEm}}^{n}(1-\rho_{\text{nonEm}}), \tag{5}$$

其中，n_{nonEm} 表示系统中的非急诊患者影像数量。根据状态概率 $p_{n_{\text{nonEm}}}$，可通过以下步骤计算每张非急诊患者影像的平均等待时间。

1. 根据状态概率$p_{n_{\text{nonEm}}}$，计算系统中非急诊患者影像的平均数量 L。即$L = \langle p_{n_{\text{nonEm}}} \rangle$，其中 $\langle\rangle$ 为期望算子。2. 根据利特尔定律，即 $W = L/\lambda_{\text{nonEm}}$，计算每张非急诊患者影像的平均响应时间 W。3. 计算每位非急诊患者在队列中的平均等待时间 $W_{q_{\text{nonEm}}}$。由于 W 是 $W_{q_{\text{nonEm}}}$ 与放射科医生的平均阅片时间 T =$1/\mu_{\text{nonEm}}$之和，因此有 $W_{q_{\text{nonEm}}} = W - 1/\mu_{\text{nonEm}}$。

总之，不使用CADt的情景下，每张非急诊患者影像的平均等待时间 $W_{q_{\text{nonEm}}}$ 为

$$W_{q_{\text{nonEm}}} = \langle p_{n_{\text{nonEm}}} \rangle/\lambda_{\text{nonEm}} - 1/\mu_{\text{nonEm}}. \tag{6}$$

有CADt情景中的模型 A 当使用 CADt 设备且没有急诊患者影像（$f_{\text{em}} = 0$）时，存在两个优先级类别：AI阳性高优先级类别和 AI阴性低优先级类别。AI阳性和AI阴性类别的到达率取决于 CADt 的诊断性能。

$$\lambda_+ = \big[\pi\text{Se} + (1-\pi)(1-\text{Sp})\big]\lambda, \tag{7}$$

$$\lambda_- = \big[\pi(1-\text{Se}) + (1-\pi)\text{Sp}\big]\lambda. \tag{8}$$

双优先级类别系统的状态由 AI 阳性病例的数量 n_+ 和 AI阴性病例的数量 n_-定义。如图 3 所示，精确的转移图在水平方向上无限延伸



图 2：模型 A 中未使用 CADt设备时，非急诊患者影像的马尔可夫链转移图。灰色气泡表示状态 n_{nonEm}，即系统中的非急诊患者影像总数。顶部橙色箭头表示转移率 λ，使数量每次增加 n_{nonEm}；底部绿色箭头表示转移率 μ，使数量每次减少 n_{nonEm}。

（n_-）和垂直方向（n_+）上均无限延伸。假设采用抢占后恢复优先级调度，这个二维无限问题可以使用递归维度缩减（RDR）方法（Harchol-Balter等，2005）解决。该方法将错综复杂的双优先级类别系统拆分为两个独立的计算，分别对应一个优先级类别。

首先，我们关注优先级较高的 AI阳性系统。由于采用抢占后恢复排队规则，AI阳性亚组完全不受 AI阴性影像的影响，因此它本身就是一个经典的 M/M/1/FIFO 排队模型。因此，要计算每张 AI阳性患者影像的平均等待时间，可以沿用图 2，并将 n_{nonEm} 替换为 n_+。AI阳性患者影像的状态概率根据公式 5 进行修正；

$$p_{n_+} = \rho_+^{n_+}(1-\rho_+), \tag{9}$$

其中，$\rho_+ \equiv \lambda_+/\mu_+$ 仅表示 AI阳性亚组的交通强度。按照公式 6 中的步骤，每张 AI阳性患者影像的平均等待时间 W_{q_+}为

$$W_{q_+} = \langle p_{n_+}\rangle/\lambda_+ - 1/\mu_+. \tag{10}$$

在计算 AI阴性低优先级类别时，我们不能忽略 AI阳性病例的存在。然而，由于只有一名放射科医生，当 $n_+ \geq 1$时，没有 AI阴性患者影像能够离开系统。正如 (Harchol-Balter 等，2005) 所指出的，无需追踪 $n_+ \geq 1$ 之后的每一个状态。因此，图 3 中的每一列都可以截断，使得 $n_+ \geq 1$ 之后的所有状态均以 $(1^+,\ n_-)$ 表示。RDR截断转移图如图4所示。

由于进行了截断，从 $(1_+,\ n_-)$ 到 $(0,\ n_-)$ 的转移率 **B** 不再代表简单的指数转移时间分布。事实上，这种转移时间分布的形状通常未知，但可以用 Erlang-Coxian（EC）分布近似。如图5所示，一般的 EC分布恰好由两个 Coxian 阶段和 $N_{\text{EC}} - 2$ 个 Erlang阶段组成。对于形状未知的给定分布，(Osogami 和 Harchol-Balter 2006) 给出了闭式解，用于计算该未知分布的前三阶矩，以及使 EC分布与前三阶矩最匹配的六个参数。

将 EC近似法应用于图4中的 RDR截断转移图时，仅需采用两阶段 Coxian 分布，无需 Erlang 阶段；因此，图5中的 p_{EC}、N_{EC} 和 $\lambda_{Y_{\text{EC}}}$ 分别为 1、2 和 0。随后，非指数转移 **B** 可以明确表示为图6所示的近似指数转移率 t' 的函数，其中

$$t_1 = (1-p_{X_{\text{EC}}})\lambda_{X1_{\text{EC}}};\quad t_{12} = p_{X_{\text{EC}}}\lambda_{X1_{\text{EC}}};\quad t_2 = \lambda_{X2_{\text{EC}}}. \tag{11}$$

图 6 是一个典型的马尔可夫链转移图，其转移率矩阵 M_{A} 可以构建（参见电子补充材料中的章节）。利用矩阵几何法——一种用于拟生灭过程的分析方法，其中马尔可夫链矩阵具有重复块结构（Stewart 2009）——可计算状态概率 p_{n_-}。因此，可以计算每位 AI阴性、低优先级患者影像的平均等待时间 W_{q_-}；

$$W_{q_-} = \langle p_{n_-}\rangle/\lambda_- - 1/\mu_-. \tag{12}$$

模型B：包含急诊患者影像的模型 A

模型B与模型 A 类似，但包含急诊患者影像（$f_{\text{em}} > 0$）。无论是否存在 CADt设备，这些急诊影像都被赋予最高优先级。尽管可以研究急诊亚组的等待时间，但本研究仅关注受 CADt设备影响的非急诊、AI阳性和 AI阴性亚组。

不使用CADt的情景中的模型B 在不使用CADt设备的标准护理中，急诊类别的存在形成了一个双优先级类别排队系统：紧急类别和非急诊类别。对于急诊亚组，μ_{em}表示其放射科医生的阅片率，其到达率为

$$\lambda_{\text{em}} = f_{\text{em}}\lambda. \tag{13}$$

非急诊类别的到达率为

$$\lambda_{\text{nonEm}} = (1-f_{\text{em}})\lambda. \tag{14}$$

与模型 A 类似，由于 $\mu_D = \mu_{ND}$ 和 $N_{\text{rad}} = 1$，非急诊亚组的有效阅片率为$\mu_{\text{nonEm}} = \mu_D = \mu_{ND}$。

现场只有一名放射科医生时，对非急诊低优先级类别的分析，与有CADt情景下模型 A 中对 AI阴性类别的分析完全相同。将 λ_+ 替换为 λ_{em}、将 λ_- 替换为 λ_{nonEm}、将 μ_+ 替换为μ_{em}，并将 μ_- 替换为 μ_{nonEm}，即可重用图 6（以及电子补充材料中的公式21）。求解状态概率 $p_{n_{\text{nonEm}}}$ 后，每个非急诊患者影像的平均等待时间由公式6给出。

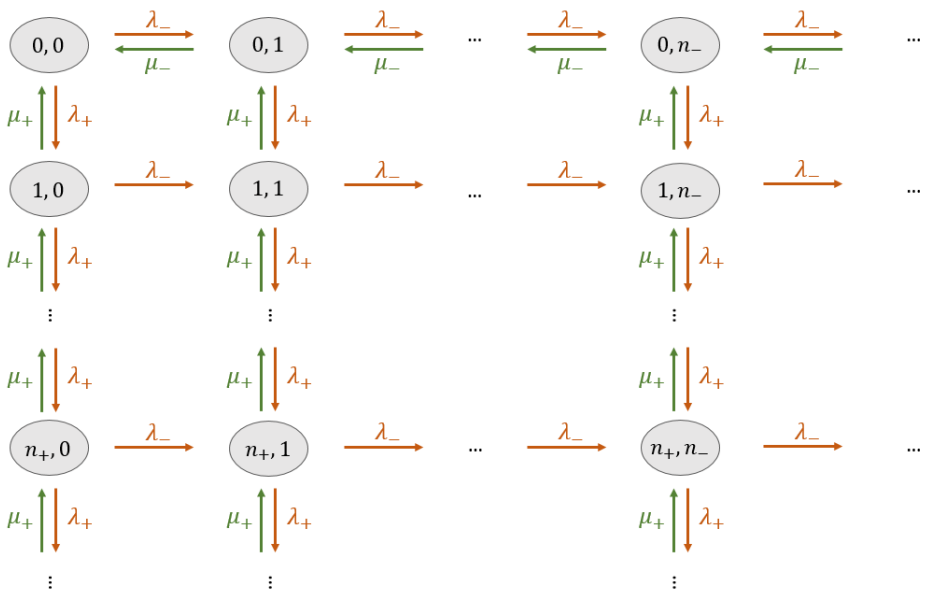


图 3：有CADt情景下模型 A 的精确转移图。灰色气泡表示系统中的状态（n_+，n_-），其数值分别表示 AI阳性患者图像的数量（n_+）和 AI 阴性患者影像的数量（n_-）。每一行表示 n_- 增加或减少的转移，每一列表示 n_+ 的转移。请注意，AI 阴性患者影像只有在 $n_+ = 0$时才能离开系统，因此 μ_- 箭头只会出现在转移图的第一行。

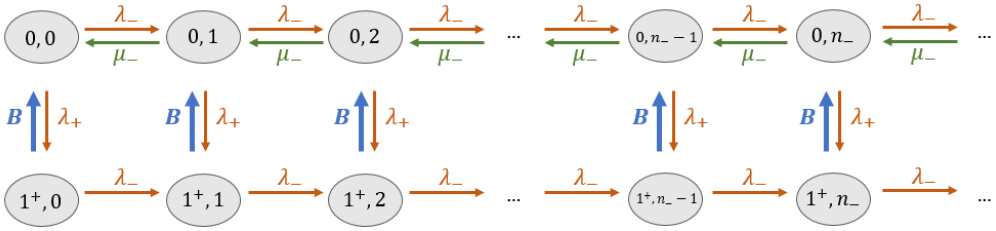


图4：有CADt情景下模型 A 中 AI阴性、低优先级患者影像的 RDR截断转移图。对于图 3 中的每一列，所有超出 $n_+ \geq 1$ 的状态均截断为（1_+，n_-），其转移率近似为**B**。

有CADt情景下的模型B 当工作流程中纳入CADt时，存在三个优先级类别：急诊（最高优先级）、AI阳性（中优先级）和AI阴性（最低优先级）。由于有急诊患者，AI阳性和AI阴性类别的到达率现在为

$$\lambda_+ = \big[\pi \mathrm{Se} + (1-\pi)(1-\mathrm{Sp})\big](1-f_{\mathrm{em}})\lambda, \text{ and} \quad (15)$$

$$\lambda_- = \big[\pi(1-\mathrm{Se}) + (1-\pi)\mathrm{Sp}\big](1-f_{\mathrm{em}})\lambda. \quad (16)$$

其阅片率由方程 3 和 4 给出。然而，由于 $\mu_D = \mu_{ND}$，AI阳性和 AI阴性亚组的阅片率相同；$\mu_+ = \mu_- = \mu_D = \mu_{ND}$。与有CADt情景下的模型 A 类似，我们采用 RDR 方法，分别求解 AI阳性和 AI阴性系统。

对于AI阳性亚组，需要指出的是，AI阳性患者影像只会被急诊患者影像打断，不会受到任何AI阴性患者影像的影响。因此，急诊亚组和AI阳性亚组构成一个双优先级类别排队系统，可使用为不使用CADt的情景下非急诊亚组所开发的框架求解。图 6（以及电子补充材料中的公式21）可重复使用，只需将 λ_+ 替换为 λ_{em}、将 λ_- 替换为 λ_+、将 μ_+ 替换为 μ_{em}，并将μ_- 替换为 μ_+。据此计算AI阳性亚组的状态概率p_{n_+}，并由公式10得出每张AI阳性患者影像的平均等待时间。

AI阴性最低优先级子组的计算涉及由系统中急诊、AI阳性和AI阴性患者影像数量定义的状态（n_{em}，n_+，n_-）。AI阴性患者影像可能会被急诊病例或AI阳性患者影像中断。中断病例的到达时间标志着忙期的开始，忙期是指放射科医生忙于处理其他事务、无法阅片AI阴性病例的时间段。放射科医生阅片处理中断病例期间，新的急诊和/或AI阳性影像可能进入系统，这

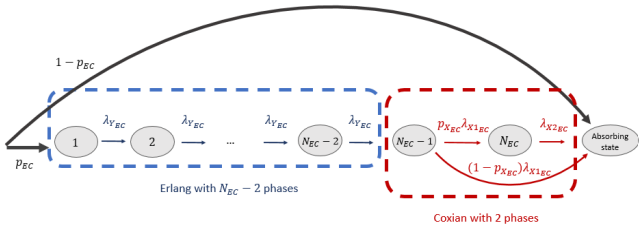


图5：由六个参数（p_{EC}、$\lambda_{Y_{\mathrm{EC}}}$、$N_{\mathrm{EC}}$、$p_{X_{\mathrm{EC}}}$、$\lambda_{X1_{\mathrm{EC}}}$、$\lambda_{X2_{\mathrm{EC}}}$）定义的埃尔朗-考克斯型（EC）分布。每个箭头代表一个指数转移时间分布。这些参数的计算取决于原始分布（其形状未知）的归一化矩（Osogami 和 Harchol-Balter，2006）。

会进一步延迟对被中断的AI阴性病例的阅片。所有高优先级图像阅片完毕后，放射科医生便继续阅片被中断的AI阴性患者影像，忙期随之结束。

由于急诊患者影像与 AI阳性患者影像的到达率和阅片率不同，AI阴性忙期对这两个亚组的依赖也各不相同。正如 Harchol-Balter 等人（2005）所讨论的，必须跟踪忙期开始时和结束时的状态。只有一名放射科医生时，模型B只有两种不同的忙期：

- B_1: $(0, 1^+, n_-) \to (0, 0, n_-)$
- B_2: $(1^+, 0, n_-) \to (0, 0, n_-)$

这里，B_1 和 B_2 是两个忙期的速率，并在图7中明确表示为两种非指数转移。

与模型 A 中的 AI阴性系统一样，首先必须计算每个忙期的前三阶矩，并使用两阶段Coxian分布近似每个分布。由于有三个优先级类别和两个忙期，该近似涉及 AI阳性转移图中的层间通过时间，据此可确定转移概率矩阵和转移率矩阵（见 M_{B} 第 章节）。根据转移率矩阵，可通过传统的矩阵几何法求解状态概率 p_{n_-}。确定 p_{n_-} 后，即可通过公式12计算每张 AI阴性患者影像的平均等待时间 W_{q_-}。

模型C：配备两名放射科医生的模型B　s

模型C通过在现场增加一名放射科医生 $N_{\mathrm{rad}} = 2$，扩展了模型B。急诊、非急诊、AI阳性和 AI阴性类别的到达率保持不变（公式13–16）。由于 $\mu_D = \mu_{ND}$，非急诊、AI阳性和 AI阴性亚组的读取率相同；$\mu_+ = \mu_- = \mu_{\mathrm{nonEm}}$。由于增加了一名放射科医生，交通强度 ρ 变为原来的两倍；$\rho = \lambda/2\mu$。需要指出的是，模型C的设置与（Harchol-Balter等，2005）中的示例相同。

不使用CADt的模型C场景在没有CADt设备的情况下，非急诊低优先级类别的RDR截断转移图如图8所示。假设有两名放射科医生在场，非急诊图像只有在 $n_{\mathrm{em}} < 2$时才能离开系统，因此，当 $n_{\mathrm{em}} = 2$时开始进行状态截断。此外，当 $n_{\mathrm{em}} = 0$时，两名放射科医生都可以处理非急诊患者影像。因此，第一行的离开率为 $2\mu_{\mathrm{nonEm}}$，但从(0，1)转移到(0， 0)的情况除外，此时只有一名放射科医生有工作要处理。当 $n_{\mathrm{em}} = 1$（第二行）时，两名放射科医生中只有一名可以审核非急诊病例，因此离开率为 $1\mu_{\mathrm{nonEm}}$。当 $n_{\mathrm{em}} \geq 2$时，两名放射科医生都在处理急诊病例。由于没有放射科医生可以处理非急诊影像，其离开率为0，且没有非急诊影像能够离开系统。为了近似图8中的转移率**B** ，采用与模型A和模型B相同的两阶段Coxian近似。

图8的转移率矩阵 $M_{\mathrm{C_{noCADt}}}$ 可在章节中找到。根据 $M_{\mathrm{C_{noCADt}}}$，可确定状态概率$p_{n_{\mathrm{nonEm}}}$，而每张非急诊患者影像的平均等待时间由公式6给出。

模型C在有CADt情景下 在有CADt情景下，AI阳性（中优先级）和AI阴性（最低优先级）亚组的计算是分开进行的。

AI阳性亚组的排队系统包含两个优先级类别：急诊类别和AI阳性类别；而在不使用CADt的情景下为非急诊亚组建立的框架可以重复使用。通过在图8和公式27中将 λ_{nonEm} 替换为 λ_+，并将 μ_{nonEm} 替换为 μ_+，即可计算AI阳性亚组的状态概率p_{n_+}。每张AI阳性患者影像的平均等待时间 W_{q_+} 由公式10给出。

分析 AI阴性、最低优先级亚组的方法与分析模型B中的 AI阴性病例相似。请回顾，状态定义为 (n_{em}、n_+、n_-)，而忙期则定义为现场所有放射科医生都忙于处理 AI阴性患者影像的持续时间。对于两名放射科医生，忙期可能在以下三种情形之一开始：有两例急诊病例时、有一例急诊病例和一例 AI阳性病例时，或有两例 AI阳性病例时。另一方面，当一名放射科医生正在处理急诊病例或 AI阳性病例，而另一名放射科医生因此可以处理 AI阴性病例时，忙期便会结束。因此，与模型B中的两个忙期相比，增加一名放射科医生会使忙期总数增至六个：

- B_1: $(0, 2^+, n_-) \to (0, 1^+, n_-)$
- B_2: $(0, 2^+, n_-) \to (1^+, 0, n_-)$
- B_3: $(1^+, 1^+, n_-) \to (0, 1^+, n_-)$
- B_4: $(1^+, 1^+, n_-) \to (1^+, 0, n_-)$
- B_5: $(2^+, 0, n_-) \to (0, 1^+, n_-)$
- B_6: $(2^+, 0, n_-) \to (1^+, 0, n_-)$

图9展示了AI阴性亚组的RDR截断转移图。请注意，状态 $(0, 2^+, n_-)$、$(1^+, 1^+, n_-)$ 和 $(2^+, 0, n_-)$ 重复出现，因为它们的

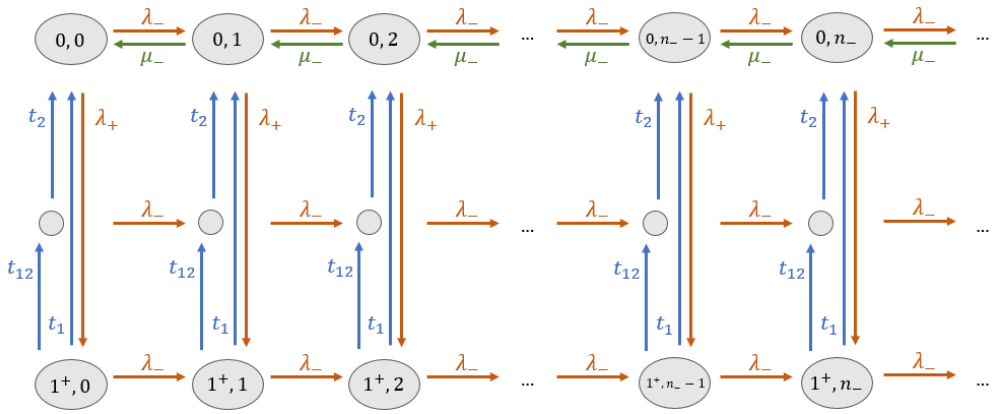


图 6：假设处于有CADt情景，模型 A 中 AI阴性低优先级患者影像的 RDR截断、EC近似转移图，其中 t's 对应于图5中的三个Coxian速率（红色）。

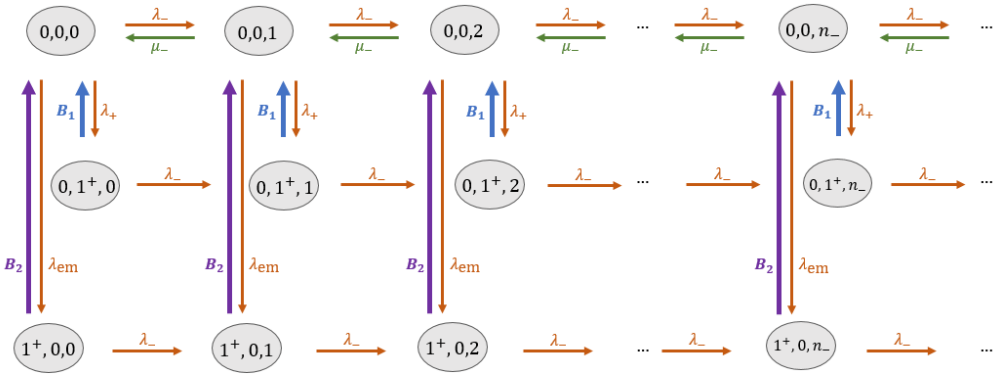


图7：有CADt情景下模型B中 AI阴性类别的 RDR截断转移图。状态（n_{em}、 n_+、 n_-）由急诊、AI阳性和 AI阴性患者影像的数量定义。粗箭头表示两个忙期的非指数转移速率 B_1 和 B_2 。

相应到达率也取决于忙期在特定状态结束的概率，即 (0, 1^+， n_-) 或 (1^+， 0， n_-)。例如， p_1 表示忙期在已知从 (0， 1^+， n_-) 开始的条件下于 (0， 2^+， n_-) 结束的条件概率。

在求解图9之前，必须计算每个忙期的条件概率和前三阶矩，据此近似转移率。计算过程见章节，其中给出了层间经过时间的 AI阳性转移图，并构建了转移概率矩阵。

每个忙期均采用 EC 分布进行近似（图5）。然而，不同于模型B（其中两个阶段的 Coxian 分布足以描述所有忙期）， B_2 和 B_5在模型C中需要额外一个 Erlang 阶段，如图10所示。增加一个阶段后，需要两个额外参数 t_0 和 t_{01}来近似 B_2 和 B_5。

$$t_0 = (1 - p_{\text{EC}})\lambda_{Y_{\text{EC}}}; \qquad t_{01} = p_{\text{EC}}\lambda_{Y_{\text{EC}}};$$
$$t_1 = (1 - p_{X_{\text{EC}}})\lambda_{X1_{\text{EC}}}; \qquad t_{12} = p_{X_{\text{EC}}}\lambda_{X1_{\text{EC}}}; \qquad t_2 = \lambda_{X2}. \tag{17}$$

一旦六个忙期均已完成近似，转移便可根据图9构建AI阴性最低优先级类别的转移率矩阵。（参见章节。）与之前一样，可以通过矩阵几何法求解相应的状态概率 p_{n_-} 。此外，可通过公式12计算每张AI阴性患者影像的平均等待时间 W_{q_-} 。

对于 $N_{\text{rad}} \geq 3$，也可以采用相同的方法。不过，随着忙期数量增加，转移率矩阵的规模将急剧增大，尤其是在忙期近似需要更多 Erlang 阶段时。

模型 D：不同阅片率下的模型B

模型 D 通过区分放射科医生在患病与未患病亚组中的阅片率（$N_{\text{rad}} = 1$、 $f_{\text{em}} > 0$和 $\mu_D \neq \mu_{ND}$），对模型B进行了扩展。急诊、非急诊、AI阳性和AI阴性类别的到达率保持不变（公式 13 - 16）。然而，由于 $\mu_D \neq \mu_{ND}$，非急诊、AI阳性和AI阴性亚组的阅片率取决于疾病患病率 π、阳性预测值 PPV 和阴性预测值 NPV（公式 2-4）。

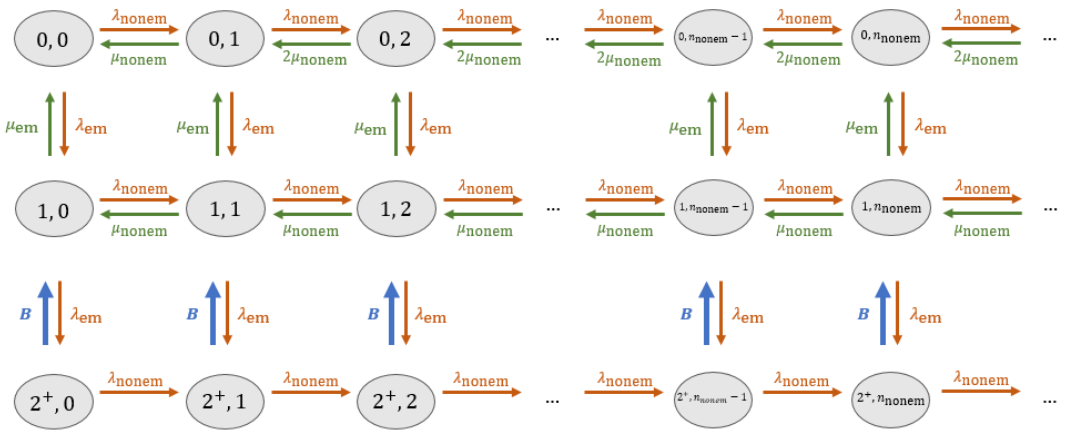


图8：在不使用CADt的情景下，模型C中非急诊患者影像的RDR截断转移图。状态（n_{em}， n_{nonEm}）由系统中的急诊病例数和非急诊病例数定义。

不使用CADt的情景中的模型 D 不使用CADt的情景包含两个优先级类别：急诊和非急诊患者影像。在非急诊类别中，两组患者影像（患病和未患病）按照先进先出（FIFO）的顺序进行阅片。相应的转移图如图11所示。与通常一样，状态会跟踪 n_{em} 和 n_{nonEm}。此外，由于患病与未患病亚组的阅片率不同，状态还必须跟踪放射科医生正在阅片的影像的疾病状态。因此，状态定义为（n_{em}、 n_{nonEm}、 i），其中 i 可以是 D（即放射科医生正在阅片一张患病图像），也可以是 ND（即放射科医生正在阅片一张未患病图像）。此外，还必须注意忙期如何开始和结束。例如，如果放射科医生正在阅片一张患病图像时被一张急诊影像的到达打断，即 $(0, n, D) \rightarrow (1^+, n, D)$，那么忙期结束时，状态必须回到 $(0, n, D)$，而不是 $(0, n, ND)$。通过设置两组截断状态，可确保这一特性：$(1^+, n)_{\rightarrow D}$ 只能与 $(0, n, D)$ 交互，而 $(1^+, n)_{\rightarrow ND}$ 只能与 $(0, n, ND)$ 交互。

图 11对应的转移率矩阵见章节。请注意，尽管图11的每一列都有两个忙期（一个对应“$\rightarrow D$”，另一个对应“$\rightarrow ND$”），但当系统中至少有一张急诊影像时，二者描述的是同一转移时间。因此，只计算一组唯一的 t参数来近似这两个忙期。

有CADt情景下的模型 D AI阳性（中优先级）和AI阴性（最低优先级）亚组的计算分别进行。

由于 AI阳性患者影像不受 AI阴性病例影响，急诊和AI阳性亚组构成一个双优先级类别排队系统。图 11 中的转移率矩阵 $M_{D_{\text{noCADt}}}$ 可用于分析 AI阳性患者影像的排队情况。将 λ_{nonEm} 替换为 λ_+（公式 15），将 μ_{nonEm} 替换为 μ_+（公式 3），并将 π 替换为 PPV，即可计算 AI阳性亚组 p_{n_+} 的状态概率，计算方法为标准矩阵几何法。随后，公式10给出每张 AI阳性患者影像的平均等待时间 W_{q+}。

对于AI阴性、最低优先级类别，状态的完整定义为（n_{em}， n_+， i， n_-， j）。 i表示 D或 ND，分别表示放射科医生正在处理患病的AI阳性病例或未患病的AI阳性病例。放射科医生正在阅片的AI阴性病例的疾病状态由 j 表示，其值为D 或 ND。由于我们只有一位放射科医生， i 和 j不能同时出现；这位放射科医生只能处理AI阳性或AI阴性病例，不能同时处理两者。

图12显示了AI阴性亚组的RDR截断转移图。其中有三种不同的忙期，相应的转移率为 B_i:

- B_1: $(1^+, 0, n_-) \rightarrow (0, 0, n_-, j)$
- B_2: $(0, 1^+, D, n_-) \rightarrow (0, 0, n_-, j)$
- B_3: $(0, 1^+, ND, n_-) \rightarrow (0, 0, n_-, j)$

对于每个忙期，截断状态会分别复制为“$\rightarrow D$”或“$\rightarrow ND$”，以便忙期结束时，系统能够返回到具有正确疾病状态 j 的状态。

与之前一样，每种不同忙期的条件概率及前三阶矩均根据转移概率矩阵确定（见章节）。此外，每种不同忙期都有一组 t参数（公式 11），通过两阶段Coxian分布近似得出。根据近似后的忙期转移，可以利用图12为AI阴性亚组构建转移率矩阵（见章节）。随后求解状态概率 p_{n_-}，并可通过公式12计算每张AI阴性患者影像的平均等待时间 W_{q_-}。

模拟

为了验证理论排队方法得出的分析结果，我们使用 Python 开发了蒙特卡洛软件，用于模拟诊所中患者影像的流转，分别考察

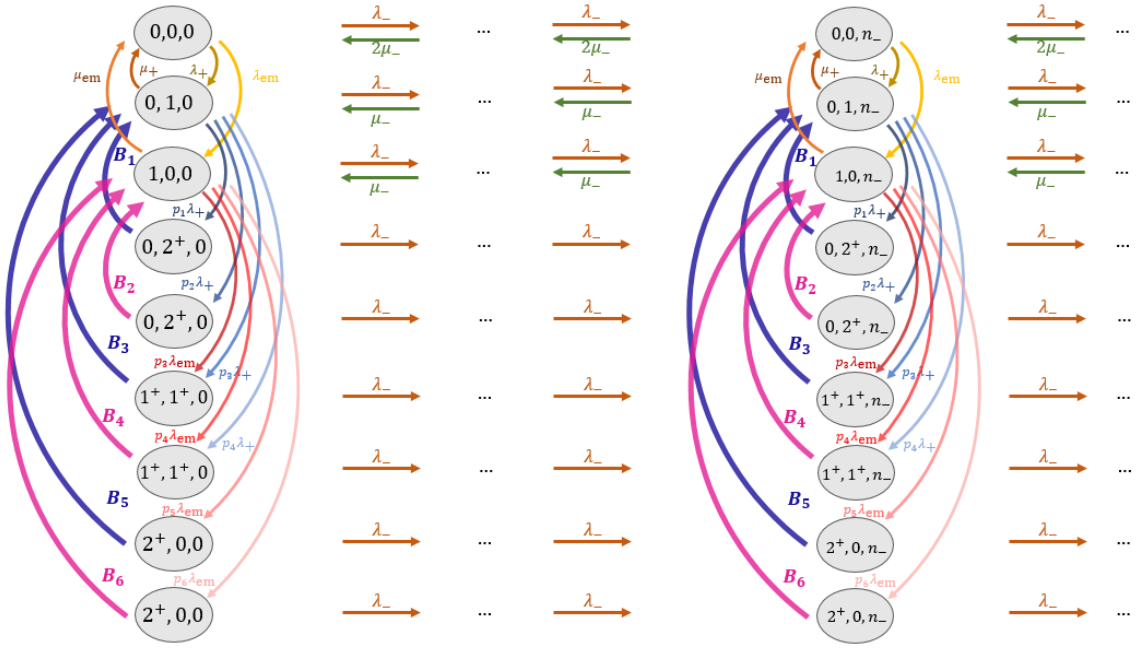


图9：有CADt情景下，模型C中AI阴性患者影像的RDR截断转移图。状态定义为（n_{em}，n_+，n_-），$n_{\text{em}} + n_+ \geq 2$ 的状态会被截断。共识别出6个忙期。每个忙期 i 都有一个转移率$\mathbf{B}_i$，以及一个概率，表示该忙期从某一特定状态开始后在某个状态结束的概率。

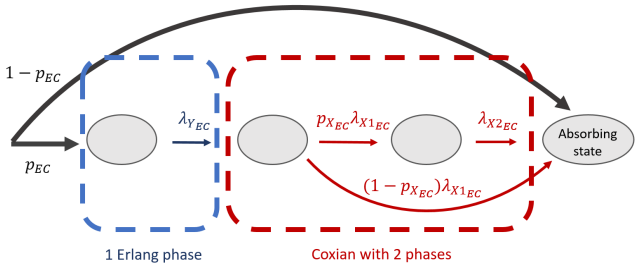


图10：包含一个Erlang 阶段和两个Coxian 阶段的 Erlang-Coxian（EC）分布。参数的闭式解计算方法见（Osogami 和 Harchol-Balter 2006）。

有和没有 CADt设备的情况。工作流模型由一组输入参数 $\{f_{\text{em}}, \pi, \rho, \mu, N_{\text{rad}}$, Se、Sp$\}$定义。

模拟过程中，系统会随机生成一条新的患者影像记录，其时间戳遵循泊松分布，总到达率为 λ，该到达率根据用户输入的参数（流量 ρ 和放射科医生的阅片率μ）计算得出。系统会根据输入的急诊比例 f_{em}，随机为每张患者影像指定急诊状态（急诊或非急诊）。如果患者影像属于急诊，则从阅片率为 μ_{em}的指数分布中随机生成阅片时间。如果患者影像属于非急诊，则根据输入的疾病患病率π，随机指定疾病状态（患病或未患病）。该非急诊患者影像的阅片时间也从指数分布中随机抽取，若患者患病，则阅片率为 μ_D；若未患病，则阅片率为 μ_{ND}。系统还会根据疾病状态和输入的 AI 准确度（Se 和 Sp），为每张非急诊患者影像指定 AI 判读状态（阳性或阴性）。随后，该患者影像会同时进入两个模拟场景：一个配备 CADt设备，另一个不配备。

在未配备 CADt 的系统中，传入的患者影像要么属于高优先级病例（若为急诊），要么属于低优先级病例（若为非急诊）。如果患者影像属于急诊病例，该病例的优先级高于系统中所有非急诊患者影像，并被放入仅供急诊病例使用的队列末尾。否则，该患者影像属于非急诊病例，并被放入当前阅片队列的末尾。之后，轮到该患者影像时，一名放射科医生会对其进行阅片，随后将其从队列中移除。对于这张模拟的患者影像，会记录两项信息。一项是其等待时间，定义为影像进入队列与离开队列的时间之差。此外，还会记录新患者影像到达前一刻队列中的急诊和非急诊患者影像数量，以研究状态概率分布。

或者，将同一患者影像放入使用CADt的情景中。该影像的优先级可以是高优先级（若为急诊）、中优先级（若为AI阳性）或低优先级（若为AI阴性）。若该患者影像属于急诊病例，则其优先级高于系统中的所有AI阳性和AI阴性患者影像，并被放在仅包含急诊病例的队列末尾。若该患者影像为AI阳性，则该病例

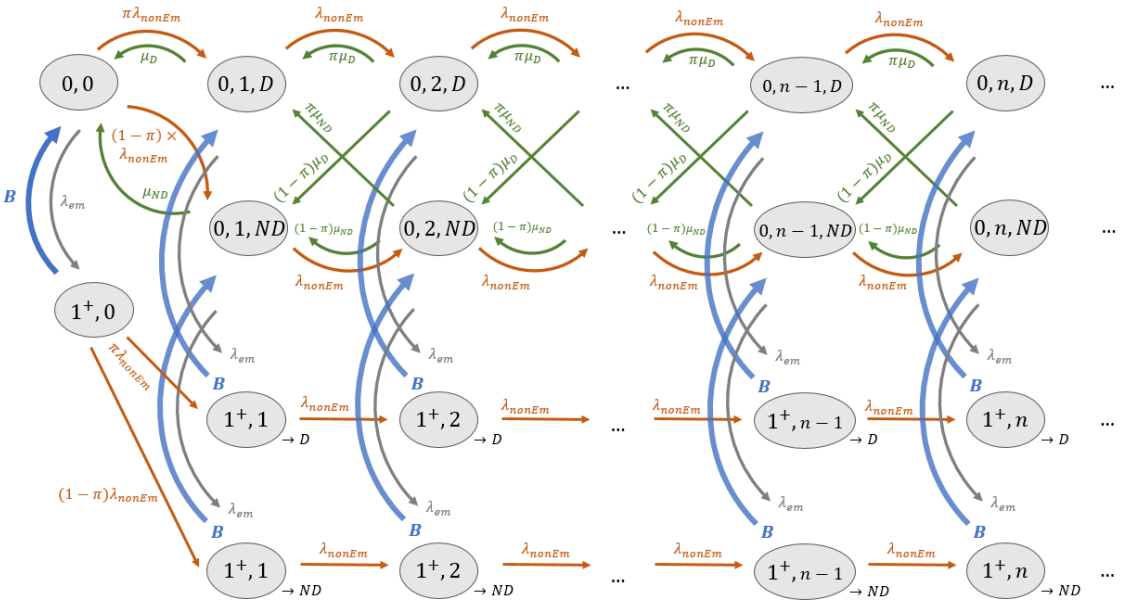


图 11：不使用CADt的情景下，模型 D 中非急诊患者影像的RDR截断转移图。状态由急诊患者影像的数量（0或 1^+）、非急诊患者影像 n的数量，以及一名放射科医生正在阅片的病例的疾病状态（患病为 D，未患病为 ND）定义。截断状态中的“$\rightarrow D$”和“$\rightarrow ND$”用于记录被中断的低优先级病例的疾病状态。

其优先级高于所有AI阴性影像，并被放在仅包含急诊和AI阳性患者影像的队列末尾。否则，该患者影像为AI阴性，并被放在当前阅片队列的末尾。该患者影像在使用CADt的情景中的阅片时间与其在未配备 CADt 的系统中的阅片时间相同。然而，由于CADt设备对队列进行了重新排序，该影像在使用CADt的情景中的等待时间可能与其在未配备 CADt 的系统中的等待时间不同。对于每个患者影像，都可以计算两种情景下等待时间的差值，以确定使用CADt设备会为该影像节省时间还是造成时间延迟。除等待时间外，还会记录新患者影像到达前一刻急诊、AI阳性和AI阴性患者影像的数量。

为模拟足够大的样本量，一次完整模拟包含200次模拟，每次约有2,000名患者。从所有模拟中，将所有患病患者影像的等待时间绘制成直方图，并据此确定均值和95%置信区间。

节时效果评估指标

我们定义了一项指标，用于定量评估给定CADt设备的节时效果。理论方法和模拟方法均会输出在使用和不使用CADt的情景下，每张患病患者影像的平均等待时间 W_{D}。

由于到达过程是随机的，在没有 CADt设备的情况下，每位非急诊患者的平均等待时间为

年龄 $W_{\mathrm{nonEm}}^{\text{no-CADt}}$与 $W_{\mathrm{D}}^{\text{no-CADt}}$相同，即

$$W_{\mathrm{D}}^{\text{no-CADt}} = W_{\mathrm{nonEm}}^{\text{no-CADt}} = W_{q_{\mathrm{nonEm}}}. \tag{18}$$

当工作流程中纳入 CADt设备后，患病和未患病患者影像的平均等待时间不再相同，因为 CADt 更可能优先处理患病影像。为计算$W_{\mathrm{D}}^{\text{CADt}}$，我们首先根据章节 中讨论的数学框架，分别计算每张 AI阳性（$W_{+}^{\text{CADt}} = W_{q_+}$）和 AI阴性（$W_{-}^{\text{CADt}} = W_{q_-}$）患者影像的平均等待时间。根据定义，患病亚组 $W_{\mathrm{D}}^{\text{CADt}}$的平均等待时间为

$$W_{\mathrm{D}}^{\text{CADt}} \equiv \frac{\text{Total waiting time from all diseased patient images}}{\text{Number of diseased patient images}}.$$

请注意，所有患病患者的总等待时间等于真阳性（TP）亚组的总等待时间与假阴性（FN）亚组的总等待时间之和。设 N_{TP}、 N_{FN}和 N_{D} 分别为真阳性患者影像、假阴性患者影像和患病影像的数量。 $W_{\mathrm{D}}^{\text{CADt}}$可改写为

$$W_{\mathrm{D}}^{\text{CADt}} = \frac{W_{+}^{\text{CADt}} \times N_{\mathrm{TP}} + W_{-}^{\text{CADt}} \times N_{\mathrm{FN}}}{N_{\mathrm{D}}}.$$

由于根据定义， $N_{\mathrm{TP}}/N_{\mathrm{D}}$ 和 $N_{\mathrm{FN}}/N_{\mathrm{D}}$ 分别为 Se 和1 − Se，因此我们有

$$W_{\mathrm{D}}^{\text{CADt}} = W_{+}^{\text{CADt}} \times \mathrm{Se} + W_{-}^{\text{CADt}} \times (1 - \mathrm{Se}). \tag{19}$$

为量化 aCADt 设备对患病患者影像的节时效果，我们定义一个时间性能指标 δW_{D}，即

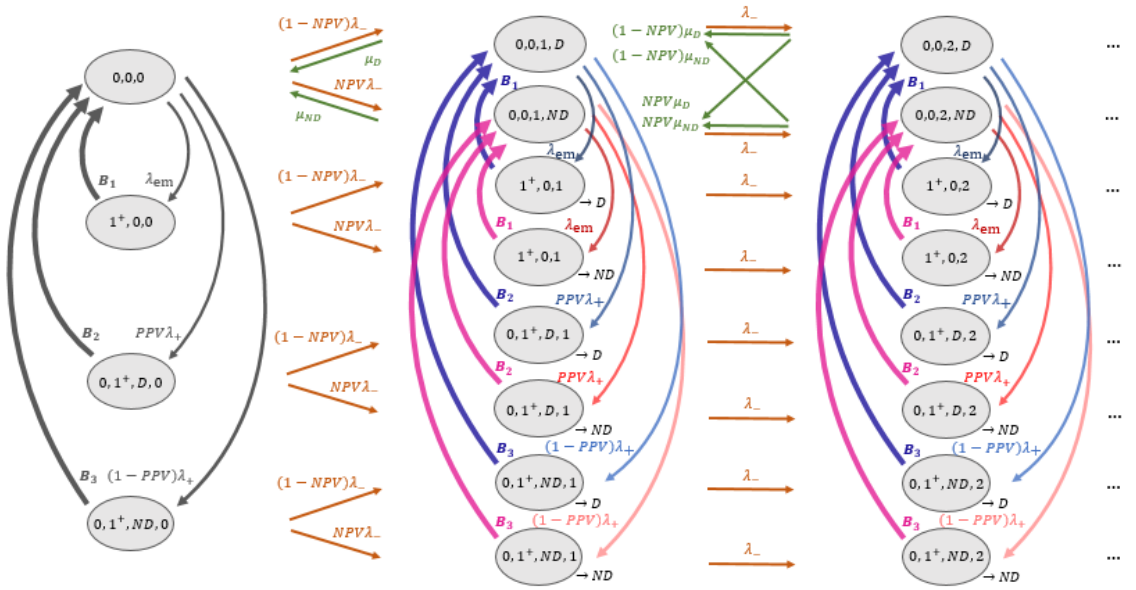


图12：有CADt情景下模型E中AI阴性亚组的RDR截断转移图。状态定义为（n_{em}， n_+， i， n_-， j），其中 i（或 j）表示放射科医生正在阅片的AI阳性（或AI阴性）病例的疾病状态。

有 CADt 与无 CADt 场景下每张患病图像的平均等待时间之差:

$$\delta W_{\mathrm{D}} \equiv W_{\mathrm{D}}^{\mathrm{CADt}} - W_{\mathrm{D}}^{\text{no-CADt}}. \tag{20}$$

需要注意的是，除了在公式19中明确依赖AI敏感度外，δW_{D} 在计算$W_{\text{CADt+}}$、 W_{-}^{CADt}和 $W_{\text{无CADt非Em}}$时，还取决于AI特异度及所有临床因素。

根据其定义，负的 δW_{D} 意味着，平均而言，纳入CADt设备后，患病患者影像会比未纳入时更早得到阅片。 δW_{D} 越负，节省的时间越多，CADt设备也越有效。如果 $\delta W_{\mathrm{D}} = 0$，则CADt设备的存在不会给患病患者影像带来任何益处。如果 δW_{D} 为正，则患病患者影像平均会延迟阅片，且CADt设备给患病亚组带来的风险大于益处。

还应注意，其他亚组的时间节省量也可以用类似方式定义。例如，对于未患病亚组，在不使用CADt的情景下，每张未患病患者影像的平均等待时间 $W_{\mathrm{ND}}^{\text{no-CADt}}$ 为

$$W_{\mathrm{ND}}^{\text{no-CADt}} = W_{\text{nonEm}}^{\text{no-CADt}}.$$

将 CADt设备 纳入工作流程后，每张未患病患者影像的平均等待时间 $W_{\mathrm{ND}}^{\mathrm{CADt}}$ 变为

$$W_{\mathrm{ND}}^{\mathrm{CADt}} = W_{+}^{\mathrm{CADt}} \times (1 - \mathrm{Sp}) + W_{-}^{\mathrm{CADt}} \times \mathrm{Sp},$$

其中，第一项和第二项分别对应假阳性亚组和真阴性亚组。 δW_{ND} 随后可定义为用于描述平均等待时间差即未患病亚组在使用CADt的情景与不使用CADt的情景之间的平均等待时间差。

结果与讨论

图13上图显示了在没有任何急诊患者影像的情况下，现场有一名和两名放射科医生时，每张患病患者影像节省的时间随流量强度 ρ 的变化。假设疾病患病率 π 为 10%、AI 灵敏度为 95%、特异度为 89%、患病与未患病亚组的平均影像阅片时间均为 10 分钟，且现场有一名放射科医生，则节省的时间会显著增加：在安静、低流量的诊所（放射学流量强度为 0.3）约为 2 分钟，而在相对繁忙的诊所（放射学流量强度为 0.8）则约为 1 小时。当流量强度 ρ 为 0.8 时，疾病患病率造成的影响较小（见图13中图）。总体而言，与现场有两名放射科医生相比，现场只有一名放射科医生时，该设备的节时效果也更为明显。图13下图显示了具有最高优先级、可覆盖任何 AI优先级排序的急诊患者影像对节时效果的影响。没有急诊患者时，每张患病图像节省的时间（$f_{\mathrm{em}} = 0$）与存在 $f_{\mathrm{em}} = 50\%$ 急诊患者时大致相同。这可能是因为在不使用CADt的情景下，急诊患者影像造成的延迟与有CADt情景下的延迟相近。

图 14 展示了放射科医生对患病与未患病亚组采用不同阅片率的影响。其对交通强度、疾病患病率和急诊比例的总体依赖关系与图 13 类似。不过，患病患者影像节省的时间更多

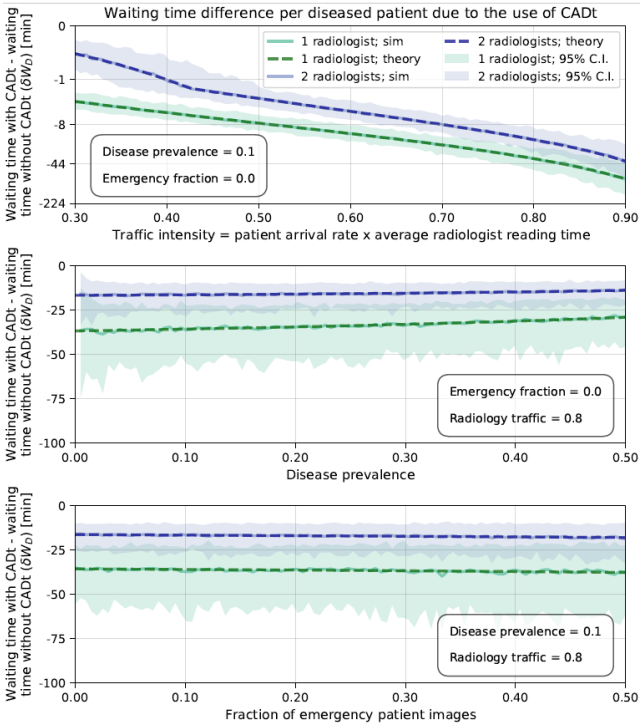


图13：每张患病患者影像节省的时间，随（上）交通强度、（中）疾病患病率和（下）急诊比例的变化。绿色和蓝色线分别表示有一名和两名放射科医生的情形。虚线表示理论上的 δW_D，实线表示模拟得出的平均节时效果。阴影区域为模拟得出的95%置信区间（C.I.）。急诊影像的平均阅片时间设为5分钟，而患病与未患病亚组的平均阅片时间均为10分钟。

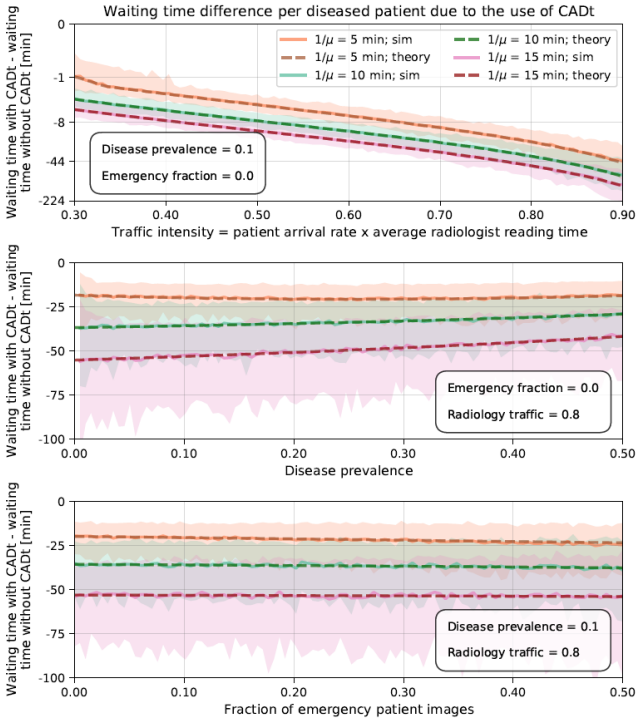


图14：每位患病患者节省的时间与（上）交通强度、（中）疾病患病率和（下）急诊比例的关系。现场只有一名放射科医生，其对急诊患者影像和患病患者影像的平均阅片时间分别设为5分钟和10分钟。未患病患者影像的平均阅片时间分别为5分钟（橙色）、10分钟（绿色）和15分钟（红色）。虚线表示理论值δW_D，实线表示模拟得出的平均节省时间效果。阴影区域为模拟得出的95%置信区间（C.I.）。请注意，此处的绿色线组与图13中的完全相同。

当 $\mu_D < \mu_{ND}$ 时，也就是说，放射科医生平均花在阅读非患病图像上的时间比阅读患病图像更多。

为评估CADt设备，我们基于模型B提出了如图15所示的总结图，用于描述CADt设备的诊断效果和节时效果。该图基于传统的受试者工作特征（ROC）分析（Metz 1978），其中ROC曲线表征CADt设备的诊断性能。对于由一组参数定义的特定放射科医生工作流程，ROC空间中假阳性率（FPR）和真阳性率（TPR）的每个点都对应着每张患病患者影像的预期平均节省时间 δW_D，并以色彩图呈现。设备在ROC空间左上角附近的诊断性能近乎理想，此处 δW_D 最为负向。

为展示CADt设备的节时效果，δW_D 沿ROC曲线绘制为FPR（顶部）和TPR（左侧）的函数。在（FPR，TPR）=(0, 0)时，δW_D 为0分钟，因为所有图像均被分类为AI阴性，即没有图像被列为优先处理。沿ROC曲线，随着FPR和TPR增大，时间节省量 $|\delta W_D|$ 也会增加，因为大多数AI阳性病例实际上是患病患者的图像。随着FPR和TPR继续增大，假阳性病例数量占据主导，降低了设备的节时效果。当（FPR，TPR）=(1, 1)时，δW_D 又回到0，因为所有图像均被分类为AI阳性，系统实质上不再有优先级类别。

患病患者影像的平均时间节省 δW_D可直接关联到潜在的患者预后。例如，如果我们关注的疾病是大血管闭塞（LVO）卒中，δW_D 图15右侧的颜色轴可转换为三项卒中患者结局指标。根据 Saver等，2016 的补充内容（补充材料2）中的表12，患者每提前15分钟接受治疗，卒中患者发生残疾的比例就会降低3.9%。这还可以转换为另外两项常见的大血管闭塞性卒中患者结局指标——获益所需治疗人数（NNTB）和

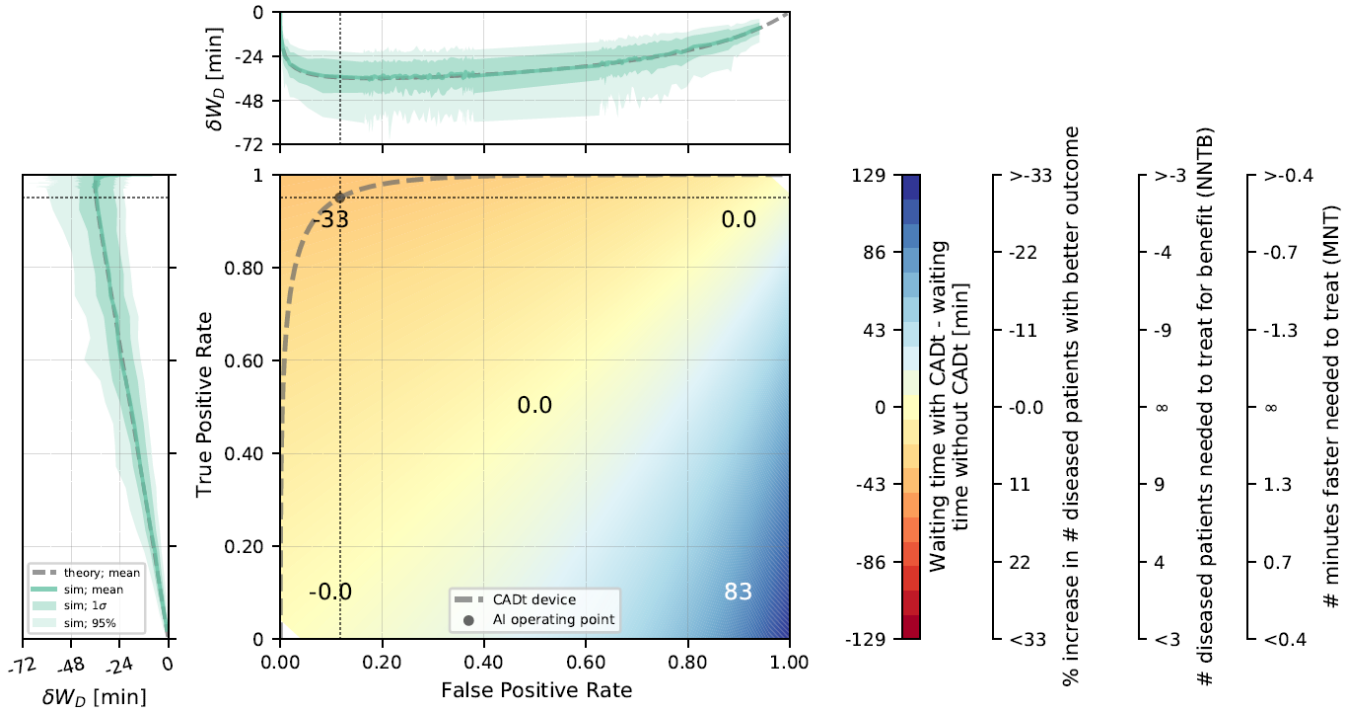


图15：用于评估CADt设备诊断效果和节时效果的汇总ROC图。中间的彩虹色图是ROC空间，其中绘有理论CADt设备的ROC曲线（深灰色虚线）。色彩图表示每张患病患者影像的理论平均时间节省（δW_D）；假设在一家相对繁忙的医院（交通强度为0.8）中，疾病患病率为10%，且只有一名放射科医生，也没有急诊患者影像。患病和未患病患者影像的平均阅片时间均设为10分钟。正值 δW_D（蓝色区域）表示患病患者影像总体上出现时间延迟，负值 δW_D（红色区域）则表示总体上节省时间。色彩图上标注的数值，是假阳性率和真阳性率对应点的 δW_D。圆点表示预先确定的人工智能工作点（Se $= 95\%$，Sp $= 88\%$）。上方图表示沿ROC曲线随假阳性率变化的理论 δW_D（灰色虚线）；左侧图则表示沿同一曲线随真阳性率变化的理论 δW_D（灰色虚线）。绿色实线表示通过模拟得到的沿ROC曲线的平均时间节省。较深和较浅的阴影区域分别表示模拟所得平均时间节省周围的68%和95%范围。黑色点状竖线和横线表明，在给定工作点，患病患者的理论平均节时约为36分钟。根据《Stroke》2016年Saver等人在补充内容（补充材料2）表12中的数据，将色轴转换为卒中患者结局指标。

治疗所需时间缩短分钟数（MNT）。δW_D 与大血管闭塞性卒中患者结局指标之间的关系按线性外推，并显示在图15右侧的三个坐标轴上。因此，ROC曲线上的最佳 δW_D 约为-40分钟，对应于大血管闭塞性卒中患者中残疾程度较轻者增加约11%、获益需治疗人数超过9，以及治疗所需时间缩短超过1.4分钟。请注意，这些结果取决于我们假设的阅片率和交通强度。未来，我们希望收集临床数据，以便更准确地估算阅片率、交通强度和等待时间节省。

根据我们的排队论方法，CADt设备的节省时间效果很大程度上取决于临床环境。我们的模型表明，具有典型人工智能诊断性能（敏感度为95%、特异度为89%）的CADt设备在繁忙且人员短缺的诊所中最为有效。所有理论预测均与模拟结果一致，且完全处于95%置信区间内。本文中用于理论计算和模拟的软件将发布在美国食品药品监督管理局影像、诊断与软件可靠性部门的GitHub网站上：https://github.com/DIDSR/QuCAD。

在本研究中，我们仅考虑一种疾病，CADt设备经过训练，可识别该疾病；患者影像要么来自患病患者，要么来自未患病患者。在此设定下，评估CADt的节时效果时，δW_D 被用作性能指标，因为CADt设备旨在帮助患有时间紧迫疾病的患者。未来，当我们将研究扩展到包含患有两种或更多疾病的患者影像的阅片队列时，将定义新的性能指标，以考虑CADt未检测的其他时间紧迫的疾病。

结论

我们提出了一个基于排队论和递归维度缩减方法的数学框架，用于量化基于人工智能的医疗器械根据二元分类结果对患者影像进行优先排序所带来的节时效果。我们构建了多个模型，从理论上预测此类设备的节时效果与多种参数之间的关系，包括疾病患病率、患者到达率、放射科医生阅片率、现场放射科医生人数、AI敏感度和特异度，以及是否存在优先级最高、能够覆盖任何AI排序结果的急诊患者影像。本文提出的方法有助于评估CADt或任何优先级排序设备的节时表现。本文所述模型也可用于评估许多其他排队场景中的判别算法，例如顾客服务或计算机作业排队。近期，我们计划将模型扩展到包含多种疾病状况、成像模态和解剖部位的临床场景，并同时使用多个CADt设备。

致谢

作者感谢 Mor Harchol-Balter 博士（harchol@cs.cmu.edu）和 Takayuki Osogami 博士（OS- OGAMI@jp.ibm.com）帮助我们理解他们针对复杂排队系统的递归维度缩减（RDR）方法。此外，作者感谢获得器械与放射健康中心关键路径计划的资助。作者还感谢通过任命加入器械与放射健康中心研究参与计划而获得的资助。该计划由橡树岭科学与教育研究所管理，依据美国能源部与美国食品药品监督管理局（FDA）之间的机构间协议开展。

参考文献

Barreira, C. M.; Bouslama, M.; Haussen, D. C.; Grossberg, J. A.; Baxter, B.; Devlin, T.; Frankel, M.; and Nogueira, R. G. 2018年. 摘要 WP61：卒中影像中大动脉闭塞的自动检测——ALADIN研究。《Stroke》, 49(Suppl 1)。

Harchol-Balter, M.；Osogami, T.；Scheller-Wolf, A.；以及 Wierman, A. 2005。具有多个优先级类别的多服务器排队系统。*QueueingSyst.*，51(3-4)：331–360。

Hassan, A. E.；Ringheanu, V. M.；Preston, L.；以及 Tekle, W. 2021。摘要 P248：综合卒中中心实施人工智能软件显著改善了从入院到腹股沟穿刺的时间间隔和再通率。《*Stroke*》，52(Suppl 1)。

Hassan, A. E.; Ringheanu, V. M.; Rabah, R. R.; Preston, L.; Tekle, W. G.; 和 Qureshi, A. I. 2020. 在中心辐射型模式中运用人工智能的早期经验显示，转运时间和住院时间显著缩短。*Interv.Neuroradiol.*，26(5): 615–622。

Metz, C. E. 1978. ROC分析的基本原理。 *Semin.Nucl.Med.*, 8(4): 283–298。

Osogami, T.；以及 Harchol-Balter, M. 2006。将一般分布映射为准最小PH分布的闭式解。*Perform. Eval.*，63(6)：524–552。

Saver, J. L.；Goyal, M.；van der Lugt, A.；Menon, B. K.；Majoie, C. B. L. M.；Dippel, D. W.；Campbell, B. C.；Nogueira, R. G.；Demchuk, A. M.；Tomasello, A.；Cardona, P.；Devlin, T. G.；Frei, D. F.；du Mesnil de Rochemont, R.；Berkhemer, O. A.；Jovin, T. G.；Siddiqui, A. H.；van Zwam,W. H.；Davis, S. M.；Casta˜no, C.；Sapkota, B. L.；Fransen, P. S.；Molina,́C.；van Oostenbrugge, R. J.；Chamorro, A.；Lingsma, H.；Silver, F. L.；Donnan, G. A.；Shuaib, A.；Brown, S.；Stouch, B.；Mitchell, P. J.；Davalos, A.；Roos, Y. B. W. E. M.；Hill, M. D.；以及 HERMES合作者。2016。血管内血栓切除术治疗时间与缺血性卒中结局：荟萃分析。*JAMA*，316(12)：1279。

Stewart, W. J. 2009. 概率、马尔可夫链、排队系统与模拟. 美国新泽西州普林斯顿：普林斯顿大学出版社。

美国食品药品监督管理局。2018年。美国食品药品监督管理局允许销售临床决策支持软件，用于提醒医务人员患者可能发生卒中。

van Leeuwen,K. G.; de Rooij,M.; Schalekamp, S.; van Ginneken, B.; and Rutten, M. J. C. M. 2022. 人工智能如何提升放射学的效率和健康结局？*Pediatr.Radiol.*, 52(11): 2087–2093。

Yahav-Dovrat, A.; Saban, M.; Merhav, G.; Lankri, I.; Abergel, E.; Eran, A.; Tanne, D.; Nogueira, R. G.; and Sivan-Hoffmann, R. 2021. 评估人工智能辅助识别综合卒中中心大血管闭塞的效果。*AJNRAm. J. Neuro-radiol.*, 42(2): 247–254。

马尔可夫链矩阵

本附录章节提供了第 章节中讨论的四种放射科医师工作流程模型各自涉及的矩阵。

有CADt情景中的模型 A

马尔可夫链转移速率矩阵 M_{A} 基于图 6 构建。

$$M_{\mathrm{A}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} B_{00} & B_{01} & & & \\ \hline B_{10} & A_1 & A_2 & & \\ \hline & A_0 & A_1 & A_2 & \\ \hline & & A_0 & A_1 & \ddots \\ \hline & & & \ddots & \ddots \end{array}\right], \qquad (21)$$

其中

$$A_0 = \begin{pmatrix} \mu_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} * & \lambda_+ & 0 \\ t_1 & * & t_{12} \\ t_2 & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_- & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_- \end{pmatrix},$$

$$B_{01} = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_- & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_- \end{pmatrix},\ B_{00} = \begin{pmatrix} * & \lambda_+ & 0 \\ t_1 & * & t_{12} \\ t_2 & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$B_{10} = \begin{pmatrix} \mu_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

M_{A} 具有由子矩阵 As 和 Bs 定义的三对角分块结构，其中 $*$'s 是相应行中所有元素之和的负值。B_{00}、B_{01}和B_{10} 是表示状态为 $n_- = 0$时边界条件的分块矩阵；由于阅片队列中的 AI 阴性患者影像数量不能为负数，因此禁止出现带有 $n_- < 0$ 的状态。A_0、A_1和 A_2 是沿矩阵对角轴重复排列的分块结构。

有CADt情景下的模型B

此情景包含两个忙期（B_1 和 B_2）。对于每个忙期，我们首先利用图16计算其层间经过时间的前三阶矩。两个AI阴性忙期的起始和结束状态均已突出显示。例如，B_1 表示从红色的 (0，1) 开始，到蓝色的 (0，0) 结束的时间段，无论系统可能经过哪些中间状态。计算前三阶矩所涉及的步骤记录在（Harchol-Balter 等人，2005）的附录A中。

根据图16，转移概率矩阵 P_{B}如下所示。

$$P_{\mathrm{B}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathcal{L}_1 & \mathcal{F}_1 & & & \\ \hline \mathcal{B}_2 & \mathcal{L}_2 & \mathcal{F}_2 & & \\ \hline & \mathcal{B}_3 & \mathcal{L}_3 & \mathcal{F}_3 & \\ \hline & & \mathcal{B}_4 & \mathcal{L}_4 & \ddots \\ \hline & & & \ddots & \ddots \end{array}\right], \tag{23}$$

其中

$$\mathcal{B}_{\ell=2} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_+}{\lambda_{\mathrm{em}}+\lambda_++\mu_+} \\ \frac{t_1}{\lambda_++t_1+t_{12}} \\ \frac{t_2}{\lambda_++t_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_{\ell\geq 3} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_+}{\lambda_{\mathrm{em}}+\lambda_++\mu_+} & 0 & 0 \\ \frac{t_1}{\lambda_++t_1+t_{12}} & 0 & 0 \\ \frac{t_2}{\lambda_++t_2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_{\ell=1} = (0),\ \mathcal{L}_{\ell\geq 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t_{12}}{\lambda_++t_1+t_{12}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_{\ell=1} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_+}{\lambda_++\lambda_{\mathrm{em}}} & \frac{\lambda_{\mathrm{em}}}{\lambda_++\lambda_{\mathrm{em}}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_{\ell\geq 2} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_+}{\lambda_++\lambda_{\mathrm{em}}+\mu_+} & \frac{\lambda_{\mathrm{em}}}{\lambda_++\lambda_{\mathrm{em}}+\mu_+} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_+}{\lambda_++t_1+t_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_+}{\lambda_++t_2} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

这里，t-参数是图16中转移**B** 得出的近似指数率。Harchol-Balter 等人（2005）利用 $\mathcal{F}$、$\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{B}$ 提供的框架，得到包含相关忙期概率的 G 矩阵，以及包含忙期 r 阶矩的 Z_r 矩阵。对于模型B中的AI阴性优先级类别，Z_r 矩阵的维度为 3×1，其中第一和第二个元素分别是B_1 和 B_2 的 r阶矩。对于这两个忙期中的每一个，都可以使用两阶段Coxian分布，根据公式 11近似其分布形状。

设 $t_1^{(1)}$、$t_{12}^{(1)}$ 和 $t_2^{(1)}$ 为 B_1 的近似速率，$t_1^{(2)}$、$t_{12}^{(2)}$ 和 $t_2^{(2)}$ 为 B_2 的近似速率。图7的转移率矩阵 M_{B} 如下所示。

$$M_{\mathrm{B}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_{00} & B_{01} & & \\ \hline B_{10} & A_1 & A_2 & \\ \hline & A_0 & A_1 & \ddots \\ \hline & & A_0 & \ddots \\ \hline & & & \ddots \end{array}\right], \tag{25}$$

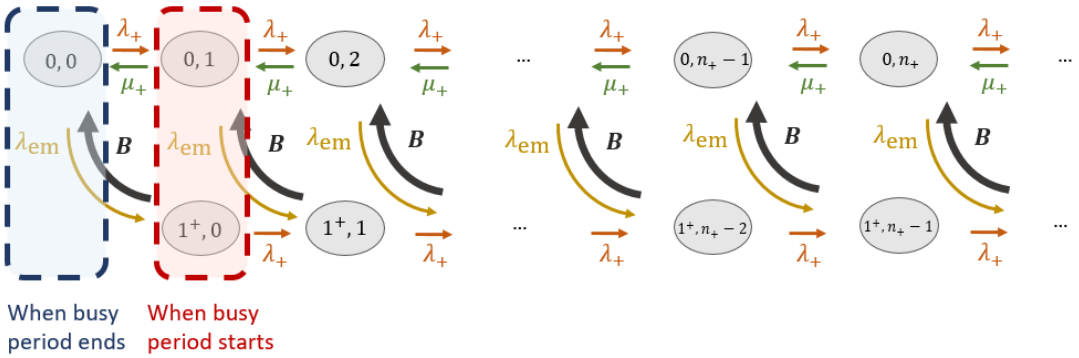


图16：用于计算有CADt情景下模型B中AI阳性（中优先级）层间经过时间的转移图。状态定义为（n_{em}， n_+），每一列记录 $\ell = n_+ + \text{Min}(N_{\text{rad}},\ n_{\text{em}}) + 1$。红色和蓝色方框分别表示AI阴性患者影像忙期的开始和结束状态。

其中

$$A_0 = \begin{pmatrix} \mu_- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} * & \lambda_+ & 0 & \lambda_{\text{em}} & 0 \\ t_1^{(1)} & * & t_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ t_2^{(1)} & 0 & * & 0 & 0 \\ t_1^{(2)} & 0 & 0 & * & t_{12}^{(2)} \\ t_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_- \end{pmatrix},$$

$$B_{00} = \begin{pmatrix} * & \lambda_+ & 0 & \lambda_{\text{em}} & 0 \\ t_1^{(1)} & * & t_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ t_2^{(1)} & 0 & * & 0 & 0 \\ t_1^{(2)} & 0 & 0 & * & t_{12}^{(2)} \\ t_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$B_{01} = \begin{pmatrix} \lambda_- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_- & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_- \end{pmatrix},$$

$$B_{10} = \begin{pmatrix} \mu_- & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

M_{B} 中的子矩阵与 M_{A} 中的子矩阵非常相似（公式22和 **??**）。唯一的区别是，由于与图4相比，图7中多了一行截断状态，因此这些子矩阵现在是 5×5，而不是 3×3。

不使用CADt的情景下的模型C

转移率矩阵 $M_{\text{C}_{\text{noCADt}}}$ 基于图8构建。

$$M_{\text{C}_{\text{noCADt}}} = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & & & \\ B_{10} & A_1 & A_2 & & \\ & A_0 & A_1 & A_2 & \\ & & A_0 & A_1 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{27}$$

其中

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2\mu_{\text{nonEm}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_{\text{nonEm}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} * & \lambda_{\text{em}} & 0 & 0 \\ \mu_{\text{em}} & * & \lambda_{\text{em}} & 0 \\ 0 & t_1 & * & t_{12} \\ 0 & t_2 & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda_{\text{nonEm}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\text{nonEm}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\text{nonEm}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{\text{nonEm}} \end{pmatrix},$$

$$B_{00}=\left(\begin{array}{cccc:cccc}
* & \lambda_{\text{em}} & 0 & 0 & \lambda_{\text{nonEm}} & 0 & 0 & 0\\
\mu_+ & * & \lambda_{\text{em}} & 0 & 0 & \lambda_{\text{nonEm}} & 0 & 0\\
0 & t_1 & * & t_{12} & 0 & 0 & \lambda_{\text{nonEm}} & 0\\
0 & t_2 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & \lambda_{\text{nonEm}}\\
\hdashline
\mu_{\text{nonEm}} & 0 & 0 & 0 & * & \lambda_{\text{em}} & 0 & 0\\
0 & \mu_{\text{nonEm}} & 0 & 0 & \mu & * & \lambda_{\text{em}} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_1 & * & t_{12}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & t_2 & 0 & *
\end{array}\right),$$

$$B_{01}=\left(\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
\hdashline
\lambda_{\text{nonEm}} & 0 & 0 & 0\\
0 & \lambda_{\text{nonEm}} & 0 & 0\\
0 & 0 & \lambda_{\text{nonEm}} & 0\\
0 & 0 & 0 & \lambda_{\text{nonEm}}
\end{array}\right),$$

$$B_{10}=\left(\begin{array}{cccc:cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{\text{nonEm}} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_{\text{nonEm}} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right). \quad (28)$$

有CADt情景下的模型C

该情景包含六个忙期（B_1 至 B_6）。对于每个忙期，我们首先使用图17计算其条件概率以及层间经过时间的一至三阶矩。相应的转移概率矩阵 P_{C} 如下所示。

$$P_{\text{C}}=\left[\begin{array}{c|c|c|c|c}
\mathcal{L}_1 & \mathcal{F}_1 & & & \\ \hline
\mathcal{B}_2 & \mathcal{L}_2 & \mathcal{F}_2 & & \\ \hline
 & \mathcal{B}_3 & \mathcal{L}_3 & \mathcal{F}_3 & \\ \hline
 & & \mathcal{B}_4 & \mathcal{L}_4 & \ddots \\ \hline
 & & & \ddots & \ddots
\end{array}\right], \quad (29)$$

其中

$$\mathcal{B}_{\ell=2}=\begin{pmatrix}\frac{\mu_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++\mu_+}\\ \frac{\mu_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++\mu_{\text{em}}}\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_{\ell=3}=\begin{pmatrix}\frac{2\mu_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++2\mu_+} & 0\\ \frac{\mu_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++\mu_++\mu_{\text{em}}} & \frac{\mu_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++\mu_++\mu_{\text{em}}}\\ 0 & \frac{t_1}{\lambda_++t_1+t_{12}}\\ 0 & \frac{t_2}{\lambda_++t_2}\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{\ell\geq 4}=\begin{pmatrix}\frac{2\mu_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++2\mu_+} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\mu_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++\mu_++\mu_{\text{em}}} & \frac{\mu_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++\mu_++\mu_{\text{em}}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{t_1}{\lambda_++t_1+t_{12}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{t_2}{\lambda_++t_2} & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_{\ell=1}=(0),\ \mathcal{L}_{\ell=2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_{\ell\geq 3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_{12}}{\lambda_++t_1+t_{12}}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_{\ell=1}=\begin{pmatrix}\frac{\lambda_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+} & \frac{\lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+}\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_{\ell=2}=\begin{pmatrix}\frac{\lambda_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++\mu_+} & \frac{\lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++\mu_+} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\lambda_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++\mu_{\text{em}}} & \frac{\lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++\mu_{\text{em}}} & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_{\ell\geq 3}=\begin{pmatrix}\frac{\lambda_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++2\mu_+} & \frac{\lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++2\mu_+} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\lambda_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++\mu_++\mu_{\text{em}}} & \frac{\lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_++\mu_++\mu_{\text{em}}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\lambda_+}{\lambda_++t_1+t_{12}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_+}{\lambda_++t_2}\end{pmatrix}. \quad (30)$$

对于 P_{C}，根据 Harchol-Balter等，2005 的附录 A，计算了全部六种忙期的层间通过时间的条件概率及前三阶矩。对于大多数忙期，三个 t 参数就足以进行近似。然而，对于 B_2 和 B_5，由于多了两个 Erlang 阶段，因此还需要两个额外参数 t_0和 t_{01}。

令 $t_j^{(i)}$ 表示忙期 B_i 的 t_j 参数。图9中 AI阴性最低优先级类别的转移率矩阵 $M_{C_{\text{CADt}}}$ 为

$$M_{\text{C}_{\text{CADt}}}=\left[\begin{array}{c|c|c|c}
B_{00} & B_{01} & & \\ \hline
B_{10} & A_1 & A_2 & \\ \hline
 & A_0 & A_1 & \ddots \\ \hline
 & & A_0 & \ddots \\ \hline
 & & & \ddots
\end{array}\right]. \quad (31)$$

所有 A 子矩阵均为 17×17。这里，$\mathbb{0}_{14}$ 表示一个 14×14零矩阵，而 I_{17} 表示一个 17×17 单位矩阵。

$$A_0=\begin{pmatrix}2\mu_- & & & \\ & \mu_- & & \\ & & \mu_- & \\ & & & \mathbb{0}_{14}\end{pmatrix},$$

$$A_2=\lambda_-\mathbb{I}_{17},$$

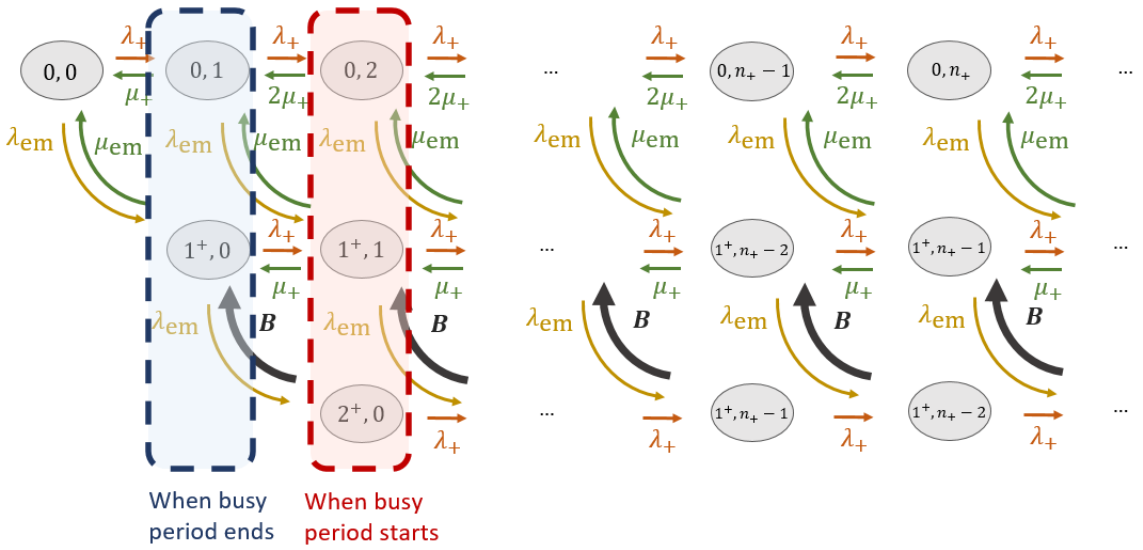


图17：用于计算 awith-CADt情景下模型C中 AI阳性（中优先级）类别层间通过时间的转移图。

$$A_1 = \begin{pmatrix} * & \lambda_+ & \lambda_{\text{em}} & \mathbf{p}_1\lambda_+ & \mathbf{p}_2\lambda_+ & \mathbf{p}_3\lambda_{\text{em}} \; \mathbf{p}_3\lambda_+ & \mathbf{p}_4\lambda_{\text{em}} \; \mathbf{p}_4\lambda_+ & \mathbf{p}_5\lambda_{\text{em}} & \mathbf{p}_6\lambda_{\text{em}} \\ \mu_+ & * & & \mathbf{t}^{(1)} & & & & & \\ \mu_{\text{em}} & & * & & \mathbf{t}^{(2)} & & & & \\ & & & \mathbb{T}_4^{(1)} & & \mathbf{t}^{(3)} & & & \\ & & & & \mathbb{T}_5^{(2)} & & \mathbf{t}^{(4)} & & \\ & & & & & \mathbb{T}_6^{(3)} & & \mathbf{t}^{(5)} & \\ & & & & & & \mathbb{T}_7^{(4)} & & \mathbf{t}^{(6)} \\ & & & & & & & \mathbb{T}_8^{(5)} & \mathbb{T}_9^{(6)} \end{pmatrix}, \tag{32}$$

其中，对于 $i = 1,\ 3,\ 4,\ 6$,

$$\mathbf{p_i} = (p_i \quad 0), \quad \mathbf{t}^{(i)} = \begin{pmatrix} t_1^{(i)} \\ t_2^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{T}_k^{(i)} = \begin{pmatrix} * & t_{12}^{(i)} \\ & * \end{pmatrix}.$$

对于 $i = 2,\ 5$，由于增加了一个 Erlang 阶段，子矩阵会多出一行和/或一列。

$$\mathbf{p_i} = (p_i \quad 0 \quad 0), \quad \mathbf{t}^{(i)} = \begin{pmatrix} t_0^{(i)} \\ t_1^{(i)} \\ t_2^{(i)} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{T}_k^{(i)} = \begin{pmatrix} * & t_{01}^{(i)} & \\ & * & t_{12}^{(i)} \\ & & * \end{pmatrix}.$$

同样，边界 B 子矩阵如下所示。

$$B_{01} = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_{17} \\ \hline \lambda_- \mathbb{I}_{17} \end{pmatrix}, \quad B_{10} = \begin{pmatrix} \mathbb{0}_{17} & \begin{matrix} 2\mu_+ & & & \\ & \mu_+ & & \\ & & \mu_+ & \\ & & & \mathbb{0}_{14} \end{matrix} \end{pmatrix},$$

$$B_{00} = \begin{pmatrix} A_1 & \lambda_- \mathbb{I}_{17} \\ \hline \begin{matrix} \mu_+ & & & \\ & \mu_+ & & \\ & & \mu_+ & \\ & & & \mathbb{0}_{14} \end{matrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ A_1 \end{matrix} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

不使用CADt的情景下的模型 D

图 11 的转移率矩阵 $M_{\text{D}_{\text{noCADt}}}$ 如下所示。

$$M_{\text{D}_{\text{noCADt}}} = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & & & \\ \hline B_{10} & A_1 & A_2 & & \\ \hline & A_0 & A_1 & A_2 & \\ \hline & & A_0 & A_1 & \ddots \\ \hline & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{34}$$

其中

$$A_0 = \begin{pmatrix} \pi\mu_D & (1-\pi)\mu_D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \pi\mu_{ND} & (1-\pi)\mu_{ND} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} * & 0 & \lambda_{\text{em}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & \lambda_{\text{em}} & 0 \\ t_1 & 0 & * & t_{12} & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 & 0 & * & t_{12} \\ 0 & t_2 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \lambda_{\text{nonEm}} \ \mathbb{I}_6,$$

$$B_{00} = \begin{pmatrix} * & \lambda_{\text{em}} & 0 \\ t_1 & * & t_{12} \\ t_2 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad B_{10} = \begin{pmatrix} \mu_D & 0 & 0 \\ \mu_{ND} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{01} = \begin{pmatrix} \pi\lambda_{\text{nE}} & (1-\pi)\lambda_{\text{nE}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi\lambda_{\text{nE}} & 0 & (1-\pi)\lambda_{\text{nE}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi\lambda_{\text{nE}} & 0 & (1-\pi)\lambda_{\text{nE}} \end{pmatrix}, \tag{35}$$

其中， λ_{nE} 指非急诊亚组的到达率。请注意， $M_{\text{D}_{\text{noCADt}}}$ 和 M_{A} （公式21）均描述了一个包含两个优先级类别和一名放射科医生的排队系统。然而，由于 $\mu_D \neq \mu_{ND}$， A子矩阵的大小从 3×3 增至 6×6 ，这是因为状态定义中增加了 i，并且还增加了一组截断状态，用于记录被中断病例的疾病状态。

有CADt情景下的模型 D

该情景包含三个忙期（B_1 至 B_3）。对于每个忙期，我们使用图18和相应的转移概率矩阵 P_{D}，计算其条件概率以及层间通过时间的前三阶矩。

$$P_{\text{E}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathcal{L}_1 & \mathcal{F}_1 & & & \\ \hline \mathcal{B}_2 & \mathcal{L}_2 & \mathcal{F}_2 & & \\ \hline & \mathcal{B}_3 & \mathcal{L}_3 & \mathcal{F}_3 & \\ \hline & & \mathcal{B}_4 & \mathcal{L}_4 & \ddots \\ \hline & & & \ddots & \ddots \end{array}\right], \tag{36}$$

其中

$$\mathcal{B}_{\ell=2} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_D}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_D} \\ \frac{\mu_{ND}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_{ND}} \\ \frac{t_1}{\lambda_+ +t_1+t_{12}} \\ \frac{t_2}{\lambda_+ +t_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_{\ell=3} = \begin{pmatrix} \frac{PPV\mu_D}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_D} & \frac{(1-PPV)\mu_D}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_D} & 0 & 0 \\ \frac{PPV\mu_{ND}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_{ND}} & \frac{(1-PPV)\mu_{ND}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_{ND}} & 0 & 0 \\ \frac{t_1}{\lambda_+ +t_1+t_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_2}{\lambda_+ +t_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t_1}{\lambda_+ +t_1+t_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t_2}{\lambda_+ +t_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{\ell\geq 4} = \begin{pmatrix} \frac{PPV\mu_D}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_D} & \frac{(1-PPV)\mu_D}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_D} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{PPV\mu_{ND}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_{ND}} & \frac{(1-PPV)\mu_{ND}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_{ND}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_1}{\lambda_+ +t_1+t_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{t_2}{\lambda_+ +t_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t_1}{\lambda_+ +t_1+t_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t_2}{\lambda_+ +t_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_{\ell=1} = (0), \quad \mathcal{L}_{\ell=2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}_{\ell\geq 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_{12}}{\lambda_+ +t_1+t_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_{12}}{\lambda_+ +t_1+t_{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_{\ell=1} = \begin{pmatrix} \frac{PPV\lambda_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+} & \frac{(1-PPV)\lambda_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+} & \frac{\lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_{\ell=2} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_D} & 0 & \frac{\lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_{ND}} & 0 & 0 & \frac{\lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_{ND}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{PPV\lambda_+}{\lambda_+ +t_1+t_{12}} & 0 & \frac{(1-PPV)\lambda_+}{\lambda_+ +t_1+t_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{PPV\lambda_+}{\lambda_+ +t_2} & 0 & \frac{(1-PPV)\lambda_+}{\lambda_+ +t_2} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{F}_{\ell\geq 3} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_D} & 0 & \frac{\lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_+}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_{ND}} & 0 & 0 & \frac{\lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}+\lambda_+ +\mu_{ND}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_+}{\lambda_+ +t_1+t_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_+}{\lambda_+ +t_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_+}{\lambda_+ +t_1+t_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_+}{\lambda_+ +t_2} \end{pmatrix}. \tag{37}$$

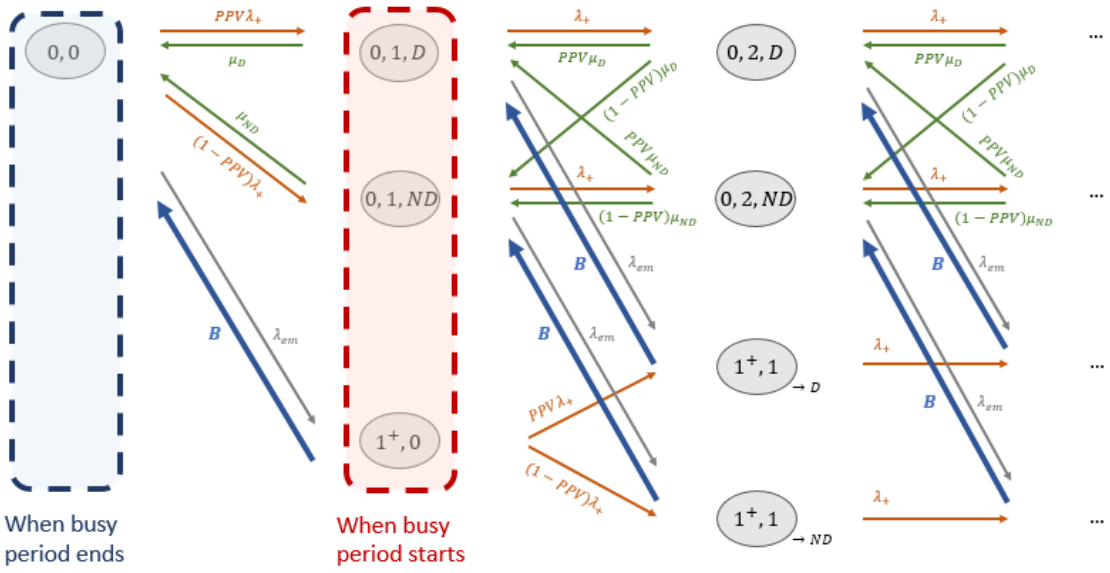


图18：在 awith-CADt情景下，模型 D 中 AI阳性（中优先级）类别的层间经过时间转移图。

三个忙期各自都有一组由两阶段Coxian分布近似得出的 t-参数（公式 11）。

令 $t_j^{(i)}$ 表示忙期 B_i的 t_j 参数。AI阴性亚组（图 12）的转移率矩阵 $M_{\mathrm{D_{CADt}}}$ 为

$$M_{\mathrm{D_{CADt}}} = \begin{bmatrix} B_{00} & B_{01} & & \\ B_{10} & A_1 & A_2 & \\ & A_0 & A_1 & \ddots \\ & & A_0 & \ddots \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{38}$$

下文给出了 14×14 A 子矩阵的定义，其中 $\mathbb{0}_{12}$表示一个 12×12 零矩阵，而 I_{14} 是一个 14×14 单位矩阵。

$$A_0 = \begin{pmatrix} (1-NPV)\mu_D & NPV\mu_D & \\ (1-NPV)\mu_{ND} & NPV\mu_{ND} & \\ & & \mathbb{0}_{12} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \lambda_+ \mathbb{I}_{14},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} * & \mathbf{p}\lambda_{\mathrm{em}} & \mathbf{p}PPV\lambda_+ & \mathbf{p}PPV\lambda_+ & \mathbf{p}(1-PPV)\lambda_+ & \text{段落}(1-PPV)\lambda_+ \\ & * & \mathbf{p}\lambda_{\mathrm{em}} & & & \\ \mathbf{t}^{(1)} & \mathbb{T}_3^{(1)} & & & & \\ & \mathbf{t}^{(1)} & \mathbb{T}_4^{(1)} & & & \\ \mathbf{t}^{(2)} & & & \mathbb{T}_5^{(2)} & & \\ & \mathbf{t}^{(2)} & & & \mathbb{T}_6^{(2)} & \\ \mathbf{t}^{(3)} & & & & & \mathbb{T}_7^{(3)} \\ & \mathbf{t}^{(3)} & & & & \end{pmatrix}, \tag{39}$$

其中，对于忙期$\mathbf{B}_i$,

$$\mathbf{p} = (1 \quad 0), \ \mathbf{t}^{(i)} = \begin{pmatrix} t_1^{(i)} \\ t_2^{(i)} \end{pmatrix}, \ \mathbb{T}_k^{(i)} = \begin{pmatrix} * & t_{12}^{(i)} \\ 0 & * \end{pmatrix}. \tag{40}$$

另一方面，边界 B 矩阵则是

$$B_{00} = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & \mathbf{p}\lambda_{\text{em}} & \mathbf{p}PPV\lambda_+ & \mathbf{p}(1-PPV)\lambda_+ \\ \mathbf{t}^{(1)} & \mathbb{T}_2^{(1)} & & \\ \mathbf{t}^{(2)} & & \mathbb{T}_3^{(2)} & \\ \mathbf{t}^{(3)} & & & \mathbb{T}_4^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$B_{01} = \begin{pmatrix} (1-NPV)\lambda_- & NPV\lambda_- & & \\ & & \mathbb{Q} & \\ & & & \mathbb{Q} \\ & & & \mathbb{Q} \end{pmatrix},$$

$$B_{10} = \begin{pmatrix} \mu_D & \\ \mu_{ND} & \\ & \mathbb{0}_{12\times 6} \end{pmatrix}, \tag{41}$$

其中

$$\mathbb{Q} = \begin{pmatrix} (1-NPV)\lambda_- & 0 & NPV\lambda_- & 0 \\ 0 & (1-NPV)\lambda_- & 0 & NPV\lambda_- \end{pmatrix}.$$

(42)