arXiv:2303.07092v1 [math.FA] 13 Mar 2023

图上的 HARRIS 判据与哈代不等式

SIMON MURMANN 和 MARCEL SCHMIDT

Abstract. 本文给出一个版本的 Harris 判据，用于确定 $H^{1,p}_0(X)$ 在 $H^{1,p}(X)$ 上的离散空间。此外，我们还通过涉及到度量边界距离的哈代不等式给出了一个逆命题。

1. Introduction

Sobolev空间可以定义在各种具有适当弱导数概念的几何空间上，其中包括黎曼流形、离散图、度量图和分形等。我们主要关注粗糙几何，因此本文聚焦于一阶Sobolev空间。对于上文所讨论的几何空间 X ，一阶Sobolev空间成对出现：

- $H^{1,p}(X)$ - 具有梯度且梯度属于 L^p 的弱可微 L^p-函数空间。
- $H^{1,p}_0(X)$——紧支集 $H^{1,p}(X)$函数（甚至更光滑的函数）在 $H^{1,p}(X)$ 中的闭包。

通常， $H^{1,p}_0(X)$可以理解为$H^{1,p}(X)$中在 X“边界”上消失的函数所构成的空间，即它们的迹为零。通过选取适当的边界概念和迹泛函，可以在非常一般的情形下将这一说法精确化；然而，通常仍难以判定 $H^{1,p}(X)$中的函数何时属于 $H^{1,p}_0(X)$。对于欧氏空间中的区域，有一个由 Harris 提出的便捷判据：设 $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 为有界域，并令

$$\delta\colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad \delta(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$$

表示到边界的距离。那么，对于 $1 < p < \infty$ 函数 $f \in H^{1,p}(\Omega)$，若满足 $f/\delta \in L^p(\Omega)$，则属于 $H^{1,p}_0(\Omega)$，见 [4, 定理 V.3.4 和注 V.3.5]。在对 $\partial\Omega$的正则性作出某些假设（例如 Lipschitz边界已足够）的条件下，该结果的逆命题也成立。正则性用于建立带权重 δ^{-p}的 Hardy 不等式，由此可推出，对于 $f \in H^{1,p}_0(\Omega)$，有 $f/\delta \in L^p(\Omega)$，见 [13] ，该主题较新的综述亦可参见 [1] 。近年来，削弱假设 $f/\delta \in L^p(\Omega)$的这些结果的推广受到了一些关注，见 [23, 5, 26]。本文将 Harris 判据及其逆命题推广到离散图。

事实证明，要建立 Harris 判据， δ 恰好需要两个性质：一是 $|\nabla\delta| \leq 1$, 这是 Rademacher定理的推论；二是对于所有 $\varepsilon > 0$ ， $\{x \in \Omega \mid \delta(x) \geq \varepsilon\}$ 的闭有界子集在 Ω 中都是紧的。在图上，第一个性质可通过考虑内在度量来实现，而第二个性质仍将作为一个较弱的假设

关于度量。Harris 判据的离散版本见定理 2.2 和推论 2.3。

为证明 Harris 判据的逆命题，我们需要建立一个关于到边界的距离的 Hardy 不等式。近年来，离散空间上的 Hardy 不等式受到相当多的关注，参见 [18, 19, 9, 21, 20, 22, 6, 8, 7]。我们借鉴了 [6, 8, 7] 中发展的一些方法，得到一个 Hardy 不等式，从而在离散情形下推出 Harris 判据的逆命题，参见定理 2.6、推论 2.7 和推论 2.8。我们需要作出的假设是，到边界的距离满足某种形式的超调和性。这与欧几里得空间中的情形类似，在那里，δ 的超调和性与区域 Ω 的凸性相关。关于如何利用超调和性证明 Hardy 不等式，以及在考虑 δ 时这与 Ω 的凸性有何关系，请参见 [2]。Ω 的凸性可以由边界 ∂Ω 的正则性取代，这是因为只要 Ω 足够正则，靠近边界 δ 处的距离函数就等价于另一超调和距离函数，参见例如 [13]。∂。要将这种几何推理推广到离散空间似乎无望，因此我们将超调和性作为一项假设。

本文讨论离散图，但我们的结果在更一般的情形下也成立。更确切地说，我们的方法应当能够在具有适当内在度量的正则狄利克雷空间上（如 [10]（此时为 $p = 2$）），以及具有p-Cheeger 能量的适当度量测度空间上（如 [11]），得到 Harris 判据的相应版本。特别是，前述黎曼流形、度量图和某些分形均包含在这些情形中。近期，针对一大类线性局部算子，已有关于到边界的距离的 Hardy 不等式结果 [17]；我们的结果或许也有助于将其推广至某些非局部算子。

我们选择聚焦于离散图，原因有二：底空间的离散性消除了讨论局部正则性问题的必要；而在我们的框架下，对 $H^{1,p}(X)$有一个简单且明确的描述。对于正则狄利克雷空间（它们是$H^{1,20}(X)$-空间的抽象版本），可以通过所谓的反射狄利克雷空间构造 $H^{1,2}(X)$-空间，见 [24, 27]。局部正则性问题以及反射狄利克雷空间的使用会使技术细节更加冗长，但并不会让我们对可能得到何种类型的结果有新的认识。与这种简化相反，离散梯度和拉普拉斯算子的非局部性质，使得在证明 Harris 判据和哈代不等式时，某些估计更为复杂。这是由于缺少链式法则。在离散情形下克服这些困难，或许能为其他非局部情形铺平道路，例如各种空间上的分数阶拉普拉斯型算子。

本文部分内容基于 SM 的学士学位论文，其主要结果是推论 2.3 的初步版本。

致谢。M.S. 感谢 Florian Fischer 和 Matthias Keller 就 Hardy 不等式进行了富有启发性的讨论。此外，M.S. 感谢德国研究联合会在“无穷远处的几何”重点计划中提供的经费支持。

2. Set Up and Main Results

设 $X \neq \emptyset$ 是一个赋有离散拓扑的可数集合。令 $m\colon X \to (0,\infty)$。我们滥用记号，也将 m 视为定义在 X 所有子集上的测度，定义如下：

$$m(A) = \sum_{x\in A} m(x), \quad A \subseteq X.$$

设 $1 \le p < \infty$。离散 Lebesgue 空间定义为

$$\ell^p(X,m) = \{f\colon X \to \mathbb{R} \mid \sum_{x\in X} |f(x)|^p m(x) < \infty\}$$

其范数为

$$\|f\|_p = \left(\sum_{x\in X} |f(x)|^p m(x)\right)^{1/p}.$$

有界函数空间记作 $\ell^\infty(X)$。我们用 $C(X)$ 表示定义在 X 上的所有实值函数。由于 X 是离散的， $f \in C(X)$ 的支集为 $\operatorname{supp} f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ ，而所有有限支集实值函数记作 $C_c(X)$。对于 f、$g \in C(X)$，令 $f \wedge g = \min\{f,g\}$ 和 $f \vee g = \max\{f,g\}$，其定义均为逐点定义。

定义在 X 上的加权图是一个对称函数 $b\colon X \times X \to [0,\infty)$，满足 $b(x,x) = 0$ ，并且

$$\deg(x) := \sum_{y\in X} b(x,y) < \infty$$

对每个 $x \in X$。若 $b(x,y) > 0$，则称两点 $x, y \in X$ 之间有一条边。此时记作 $x \sim y$。若对于每个 $x \in X$ ，其邻居集合有限，则称图 b 为局部有限图

$$\{y \in X \mid x \sim y\}$$

。连接 $x, y \in X$ 的路径是 X 中的有限序列 $\gamma = (x_0, \ldots, x_n)$，且满足 $x = x_0 \sim x_1 \sim \ldots \sim x_n = y$。若任意 $x, y \in X$ 都能由一条路径连接，则称图 b 为连通图。

形式上的 p-拉普拉斯算子是非线性算子 $\mathcal{L}\colon \mathcal{F} \to C(X)$，其定义域为

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_p = \{f \in C(X) \mid \sum_{y\in X} b(x,y)|f(x) - f(y)|^{p-1} < \infty \text{ for all } x \in X\},$$

它在该定义域上的作用为

$$\mathcal{L}f(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y\in X} b(x,y)(f(x) - f(y))|f(x) - f(y)|^{p-2}.$$

这里采用约定 $0/0 = 0$；当 $1 \le p < 2$ 时，该约定可能出现在 $\mathcal{L}$ 的定义中。注意，由于 b 上的可和性条件， $\ell^\infty(X) \subseteq \mathcal{F}_p$ 。

p-能量泛函定义为

$$\mathcal{Q}\colon C(X) \to [0,\infty], \quad \mathcal{Q}(f) = \frac{1}{p} \sum_{x,y\in X} b(x,y)|f(x) - f(y)|^p.$$

对于 $f \in C(X)$，我们将离散 p-梯度的范数定义为

$$|\nabla f| \colon X \to [0,\infty], \quad |\nabla f|(x) = \left(\frac{1}{m(x)} \sum_{y \in X} b(x,y) |f(x) - f(y)|^p \right)^{1/p}.$$

显然，能量与梯度之间存在如下关系：

$$\mathcal{Q}(f) = \frac{1}{p} \sum_{x \in X} |\nabla f|^p(x) m(x).$$

我们将有限 p-能量函数构成的空间记为

$$\mathcal{D} = \{ f \in C(X) \mid \sum_{x,y \in X} b(x,y) |f(x) - f(y)|^p < \infty \}$$

并记

$$H^{1,p}(X,m) = \mathcal{D} \cap \ell^p(X,m)$$

为相应的一阶离散 Sobolev 空间。赋予范数 $\|\cdot\|_{H^{1,p}(X,m)}$ 后，它是一个巴拿赫空间，其范数定义如下：

$$\|f\|^p_{H^{1,p}(X,m)} = \mathcal{Q}(f) + \|f\|^p_p.$$

我们将 $H^{1,p}_0(X,m)$ 记为 $H^{1,p}(X,m)$ 中 $C_c(X)$ 的闭包。

本文的主要目标是在 $H^{1,p}(X,m)$ 中刻画空间 $H^{1,p}_0(X,m)$。为此，我们采用由某些与梯度相容的度量所诱导的几何。下文将讨论这些度量。

X 上的伪度量是一个对称函数 $\sigma \colon X \times X \to [0,\infty)$，满足三角不等式。若满足

$$\frac{1}{m(x)} \sum_{y \in X} b(x,y) \sigma(x,y)^p \leq 1$$

对每个 $x \in X$ 都成立。内蕴伪度量最重要的特征是以下黎曼型结果：若 σ 是一个 p-内蕴度量，且 $f \colon X \to \mathbb{R}$ 关于 σ 是 L-利普希茨的，则 $|\nabla f| \leq L$。

注。在 $p = 2$ 的情形下，内禀度量最初于 [10] 中为正则狄利克雷型引入，旨在模拟这样的性质：黎曼流形上的 1-利普希茨函数的分布梯度有界于 1。关于它们在图上的应用，请参见 [14] 。在具有局部拉普拉斯算子（例如黎曼流形上）的空间中，梯度的范数不依赖于 p。在这种情形下，所有 $1 \leq p < \infty$ 都可以采用同一个内禀度量。在离散情形（以及其他非局部情形）中，内禀度量可能取决于 p 的选择。

例2.1（路径伪度量）。假设图 b 是连通的，且 $w \colon X \times X \to [0,\infty)$ 是对称的。对于路径 $\gamma = (x_0, \dots, x_n)$，我们将其长度（相对于 w）定义为

$$L_w(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} w(x_{k-1}, w_k).$$

函数

$d_w \colon X \times X \to [0,\infty)$ $\quad d_w(x,y) = \inf\{L_w(\gamma) \mid \gamma$连接 x和 $y\}$的路径

称为由 w诱导的路径伪度量。容易验证，d_w 是一个伪度量。若该图是局部有限的，且对于所有$x \sim y$，$w(x,y) > 0$，那么 d_w 确实是一个度量，并在 X上诱导离散拓扑。对于$w = 1$，度量 $d := d_1$ 称为组合距离，因为它计量连接 x和 y的路径中边数的最小值。

路径伪度量 d_w 满足 $d_w(x,y) \le w(x,y)$。因此，当 p时，它是内蕴的。

$$\frac{1}{m(x)} \sum_{y \in X} b(x,y) w(x,y)^p \le 1.$$

满足此不等式的一个函数 w 如下

$$w(x,y) = \frac{m(x)^{1/p}}{\deg(x)^{1/p}} \wedge \frac{m(y)^{1/p}}{\deg(y)^{1/p}}.$$

下面的更多示例中将考察诱导度量。

组合距离 d 满足 $d(x,y) = 1$，其中 $x \sim y$。因此，当且仅当 $\deg/m$ 不超过 1 时，它是内蕴的p。

设 σ 为一个伪度量。我们将 $\overline{X}^\sigma$ 记作关于 σ 的 X 的完备化，并将 $\partial_\sigma X = \overline{X}^\sigma \setminus X$ 记作关于 σ 的 X 的柯西边界（如果 σ 不是度量，则考虑适当的商空间）。显然，σ 可以唯一地延拓到 $\overline{X}^\sigma$。对于 $A \subseteq \overline{X}^\sigma$，我们令

$$\sigma(x, A) = \inf\{\sigma(x,y) \mid y \in A\}$$

按照约定，$\sigma(x,A) = \infty$ 当且仅当 $A = \emptyset$。下文中我们将关注伪度量在边界附近的行为。因此，我们固定一个截断值 $D > 0$，并引入

$$\delta_\sigma \colon X \to [0,\infty), \quad \delta_\sigma(x) = \sigma(x, \partial_\sigma X) \wedge D,$$

其中，按照我们的约定，若 $\partial_\sigma X = \emptyset$，则 $\delta_\sigma = D$。注意，对所有 $x \in X$，$\delta_\sigma(x) > 0$ 当且仅当 $\partial_\sigma X$ 在 $\overline{X}^\sigma$ 中是闭集。函数 δ_σ 关于 σ 是 1-利普希茨的。因此，若 σ 是 p- 内蕴的，则 $|\nabla \delta_\sigma| \le 1$。

下面是本文的两个主要结果之一。

定理 2.2. 设 $1 < p < \infty$，且 σ 是一个 p-内蕴伪度量。设 $h\colon X \to (0,\infty)$，使得对所有 $\varepsilon > 0$，函数 $\deg/m$ 在 σ-有界子集上有界

$$\{x \in X \mid h(x) \ge \varepsilon\}.$$

Then

$$\{f \in H^{1,p}(X,m) \mid \frac{|\nabla h|}{h} f \in \ell^p(X,m)\} \subseteq H_0^{1,p}(X,m).$$

注。（a）前一定理允许对某个 $x \in X$ 存在 $|\nabla h|(x) = \infty$。在这种情况下，条件 $\frac{|\nabla h|}{h} f \in \ell^p(X,m)$ 应理解为：对于 $x \in \{y \in X \mid |\nabla h|(y), \ f(x) = 0$，且 $= \infty\} =: N$ 和 $1_{X \setminus N} f |\nabla h|/h \in \ell^p(X,m)$。（b）该定理对所有 $h \in C_0(X)$ 均成立；它是 ℓ^∞ 中 $C_c(X)$ 的一致闭包。在这种情况下，对于任意 $\varepsilon > 0$，$\{x \in X \mid h(x) \ge \varepsilon\}$ 为有限。

我们可以将此定理应用于有界1-利普希茨函数 $h = \delta_\sigma$（及其幂函数）。由于 $\delta_\sigma > 0$ 在 $\partial_\sigma X$ 为闭集且 $|\nabla \delta_\sigma| \le 1$，我们得到以下几何判据。

推论 2.3（离散空间的 Harris 判据）。设 $1 < p < \infty$，并设 σ 是一个具有以下性质的 p-内蕴伪度量：

- $\partial_\sigma X$ 是闭的。
- 对于所有 $\varepsilon > 0$，函数 $\deg/m$ 在 σ-有界子集上有界

$$\{x \in X \mid \delta_\sigma(x) \geq \varepsilon\}.$$

那么，对于任意 $\alpha > 0$，我们有

$$\{f \in H^{1,p}(X,m) \mid \frac{|\nabla \delta_\sigma^\alpha|}{\delta_\sigma^\alpha} f \in \ell^p(X,m)\} \subseteq H_0^{1,p}(X,m).$$

特别地，若 $f \in H^{1,p}(X,m)$ 满足 $f/\delta_\sigma \in \ell^p(X,m)$，则 $f \in H^1_{,0}{}^p(X,m)$。

如上所述，若 $\partial_\sigma X = \emptyset$，则 $\delta_\sigma = D$。在这种情况下，关于 σ 的第二个假设表明，$\deg/m$ 应在 σ-球上有界。具有有限球的伪度量空间总是完备的，并且 $\deg/m$ 在有限集上总是有界。因此，我们得到以下推论。

推论 2.4. 设 $1 < p < \infty$。若存在一个具有有限球的 p-内蕴伪度量，则 $H^{1,p}(X,m) = H^1_{,0}{}^p(X,m)$。

将定理应用于 $\sigma = 0$ 和 $h = 1$，即可立即得到以下结论。

推论 2.5. 设 $1 < p < \infty$ 且假设 $\deg/m$ 有界。则 $H^{1,p}(X,m) = H^1_{,0}{}^p(X,m)$。

注. (a) 在引言中提到的欧几里得情形下，我们几乎必然有 $|\nabla \delta| = 1$，并由链式法则得到 $\nabla \delta^\alpha = \alpha \delta^{\alpha-1} \nabla \delta$。因此，Harris 判据中没有梯度项，也没有指数，参见 [4, 定理 V.3.4]。

(b) 对于 $p = 2$，推论 2.4 最初是在 [12] 中、在略有不同的假设下得到证明的。关于相关结果，请参见 [28, 定理 5.4]。(c) 推论 2.3 中对 $\deg/m$ 的条件，在 $\{x \in X \mid \delta_\sigma(x) \geq \varepsilon\}$ 的有界子集均为有限集时成立。后一条件及一些例子将在 [28, 第 5] 节讨论。我们将在第 6 节给出更多例子。

在对 δ_σ 作出超调和性假设、但不假设 σ 是内蕴的情况下，Harris 判据的逆命题成立。事实上，实际上可以使用任意严格正函数，而不是考虑 δ_σ。以下是本文的第二个主要结果。

定理 2.6（Hardy 不等式）。设 $1 < p < \infty$，并令 $h\colon X \to (0,\infty)$，其中 $h \in \mathcal{F}_p \cap \mathcal{F}_{p/2+1}$，且存在有限的 $K \subseteq X$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得在 $X \setminus K$ 上有 $\mathcal{L}h \geq \lambda h^{p-1}$。那么存在 $C > 0$，使得

$$C \sum_{x \in X} |f(x)|^p \frac{|\nabla h^{1/2}|^p(x)}{h(x)^{p/2}} m(x) \leq \mathcal{Q}(f) + \|f\|_p^p$$

对所有 $f \in H^1_{,0}{}^p(X,m)$。特别地，

$$H_0^{1,p}(X,m) \subseteq \{f \in H^{1,p}(X,m) \mid \frac{|\nabla h^{1/2}|}{h^{1/2}} f \in \ell^p(X,m)\}.$$

此外，如果 $\sup\{h(x)/h(y) \mid x,y\in X,\, x\sim y\}<\infty$，那么存在$C'>0$ 使得

$$C'\sum_{x\in X}|f(x)|^p\frac{|\nabla h|^p(x)}{h(x)^p}m(x)\le \mathcal{Q}(f)+\|f\|_p^p$$

对所有 $f\in H^{1,p}_0(X,m)$。

注。(a) 如引言中所述，近年来离散空间上的 Hardy 不等式受到相当多的关注，重点在于权重的最优性；参见 [19]，了解情形 $p=2$，以及 [7]，了解一般的$1<p<\infty$。这里我们不关注常数/权重的最优性，而只关注Sobolev空间的包含关系。在命题 4.6 中，我们在关于 X 的稍强假设 $\mathcal{L}h\ge\lambda h^{p-1}$ 下给出了显式常数。在 $p=2$ 的情形下，我们带有权重 $|\nabla h^{1/2}|^2/h$ 的 Hardy 不等式隐含地包含在 [19] 中；但对于 $p\neq 2$，它似乎并未（隐含地）包含在文献中。

(b) 条件 $h\in\mathcal{F}_p\cap\mathcal{F}_{p/2+1}$ 等价于 $h\in\mathcal{F}_p$，当 $p\ge 2$ 时；而当 $p<2$ 时，等价于 $h\in\mathcal{F}_{p/2+1}$，参见下文引理 4.1。如上所述，若 h 有界，则它满足这些条件。

结合本定理和推论 2.3，我们得到 $H^{1,p}_0(X,m)$ 的以下刻画，它们可视为 Harris 判据及其逆命题的离散类比。

推论 2.7. 设 $1<p<\infty$，且 σ 是满足以下性质的 p-内蕴伪度量：

- $\partial_\sigma X$ 是闭的。
- 对所有 $\varepsilon>0$，函数 $\deg/m$ 在有界子集上有界。
$$\{x\in X\mid \delta_\sigma(x)\ge\varepsilon\}.$$
- 存在有限的 $K\subseteq X$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得 $\mathcal{L}_p\delta_\sigma\ge\lambda\delta_\sigma^{p-1}$ 在 $X\setminus K$ 上成立。

Then

$$H^{1,p}_0(X,m)=\{f\in H^{1,p}(X,m)\mid \frac{|\nabla\delta_\sigma^{1/2}|}{\delta_\sigma^{1/2}}f\in\ell^p(X,m)\}.$$

推论 2.8. 假设推论 2.7 的情形成立，并进一步假设：

- $$\sup_{x,y\in X,x\sim y}\frac{\delta_\sigma(x)}{\delta_\sigma(y)}<\infty.$$
- $$\inf_{x\in X}|\nabla\delta_\sigma|(x)>0.$$

Then

$$H^{1,p}_0(X,m)=\{f\in H^{1,p}(X,m)\mid f/\delta_\sigma\in\ell^p(X,m)\}.$$

注。如上文所述，推论 2.7 中必须考虑 $|\nabla\delta_\sigma^{1/2}|/\delta_\sigma^{1/2}$ 而不是 $|\nabla\delta_\sigma|/\delta_\sigma$，原因是缺少链式法则。我们可以不使用链式法则，而借助中值定理从下方估计 $|\nabla\delta_\sigma^{1/2}|$，但此时必须假设 $\sup\{h(x)/h(y)\mid x,y\in X,\,x\sim y\}<\infty$，见引理 4.2。此外，一般而言，我们无法

期望 $|\nabla \delta_\sigma|$ 有下界，因此它作为一项假设出现在推论 2.8 中。

3. Some properties of discrete Sobolev spaces

本节将建立关于离散 Sobolev 空间和能量泛函的一些基本结果。对于 $p = 2$ 情形，本节的结果均已广为人知，其中大部分结果可参见 [16, 第 1] 节。

引理 3.1（压缩性质）。设 $1 \leq p < \infty$。设 $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为 L-利普希茨函数。则

$$\mathcal{Q}(C \circ f) \leq L^p \mathcal{Q}(f)$$

对于 $f \in C(X)$。特别地，$\mathcal{Q}(|f|) \leq \mathcal{Q}(f)$，并且

$$\mathcal{Q}(f \wedge g)^{1/p} \leq \mathcal{Q}(f)^{1/p} + \mathcal{Q}(g)^{1/p}$$

对于所有 f、$g \in C(X)$。

证明。第一个不等式直接由 $\mathcal{Q}$ 的定义得出。关于 $|f|$ 的结果是绝对值函数为 1-利普希茨函数的推论。对于最后一个结论，只需考虑 $f, g \in \mathcal{D}$。由于 $\mathcal{Q}^{1/p}$ 是 $\mathcal{D}$ 上的半范数，因此由 $f \wedge g = (f + g - |f - g|)/2$ 以及关于绝对值的结果可直接得出。□

引理 3.2（$\mathcal{Q}$ 的逐点下半连续性）。令 $1 \leq p < \infty$。泛函 $\mathcal{Q}$ 关于逐点收敛是下半连续的，即对于任意 (f_n)，若 f 属于 $C(X)$，且 $f_n \to f$ 逐点收敛，如 $n \to \infty$，则

$$\mathcal{Q}(f) \leq \liminf_{n \to \infty} \mathcal{Q}(f_n).$$

证明。这是 Fatou 引理的直接推论。□

命题 3.3。对于 $1 < p < \infty$，巴拿赫空间 $H^{1,p}_0(X, m)$ 和 $H^{1,p}(X, m)$ 是一致凸的，因此也是自反的。

证明。一致凸空间是自反的，因此只需证明一致凸性。令 $E = \{(x, y) \in X \times X \mid b(x, y) > 0\}$，并令

$$\mu\colon X \cup E \to [0, \infty), \quad \mu(z) = \begin{cases} \mu(x) & \text{if } z \in X \\ b(z)/2p & \text{if } z \in E \end{cases}.$$

众所周知，$\ell^p(X \cup E, \mu)$ 是一致凸的。有了这一点，$H^{1,p}_0(X, m)$ 和 $H^{1,p}(X, m)$ 的一致凸性可由

$$\iota\colon H^{1,p}(X, m) \to \ell^p(X \cup E, \mu), \quad \iota(f)(z) = \begin{cases} f(z) & \text{if } z \in X \\ f(x) - f(y) & \text{if } z = (x, y) \in E \end{cases}$$

是等距变换。□

接下来，我们给出 $H^{1,p}_0(X, m)$ 的另一种描述。我们用 $\mathcal{D}_0$ 表示由函数 $f \in \mathcal{D}$ 构成的空间；对于其中的每个函数，都存在一个序列 (φ_n)，属于 $C_c(X)$，且满足 $\mathcal{Q}(f - \varphi_n) \to 0$ 并且 $\varphi_n \to f$ 逐点成立，其中 $n \to \infty$。

命题 3.4. 设 $1 < p < \infty$。那么 $H^{1,p}_0(X, m) = \mathcal{D}_0 \cap \ell^p(X, m)$。

证明。在我们的离散情形中， $\ell^p(X,m)$ 中的收敛意味着逐点收敛。因此，我们有 $H^{1,p}_0(X,m) \subseteq \mathcal{D}_0 \cap \ell^p(X,m)$。

$H^{1,p}_0(X,m) \supseteq \mathcal{D}_0 \cap \ell^p(X,m)$：令 $f \in D_0^p \cap \ell^p(X,m)$。取 $C_c(X)$ 中的一个序列 (φ_n)，使得 $\varphi_n \to f$ 逐点且 $\mathcal{Q}(f-\varphi_n) \to 0$，如 $n \to \infty$。考虑函数

$$\psi_n = (\varphi_n \wedge |f|) \vee (-|f|).$$

于是 $\psi_n \in C_c(X) \subseteq H^{1,p}_0(X,m)$， $|\psi_n| \le |f|$ 且逐点收敛。由勒贝格控制收敛定理可知， $\psi_n \to f$ 属于 $\ell^p(X,m)$。利用压缩性质和引理 3.1 可得

$$\mathcal{Q}(\psi_n)^{1/p} \le \mathcal{Q}(\varphi_n)^{1/p} + 2\mathcal{Q}(f)^{1/p}.$$

这表明 (ψ_n) 是巴拿赫空间 $H^{1,p}_0(X,m)$ 中的有界序列。利用自反空间中有界集的弱序列紧性，不失一般性地假设 $\psi_n \to g \in H^{1,p}_0(X,m)$ 在 $H^{1,p}_0(X,m)$ 中弱收敛（否则考虑一个子序列）。由于在赋范空间中，凸集的弱闭包与强闭包相同，因此我们推知，对于任意 $N \in \mathbb{N}$，有

$$g \in \overline{\operatorname{conv}\{\psi_n \mid n \ge N\}}^{H_0^{1,p}(X,m)}.$$

特别地，存在如下形式的 (ψ_n) 的有限凸组合

$$g_N = \sum_{n=N}^{K_N} \lambda_n^{(N)} \psi_n$$

其中 $g_N \to g$ 属于 $H^{1,p}_0(X,m)$，当 $N \to \infty$ 时。由于 $\psi_n \to f \in \ell^p(X,m)$，我们还有 $g_N \to f$ 属于 $\ell^p(X,m)$，这表明 $f = g \in H^{1,p}_0(X,m)$。□

注。对于 $p=2$，这就是 [16, 定理 1.19] 的内容。

接下来，我们证明 $\mathcal{Q}$ 限制在 $\mathcal{D}_0$ 上时的下半连续性。更准确地说，我们令

$$\mathcal{Q}_0 \colon C(X) \to [0,\infty], \quad \mathcal{Q}_0(f) = \begin{cases} \mathcal{Q}(f) & \text{if } f \in \mathcal{D}_0 \\ \infty & \text{else} \end{cases}$$

并证明该泛函是下半连续的。这比证明 $\mathcal{Q}$ 的下半连续性更复杂，因为它不能直接由 Fatou 引理推出。

命题 3.5。设 $1 < p < \infty$。泛函 $\mathcal{Q}_0$ 关于逐点收敛是下半连续的，即对于所有 (f_n)， f 属于 $C(X)$，若 $f_n \to f$ 逐点收敛，当 $n \to \infty$ 时，则有

$$\mathcal{Q}_0(f) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{Q}_0(f_n).$$

特别地，如果 $(\mathcal{Q}_0(f_n))$ 有界，则 $f \in \mathcal{D}_0$。

证明。只需考虑 $\mathcal{D}_0^p$ 中的 (f_n)，使得 $f_n \to f$ 逐点成立，并且

$$\liminf_{n\to\infty} \mathcal{Q}_0(f_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{Q}_0(f_n) < \infty.$$

根据 $\mathcal{D}_0$ 的定义，我们可以在 $C_c(X)$ 中选取一个序列 (φ_n)，使得 $\mathcal{Q}(f_n - \varphi_n) \to 0$，并且 $\varphi_n \to f$ 逐点成立。特别地，序列 (φ_n) 是 $\mathcal{Q}$-有界的。

我们记

$$\|\cdot\|_{\mathcal{Q}} : \mathcal{D} \to [0,\infty), \quad \|f\|_{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}(f)^{1/p}$$

由 p-能量泛函诱导的半范数。空间 $(\mathcal{D}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ 是一致凸的，参见命题 3.3 的证明。因此，$(\mathcal{D}/\ker\ \mathcal{Q}, \|\cdot\|_{\mathcal{Q}})$ 的完备化是自反的。利用自反空间中有界集的弱紧性，以及凸集的弱闭包与强闭包相同这一事实，我们推得存在 (φ_n) 的有限凸组合，其形式为

$$\psi_N = \sum_{n=N}^{K_N} \lambda_n^{(N)} \varphi_n$$

使得 (ψ_N) 是 $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$-柯西的，参见命题 3.4 证明中的论证。根据定义，(ψ_N) 属于 $C_c(X)$。此外，$\varphi_n \to f$逐点成立，因为 $n \to \infty$ 蕴含 $\psi_N \to f$ 逐点成立，因为 $N \to \infty$。$\mathcal{Q}$ 的逐点下半连续性给出

$$\mathcal{Q}(f - \psi_N) \leq \liminf_{M\to\infty} \mathcal{Q}(\psi_M - \psi_N) \to 0, \text{ as } N \to \infty,$$

于是得到 $f \in \mathcal{D}_0$。由于 $\mathcal{Q}$ 与 $\mathcal{Q}_0$ 在 $\mathcal{D}_0$上一致，$\mathcal{Q}$ 的下半连续性蕴含

$$\mathcal{Q}_0(f) = \mathcal{Q}(f) \leq \liminf_{n\to\infty} \mathcal{Q}(f_n) = \liminf_{n\to\infty} \mathcal{Q}_0(f_n). \qquad \square$$

引理 3.6. 设 $1 \leq p < \infty$。设 $K \subseteq X$，使得 $\deg/m$ 在 K 上有界。那么存在一个常数 $C \geq 0$，使得

$$\mathcal{Q}(f1_K) \leq C \sum_{x\in K} |f(x)|^p m(x)$$

对所有 $f \in C(X)$ 均成立。特别地，

$$\{f \in \ell^p(X,m) \mid \operatorname{supp} f \subseteq K\} \subseteq H_0^{1,p}(X,m).$$

证明。设 $f \in C(X)$，且 $\operatorname{supp} f \subseteq K$。利用 b 的对称性以及不等式 $(|w| + |z|)^p \leq 2^p(|w|^p + |z|^p)$，我们得到

$$\begin{aligned}
p\mathcal{Q}(f) &= \sum_{x,y\in X} b(x,y)|f(x) - f(y)|^p \\
&= \sum_{x,y\in K} b(x,y)|f(x) - f(y)|^p + 2\sum_{x\in K} |f(x)|^p \sum_{y\in X\setminus K} b(x,y) \\
&\leq 2^{p+1} \sum_{x\in K} |f(x)|^p \sum_{y\in K} b(x,y) + 2\sum_{x\in K} |f(x)|^p \sum_{y\in X\setminus K} b(x,y) \\
&\leq C \sum_{x\in K} |f(x)|^p m(x).
\end{aligned}$$

关于离散 Sobolev 空间的结论可直接由该不等式以及 $C_c(X)$ 在 $\ell^p(X,m)$ 中的稠密性得出。□

4. Discrete chain rules and Hardy inequality

本节汇总一些在离散情形下替代链式法则的公式，并用它们建立一个 Hardy 不等式。

我们先给出一个关于形式拉普拉斯算子之区域的引理，该引理保证下文计算中涉及的和绝对收敛。

引理 4.1. 设 $1 \le p, q < \infty$。
(a) $\mathcal{F}_p = \{f \in C(X) \mid \sum_{y\in X} b(x,y)|f(y)|^{p-1} < \infty$ 对所有 $x \in X\}$. 均成立。
(b) $f \in C(X)$ 满足 $|\nabla f|(x) < \infty$ 对所有 $x \in X$ 均成立，当且仅当 $f \in \mathcal{F}_{p+1}$。
(c) 若 $p \le q$，则 $\mathcal{F}_q \subseteq \mathcal{F}_p$。
特别地，对所有 $1 \le p < \infty$，我们有 $\ell^\infty(X) \subseteq \mathcal{F}_p$，并且若 $f \in C(X)$ 满足

$$\sup_{x,y\in X, x\sim y} \frac{|f(x)|}{|f(y)|} < \infty,$$

那么，对于所有 $1 \le p < \infty$，$f \in \mathcal{F}_p$。

证明。(a)：这直接由 b 上的可和性条件以及不等式 $(|w| + |z|)^{p-1} \le 2^p(|w|^{p-1} + |z|^{p-1})$ 得出。更多细节请参见 [6,引理 2.1]。

(b)：这直接由 $|\nabla f|$ 和 $\mathcal{F}_{p+1}$ 的定义得出。

(c)：这由 b 上的可和性条件和 H¨older 不等式得出。

“特别是”的陈述可由 (a) 和 b 上的可和性条件直接推出。□

引理 4.2。设 $f \in C(X)$，且 $I \subseteq \mathbb{R}$ 是一个区间，满足 $f(X) \subseteq I$。如果 $\varphi \in C^1(I)$ 是递增且凹的，那么

$$|\nabla(\varphi \circ f)|^p(x) \ge \inf_{y\sim x} (\varphi'(f(x) \wedge f(y)))^p |\nabla f|^p(x), \quad x \in X.$$

证明。第一个不等式是中值定理的推论，并且由于 φ 的凹性，φ' 是递减的。□

引理 4.3。设 $f\colon X \to (0,\infty)$，且满足 $f \in \mathcal{F}_{p+1}$。那么 $f \in \mathcal{F}_p$，并且

$$\begin{aligned} 2f(x)\mathcal{L}f(x) &= |\nabla f|(x)^p \\ &\quad + \frac{1}{m(x)} \sum_{y\in X} b(x,y)(f(x)+f(y))(f(x)-f(y))|f(x)-f(y)|^{p-2} \end{aligned}$$

对所有 $x \in X$ 均成立，且所有求和都绝对收敛。

证明。 $f \in \mathcal{F}_p$ 是引理 4.1 (b) 和 (c) 的推论。它还保证了陈述中的所有求和以及下文计算中的所有求和都绝对收敛。我们计算

$$\begin{aligned} f(x)\mathcal{L}f(x) &= \frac{1}{m(x)} \sum_{y\in X} b(x,y)(f(x)^2 - f(x)f(y))|f(x)-f(y)|^{p-2} \\ &= \frac{1}{m(x)} \sum_{y\in X} b(x,y)(f(x)-f(y))^2|f(x)-f(y)|^{p-2} \\ &\quad + \frac{1}{m(x)} \sum_{y\in X} b(x,y)(f(x)f(y) - f(y)^2)|f(x)-f(y)|^{p-2}. \end{aligned}$$

在该等式两边再加上一个 $f\mathcal{L}f$，得到

$$2f(x)\mathcal{L}f(x) = |\nabla f|^p(x) + \frac{1}{m(x)}\sum_{y\in X} b(x,y)(f(x)^2 - f(y)^2)|f(x)-f(y)|^{p-2},$$

这就是所需的结论。 □

引理 4.4. 设 $f\colon X \to (0,\infty)$，且 $f \in \mathcal{F}_p \cap \mathcal{F}_{p/2+1}$。则 $f^{1/2} \in \mathcal{F}_p$and

$$2f(x)^{1/2}\mathcal{L}(f^{1/2})(x) \geq |\nabla f^{1/2}|^p(x) + \frac{1}{2^{p-2}f(x)^{(p-2)/2}}\mathcal{L}f(x).$$

证明. 引理 4.1 保证存在 $f^{1/2} \in \mathcal{F}_p$，使不等式中的所有量都有定义。令 $g = f^{1/2}$。如引理 4.3 所示，我们有

$$\begin{aligned} 2g(x)\mathcal{L}g(x) &= |\nabla g|(x)^p \\ &\quad + \frac{1}{m(x)}\sum_{y\in X} b(x,y)(g(x)+g(y))(g(x)-g(y))|g(x)-g(y)|^{p-2}. \end{aligned}$$

我们需要估计第二项。令 $\nabla_{xy}f = f(x) - f(y)$。利用中值定理，我们选取 $\xi_{xy} \in [f(x) \wedge f(y)\ f(x) \vee f(y)]$，使得

$$f(x)^{1/2} - f(y)^{1/2} = \frac{1}{2\xi_{xy}^{1/2}}(f(x)-f(y)).$$

我们的假设 $f \in \mathcal{F}_p \cap \mathcal{F}_{p/2+1}$ 保证了下列计算中的所有求和都绝对收敛:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{m(x)}\sum_{y\in X} b(x,y)(g(x)+g(y))(g(x)-g(y))|g(x)-g(y)|^{p-2} \\ &= \frac{1}{2^{p-2}m(x)}\sum_{y\in X} b(x,y)(f(x)-f(y))\frac{1}{\xi_{xy}^{(p-2)/2}}|f(x)-f(y)|^{p-2} \\ &= \frac{1}{2^{p-2}m(x)}\sum_{y\in X, f(x)\geq f(y)} b(x,y)\frac{1}{\xi_{xy}^{(p-2)/2}}\nabla_{xy}f^{p-1} \\ &\quad - \frac{1}{2^{p-2}m(x)}\sum_{y\in X, f(x)<f(y)} b(x,y)\frac{1}{\xi_{xy}^{(p-2)/2}}\nabla_{yx}f^{p-1} \\ &\geq \frac{1}{2^{p-2}m(x)}\sum_{y\in X, f(x)\geq f(y)} b(x,y)\frac{1}{f(x)^{(p-2)/2}}\nabla_{xy}f^{p-1} \\ &\quad - \frac{1}{2^{p-2}m(x)}\sum_{y\in X, f(x)<f(y)} b(x,y)\frac{1}{f(x)^{(p-2)/2}}\nabla_{yx}f^{p-1} \\ &= \frac{1}{2^{p-2}f(x)^{(p-2)/2}}\mathcal{L}f(x). \end{aligned}$$

□

以下引理的内容即为 [8, 引理 3.5]。

引理 4.5（Picone 不等式）。设 $1 < p < \infty$。设 $h\colon X \to (0,\infty)$，且$h \in \mathcal{F}_p$。对于每个 $\varphi \in C_c(X)$，我们有

$$\mathcal{Q}(\varphi) \geq \frac{2}{p}\sum_{x\in X}\frac{\mathcal{L}h(x)}{h(x)^{p-1}}|\varphi(x)|^p m(x).$$

命题 4.6（Hardy 不等式）。设 $f\colon X\to(0,\infty)$，且 $f\in\mathcal{F}_p\cap\mathcal{F}_{p/2+1}$，并假设存在 $\lambda\in\mathbb{R}$，使得 $\mathcal{L}f\geq\lambda f^{p-1}$。那么对于所有$\varphi\in C_c(X)$

$$\mathcal{Q}(\varphi)\geq\frac{1}{p}\sum_{x\in X}\frac{|\nabla f^{1/2}|^p(x)}{f(x)^{p/2}}|\varphi(x)|^p m(x)+\frac{\lambda}{p2^{p-2}}\|\varphi\|_p^p.$$

此外,

$$K=\sup_{x,y\in X,\,x\sim y}\frac{f(x)}{f(y)}<\infty,$$

则对所有 $\varphi\in C_c(X)$

$$\mathcal{Q}(\varphi)\geq\frac{1}{p2^pK^{p/2}}\sum_{x\in X}\frac{|\nabla f|^p(x)}{f(x)^p}|\varphi(x)|^p m(x)+\frac{\lambda}{p2^{p-2}}\|\varphi\|_p^p.$$

证明。由引理 4.1，关于 f 的假设推出 $f^{1/2}\in\mathcal{F}_p$。将 Picone 不等式应用于 $h=f^{1/2}$，可得

$$\mathcal{Q}(\varphi)\geq\frac{1}{p}\sum_{x\in X}\frac{2f(x)^{1/2}\mathcal{L}(f^{1/2})(x)}{f(x)^{p/2}}|\varphi(x)|^p m(x)$$

对所有 $\varphi\in C_c(X)$ 均成立。由引理 4.4 可推得

$$\begin{aligned}\frac{2f(x)^{1/2}\mathcal{L}(f^{1/2})(x)}{f(x)^{p/2}}&\geq\frac{|\nabla f^{1/2}|^p(x)}{f(x)^{p/2}}+\frac{1}{2^{p-2}f(x)^{p-1}}\mathcal{L}f(x)\\&\geq\frac{|\nabla f^{1/2}|^p(x)}{f(x)^{p/2}}+\frac{\lambda}{2^{p-2}}.\end{aligned}$$

结合这两个不等式可得第一个结论。对于第二个不等式，我们利用引理 4.2 估计

$$|\nabla f^{1/2}|^p(x)\geq\inf_{x\sim y}\frac{1}{2^p(f(x)\vee f(y))^{p/2}}|\nabla f|^p(x).$$

由于根据假设，对于所有 $x\sim y$，$f(y)\leq Kf(x)$，因此我们得到

$$|\nabla f^{1/2}|^p(x)\geq\frac{1}{2^pK^{p/2}f(x)^{p/2}}|\nabla f|^p(x).\qquad\square$$

5. Proof of the main results

本节证明主要结果定理 2.2 和定理 2.6。

定理 2.2 的证明。设给定 $f\in H^{1,p}(X,m)$，其中 $|\nabla h|/hf\in\ell^p(X,m)$。根据命题 3.4，只需证明 $f\in\mathcal{D}_0^p$。

我们固定 $o\in X$。对于 $n\in\mathbb{N}$，考虑函数

$$\chi_n\colon X\to\mathbb{R},\quad\chi_n(x)=(h(x)-1/n)_+\cdot((2-\sigma(x,o)/n)_+\wedge1).$$

于是 $|\chi_n|\leq h$, $\chi_n\to h$ 逐点成立，因为 $n\to\infty$，并且

$$\operatorname{supp}\chi_n\subseteq B_{2n}^{\sigma}(o)\cap\{x\in X\mid h(x)\geq1/n\}.$$

根据我们的假设，函数 $\deg/m$ 在后一个集合上有界。

令 $f_n=(\chi_n/h)f$。f_n 的支集包含于 χ_n的支集中，因此由引理 3.6 可得 $f_n\in H^{1,p}_0(X,m)$。由于 $f_n\to f$ 逐点成立，根据

命题 3.5，要证明$f \in \mathcal{D}_0^p$，只需证明 $(\mathcal{Q}(f_n))$ 有界。

对于 $g \in C(X)$ 和 $x, y \in X$，我们记 $\nabla_{xy} g = g(x) - g(y)$。我们使用离散乘积法则 $\nabla_{xy}(gh) = g(x)\nabla_{xy} h + h(y)\nabla_{xy} g$，并利用不等式 $(|w| + |z|)^p \leq 2^p(|w|^p + |z|^p)$ 将 $p\mathcal{Q}(f_n)$ 估计为

$$\begin{aligned}
&\sum_{x,y\in X} b(x,y)|\nabla_{xy} f_n|^p \\
&= \sum_{x,y\in X} b(x,y) \left|\chi_n(x)\nabla_{xy}(f/h) + \frac{f(y)}{h(y)}\nabla_{xy}\chi_n\right|^p \qquad (\heartsuit) \\
&\leq 2^p \sum_{x,y\in X} b(x,y)\,|\chi_n(x)\nabla_{xy}(f/h)|^p + 2^p \sum_{x,y\in X} b(x,y)\left|\frac{f(y)}{h(y)}\nabla_{xy}\chi_n\right|^p.
\end{aligned}$$

我们使用离散乘积法则以及

$$\nabla_{xy}\frac{1}{h} = \frac{1}{h(x)h(y)}\nabla_{yx} h$$

用以估计不等式 $\heartsuit$ 右侧的第一项:

$$\begin{aligned}
&\sum_{x,y\in X} b(x,y)\,|\chi_n(x)\nabla_{xy}(f/h)|^p \\
&= \sum_{x,y\in X} b(x,y)\left|\frac{\chi_n(x)}{h(x)}\nabla_{xy} f + \chi_n(x) f(y)\nabla_{xy}\frac{1}{h}\right|^p \\
&= \sum_{x,y\in X} b(x,y)\left|\frac{\chi_n(x)}{h(x)}\nabla_{xy} f + \frac{\chi_n(x) f(y)}{h(x)h(y)}\nabla_{yx} h\right|^p \\
&\leq 2^p \sum_{x,y\in X} b(x,y)|\nabla_{xy} f|^p + 2^p \sum_{x,y\in X} b(x,y)\frac{|f(y)|^p}{|h(y)|^p}|\nabla_{yx} h|^p \\
&= p2^p\mathcal{Q}(f) + 2^p\|f|\nabla h|/h\|_p^p.
\end{aligned}$$

接下来，我们考虑不等式 $\heartsuit$ 右侧的第二项。令 $\rho\colon\ X \to \mathbb{R}$, $\rho(x) = (2 - \sigma(x,o)/n)_+ \wedge 1$。那么 $|\rho| \leq 1$，且 ρ 是$1/n$-利普希茨的，因此得到 $|\nabla\rho| \leq 1/n$。利用这一点和离散乘积法则，我们继续估计

$$\begin{aligned}
&\sum_{x,y\in X} b(x,y)\left|\frac{f(y)}{h(y)}\nabla_{xy}\chi_n\right|^p \\
&= \sum_{x,y\in X} b(x,y)\left|\frac{f(y)(h(y) - 1/n)_+}{h(y)}\nabla_{xy}\rho + \frac{f(y)}{h(y)}\rho(x)\nabla_{xy}(h - 1/n)_+\right|^p \\
&\leq 2^p \sum_{x,y\in X} b(x,y)|f(y)|^p|\nabla_{xy}\rho|^p + 2^p \sum_{x,y\in X} b(x,y)\frac{|f(y)|^p}{|h(y)|^p}|\nabla_{xy}(h - 1/n)_+|^p \\
&\leq 2^p \sum_{y\in X} |f(y)|^p m(y)|\nabla\rho|^p(y) + 2^p \sum_{y\in X} |f(y)|^p\frac{|\nabla h|^p(y)}{|h(y)|^p}m(y) \\
&\leq 2^p\,\|f\|_p^p + 2^p\|f|\nabla h|/h\|_p^p.
\end{aligned}$$

对于倒数第二个不等式，我们使用了 $|\nabla_{xy}(h - 1/n)_+| \leq |\nabla_{xy} h|$.

综合所有这些估计可得一个常数 $C>0$，使得

$$C\mathcal{Q}(f_n)\le \mathcal{Q}(f)+\|f\|_p^p+\|f|\nabla h|/h\|_p^p.$$

根据我们对 f 的假设，该不等式右端有限，因此得到所需结论。□

定理 2.6 的证明。根据假设，存在一个有限的 $K\subseteq X$，使得 $\mathcal{L}h\ge\lambda h^{p-1}$ 在 $X\setminus K$ 上成立。由于对所有 $x\in X$，$h(x)>0$，且其在有限集 K 上有下界，因此存在 $\lambda'\in\mathbb{R}$，使得 $\mathcal{L}h\ge\lambda' h$ 在 K 上成立。由此可推得 $\mathcal{L}h\ge(\lambda\wedge\lambda')h$ 在 X 上成立。由此，命题 4.6 中的第一个不等式保证存在 $C>0$，使得

$$C\sum_{x\in X}|\varphi(x)|^p\frac{|\nabla h^{1/2}|^p(x)}{h(x)^{p/2}}m(x)\le\mathcal{Q}(\varphi)+\|\varphi\|_p^p$$

对所有 $\varphi\in C_c(X)$ 均成立。根据定义，$H^{1,p}_0(X,m)$ 是 $C_c(X)$ 在 $H^{1,p}(X,m)$ 中的闭包。由于上述不等式左端关于逐点收敛是下半连续的，且 $\|\cdot\|_{H^{1,p}(X,m)}$-收敛蕴含逐点收敛，该不等式推广到 $\varphi\in H^{1,p}_0(X,m)$。同理，利用命题 4.6 中的第二个不等式即可证明该结论。□

6. Spherically symmetric trees

本节将我们的主要结果应用于球对称树。我们首先简要回顾球对称图，接着讨论一般树的边界，最后将所有内容应用于某些球对称树。

6.1. 弱球对称图。设 b 是 X上的一个图，其组合度量为 $d:=d_1$，该度量在例2.1中引入，并固定 $o\in X$。若函数 $f\colon X\to\mathbb{R}$ 满足：只要 $d(x,o)=d(y,o)$，就有 $f(x)=f(y)$，则称其为球对称函数（相对于 o）。此时，存在 $f\colon\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$，使得对满足 $d(x,o)=n$的 $x\in X$，有 $f(x)=f(n)$。在~下文中，我们稍微滥用记号，不区分 f 和 f。

对于 $n\in\mathbb{N}_0$，我们用 $S_n=\{x\in X\mid d(o,x)=n\}$ 表示围绕 o的组合球面。入度和出度函数 $\deg_-$ 和 $\deg_+$ 定义如下

$$\deg_\pm\colon X\to[0,\infty),\quad \deg_\pm(x)=\sum_{y\in S_{d(x,o)\pm1}}b(x,y),$$

按照约定，$\deg_-(o)=0$。若图 b 配备度量 m，且函数 $\kappa_\pm:=\deg_\pm/m$ 关于 o呈球对称，则称其相对于 o 弱球对称。本文只讨论 $\deg_\pm$ 和 m 均呈球对称的特殊情形。

弱球对称图的一个重要性质是：只要 $f\in\mathcal{F}_p$ 是球对称的，那么 $\mathcal{L}f$ 也是球对称的，且

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(n)=&\kappa_+(n)(f(n)-f(n+1))|f(n)-f(n+1)|^{p-2}\\&+\kappa_-(n)(f(n)-f(n-1))|f(n)-f(n-1)|^{p-2}\end{aligned}$$

若 $n \geq 1$ 和

$$\mathcal{L}f(0) = \kappa_+(0)(f(0) - f(1))|f(0) - f(1)|^{p-2}.$$

对于 $f \in C(X)$，我们令

$$Af \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}, \quad A(n) = \sum_{x \in S_n} f(x).$$

对于球对称的 m，我们有

$$\|f\|_p^p = \sum_{n=0}^{\infty} A|f|^p(n)m(n).$$

关于 $p = 2$ 时的更多细节，参见 [15]。

6.2. 树与度量边界。设 b 是 X 上的一棵连通树，也就是说，在 X 中任意两个不同的点之间都存在唯一一条连接它们的单射路径。此外，我们假设对于所有 x、$y \in X$，$b(x, y) \in \{0, 1\}$。这一条件与我们对 b 的可和性条件共同推出 b 是局部有限的。我们固定一个根 $o \in X$。容易验证，b 是一棵树等价于对所有 $x \in X \setminus \{o\}$，$\deg_-(x) = 1$。

我们描述相对于路径度量的树的度量边界。在树上，如果从 x 到 o 的每条路径都经过 z，则称 $z \in X$ 是 $x \in X$ 的祖先（相对于 o）。任意集合 $\emptyset \neq A \subseteq X$ 都有唯一的最近公共祖先 $\wedge A$，它是所有 $x \in A$ 的祖先；并且如果 $z \in X$ 是所有 $x \in A$ 的另一个祖先，那么 $d(z, o) \leq d(\wedge A, o)$。下文中我们简单地用 $x \wedge y$ 表示 $\wedge\{x, y\}$。

设 $w\colon X \times X \to [0, \infty)$，其中 $w(x, y) > 0$ 对所有 $x \sim y$ 均成立。如例2.1中所述，相应的路径度量 d_w 在 X 上诱导离散拓扑。因此，作为开集 $\{x\}, x \in X$ 的并集，集合 X 在完备化中是开集，所以 $\partial_{d_w} X = \overline{X}^{d_w} \setminus X$ 是闭集。为计算相对于 d_w 的度量边界，我们使用树上路径度量的两个性质：对于 $x, y \in X$，有

$$d_w(x, y) = d_w(x, x \wedge y) + d_w(x \wedge y, y) = L_w(\gamma_{x, x\wedge y}) + L_w(\gamma_{x\wedge y, y}),$$

其中 $\gamma_{w,z}$ 表示连接 $w, z \in X$ 的唯一单射路径。此外，若 $x, y, z \in X$ 满足 $x \wedge y = x$ 和 $y \wedge z = y$，则

$$d_w(x, z) = d_w(x, y) + d_w(y, z).$$

引理6.1. 设 d_w 是上述路径度量，且满足 $\partial_{d_w} X \neq \emptyset$。对于每个 $x \in \partial_{d_w} X$，都存在一条无限单射路径 (x_n)，其极限为 x，并且对 $m \geq n$ 有 $x_n \wedge x_m = x_m$。特别地，对于 $n > m$，有

$$d_w(x_n, x_m) = \sum_{k=m}^{n-1} w(x_k, x_{k+1}).$$

证明。此内容已包含在 [25, 命题 3.7] 的证明中。“特别是”部分可由树上路径度量的前述性质通过归纳法得出。□

设 $\gamma = (x_n)$ 是一条无限路径。与有限路径一样，我们将其长度定义为

$$L_w(\gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} w(x_n, x_{n+1}) \in [0, \infty].$$

命题 6.2. 设 d_w 为上述路径度量。以下断言等价。

(i) $\partial_{d_w} X = \emptyset$。(ii) 关于 w，所有无限路径的长度均为无限。(iii) 关于 d_w，所有球都是有限的。

此外，对于 $x \in X$，有

$$d_w(x, \partial_{d_w} X) = \inf\{L_w(\gamma_x) \mid \gamma_x \text{ an infinite path starting at } x\}.$$

证明。关于完备性的陈述是一个更一般定理的推论。对于局部有限图，路径度量下的 (i)、(ii) 和 (iii) 等价，见 [12, 附录 A]。由此可得公式 $d_w(x, \partial_{d_w} X)$，只要 $\partial_{d_w} X = \infty$。

现在假设 $\partial_{d_w} X \neq \emptyset$，并令

$$I_x := \inf\{L_w(\gamma_x) \mid \gamma_x \text{ an infinite path starting at } x\}.$$

$d_w(x, \partial_{d_w} X) \leq I_x$：设 $\gamma_x = (x_n)$ 是一条从 x 出发的无限路径。不失一般性，我们可以假设 $L_w(\gamma_x) < \infty$。那么 γ_x 最终必定离开每个有限集。此外，根据三角不等式，对于 $n \geq m$，我们有

$$d_w(x_n, x_m) \leq \sum_{k=m}^{n-1} w(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{\infty} w(x_k, x_{k+1}),$$

它趋于 0，当 $m \to \infty$ 时。因此，(x_n) 是 d_w-柯西序列，极限为 $y \in \overline{X}^{d_w}$。由于该序列最终会离开每个有限集，我们得到 $y \in \partial_{d_w} X$并且

$$d_w(x, y) = \lim_{n\to\infty} d_w(x, x_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n-1} w(x_k, x_{k+1}) = L_w(\gamma_x).$$

这表明 $d_w(x, \partial_{d_w} X) \leq I_x$。

$d_w(x, \partial_{d_w} X) \geq I_x$：设 $\varepsilon > 0$。选取 $y \in \partial_{d_w} X$，使得 $d_w(x, \partial_{d_w} X) \geq d_w(x, y) - \varepsilon$。设 $\gamma = (y_n)$ 是一条收敛于 y 的路径，并且对于$m \geq n$，满足引理6.1中的 $y_n \wedge y_m = y_m$。

情形 1： $x = y_m$ 对于某个 $m \in \mathbb{N}$。

设 $m \in \mathbb{N}$ 满足 $x = y_m$，并考虑路径 $\gamma_x = (y_m, y_{m+1}, \ldots)$。那么

$$d_w(x, y) = \lim_{n\to\infty} d_w(y_m, y_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{n-1} w(x_k, x_{k+1}) = L_w(\gamma_x).$$

情形 2： x 不包含在 γ 中。

序列 (y_n) 离开每个有限集。因此，存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $d(x, o) \leq d(y_m, o)$。令 $\gamma' = (x, x_1, \ldots, x_n, y_m)$ 为连接 x 和 y_m 的最短路径。由于 $d(x, o) \leq d(y_m, o)$，并且由于 $y_n \wedge y_m = y_m$

对于 $n \geq m$，这条路径不会经过任何其他 $y_n, n > m$。因此，$\gamma_x = (x, x_1, \ldots, x_n, y_m, y_{m+1}, \ldots)$ 是一条测地线，我们得到

$$d_w(x,y) = \lim_{n\to\infty} d_w(x, y_n) = L_w(\gamma') + \lim_{n\to\infty} d_w(y_m, y_n) = L_w(\gamma_x).$$

结合这两种情况即可得到所述结论。 □

6.3. 球对称树。设 b 如上一小节所述。此外，我们假设 b 是一棵分支数为 $k\colon\ \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ 的球对称树，即对于所有 $x \in X\setminus\{o\}$，$\deg(x) = 1$，并且当 $d(x,o) = n$ 时，$\deg(x) = k(n)$。那么，当 $n = d(x,o) \geq 1$ 时，$\deg(x) = k(n) + 1$，且 $\deg(o) = k(0)$。此外，令 $m\colon\ X \to (0,\infty)$ 为球对称，并考虑权重

$$w(x,y) = \frac{m(x)^{1/p}}{\deg(x)^{1/p}} \wedge \frac{m(y)^{1/p}}{\deg(y)^{1/p}},$$

这些权重是在例2.1中引入的。现在，我们计算将主要结果（更准确地说，是推论 2.8 的最终结论）应用于函数 δ_{d_w} 时所需的所有量。

固定满足 $d(x,o) = n \in \mathbb{N}$ 的 $x \in X$。情况 $n = 0$ 也可以类似处理，但在计算中实际上并不重要。令 $y \in X$ 满足$d(y,o) = n+1$。那么

$$w(x,y) = \frac{m(n)^{1/p}}{(k(n)+1)^{1/p}} \wedge \frac{m(n+1)^{1/p}}{(k(n+1)+1)^{1/p}} =: \alpha(n).$$

球对称性意味着，相对于 w、从 x 出发的最短无限路径 $\gamma_x = (x_0, x_1, \ldots)$ 总是会增大其到根的组合距离，即对所有 $k \in \mathbb{N}$，$d(x_{k+1}, o) = d(x_k, o) + 1$。反复应用这一点可得 $d(x_k, o) = d(x,o) + k = n + k$，而我们的 w 公式给出

$$L_w(\gamma_x) = \sum_{k=0}^{\infty} w(x_k, x_{k+1}) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha(k).$$

利用命题 6.2，这表明 $\partial_{d_w} X \neq \emptyset$ 当且仅当 $\alpha \in \ell^1(\mathbb{N})$。特别地，我们得到以下一般结果。

命题 6.3。设 $1 < p < \infty$。假设上述情形成立，且 $\alpha \notin \ell^1(\mathbb{N})$。那么 $H^{1,p}(X,m) = H^{1,p}_0(X,m)$。

证明。正如前面所述，$\alpha \notin \ell^1(\mathbb{N})$ 导致 $\partial_{d_w} X = \emptyset$；根据命题 6.2，这等价于 d_w- 球是有限的。由推论 2.4，我们推出 $H^{1,p}(X,m) = H^{1,p}_0(X,m)$。□

现在我们假设是后一种情况 $\alpha \in \ell^1(\mathbb{N})$。令 $D = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k)$，我们得到

$$\delta_{d_w}(x) = d_w(x, \partial_{d_w} X) \wedge D = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha(k),$$

这表明 δ_{d_w} 是球对称的。由于 $\delta_{d_w}(n) \to 0$，对于 $n \to \infty$，集合 $\{z \in X \mid \delta_{d_w}(z) \geq \varepsilon\}$ 对任意 $\varepsilon > 0$ 都是有限的。对于 $y \sim x$，我们要么有 $d(y,o) = n-1$，要么有 $d(y,o) = n+1$。由于 $\delta_{d_w}(n) \leq \delta_{d_w}(n-1)$，并且

$$\frac{\delta_{d_w}(n)}{\delta_{d_w}(n+1)} = \frac{\alpha(n) + \delta_{d_w}(n+1)}{\delta_{d_w}(n+1)} = 1 + \frac{\alpha(n)}{\delta_{d_w}(n+1)},$$

我们有

$$\sup_{y,z\in X,y\sim z}\frac{\delta_{d_w}(y)}{\delta_{d_w}(z)}<\infty$$

当且仅当 $\sup_n \alpha(n)/\delta_{d_w}(n+1)<\infty$。

命题 6.3 表明，$H^{1,p}(X,m)\neq H^{1,p}_0(X,m)$ 蕴含 m 相对于 k较小。因此，为简便起见，从现在起我们假设$n\mapsto m(n)$递减且 $n\mapsto k(n)$递增，由此得到 $\alpha(n)=m(n+1)^{1/p}/(k(n+1)+1)^{1/p}$。于是，$\delta_{d_w}$ 的梯度为

$$\begin{aligned}|\nabla\delta_{d_w}|^p(n)&=\frac{k(n)}{m(n)}|\delta_{d_w}(n)-\delta_{d_w}(n+1)|^p+\frac{1}{m(n)}|\delta_{d_w}(n)-\delta_{d_w}(n-1)|^p\\&=\frac{k(n)\alpha(n)^p}{m(n)}+\frac{\alpha(n-1)^p}{m(n)}\\&=\frac{k(n)m(n+1)}{m(n)(k(n+1)+1)}+\frac{1}{k(n)+1},\end{aligned}$$

并且我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\delta_{d_w}(n)&=\frac{k(n)}{m(n)}(\delta_{d_w}(n)-\delta_{d_w}(n+1))^{p-1}-\frac{1}{m(n)}(\delta_{d_w}(n-1)-\delta_{d_w}(n))^{p-1}\\&=\frac{k(n)\alpha(n)^{p-1}}{m(n)}-\frac{\alpha(n-1)^{p-1}}{m(n)}\\&=\frac{k(n)m(n+1)^{(p-1)/p}}{m(n)(k(n+1)+1)^{(p-1)/p}}-\frac{1}{(k(n)+1)^{(p-1)/p}m(n)^{1/p}}.\end{aligned}$$

对于上面的第一个等式，我们用到了 $n\mapsto\delta_{d_w}(n)$递减这一事实。

现在，我们通过两个具体例子应用推论 2.8，其中 k 和m分别是多项式函数和指数函数。给定两个函数f、g：$\mathbb{N}\to\mathbb{R}$，若存在常数 C、$D>0$，使得对所有 $n\geq K$都有 $Cf(n)\leq g\leq Df(n)$，则称 $f(n)\asymp g(n)$。

例6.4（多项式增长）。设 $1<p<\infty$。设 $\gamma>0>\eta$，并假设 k 是递增的，且对于 $n\geq 1$，$k(n)\asymp n^\gamma$；m 是递减的，且对于 $n\geq 1$，$m(n)\asymp n^\eta$。若 $\gamma\leq\eta+p$，则 $H^{1,p}(X,m)=H^{1,p}_0(X,m)$。若$\gamma>\eta+p$，则存在 $C>0$ 使得

$$C\sum_{n=1}^{\infty}A|f|^p(n)n^{\gamma-p}\leq\mathcal{Q}(f)+\sum_{n=1}^{\infty}A|f|^p(n)n^\eta+f(0)^pm(0)$$

对于所有 $f\in H^{1,p}_0(X,m)$。特别地，$f\in H^{1,p}_0(X,m)$ 当且仅当 $f\in\mathcal{D}$ 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}A|f|^p(n)n^{\gamma-p}<\infty.$$

证明。根据我们的假设，对于 $n\geq 1$，有 $\alpha(n)\asymp\frac{1}{n^{(\gamma-\eta)/p}}$。因此，当且仅当 $\gamma>\eta+p$ 时，我们有$\alpha\in\ell^1(\mathbb{N})$。在这种情况下，我们可以估计

$$\delta_{d_w}(n)=\sum_{l=n}^{\infty}\alpha(l)\asymp\sum_{l=n}^{\infty}\frac{1}{l^{(\gamma-\eta)/p}}\asymp\frac{1}{n^{(\gamma-\eta)/p-1}},$$

这意味着

$$\sup_n \frac{\alpha(n)}{\delta_{d_w}(n+1)} < \infty.$$

对于梯度，我们得到

$$|\nabla \delta_{d_w}|^p(n) \asymp \frac{n^\gamma (n+1)^\eta}{n^\eta((n+1)^\gamma + 1)} + \frac{1}{n^\gamma + 1} \asymp 1.$$

对于拉普拉斯算子的估计，我们找到常数 $C, C', D > 0$，使得对于$n \in \mathbb{N}$，有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\delta_{d_w}(n) &\geq C\frac{n^\gamma (n+1)^{\eta(p-1)/p}}{n^\eta((n+1)^\gamma+1)^{(p-1)/p}} - D\frac{1}{(n^\gamma+1)^{(p-1)/p} n^{\eta/p}} \\ &\geq C' n^{(\gamma-\eta)/p} - D.\end{aligned}$$

由于 $\gamma > \eta + p$，这表明在某个有限集之外，$\mathcal{L}\delta_{d_w} \geq 0$。现在，根据推论 2.8 以及我们在本例之前的讨论，可得所述结论。□

例 6.5（指数增长）。设 $\gamma > 1 \geq \eta > 0$，并假设 k 递增且满足 $k(n) \asymp \gamma^n$（对于 $n \geq 0$），而 m 递减且满足 $m(n) \asymp \eta^n$（对于 $n \geq 0$）。那么存在 $C > 0$，使得

$$C\sum_{n=0}^{\infty} A|f|^p(n)\gamma^n \leq \mathcal{Q}(f) + \sum_{n=0}^{\infty} A|f|^p(n)\eta^n$$

对于所有 $f \in H^{1,p}_0(X,m)$。此外，$f \in H^{1,p}_0(X,m)$ 当且仅当 $f \in \mathcal{D}$ 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} A|f|^p(n)\gamma^n < \infty.$$

证明。令 $\xi = (\eta/\gamma)^{1/p}$，使得 $\alpha(n) \asymp \xi^n$，对 $n \geq 0$成立。由于 $\eta < \gamma$，我们得到 $\alpha \in \ell^1(\mathbb{N})$，并且

$$\delta_{d_w}(n) \asymp \sum_{l=n}^{\infty} \frac{\eta^{l/p}}{(\gamma^l+1)^{1/p}} \asymp \frac{\xi^n}{1-\xi}, \quad n \geq 0.$$

这意味着 $\sup_n \frac{\alpha(n)}{\delta_{d_w}(n+1)} < \infty$。对于 δ_{d_w} 的梯度，我们得到

$$|\nabla \delta_{d_w}|^p(n) \asymp \frac{\gamma^n \eta^{n+1}}{\eta^n(\gamma^{n+1}+1)} + \frac{1}{\gamma^n+1} \asymp 1, \quad n \geq 1.$$

为了估计拉普拉斯算子，我们找到常数 C、C'、D、$D' > 0$，使得对于 $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\delta_{d_w}(n) &\geq C\frac{\gamma^n \eta^{(n+1)(p-1)/p}}{\eta^n(\gamma^{n+1}+1)^{(p-1)/p}} - D\frac{1}{(\gamma^n+1)^{(p-1)/p}\eta^{n/p}} \\ &\geq C'\xi^{-n} - \frac{D'}{\gamma^n}\xi^{-n}.\end{aligned}$$

由于 $\xi < 1$ 和 $\gamma > 1$，我们推得在一个有限集之外有 $\mathcal{L}\delta_{d_w} \geq 0$。现在，结论可由推论 2.8 以及本例之前的讨论得出。□

注。类似的结果也适用于其他类别的球对称图。尤其是，球对称反树也可以按上述方式处理。我们简要回顾其定义，具体细节留给读者。

若一个连通图 b在 X上具有固定的 $o \in X$和 b（x， y），且对所有x，$y \in X$， $\in \{0,1\}$，则称其为球对称反树，当且仅当 $x \sim y$在 $x \in S_n$和 $y \in S_{n+1}$或 $y \in S_n$和 $x \in S_{n+1}$时，对某个 $n \in \mathbb{N}_0$成立。换句话说，反树是这样一种连通图：其中， S_n中的所有点都与 S_{n+1}中的所有点相连。在 S_n和 S_{n+1}之间，它们拥有尽可能多的边（即 $|S_n|\cdot|S_{n+1}|$）。这与连通树相反，连通树在不失去连通性的前提下，拥有 S_n和 S_{n+1}之间尽可能少的边（即 $|S_{n+1}|$）。具有 $|S_n| = n+1$、 $n \geq 0$的反树曾在 [3, 29]中作为一个例子出现。一般的反树在[30] 中被引入，用以构造相对于组合度量具有多项式体积增长的随机不完备图的例子。

球对称反树满足 $\deg_+(n) = |S_{n+1}|$ 对于 $n \geq 0$，且 $\deg_-(n) = |S_{n-1}|$对于 $n \geq 1$。为其配备球对称的m 以及上文讨论的 p-内在度量 d_w 后，$\partial_{d_w} X$ 至多由一个点组成（利用相邻球层中的点彼此连通这一性质），并且对于$n \geq 1$，我们有

$$d(n, \partial_{d_w} X) = \sum_{l=n}^{\infty} \frac{m(l)^{1/p}}{(|S_{l-1}| + |S_{l+1}|)^{1/p}} \wedge \frac{m(l+1)^{1/p}}{(|S_l| + |S_{l+2}|)^{1/p}}.$$

借助球对称图上梯度范数和拉普拉斯算子的公式，可以建立与树类似的结果。此处不再赘述。

References

[1] Alexander A. Balinsky、W. Desmond Evans 和 Roger T. Lewis。*The analysis and geometry of Hardy's inequality* 2015 。

Universitext。Springer，Cham，。[2] G. Barbatis、S. Filippas 和 A. Tertikas。采用统一方法改进 L^p Hardy 不等式并获得最佳常数。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，356(6):2169–2196，2004。[3] Jozef Dodziuk 和 Leon Karp。组合拉普拉斯算子的谱理论与函数理论。载于 *Geometry of random motion (Ithaca, N.Y., 1987)* 73 *Contemp.*，第卷，页码–。*Math.* 25 40 1988 美国数学会，Providence，RI，。[4] D. E. Edmunds 和 W. D. Evans。*Spectral theory and differential operators*。牛津数学专著。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，1987。牛津科学出版物。[5] D. E. Edmunds 和 Aleˇs Nekvinda。变指数 Sobolev 空间中零迹函数的刻画。 *Math. Nachr.*，290(14-15):2247–2258，2017。[6] Florian Fischer。非局部拟线性基态表示与临界性理论。 *Preprint. arXiv:2204.05391*。[7] Florian Fischer。图上 p-Hardy 权重的最优性与衰减。*arXiv:2212.07728* *Preprint.* 。[8] Florian Fischer。图上的拟线性临界性理论与格林函数。*Preprint. arXiv:2207.05445*。[9] Florian Fischer、Matthias Keller 和 Felixa Pogorzelski。改进的离散 p-哈代不等式。*Preprint. arXiv:1910.03004*。[10] Rupert L. Frank、Daniel Lenz 和 Daniel Wingert。非局部对称狄利克雷型的内禀度量及其在谱理论中的应用。 *J. Funct. Anal.*，266 8 4765 4808，2014（）：–。[11] Nicola Gigli 和 Enrico Pasqualetto。 *Lectures on nonsmooth differential geometry*，第 2 卷，丛书 *SISSA Springer Series*。Springer，Cham， [2020] ©2020。

[12] Xueping Huang、Matthias Keller、Jun Masamune 和 Rados law K. Wojciechowski。关于加权图上拉普拉斯算子的自伴扩张的一则注记。 *J. Funct. Anal.*，265 8 1556( ): –1578, 2013。[13] Jan Kadlec 和 Alois Kufner。用带权积分刻画零迹函数。I。 *Časopis Pěst. Mat.*，91:463–471，1966。[14] Matthias Keller。图上的内在度量：综述。载于 *Mathematical technology of networks* 128 *Springer Proc. Math. Stat.* 81 119 ，第卷，页码–。Springer，Cham，2015。[15] Matthias Keller、Daniel Lenz 和 Rados law K. Wojciechowski。无限图的体积增长、谱与随机完备性。 *Math. Z.*，274(3-4):905–932，2013。[16] Matthias Keller、Daniel Lenz 和 Rados law K. Wojciechowski。 *Graphs and discrete Dirichlet spaces* 358 *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* ，第卷。*[Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* [2021] 2021 Springer，Cham，©。[17] Matthias Keller 和 Noema Nicolussi。 *Personal communication*。[18] Matthias Keller、Yehuda Pinchover 和 Felix Pogorzelski。改进的离散哈代不等式。 *Amer. Math. Monthly*，125(4):347–350，2018。[19] Matthias Keller、Yehuda Pinchover 和 Felix Pogorzelski。图上薛定谔算子的最优哈代不等式。 *Comm. Math. Phys.*，358(2):767–790，2018。[20] Matthias Keller、Yehuda Pinchover 和 Felix Pogorzelski。流形和图上的临界哈代不等式。载于 *Analysis and geometry on graphs and manifolds*，第 461 卷，丛书 *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*，第 172–202 页。剑桥大学出版社，剑桥，2020。[21] Matthias Keller、Yehuda Pinchover 和 Felix Pogorzelski。图上薛定谔算子的临界性理论。 *J. Spectr. Theory*，10(1):73–114，2020。[22] Matthias Keller、Yehuda Pinchover 和 Felix Pogorzelski。从哈代不等式到图上的雷利希不等式。 *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*，122(3):458–477，2021。[23] Juha Kinnunen 和 Olli Martio。索伯列夫函数的哈代不等式。 *Math.* , ( ): –。 *Res. Lett.* 4 4 489 500, 1997
[24] Kazuhiro Kuwae。反射狄利克雷形式与 Silverstein 扩张的唯一性。 *Potential Anal.*，16(3):221–247，2002。[25] Daniel Lenz、Simon Puchert 和 Marcel Schmidt。常返图与（强）可解图。 *Preprint. arXiv:2301.01994*。[26] Ale˘s Nekvinda 和 Hana Tur˘cinov´a。通过距离函数和洛伦兹空间刻画零迹函数。 *Preprint. arXiv:2209.13486*。[27] Marcel Schmidt。一则关于反射狄利克雷形式的注记。 *Potential Anal.*，52 279，2020 2 245( ): –。[28] Marcel Schmidt。关于离散（磁）薛定谔算子的自伴实现的存在性与唯一性。载于 ，第卷，页码–。剑桥大学出版社，剑桥，2020。[29] Andreas Weber。局部有限图上物理拉普拉斯算子与热流的分析。 *J. Math. Anal. Appl.*，370(1):146–158，2010。[30] Radoslaw Krzysztof Wojciechowski。随机不完备流形与图。载于 *Random walks, boundaries and spectra*，第 64 卷，丛书 *Progr. Probab.*，第 163–179 页。Birkh¨auser/Springer Basel AG，巴塞尔，2011。

Institut für Mathematik, Friedrich-Schiller-Universität Jena, 07743 Jena, Germany.
Email address: simon.murmann@uni-jena.de

Mathematisches Institut, Universität Leipzig, 04109 Leipzig, Germany.
Email address: marcel.schmidt@math.uni-莱比锡.de