arXiv:2303.07097v1 [math.AT] 13 Mar 2023

层与稳定性

J.F. Jardine*

安大略省西安大略大学数学系，伦敦，加拿大

jardine@uwo.ca

2023年3月14日

摘要

HDBSCAN算法中与簇相关联的层次结构具有若干层，这些层由基数定义。这些层构成 HDBSCAN 层次结构的一个层子偏序集，它是一个强形变收缩，并且可以进行稳定性分析。本文在此介绍这种稳定性分析。与分支点稳定性陈述相比，基数论证能为层得出更精确的结果。

本文于2021年1月发表于作者的网站。

引言

每个有限度量空间 $X = (X, d)$ 都关联着一个偏序集系统 $P_s(X)$，其中 s 是非负实数。该系统由系统 $P_{s,\ k}(X)$ 过滤，其中 k 是正整数。

偏序集 $P_s(X)$ 由满足以下条件的子集 σ 构成：对于所有 $x, y \in \sigma$， $d(x, y) \leq s$ 。

偏序集 $P_{s,k}(X)$ 由满足以下条件的子集 τ 构成：每个 $x \in \tau$ 至少有 k 个不同邻居 $y \in X$ ，使得 $d(x, y) \leq s$。我们还要求，对于 τ 中的任意两个元素 x, x' ，$d(x, x') \leq s$ 。

偏序集 $P_s(X)$ 是 Vietoris-Rips复形$V_s(X)$ 的单形偏序集，而偏序集 $P_{s,k}(X)$ 是 degreeRips comples$L_{s,k}(X)$ 的单形偏序集。

注意到 $P_{s,0}(X) = P_s(X)$，因此复形 $L_{s,0}(X)$ 是 Vietoris-Rips复形 $V_s(X)$。

对于固定的密度参数 k，路径连通分支函子 π_0 定义了一个赋值 $s \mapsto \pi_0 L_{s,\ k}(X)$，从而给出了定义在偏序集 $[0, \infty]$ 上的一个函子

*由加拿大自然科学与工程研究委员会资助。

其取值为集合。路径连通分支的集合 $\pi_0 L_{s,\ k}(X)$ 通常称为簇。

这个函子定义了一个图 $\Gamma_k(X)$，其顶点由形如 $(s,[x])$ 的有序对组成，其中 $[x] \in \pi_0 L_{s,\ k}(X)$。若 $s \leq t$ 且 $[x] = [y]$ 属于 $\pi_0 L_{t,\ k}(X)$，则存在一条从 $(s,[x])$ 到 $(\ \to)$ 的边。这个图是一个层次结构，或称为树，通常称作 HDBSCAN 层次结构。它也是一个偏序集，因为边可以复合，而且这个偏序集有一个终对象。为体现偏序集结构，我用 $(s,[x])$ 到 $(\ \leq, t, [y])$ 表示从 $\Gamma_k(X)$出发的边（或态射）。

$\Gamma_k(X)$ 的顶点 $(s,[x])$ 是一个分支点，当且仅当以下情况之一成立：$(s,[x])$ 没有前驱 $(t,[y])\ \leq (s,[x])$；或者 $(s,[x])$ 有不同的前驱 $(t,[y_1])$ 和 $(t,[y_2])$，其中 $t < s$ 足够接近。

若顶点 $(t,[y])$ 没有前驱，或者对于所有满足 $s < t$ 的前驱 $(s,[z])\ \leq (t,[y])$，集合 $[z]$ 作为 X 的子集严格小于 $[y]$，则称该顶点为层点。

每个分支点都是层点，但反过来的断言通常不成立。对于 Vietoris-Rips 系统 $V_s(X) = L_{s,\ 0}(X)$，层点与分支点确实重合，因为其底层顶点集系统是常量。

分支点和层点分别构成树 $\Gamma_k(X)$ 的子偏序集 $\mathrm{Br}_k(X)$ 和 $\mathrm{L}_k(X)$，并且存在偏序集嵌入

$$\mathrm{Br}_k(X) \subseteq \mathrm{L}_k(X) \subset \Gamma_k(X).$$

这些子偏序集本身也是层次结构。

本文旨在描述层点偏序集 $\mathrm{L}_k(X)$ 的稳定性性质。 [1] 中也有一项对分支点稳定性性质的类似研究——分支点偏序集 $\mathrm{Br}_k(X)$ 和层点偏序集 $\mathrm{L}_k(X)$ 具有类似性质，但与层点相关的基数计数是更精确的工具。

本文第一节阐述了层点偏序集$L_k(X)$的形式性质。 $L_k(X)$最重要的特点是，它具有一套最小上界演算（引理 4），这与 [1] 中出现的分支点偏序集 $\mathrm{Br}_k(X)$ 的最小上界理论相呼应。包含关系 $\mathrm{Br}_k(X) \subset L_k(X)$ 保持最小上界。偏序集态射

$$\mathrm{Br}_k(X) \subseteq L_k(X) \subset \Gamma_k(X)$$

将 $\mathrm{Br}_k(X)$ 和 $\mathrm{L}_k(X)$ 都定义为偏序集$\Gamma_k(X)$的强形变收缩，且与包含关系 $\mathrm{Br}_k(X) \subset L_k(X)$ 相一致 —— 见引理 5 和引理 6。缩回映射 $\max : \Gamma_k(X) \to L_k(X)$ 定义为令 $\max(t,[x])$ 等于位于 $(t,[x])$ 下方的极大层点。层点 $\max(t,[x])$ 也可定义为满足 $[z] = [x]$ 是集合 X 的子集的最小点 $(s,[z])\ \leq (t,[x])$。

若 $i\colon X \subset Y$ 是有限度量空间的包含，则存在一个诱导的偏序集映射 $i_* : L_k(X) \to L_k(Y)$，其中 $i_*(t,[x])$ 定义为 $\Gamma_k(Y)$ 中低于 $(t,[i(x)])$ 的极大层点。

度数 Rips 稳定性定理（ [2] 的定理 4）指出，存在同伦交换图

$$\begin{array}{ccc} L_{s,k}(X) & \xrightarrow{\sigma} & L_{s+2r,k}(X) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow_{\theta} & \downarrow{\scriptstyle i} \\ L_{s,k}(Y) & \xrightarrow[\sigma]{} & L_{s+2r,k}(Y) \end{array} \tag{1}$$

在满足条件 $d_H(X^k_{dis}, Y^k_{dis}) < r$ 的情况下，该条件涉及 X 和 Y中由 $k+1$ 个不同点构成的空间之间的豪斯多夫距离。第 2 节的定理 8 表明，图表 (1) 诱导出一个同伦交换图

$$\begin{array}{ccc} L_k(X) & \xrightarrow{\sigma_*} & L_k(X) \\ {\scriptstyle i_*}\downarrow & \nearrow_{\theta_*} & \downarrow{\scriptstyle i_*} \\ L_k(Y) & \xrightarrow[\sigma_*]{} & L_k(Y) \end{array} \tag{2}$$

(2) 中的映射 i_* 已经定义，(2) 中的其他映射也都以类似方式定义。例如，平移同态 σ_* 的定义是：对于层点 $(t,[x])$，将 $\sigma_*(t,[x])$ 映射为低于 $(t+2r,[x])$ 的极大层点。(2) 的同伦交换性意味着存在自然关系

$$\theta_* \cdot i_* \leq \sigma_* \text{ and } i_* \cdot \theta_* \leq \sigma_*.$$

这些关系的解释需要稍加注意。例如，如果 $(s.[x])$ 是 $\Gamma_k(X)$ 的层点，那么 $(t,[x])$ 是低于 $(t+2r,[x])$ 的层点，使得 $(t,[x]) \leq \sigma_*(t,[x])$。这意味着 $\sigma_*(t,[x])$ 是 $(t,[x])$ 和 $\theta_* i_*(t,[x])$ 的公共上界，而 $\sigma_*(t,[x])$ 具有 $(u,[x])$ 的形式，其中 $t \leq u \leq t+2r$ 是某个参数值。

我尚未找到一种无需额外假设就能估算 $\theta_* i_*(t,[x])$ 对应参数值的好方法。在如此一般的情形下，对于相对于 t 和 s 的点 $i_*(t,[x])$ 和 $\theta_*(s,[y])$，我们在确定其参数值时也面临同样的问题。

如果层点足够稀疏，我们就能进一步强化这些关系。层参数是与 $\Gamma_k(X)$ 的层点 $(t,[x])$ 相关联的参数 t。层参数 t 可以有一个后继 t_+ 和一个前驱 t_-。本文的引理 14 指出，若 $r < t < t_+ - 2r$，则 $i_*(t,[x]) = (s,[y])$，其中 $t - 2r \leq s \leq t$。在相同假设下，推论 15 进一步指出，$\theta_* i_*(t,[x]) = (t,[x])$。

引理 14 和推论 15 讨论的是 $\Gamma_k(X)$ 中上方有足够空间的层点（$t,[x]$）。如果 r 足够小，使得对于 X 的所有层参数 t，$r < t < t_+ - 2r$，那么对于 X 的所有层点（$t,[x]$），$\theta_* i_*(t,[x]) = (t,[x])$，因此 $\Gamma_k(X)$ 是 $\Gamma_k(Y)$ 的收缩。

例如，如果 $X \subset Z$ 是度量空间的嵌入，其中 X 被解释为标记点集合，且 r 选择得足够小，就可以实现这一点

使得对于 X的所有层参数 t，都有 $r < t < t_+ - 2r$，并且 $Y \subset Z$中的点选取得满足 $d_H(X^k_{dis}, Y^k_{dis}) < r$ in Z^k_{dis}。

对于 Vietoris-Rips复形，分析会变得简单。在这种情况下，对于所有 s， X 和 Y分别是 $V_s(X)$ 和 $V_s(Y)$ 的顶点集。于是，引理 17 表明，如果 $(s, [y])$ 是 $\Gamma_0(Y)$ 的一个层点，而 $(t, [x])$ 是低于 $(s + 2r, [\theta(y)])$ 的一个极大层点，那么 $s \le t \le s + 2r$。例如，这意味着 $\Gamma_0(Y)$ 的每个层参数 s 都满足 $t - 2r \le s \le t$，其中某个 $\Gamma_0(X)$ 的层参数 t 满足该条件。引理 14 和引理 17 合起来表明，对于各自的 Vietoris-Rips 系统， $\Gamma_0(X)$ 和 $\Gamma_0(Y)$ 的层参数之间存在紧密且可预测的约束。

1 层点

设 X 是一个有限度量空间，且 k 是一个正整数。函子 $s \mapsto \pi_0 L_{s,k}(X)$ 有一个同伦余极限 $\Gamma_k(X)$，其对象为 $(s, [x])$，其中 $[x] \in \pi_0 L_{s,k}(X)$；态射为 $(s, [x]) \to (t, [x])$，其中 $s \le t$。这里，距离参数 s 均为正实数，因此属于区间 $[0, \infty)$。

这个范畴 $\Gamma_k(X)$是一个偏序集，并具有树的结构，其态射记作（$s, [x]$） $\le (t, [y])$。当 s 足够大时，例如 $s \ge R$，空间$L_{s,\ k}(X)$是连通的，因为 X 是一个有限集合。

我常用 $[x]_s$ 表示$[x] \in \pi_0 L_{s,\ k}$。路径连通分支 $[x]_s$ 是$L_{s,\ k}(X)$的顶点的一个子集。当且仅当 $s \le t$和 $[x]_s \subset [y]_t$ 是 X的子集时，存在关系（$s, [x]$） $\le (t, [y])$。

树 $\Gamma_k(X)$中的一个分支点是一个顶点（$t, [x]$），满足以下两个条件之一：

1）存在一个 $s_0 < t$，使得对于所有 $s_0 \le s < t$，都存在不同的顶点（s, $[x_0]$）和（$s, [x_1]$），满足（$s, [x_0]$） $\le (t, [x])$且（$s, [x_1]$） $\le (t, [x])$；或者 2）不存在满足 $s < t$的关系（$s, [y]$） $\le (t, [x])$。

第二个条件意味着，路径连通分支 $[x]$ 在 $L_{s,k}(X)$ 中没有代表元，对 $s < t$而言。用 $\mathrm{Br}_k(X)$ 表示由分支点定义的 $\Gamma_k(X)$ 的偏序子集。

$\Gamma_k(X)$ 的一个层点是一个顶点 $(t, [x])$，满足以下两个条件之一：

1) 若存在关系 $(s, [y]) \le (t, [x])$，其中 $s < t$，则 $[y]_s$ 是 $[x]_t$的真子集，等价地说，其基数存在一个真不等式 $|[y]_s| < |[x]_t|$，或者

2) 不存在满足 $s < t$ 的关系 $(s, [y]) \le (t, [x])$。

层点构成 $\Gamma_k(X)$ 的偏序子集 $\mathrm{L}_k(X)$。

注记 1. 存在一个极大的有限子序列

$$0 \neq t_1 < \cdots < t_p$$

正实数 t_j，它们是.....顶点之间的距离

$$L_{k,t_p}(X) = L_{k,\infty}(X).$$

数值 t_i 是系统 $L_{*,k}(X)$ 的相变数。注意，$L_{k,t_i}(X)$ 和 $L_{k,t_{i+1}}(X)$ 的顶点可能重合。

我们可以通过对 i 使用归纳法，求出 $\Gamma_k(X)$ 的层点。首先注意，所有点 $(t_1, [z])$ 都是层点。如果 $[x] \in \pi_0 L_{t_i,k}(X)$，那么 $[x] \cap L_{t_{i-1},k}(X)_0$ 是路径分支 $[y]$ 的不交并。这个交集可能为空，此时 $(t_i, [x])$ 是一个层点。否则，如果所有 $[y] \subset [x] \cap L_{t_{i-1},k}(X)_0$ 都满足 $|[y]| < |[x]|$，那么 $(t_i, [x])$ 是一个层点。

引理 2。所有分支点都是层点，因此存在偏序集嵌入

$$\mathrm{Br}_k(X) \subseteq L_k(X) \subset \Gamma_k(X).$$

证明。假设分支点 $(t, [x])$ 满足条件 1)：存在一个$s_0 < t$，使得对所有 $s_0 \leq s < t$，都存在不同的点 $(s, [x_0])$ 和 $(s, [x_1])$，满足 $(s, [x_i]) \leq (t, [x])$。

如果 $(s, [z]) \leq (t, [x])$，那么 $[z]$ 是 $L_{s,\ k}(X)$ 的多个路径分支之一，这些路径分支映射到 $L_{t,\ k}(X)$ 中的 $[x]_t$。所有这些连通分支都是 $[x]_t$ 的真子集。 □

回顾一下，$L_{0,\ s}(X)$ 是 Vietoris-Rips复形 $V_s(X)$，而 X 的元素是 Vietoris-Rips复形 $V_s(X)$ 的顶点。所有复形$V_s(X)$ 都具有相同的顶点，即集合 X。

引理 3。 $\Gamma_0(X)$ 的每个层点都是分支点，因此 $\mathrm{Br}_0(X) = L_0(X)$。

证明。 $V_s(X)$ 和 $V_t(X)$ 的顶点底层集合相同。因此，若 $(t, [x])$ 是 $\Gamma_0(X)$ 和 $s < t$ 的层点，则 $V_s(X)$ 中映射到 $V_t(X)$ 中 $[x]$ 的连通分支集合 $[y]$ 非空，并且满足 $\sqcup\ [y]_s = [x]_t$。这样的加项 $[y]_s$ 有多个，因为 $(t, [x])$ 是一个层点，所以所有包含关系 $[y]_s \subset [x]_t$ 都是严格的。特别地，存在不同的元素 $(s, [y])$ 和 $(s, [y'])$，它们都低于 $(t, [x])$。 □

假设 $(s, [x])$ 和 $(t, [y])$ 是图 $\Gamma_k(X)$ 的顶点。在 $\Gamma_k(X)$ 中，存在唯一的最小顶点 $(u, [z])$，它是 $(s, [x])$ 和 $(t, [y])$ 的上界。数 u 是最小的参数（必然是一个相变数），使得在 $\pi_0 L_{u\text{中},\ ,\ k}(X)$，因此 $[z]_u = [x]_u = [y]_u$。在这种情况下，记作

$$(s, [x]) \cup (t, [y]) = (u, [z]).$$

顶点 $(u, [z])$ 是 $(s, [x])$ 和 $(t, [y])$ 的最小上界（或并）。

每个由点 $(s_1, [x_1])$ .. 、$(s_p, [x_p])$ 组成的有限集都有一个最小上界

$$(s_1, [x_1]) \cup \cdots \cup (s_p, [x_p])$$

在树 $\Gamma_k(X)$中。

根据 [1] ，我们知道两个分支点的最小上界是一个分支点；对于层点，也有类似的结果：

引理 4. 层点$(s, [x])$和$(t, [y])$的最小上界$(u, [z])$是一个层点。

证明. 如果存在一个数 v 使得 $s, t < v < u$，那么$(v, [x])$和$(v, [y])$是不同的，因为$(u, [z])$是一个最小上界。这意味着$L_{v,\ k}(X)$有不同的路径连通分支 $[w]$ ，它们映射到 $[z]$ 中的$\pi_0 L_{u,\ k}(X)$。由此可知，$(u, [z])$是一个分支点，因此根据引理 2，它是一个层点。

否则， $s = u$ 或 $t = u$，在这种情况下，$(u, [z]) = (s, [x])$或$(u, [z]) = (t, [y])$。无论哪种情况，$(u, [z])$都是一个层点。 □

引理 4 意味着，每一族层点 $(s_1, [x_1]) \ldots, (s_p, [x_p])$ 都有一个最小上界

$$(s_1, [x_1]) \cup \cdots \cup (s_p, [x_p])$$

在 $\mathrm{L}_k(X)$ 中。 $L_k(X)$ 的极大（或终端）元素是 $L_k(X)$ 中所有元素的最小上界。

由引理 4 以及关于[1] 的分支点的相应结果可知，偏序集之间的包含关系

$$\mathrm{Br}_k(X) \subseteq \mathrm{L}_k(X) \subset \Gamma_k(X)$$

保留最小上界。

引理 5。 $\Gamma_k(X)$ 的每个顶点 $(s, [x])$ 都有唯一的最大层点 $(t, [y])$，使得 $(t, [y]) \leq (s, [x])$。在这种情况下， $[y]_t = [x]_s$。

证明。存在最小的相变数 t ，使得存在关系 $(t, [y]) \leq (s, [x])$，其中 $[y]_t = [x]_s$。由相变数 t 的最小性可知，相应的点 $(t, [y])$ 是一个层点。

点 $(t, [y])$ 也是 $(s, [x])$ 下方所有层点的一个上界，因为 $[y]_t = [x]_s$：若 $(u, [z])$ 是 $(s, [x])$ 下方的一个层点，则 $z \in [y]_t$ 且 $u \leq t$，否则 $(u, [z])$ 就不是层点。 □

引理 5 的第一个陈述也是引理 4 的一个推论：取 $(s, [x])$ 下方所有层点的最小上界。

引理 6. 偏序集包含 $\mathrm{L}_k(X) \subset \Gamma_k(X)$ 有一个逆映射

$$\max : \Gamma_k(X) \to L_k(X),$$

在同伦意义下，并且 $\mathrm{L}_k(X)$ 是 $\Gamma_k(X)$ 的强形变收缩。

证明。根据引理 5， $\Gamma_k(X)$ 的每个顶点 $(s,[x])$ 都有唯一的极大层点 $(s_0,[x_0])$，使得 $(s_0,[x_0]) \leq (s,[x])$。令

$$\max(s,[x]) = (s_0,[x_0]).$$

极大性条件意味着函数 max 保持序。复合 $\max\cdot\alpha$ 在 $\mathrm{L}_k(X)$ 上是恒等映射，而关系 $(s_0,[x_0]) \leq (s,x)$ 定义了一个同伦 $\alpha\cdot\max \leq 1$，它在 $\mathrm{L}_k(X)$ 上限制为恒等映射。□

注 7. 引理 5 的 [1] 表明，每个 $(s,[x])$ 都有唯一的极大分支点 $(s_1,[x_1])$，使得 $(s_1,[x]_1) \leq (s,[x])$。根据引理 2，分支点 $(s_1,[x_1])$ 是一个层点，因此存在如下关系。

$$(s_1,[x_1]) \leq (s_0,[x_0]) \leq (s,[x]),$$

这些关系在 $\Gamma_k(X)$ 中的点 $(s,[x])$ 上是自然的。

由此可知，偏序集嵌入

$$\mathrm{Br}_k(X) \subseteq \mathrm{L}_k(X) \subset \Gamma_k(X)$$

定义了强形变收缩，并且相应的收缩同伦彼此相容。

回顾引理 3，$\mathrm{Br}_0(X) = \mathrm{L}_0(X)$，因此对于 Vietoris-Rips复形，讨论会简化。

2 稳定性

度数里普斯复形稳定性的一般设置如下：假设给定有限度量空间 $X \subset Y$，其中由 X 和 Y 中的 $k+1$ 个不同元素组成的集合 X^k_{dis} 和 Y^k_{dis} 所对应空间之间的豪斯多夫距离满足 $d_H(X^k_{dis}, Y^k_{dis}) < r$，其中 r 是一个固定的非零正实数。

在这些假设下，度数 Rips 稳定性定理（[2] 的定理 4）指出，存在同伦交换图

$$\begin{array}{ccc} L_{s,k}(X) & \xrightarrow{\sigma} & L_{s+2r,k}(X) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \overset{\theta}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle i} \\ L_{s,k}(Y) & \xrightarrow[\sigma]{} & L_{s+2r,k}(Y) \end{array} \tag{3}$$

应用路径连通分支函子 π_0 得到交换图

$$\begin{array}{ccc} \pi_0 L_{s,k}(X) & \xrightarrow{\sigma} & \pi_0 L_{s+2r,k}(X) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \overset{\theta}{\nearrow} & \downarrow{\scriptstyle i} \\ \pi_0 L_{s,k}(Y) & \xrightarrow[\sigma]{} & \pi_0 L_{s+2r,k}(Y) \end{array} \tag{4}$$

并且诱导出一个层次结构的交换图

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_k(X) & \xrightarrow{\sigma} & \Gamma_k(X) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow_{\theta} & \downarrow{\scriptstyle i} \\ \Gamma_k(Y) & \xrightarrow[\sigma]{} & \Gamma_k(Y) \end{array} \tag{5}$$

这里,

$$\begin{aligned} &i((s,[x])) = (s,[i(x)]),\\ &\sigma((s,[x])) = (s+2r,[\sigma(x)]),\ \text{and}\\ &\theta((s,[y]) = (s+2r,[\theta(y)]). \end{aligned}$$

将 $i_*: \mathrm{L}_k(X) \to \mathrm{L}_k(Y)$ 记作复合偏序集态射

$$\mathrm{Ł}_k(X) \subset \Gamma_k(X) \xrightarrow{i_*} \Gamma_k(Y) \xrightarrow{\max} \mathrm{Ł}_k(Y)$$

此映射将层点 $(s,[x])$ 映射到 $(s,[i(x)])$ 下方的极大层点。

偏序集态射 $\theta_*: \mathrm{L}_k(Y) \to \mathrm{L}_k(X)$ 和 $\sigma_*: \mathrm{L}_k(X) \to \mathrm{L}_k(X)$ 分别类似地由偏序集态射 $\theta: \Gamma_k(Y) \to \Gamma_k(X)$ 和移位态射 $\sigma: \Gamma_k(X) \to \Gamma_k(X)$ 定义。

1）考虑偏序集映射

$$\mathrm{Ł}_k(X) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Ł}_k(Y) \xrightarrow{\theta_*} \mathrm{Ł}_k(X).$$

如果 $(s,[x])$ 是 X 的层点，则选择分别位于相应对象下方的极大层点 $(s_0,[x_0]) \le (s,[i(x)]), (s_1,[x_1]) \le (s_0+2r,[\theta(x_0)])$ 和 $(v,[y]) \le (s+2r,[x])$。

于是 $\theta_* i_*(s,[x]) = (s_1,[x_1])$，并且存在一个自然关系

$$\theta_* i_*(s,[x]) = (s_1,[x_1]) \le (v,[y]) = \sigma_*(s,[x])$$

通过极大性论证。由此我们得到偏序集映射的一个同伦

$$\theta_* i_* \le \sigma_* : \mathrm{Ł}_k(X) \to \mathrm{Ł}_k(X). \tag{6}$$

2) 类似地，如果 $(t,[y])$ 是 Y 的层点，那么

$$i_* \theta_*(t,[y]) \le \sigma_*(t,[y]),$$

从而给出一个同伦

$$i_* \theta_* \le \sigma_* : \mathrm{Ł}_k(Y) \to \mathrm{Ł}_k(Y). \tag{7}$$

存在一些关系

$$(s,[x]) \le \sigma_*(s,[x]) \le (s+2r,[x]) \tag{8}$$

对于分支点 $(s,[x])$。因此，偏序集映射 $\sigma_*: \mathrm{L}_k(X) \to \mathrm{L}_k(X)$ 与 $\mathrm{L}_k(X)$ 上的恒等映射同伦。

偏序集映射 i_*、θ_* 和 σ_* 的构造，连同关系 (6) 和 (7)，完成了以下结果的构造/证明:

定理 8. 假设 $X \subset Y$ 是有限度量空间的一个包含，且 $d_H(X^k_{dis}, Y^k_{dis}) < r$。那么存在一个同伦交换图

$$\begin{array}{ccc} L_k(X) & \xrightarrow{\sigma_*} & L_k(X) \\ {\scriptstyle i_*}\downarrow & \nearrow_{\theta_*} & \downarrow{\scriptstyle i_*} \\ L_k(Y) & \xrightarrow[\sigma_*]{} & L_k(Y) \end{array} \tag{9}$$

分别关联空间 X 和 Y 的层偏序集 $\mathrm{L}_k(X)$ 和 $\mathrm{L}_k(Y)$。

注 9. 元素 $\sigma_*(s,[x]) = (t,[x])$ 与 $(s,[x])$ 接近，其含义是存在一些关系

$$(s,[x]) \le (t,[x]) \le (s+2r,[x])$$

使得 $0 \le t-s \le 2r$。因此，层点 $(s,[x])$ 和 $\theta_* i_*(s,[x])$ 有一个公共上界，即 $\sigma_*(s,[x])$，它与 $(s,[x])$ 接近。

如果 $(t,[y])$ 是 $\Gamma_k(Y)$ 的一个层点，那么层点 $\sigma_*(t,[y]) \le (t+2r,[y])$ 同样是 $(t,[y])$ 和 $i_*\theta_*(t,[y])$ 的一个上界，并且与 $(t,[y])$ 接近。

由所有形如（$s,[x]$）的层点（其中 s 变化）构成的 $\mathrm{L}_k(X)$ 子对象有一个显然的距离概念：点（$s,[x]$）与（$t,[x]$）之间的距离是 $|t-s|$。

设

$$0 < t_1 < \cdots < t_k$$

是系统 $L_{s,\ k}(X)$ 的相变数。

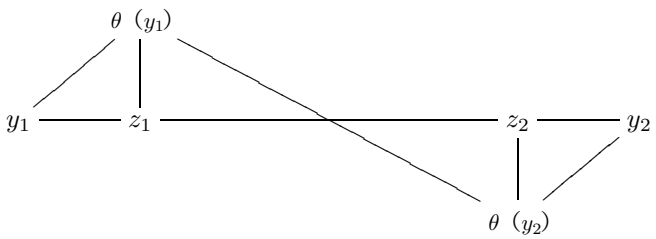
假设 $d_H(X^k_{dis}, Y^k_{dis}) < r$，则函数

$$\pi_0 L_{s,k}(X) \to \pi_0 L_{s,k}(Y)$$

在 $s \ge r$ 时是满射。

引理 10. 设 $y_1, y_2 \in Y$ 有元素 $\theta(y_1)$ $\theta(y_2) \in X$，使得 $d(y_i, \theta(y_i)) < r$。那么 $d(y_1, y_2)$ 属于区间（$t-2r, t+2r$），其中 $t = d(\theta(y_1)\ \theta(y_2))$.

证明。我们假设 $t-2r > 0$。考虑这幅图



假设 v 是直线（z_1, z_2）和（θ（y_1） θ（y_2））的交点。那么

$$d(\theta(y_1), \theta(y_2)) \geq d(z_1, z_2) = d(z_1, v) + d(v, z_2) \geq d(y_1, y_2) - 2r.$$

$d(\theta(y_1)\ \theta(y_2)) < d(y_1, y_2) + 2r$ 这一断言可直接由三角不等式得出。

□

推论 11。所有关于 Y 的相变数 s 都位于 X 的相变数 t 附近的区间 $(t-2r, t+2r)$ 内。

存在一个由数 t 组成的有限集，使得 $(t, [x])$ 是 $\Gamma_k(X)$ 的层点。称这些数 t 为 X 的层参数。每个层参数都是一个相变数。

注意，对于 $s \leq t$，包含关系 $\sigma : L_{s,\ k}(X) \subseteq L_{t,\ k}(X)$ 可推出包含关系$[x]_s \subset [x]_t$，对 $L_{s,\ k}(X)$ 的所有顶点 x 均成立。

回想引理 5 的证明，低于 $(s, [x])$ 的极大层点可通过寻找最小的相变数 t 来构造，使得存在一个关系 $(t, [u]) \leq (s, [x])$，满足 $[u]_t = [x]_s$ 是 X 的子集。

引理 12. 假设 $s < t$，且在 $\Gamma_k(X)$ 中不存在形如 $(u, [x])$ 的层点，其中 $s < u \leq t$。那么诱导函数

$$\sigma_* : \pi_0 L_{s,k}(X) \to \pi_0 L_{t,k}(X)$$

是双射。

证明. 我们可以假设 $L_{t,k}(X) \neq \emptyset$，否则 $L_{s,k}(X) = L_{t,k}(X) = \emptyset$。

假设 $(t, [x]) \in \Gamma_k(X)$，且 $(u, [y])$ 是一个极大层点，其中 $(u, [y]) \leq (t, [x])$。那么 $u \leq s$，并且关系 $(u, [y]) \leq (s, [y]) \leq (t, [x])$ 蕴含 $[y]_s = [x]_t$。特别地，函数 σ_* 是满射。

若 $[y_1], [y_s] \in \pi_0 L_{s,k}(X)$ 的像相同，即 $[x] \in \pi_0 L_{t,k}(X)$，则 $[y_1]_s = [x]_t = [y_2]_s$ 是 X 的子集，因此 $[y_1] = [y_2]$ 属于 $\pi_0 L_{s,k}(X)$，所以 σ_* 是单射。

□

给定 X 的层参数 t，将满足 $t < t_+$ 的 X 的最小层参数记为 t_+，将满足 $t_- < t$ 的 X 的最大层参数记为 t_-。

引理 13. 设 t 是 X 的层参数，且满足 $r < t < t_+ - 2r$。那么函数 $i : \pi_0 L_{t,\ k}(X) \to \pi_0 L_{t,\ k}(Y)$ 是一个双射。

证明。图表

$$\begin{array}{ccc} \pi_0 L_{t,k}(X) & \xrightarrow{\cong} & \pi_0 L_{t+2r,k}(X) \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow_{\theta} & \\ \pi_0 L_{t,k}(Y) & & \end{array}$$

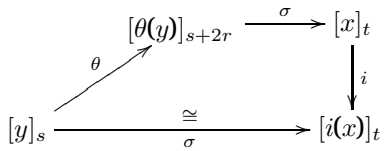
可交换，且所显示的函数根据引理 12 是一个双射，因此函数 i 是单射。i 的满射性由假设 $t > r$ 得出。

□

引理 14。假设 $(t,[x])$ 是 $\Gamma_k(X)$ 的一个层点，且满足 $r<t<t_+-2r$；再假设 $(s,[y])$ 是 $\Gamma_k(Y)$ 中位于 $(t,[i(x)])$ 之下的一个极大层点。那么 $t-2r\le s\le t$。

证明。假设 $s<t-2r$。

根据引理 13，映射 $i_*:\pi_0L_{t,\ k}(X)\to\pi_0L_{t,\ k}(Y)$ 是一个双射，并且 $i_*([x])=i_*([\theta(y)])=[i(x)]$ 在 $\pi_0L_{t,\ k}(Y)$ 中。因此，存在一个由函数构成的交换图



其中映射 $i:\ [x]_t\to[i(x)]_t$ 是单态射，因为它是一个顶点单态射的子对象。

函数 i 和 $\sigma\cdot\theta$ 是双射，因此 $\sigma:\ [\theta(y)]_{s+2r}\to[x]_{t_j}$ 是满态射。函数 σ 也是单态射，因为它是顶点单态射 $L_{s+2r,\ k}(X)_0\to L_{t,\ k}(X)_0$ 的子对象。

由此可知，函数 $\sigma:\ [\theta(y)]_{s+2r}\to[x]_t$ 是一个双射，因此 $(t,[x])$ 不是层点。□

推论 15. 设 $(t,[x])$ 是 $\Gamma_k(X)$ 的一个层点，且满足 $r<t<t_+-2r$。那么我们有

$$\theta_*i_*(t,[x])=(t,[x]).$$

证明. 设 $(s,[z])$ 是 $\Gamma_k(Y)$ 中低于 $(t,[i(x)])$ 的一个极大层点。那么根据引理 14，$t-2r\le s\le t$，因此 $t\le s+2r\le t+2r<t_+$。

层点 $(t,[x])$ 是低于 $(t+2r,[x])$ 的一个极大层点，因为$t+2r<t_+$，因此 $[x]_t=[x]_{t+2r}$。层点 $\theta_*(s,[z])$ 是低于 $(s+2r,[\theta(z)])$ 的极大层点，并且关系

$$(s+2r,[\theta(z)])\le(t+2r,[x])$$

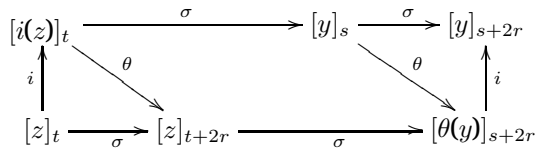
这意味着 $\theta(z)\in[x]_{t+2r}=[x]_{s+2r}$，因此 $x\in[\theta(z)]_{s+2r}$。由此可知，$(s+2r,[\theta(z)])$ 下方的极大层点也必定是 $(t+2r,[x])$ 下方的极大层点，即 $(t,[x])$。□

引理16. 假设 $(s,[y])$ 是 $\Gamma_k(Y)$ 的一个层点，且 $s<s_+-2r$。再假设 $(t,[z])$ 是 $(s+2r,[\theta(y)])$ 下方的一个极大层点。那么 $s\le t\le s+2r$。

证明. 假设 $t<s$。

映射 $\sigma:\pi_0L_{s,k}(Y)\to\pi_0L_{s+2r,k}(Y)$ 是一个双射，因为根据假设和引理 12，$\Gamma_k(Y)$ 在区间 $(s,s+2r]$ 中没有层参数。由此可知，映射 $\theta:\pi_0L_{s,k}(Y)\to\pi_0L_{s+2r}(X)$ 是一个单态射。

那么 $\theta([y]) = \theta([i(z)]$ 意味着 $[y]_s = [i(z)]_s$，因此图表



交换成立。

右侧三角形的交换性意味着 $\theta : [y]_s \to [\theta(y)]_{s+2r}$ 是单态射。

函数 $\sigma : [z]_t \to [\theta(y)]_{s+2r}$ 是双射，因此 $\theta : [y]_s \to [\theta(y)]_{s+2r}$ 是双射。

复合

$$[z]_t \xrightarrow{i} [i(z)]_t \xrightarrow{\sigma} [y]_s$$

一个双射，因此 $\sigma : [i(z)]_t \to [y]_s$ 是一个双射，由此可知 $(s, [y])$ 不是层点。 □

对态射的分析

$$\theta_* : V(Y) = Ł_0(Y) \to Ł_0(X) = V(X)$$

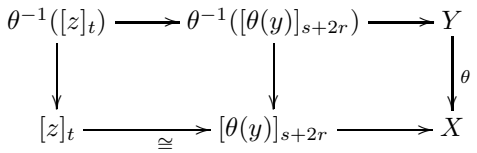
对于 Vietoris-Rips复形，这种分析更为精细，因为所有复形 $V_s(Y)$ 都有相同的顶点集合，即 Y。在这种情况下，我们有引理16的一个更强版本，其论证方式截然不同。

引理 17. 假设 $(s, [y])$ 是 $\Gamma_0(Y)$ 的一个层点，并且 $(t, [z])$ 是 $\Gamma_0(X)$ 中位于 $(s + 2r, [\theta(y)])$ 下方的一个极大层点。那么 $s \leq t \leq s + 2r$。

证明. 集合 $[z]_t$ 和 $[\theta(y)]_{s+2r}$ 具有相同的基数，因此 $\theta(y) \in [z]_t$。

考虑映射到 $[z]_t = [\theta(y)]_t$ （属于 $\pi_0 V_t(X)$）的元素集合 $[u] \in \pi_0 V_{t-2r}(Y)$。那么 $\theta^{-1}([z]_t) = \sqcup [u]$ 是顶点 Y （属于$V_{t-2r}(Y)$）的一个子集，并且对于某个 $[u]$, $y \in [u]$。所有这类连通分支 $[u]$ 都映射到 $V_t(X)$ 中的同一路径连通分支 $[y]_t$。

在图表中



两个方块都是拉回，因此函数

$$\theta^{-1}([z]_t) \to \theta^{-1}([\theta(y)]_{s+2r}$$

是一个双射。

假设 $t < s$。那么

$$\theta^{-1}([z]_t) = \sqcup\, [u] \subset [y]_t \subset [y]_s \subset \theta^{-1}([\theta(y)]_{s+2r})$$

作为 Y 的子集时，$\theta^{-1}([z]_t) = \theta^{-1}([\theta(y)]_{s+2r})$。

由此可得 $[y]_t = [y]_s$，因此 $(s, [y])$ 不是层点。 □

引理 17 和引理 14 共同对 $\Gamma_0(Y)$ 的层点施加了相当严格的约束，这些约束与 $\Gamma_0(X)$ 的层点有关。回顾一下，比较$\Gamma_0(X) \to \Gamma_0(Y)$ 是通过将路径连通分支函子应用于比较 $V_*(X) \to V_*(Y)$ 得到的。在这种情况下，$d_H(X, Y) = r$ 是豪斯多夫距离的界，由此得到交错图 (3)、(4) 和 (5)。

重述引理 17：假设 $(s, [y])$ 是 $\Gamma_0(Y)$ 的一个层点，并且 $(t, [x])$ 是低于 $(s+2r, [\theta(y)])$ 的极大层点。那么 $s \leq t \leq s + 2r$。

由此特别可知，$\Gamma_0(Y)$ 的所有层点都位于与 $\Gamma_0(X)$ 的层点 $(t, [x])$ 对应的区间 $[t - 2r, t]$ 中。

参考文献

[1] J.F. Jardine. 分支点与稳定性. 预印本，arXiv: 2003:06285[math.AT], 2020.

[2] J.F. Jardine. 持久同伦论. 预印本，arXiv: 2002:10013[math.AT], 2020.[3] J.F. Jardine. 稳定连通分支与层. 《加拿大数学通报》，63(3):562– 576, 2020.