arXiv:2303.07090v1 [math.AC] 13 Mar 2023

正特征下的 p_g-理想

TONY J. PUTHENPURAKAL

Abstract. 设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个包含域 $k \cong A/\mathfrak{m}$ 的二维优良正规整环。若 $\mathfrak{m}$-初等理想 I 的 Rees 代数 $A[It]$ 是 Cohen-Macaulay 正规整环，则称 I 为 p_g-理想。若 k 是代数闭的，Okuma、Watanabe 和 Yoshida 证明了 A 有 p_g-理想，而且两个 p_g-理想的乘积也是 p_g 理想。在此前的一篇论文中，我们证明了若 k 的特征为零，则 A 有 p_g-理想。本文证明，若 k 是正特征完美域，则 A 也有 p_g 理想。

1. introduction

亲爱的读者，阅读本文时，建议您随手备好 [10] 。设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个二维正规整环。根据 Zariski 关于二维正则局部环中整闭理想的理论可知，若 A 是正则的，且 I 是一个整闭的 $\mathfrak{m}$-初等理想，则 Rees 代数 $\mathcal{R}(I) = A[It]$ 是 Cohen-Macaulay 正规整环；关于这一主题的现代阐述，参见 [4, 第 14] 章。后来，Lipman 证明了，若 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个二维有理奇点，则类似结论也成立，见 [6]。

假设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个包含代数闭域 $k \cong A/\mathfrak{m}$ 的二维优良正规整环。对于这类环，Okuma、Watanabe 和 Yoshida 在 [8] 中（运用几何方法）如下引入了 p_g-理想的概念：设 I 是 A 中的一个 $\mathfrak{m}$-初等理想。I 有一个消解 $f\colon X \to Spec(A)$，其中 $I\mathcal{O}_X$ 可逆。于是，对某个反数值有效循环 Z，有 $I\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X(-Z)$。可以证明，$\ell_A(H^1(X,\mathcal{O}_X(-Z)) \leq p_g(A)$，其中 $p_g(A) = \ell_A(H^1(X,\mathcal{O}_X)$ 是 A 的几何亏格，而 Z 是一个反数值有效循环，使得 $\mathcal{O}_X(-Z)$ 没有固定分量。若一个整闭的 $\mathfrak{m}$-初等理想 I 满足 $\ell_A(H^1(X,\mathcal{O}_X(-Z)) = p_g(A)$，则称其为 p_g-理想。他们证明了 p_g 理想在 A 中存在。此外，若 I、J 是两个 $\mathfrak{m}$-初等p_g 理想，他们还证明了 IJ 是一个 p_g- 理想。此外，I 是稳定的，因此 Rees 代数 $\mathcal{R}(I)$ 是一个 Cohen-Macaulay正规整环。他们还证明，若 A 也是有理奇点，则任意 $\mathfrak{m}$-初等整闭理想都是一个 p_g-理想。在后来的一篇论文 [9] 中，他们证明，若 $\mathcal{R}(I)$ 是 Cohen-Macaulay正规整环，则 I 是一个 p_g-理想。

Date：2023年3月14日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：13A30、13B22；次要分类号：13A50、14B05。*Key words and phrases.* p_g-理想、正规 Rees 环、科恩–麦考利环、稳定理想。1

受这一结果启发，我们在 [10] 中作出如下定义：

定义 1.1. 设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个二维正规整环。若 $\mathfrak{m}$-primary 理想 I 满足其 Rees 代数 $\mathcal{R}(I) = A[It]$ 是一个正规 Cohen-Macaulay 整环，则称其为 p_g-理想。

注意，若 I 是一个 p_g-理想，则 I 的所有幂都是整闭的。此外，若 A 的剩余域是无限域，则 I 是稳定的（即，I 的约化数为 ≤ 1），见 [3, 定理 1]。根据定义，无法推出若 I、J 是 p_g-理想，则它们的乘积 IJ 也是一个 p_g 理想。不过，若 A 也解析非分歧且其剩余域为无限域，则根据 Rees 的一个结果，两个 p_g 理想的乘积是 p_g，见 [11, 2.6]（另见 [10, 1.2]）。我们不知道每个二维正规整环是否都有一个 p_g 理想。

在 [10] 中，我们证明了：若（$A,\mathfrak{m}$）是一个包含特征零域 $k \cong A/\mathfrak{m}$ 的优良二维正规整环，则 A中存在 p_g 理想。若 k 具有正特征，则 [10] 中的技巧不再适用。本文证明

定理 1.2. 设（$A,\mathfrak{m}$）是一个包含特征为 $p > 0$的完美域 $k \cong A/\mathfrak{m}$ 的优良二维正规整环。那么， A中存在 p_g 理想。

为证明定理 1.2，我们借鉴了 [10]中发展的技巧。主要的新技巧是 Ellingsrud-Skjelbred 发现的两个谱序列； [1,第 2]节。

现在我们简要介绍本文的内容。第二节讨论所需的一些预备知识。第三节讨论 Ellingsrud-Skjelbred 发现的两个谱序列，并给出一个我们需要的应用。第四节给出定理 1.2 的证明。

2. PRELIMINARIES

本节中，$(A,\mathfrak{m})$ 始终表示一个含有完美域 $k \cong A/\mathfrak{m}$ 的二维诺特局部环。

以下大部分内容已在 [10] 中证明。

引理 2.1. 设 $(A,\mathfrak{m})$ 是一个含有完美域 $k \cong A/\mathfrak{m}$ 的诺特局部环。设 ℓ 是 k 的有限扩张。令 $B = A \otimes_k \ell$。则有以下
(1) B 是有限平坦的 A-模。(2) B 是诺特环。(3) B 是局部环，其极大理想为 $\mathfrak{m}B$，剩余域同构于 ℓ。(4) B 包含 ℓ。(5) A 是 Cohen-Macaulay（Gorenstein、正则）的，当且仅当 B 是 Cohen-Macaulay（Gorenstein、正则）的。(6) 若 A 是优良的，则 B也如此。

(7) 若 A 是正规的，则 B也如此。(8) 若 A 是优良正规环，且 I 是 A中的整闭理想，则 IB 是 B中的整闭理想。(9) 若 ℓ是 k 的伽罗瓦扩张，伽罗瓦群为 G ，则 G 作用于 B （经由$\sigma(a \otimes t) = a \otimes \sigma(t)$）。此外， $B^G = A$。(10) 若 A 是维数为二的 Cohen-Macaulay 环，则自然映射 $H^2_{\mathfrak{m}}(A) \to H^2_{\mathfrak{m}}$是一个包含映射。

(B)

证明。关于 (1)-(8)，见 [10, 2.1]。

(9) 显然， G 作用于 B （通过所述作用），且 $A \subseteq B^G$。根据正规基定理, 参见 [5, 第 6 章定理 13。1], 存在 $x \in \ell$ 使得$\{\sigma(x) \colon \ \sigma \in G\}$是 ℓ在 k上的一组基。 B作为 A-模的一组基为 $\{1 \otimes \sigma(x) \colon \ \sigma \in G\}$。

令 $\xi \in B^G$。令 $\xi = \sum_\sigma a_\sigma(1 \otimes \sigma(x))$。令 e 为 G中的单位元。令 $\tau \in G$。于是注意到

$$\xi = \tau^{-1}\xi = \sum_\sigma a_\sigma(1 \otimes \tau^{-1}\sigma(x))$$

比较各项可得，对所有 $\tau \in G$，都有 $a_e = a_\tau$。因此

$$\begin{aligned}
\xi &= a_e \left(\sum_\sigma 1 \otimes \sigma(x) \right), \\
&= a_e(1 \otimes \sum_\sigma \sigma(x)), \\
&= a_e(r \otimes 1) \quad \text{where } r = \sum_\sigma \sigma(x) \in k, \\
&= a_e r(1 \otimes 1) \in A.
\end{aligned}$$

结论得证。

（10）我们有一个有限维 k 向量空间的正合列

$$0 \to k \to \ell \to V \to 0.$$

因此我们有一个 A-模的正合列

$$0 \to A \to B \to A \otimes_k V \to 0.$$

注意， B 和 $A \otimes_k V$都是自由的 A-模。由于 $H^i_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ 对于 $i < 2$ 成立，结论即得。 □

2.2. 一种构造：固定 k的一个代数闭包 $\overline{k}$ 。我们研究$A \otimes_k \overline{k}$的性质。

2.3. 设

$$\mathcal{C}_k = \{E \mid E \text{ is a finite extension of } k \text{ in } \overline{k}\}.$$

我们注意到， $\mathcal{C}_k$ 是一个域的有向系统，且 $\lim_{E \in \mathcal{C}_k} E = \overline{k}$。对于 $E \in \mathcal{C}_k$ ，令 $A^E = A \otimes_k E$。于是由 2.1 A^E 是 A的有限平坦扩张。此外， A^E 是局部环

，其极大理想为 $\mathfrak{m}^E = \mathfrak{m}A^E$。显然， $\{A^E\}_{E\in\mathcal{C}_k}$ 构成一个局部环的有向系统，且我们有 $\lim_{E\in\mathcal{C}_k} A^E = A\otimes_k \overline{k}$。根据 [2, Chap. 0. (10.3.13)] ，可知$A\otimes_k \overline{k}$ 是一个诺特局部环（设其极大理想为$\mathfrak{m}^{\overline{k}}$）。注意，我们可以将 A^E 视为 $A\otimes_k \overline{k}$的子环。我们有

$$A\otimes_k \overline{k} = \bigcup_{E\in\mathcal{C}_k} A^E \quad \text{and} \quad \mathfrak{m}^{\overline{k}} = \bigcup_{E\in\mathcal{C}_k} \mathfrak{m}^E.$$

由此可得 $\mathfrak{m}(A\otimes_k \overline{k}) = \mathfrak{m}^{\overline{k}}$。显然， $A\otimes_k \overline{k}$ 包含 $\overline{k}$，且其剩余域同构于 $\overline{k}$。扩张 $A\to A\otimes_k \overline{k}$ 是平坦的，纤维为 $\cong \overline{k}$。特别地，$\dim A\otimes_k \overline{k}$ 为二。

2.4. 设 $F\in\mathcal{C}_k$。令

$$\mathcal{C}_F = \{E \mid E\in\mathcal{C}_k, E\supseteq F\}.$$

于是 $\mathcal{C}_F$ 在 $\mathcal{C}_k$中是共尾的。因此我们有 $\lim_{E\in\mathcal{C}_F} A^E = A\otimes_k \overline{k}$。另请注意，若 $E\in\mathcal{C}_F$，则

$$A^E = A\otimes_k E = A\otimes_k F\otimes_F E = A^F\otimes_F E.$$

还可得 $\mathfrak{m}^E = \mathfrak{m}^F A^E$。

以下结果的证明见 [10, 3.3]。

引理 2.5. 如果 A 是优良的，那么 $A\otimes_k \overline{k}$ 也是。

我们需要的 $A\otimes_k \overline{k}$ 的主要性质总结如下，这一结果即 [10] 中的定理 3.4。

定理 2.6.（假设同上）令 $T = A\otimes_k \overline{k}$ 和 $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}^{\overline{k}}$。我们有：(1) A 是 Cohen-Macaulay（Gorenstein、正则）的，当且仅当 T 是 Cohen-Macaulay（Gorenstein、正则）的。(2) A 是正规整环，当且仅当 T 是正规整环。(3) 假设 A 是优良正规整环。则有：(a) I 在 A 中整闭，当且仅当 IT 在 T 中整闭。(b) I 是 A 中的 p_g 理想，当且仅当 IT 是 T 中的 p_g 理想。

3. Ellingsrud-Skjelbred spectral sequences and an application

本节将介绍 Ellingsrud-Skjelbred 谱序列（我们遵循 [7, 8.6] 中的阐述）。我们还将给出一个对我们至关重要的应用。

3.1. 设 S 是一个交换诺特环。设 $Mod(A)$ 为左 A-模范畴。

(1) 设 G 是一个有限群。设 $S[G]$ 为群环，并设 $Mod(S[G])$ 为左 $S[G]$-模范畴。设 $(-)^G$ 为 G-不动点函子。设 $H^n(G,-)$ 为 $(-)^G$ 的 n^{th} 右导出函子。

(2) 设 $\mathfrak{a}$ 是 S 中的一个理想。设 $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ 是与 $\mathfrak{a}$ 相关联的挠函子。设 $H^n_{\mathfrak{a}}(-)$ 是 $\Gamma_{\mathfrak{a}}(-)$ 的 n^{th} 右导出函子。通常， $H^n_{\mathfrak{a}}(-)$ 称为关于 $\mathfrak{a}$ 的 A n^{th}局部上同调函子。

(3) 如果 $M \in Mod(S[G])$，那么注意 $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M) \in Mod(S[G])$。

3.2. Ellingsrud-Skjelbred 谱序列的构造如下：考虑以下函子序列

$$(i) \quad Mod(S[G]) \xrightarrow{(-)^G} Mod(S) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}} Mod(S),$$

$$(ii) \quad Mod(S[G]) \xrightarrow{\Gamma_{\mathfrak{a}}} Mod(S[G]) \xrightarrow{(-)^G} Mod(S)$$

接下来注意到

(a) 上述复合相等。(b) 对上面的 (i) 和 (ii)，都可以使用复合函子的 Grothendieck 谱序列；参见 [7, 8.6.2]。

按照 Ellingsrud-Skjelbred 的记法，我们用 $H^n_{\mathfrak{a}}(G, -)$ 表示这个复合函子的 n^{th} 右导出函子。因此，由 (i) 和 (ii)，对每个 $S[G]$-模 M，我们都有两个第一象限谱序列

$$(\alpha): \qquad E_2^{p,q} = H^p_{\mathfrak{a}}(H^q(G, M)) \Longrightarrow H^{p+g}_{\mathfrak{a}}(G, M), \text{ and}$$

$$(\beta): \qquad \mathcal{E}_2^{p,q} = H^p(G, H^q_{\mathfrak{a}}(M)) \Longrightarrow H^{p+g}_{\mathfrak{a}}(G, M).$$

注 3.3. (1) 若 S 是 $\mathbb{N}$-分次环，则 $S[G]$ 也具有 $\mathbb{N}$-分次（对所有 $\sigma \in G$，deg $\sigma = 0$）。

(2) 若 M 是有限生成的分次左 $S[G]$-模，则 $H^n(G, M)$ 是有限生成的分次 S-模。这一点显然可通过取 S 的分次自由消解来证明，该消解由有限生成的分次自由 $S[G]$-模构成。

(3) Ellingsrud-Skjelbred谱序列有一个显然的分次类比。

3.4. 应用：

设定：设 $(A, \mathfrak{m})$ 是一个包含域 $k \cong A/\mathfrak{m}$ 的二维 Cohen-Macaulay 局部环。设 ℓ 是 k 的一个有限伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 G。令$B = A \otimes_k \ell$，并设 $\mathfrak{n}$ 是 B 的极大理想。令 G 作用于 B （如 2.1(9) 所述）。注意 $B^G = A$；见 2.1(9)。设 I 是 B 的一个 $\mathfrak{n}$- 准素理想，且在 G 作用下不变（即，对每个 $\sigma \in G$，有 $\sigma(I) = I$ ）。设 $\mathcal{R}(I) = B[It]$ 是 I 的 Rees 代数。于是注意到 G 在 $\mathcal{R}(I)$ 上有一个自然作用。令 $\mathcal{C} = \mathcal{R}(I)^G$。由 E.Noether 的一个结果可知， $\mathcal{C}$ 是一个分次有限生成的 $A = \mathcal{C}_0$-代数。此外，$\mathcal{R}(I)$ 是一个有限 $\mathcal{C}$-模。我们证明

定理 3.5。（假设与 3.4 中相同。）设 $\mathfrak{M}$ 为 $\mathcal{C}$ 的分次极大理想。若 $\mathcal{R}(I)$ 是 Cohen-Macaulay，则

(1) $H^0_{\mathfrak{M}}(\mathcal{C}) = H^1_{\mathfrak{M}}(\mathcal{C}) = 0$。（2） $H^2_{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})$具有有限长度，且 $H^2_{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})_0 = 0$。（3）对于某个 $r > 0$，存在 A 中的一个 $\mathfrak{m}$-primary 理想 J，使得 $A[Jt] = \mathcal{C}^{<r>}$是 Cohen-Macaulay。

证明。我们首先考虑带有 $S = \mathcal{C}$和 $M = \mathcal{R}(I)$的 Ellingsrud-Skjelbred谱序列（β）。注意到，由于 $\mathcal{R}(I)$是有限 $\mathcal{C}$-模，我们得到 $\sqrt{\mathfrak{M}\mathcal{R}(I)}$是 $\mathcal{R}(I)$的分次极大理想。由于 $\mathcal{R}(I)$是维数为 3 的 Cohen-Macaulay 环，我们得到对于 $i \leq 2$，$H^i_{\mathfrak{M}}(\mathcal{R}(I)) = 0$。此外，由 Grothendieck消失定理，我们得到对于 $i > 3$，$H^i_{\mathfrak{M}}(\mathcal{R}(I)) = 0$。因此，（$\beta$）在第二页退化。特别地，对于 $r = 0$，1，2，我们有 $H^r_{\mathfrak{M}}(G, \mathcal{R}(I)) = 0$。

接下来我们考虑 Ellingsrud-Skjelbred谱序列（α），其中 $S = \mathcal{C}$ 和$M = \mathcal{R}$（I）。

（1）我们有 $E^{0,0}_2 = H^0_{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})$。此外，显然 $E^{0,0}_2 = E^{0,0}_\infty$。由于 $E^{0,0}_\infty$是 $H^0_{\mathfrak{M}}(G, \mathcal{R}(I))$的子商，$= 0$ 我们得到 $H^0_{\mathfrak{M}}(\mathcal{C}) = 0$。

我们还有 $E^{1,0}_2 = H^1_{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})$。此外，显然 $E^{1,0}_2 = E^{1,0}_\infty$。由于 $E^{1,0}_\infty$是 $H^1_{\mathfrak{M}}(G, \mathcal{R}(I))$的子商，$= 0$ 我们得到 $H^1_{\mathfrak{M}}(\mathcal{C}) = 0$。

（2）我们有 $E^{0,1}_2 = H^0_{\mathfrak{M}}(H^1(G, \mathcal{R}))$ 以及 $E^{2,0}_2 = H^2_{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})$。注意，我们有一个正合列

$$0 \to E^{0,1}_3 \to H^0_{\mathfrak{M}}(H^1(G, \mathcal{R}(I))) \to H^2_{\mathfrak{M}}(\mathcal{C}) \to E^{2,0}_3 \to 0.$$

此外，显然有 $E^{0,1}_3 = E^{0,1}_\infty$和 $E^{2,0}_3 = E^{2,0}_\infty$。此外，$E^{0,1}_\infty$和$E^{\infty,0}_2$是 $H^1_{\mathfrak{M}}(G, \mathcal{R}(I))$ 和 $H^2_{\mathfrak{M}}(G, \mathcal{R}(I))$ 的子商，而它们均为零。因此，我们得到一个分次同构

$$H^0_{\mathfrak{M}}(H^1(G, \mathcal{R}(I))) \cong H^2_{\mathfrak{M}}(\mathcal{C}).$$

2(a) 由于 $H^1(G, \mathcal{R}(I))$ 是有限生成的 $\mathcal{C}$-模，因此我们得到 $H^2_{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})$ 具有 s 有限长度。

2(b) 注意到我们有一个分次嵌入

$$H^0_{\mathfrak{M}}(H^1(G, \mathcal{R}(I))) \subseteq H^0_{\mathfrak{m}\mathcal{C}}(H^1(G, \mathcal{R}(I))).$$

因此，只需证明 $H^0_{\mathfrak{m}\mathcal{C}}(H^1(G, \mathcal{R}(I)))_0 = 0$。设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个分次自由解消，其中各项是有限生成的分次自由 $\mathcal{C}[G]$-模，并且 $\mathbb{F}_0 = \mathcal{C}[G]$。那么 $H^1(G, \mathcal{R}(I))$ 是复形 $\mathbb{W} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(\mathbb{F}, \mathcal{R}(I))$ 的第一上同调模。令 B^1 和 Z^1 分别为 $\mathbb{W}$ 的第一上余边界模和第一上余圈模。

注意，Z^1 是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}[G]}(\mathbb{F}_1, \mathcal{R}(I))$ 的子模，而后者又是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{F}, \mathcal{R}(I)) \cong \mathcal{R}(I)^s$ 的子模，其中某个 s。特别地，我们有 $H^0_{\mathfrak{m}C}(Z^1) = 0$。

我们还有一个分次正合列 $0 \to \mathcal{C} \to \mathcal{R}(I) \to B^1 \to 0$。注意，由于 $\mathfrak{m}$ 是一个 A-理想（并且由于 $\mathcal{C}_0 = A$ 和 $\mathcal{R}(I)_0 = B$），我们得到一个正合列

$$H^1_{\mathfrak{m}}(B) \to H^1_{\mathfrak{m}}(B^1)_0 \to H^2_{\mathfrak{m}}(A) \to H^2_{\mathfrak{m}}(B).$$

注意，由于 B 是有限生成的 Cohen-Macaulay A-模，维数为 2，因此我们得到 $H^1_{\mathfrak{m}}(B) = 0$。此外，由 2.1(10) 可知，映射 $H^2_{\mathfrak{m}}(A) \to H^2_{\mathfrak{m}}(B)$ 是一个包含映射。因此 $H^1_{\mathfrak{m}}(B^1)_0 = 0$。

我们有一个正合列 $0 \to B^1 \to Z^1 \to H^1(G, \mathcal{R}(I)) \to 0$。取上同调后得到 $H^0_{\mathfrak{m}\mathcal{C}}(H^1(G, \mathcal{R}(I)))_0 = 0$，因为 $H^0_{\mathfrak{m}\mathcal{C}}(Z^1) = H^1_{\mathfrak{m}\mathcal{C}}(B^1)_0 = 0$。

(3) 我们注意到 $\mathcal{C}_n = I^n \cap A$。由于 B 是有限 A-模，我们得到 $\mathfrak{m}B$ 是 $\mathfrak{n}$-主理想。由于 I^n 是 $\mathfrak{n}$-主理想，我们得到 I^n 将包含 $\mathfrak{m}B$ 的某个幂。由于 B

是平坦的 A-模，我们对所有 $s \geq 1$ 都得到 $\mathfrak{m}^s B \cap A = \mathfrak{m}^s$。因此， $\mathcal{C}_n$ 是 A 的 $\mathfrak{m}$-主理想。由于 $\mathcal{C}$ 是诺特的，因此某个 Veronese $\mathcal{C}^{<m>}$ 是标准分次的。由此可得 $\mathcal{C}^{<m>} = A[\mathcal{C}_m t]$。

局部上同调与 Veronese 函子可交换。由 (2) 可知，对所有 $s \geq s_0$ 和 $i = 0$, $H^i_{\mathfrak{M}^{<s>}} C^{<s>} = 0$ 1,2。取 $r = s_0 m$。注意到 $\mathcal{C}^{<r>} = A[\mathcal{C}_r t]$ 是 Cohen-Macaulay。此外，如上所述， $\mathcal{C}_r$ 是 $\mathfrak{m}$-primary。□

4. proof of Theorem 1.2

本节我们给出

定理 1.2 的证明。设 $T = A \otimes_k \overline{k}$。设 $\mathfrak{n}$ 为 T 的极大理想。注意到 T 是一个包含 $\overline{k} \cong T/\mathfrak{n}$ 的优良正规整环（见 2.3、2.5 和 2.6(2)）。由 $[8, 4.1]$，存在 p_g 理想 J，属于 T。由 2.3 可得 $T = \bigcup_{E \in \mathcal{C}_k} A^E$。因此存在 $F \in \mathcal{C}_k$，其中包含 J 的一组极小生成元。我们还可以进一步假设（通过扩张） F 是 k 上的伽罗瓦扩张。因此，存在 A^F 中的理想 W，使得 $WT = J$。由 2.6(3)(b) 可得， W 是 A^F 中的一个 p_g 理想。设 G 为 k 上 F 的伽罗瓦群。则 G 作用于 A^F（通过 $\sigma(a \otimes f) = a \otimes \sigma(f)$）。由 2.1(9) 可得 $(A^F)^G = A$。我们还注意到， $A^F[t]$ 上有一个自然的 G 作用（固定 t），显然其不变环为 $A[t]$。设 $\sigma \in G$。它在 $A^F[t]$ 上的作用诱导了 Rees 代数的 $\mathcal{R}(W)$ 与 $\mathcal{R}(\sigma(W))$ 之间的同构。因此， $\sigma(W)$ 是 A^F 中的一个 p_g 理想。由于 p_g 理想的乘积是 p_g，可得 $K = \prod_{\sigma \in G} \sigma(W)$ 是 A^F 中的一个 p_g 理想。注意 K 是 G-不变的。因此， $A^F[t]$ 的 G 作用限制为 $\mathcal{R}(K)$ 上的一个 G 作用。令 $\mathcal{C} = \mathcal{R}(K)^G$。注意，对所有 $n \geq 1$， $\mathcal{C}_n = K^n \cap A$ 都是一个 $\mathfrak{m}$-primary 整闭理想。由定理 3.5, $\mathcal{C}^{<r>} = A[Jt]$ 的某个 Veronese 子环是 Cohen-Macaulay。由于对所有 n， J^n 都是整闭的 $\mathfrak{m}$-primary 理想，可得 $A[Jt]$ 是一个 Cohen-Macaulay 正规整环。因此， J 是 A 中的一个 p_g 理想。□

References

[1] G. Ellingsrud, T.Skjelbred, *Profondeur d'anneaux d'invariants en caractéristique p*（法文），Compositio Math. 41 (1980), no. 2, 233–244.[2] A. Grothendieck and J. A. Dieudonn´e, *Éléments de géométrie algébrique*. Chap III (part1), Inst. Etudes Sci. Publ. Math. 24, 1965.[3] S. Goto and Y. Shimoda, *On the Rees Algebra of Cohen-Macaulay local rings*, 《交换代数》（弗吉尼亚州费尔法克斯，1979），第 201-231 页，Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 68, Dekker，纽约。[4] C. Huneke and I. Swanson, *Integral closure of ideals, rings, and modules*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 336. 剑桥大学出版社，剑桥，2006.[5] S. Lang, *Algebra*，第三版修订版。数学研究生教材，211。Springer-Verlag，纽约，2002.[6] J. Lipman, *Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization*, Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math. 36 (1969), 195—279.

[7] M. Lorenz, *Multiplicative invariant theory*, 数学科学百科全书, 135。不变理论与代数变换群, VI。Springer-Verlag, 柏林, 2005.[8]T. Okuma, K. Watanabe, and K. Yoshida, Ken-ichi *Good ideals and pg-ideals in two-dimensional normal singularities*, Manuscripta Math. 150 (2016), no. 3-4, 499—520.[9] ,
Rees algebras and p_g-ideals in a two-dimensional normal local domain, Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), no. 1, 39—47.[10] T. J. Puthenpurakal, *On p_g-ideals*, Math. J. Okayama Univ. 63 (2021), 167–173.[11] D. Rees, *Hilbert functions and pseudorational local rings of dimension two*, J.London Math. Soc. (2) 24 (1981), no. 3, 467—479.

Department of Mathematics, IIT Bombay, Powai, Mumbai 400 076
Email address: tputhen@math.iitb.ac.in