arXiv:2303.07118v1 [physics.atom-ph] 13 Mar 2023

任意相干布居囚禁脉冲序列下的拉姆齐干涉

Ruihuan Fang,[1,2,3] Chengyin Han,[3] Bo Lu,[3] Jiahao Huang,[1,3,*] 和 Chaohong Lee[3,†]

[1] *Guangdong Provincial Key Laboratory of Quantum Metrology and Sensing& School of Physics and Astronomy, Sun Yat-Sen University (Zhuhai Campus), Zhuhai 519082, China*

[2] *State Key Laboratory of Optoelectronic Materials and Technologies,Sun Yat-Sen University (Guangzhou Campus), Guangzhou 510275, China*[3] *College of Physics and Optoelectronic Engineering, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China*（日期：2023年3月14日）

相干布居囚禁（CPT）是一种多能级量子相干现象，在原子钟和磁力计领域具有广阔的应用前景。尤其是，多脉冲CPT-拉姆齐干涉是提升CPT原子钟性能的有力工具。关于多脉冲CPT-拉姆齐干涉的大多数研究都考虑周期性脉冲序列和时间无关失谐。然而，为进一步提升准确度和精度，可以通过采用时变失谐或相移的脉冲序列来改变谱对称性。本文从理论上分析了时变失谐下任意脉冲序列对应的多脉冲CPT-拉姆齐干涉，并推导出一个通用解析公式。利用该公式，我们分析了常见的CPT-拉姆齐干涉方案，例如双脉冲对称与反对称光谱，以及多脉冲对称与反对称光谱。此外，我们还定量研究了周期性脉冲条件下脉冲宽度、脉冲周期、脉冲数和拉比频率的影响。我们的理论结果可为实验设计提供指导，通过多脉冲CPT-拉姆齐干涉提升原子钟的性能。

I. 引言

相干布居囚禁（CPT）是指原子被囚禁在一种不与外部激光场相互作用的相干态中的现象。自首次观测到CPT谱以来 [1], ，它已广泛应用于量子工程和量子传感的各种领域，例如全光操控 [2–7], 原子冷却 [8], 原子钟 [9–12], 以及原子磁力计 [13–16]。传统的CPT光谱技术存在一个缺点：强CPT光功率会导致功率展宽。采用两个CPT 脉冲进行CPT-拉姆齐干涉测量，可以缩窄谱线宽并提高信噪比（SNR） [10, 17, 18]。在这种情况下，随着两个脉冲之间的暗时间间隔增大，CPT-拉姆齐谱的线宽会变窄 [10, 18]。随着对更高测量精度和准确度的需求不断增长，各种技术不断涌现，以改善谱的信噪比和分辨率，并减轻光频移。

近年来，多脉冲CPT-拉姆齐干涉测量已得到发展 [19–22]。多脉冲干涉能够缩窄谱线宽度，同时使中心峰得以识别。理解多脉冲CPT-拉姆齐干涉测量的机制，有助于设计适用于频率测量的CPT脉冲序列。一些典型的多脉冲CPT-拉姆齐方案可以通过解析方法进行分析。例如，对于周期和持续时间均相同的多个脉冲，可以解释基于对CPT脉冲序列进行傅里叶分析的简单模型，可以解释多脉冲CPT-拉姆齐干涉 [6, 21]。傅里叶分析引入了一个特征数 N_s ，因为当脉冲数较大时，谱将达到稳态 N [6]。另一种解析处理方法是将多脉冲CPT-拉姆齐干涉测量与法布里-珀罗谐振腔进行比较；这种方法适用于从周期性CPT脉冲序列 [22] 到任意与时间无关的CPT脉冲序列 [23]。

然而，为了进一步提升性能，可能需要随时间调制脉冲失谐或相移。例如，自动平衡技术利用暗时间内的失谐变化来改变谱的对称性，从而实现实时的时钟伺服。频移和相位跳变已被用于改变谱的垂直对称性，并作为自动平衡 CPT [24–26]中的附加变量。此外，对于量子锁相放大器 [27], ，甚至可以利用交变磁场与 CPT脉冲序列之间的混频。交变磁场也可能引起交变失谐。频率或相位调制已应用于实验中的 CPT 方案，并成为一种潜在技术。因此，对时变失谐和任意脉冲相位条件下的多脉冲 CPT-拉姆齐干涉测量进行解析分析，具有重要意义和广泛应用。

本文研究采用任意CPT脉冲序列的多脉冲CPT-拉姆齐干涉。特别是，当单光子失谐和拉比频率相对于激发态的衰减率较小时，我们推导出一个解析公式，用于分析各种CPT-拉姆齐干涉情形，例如常规CPT-拉姆齐干涉、具有频移

* hjiahao@mail2.sysu.edu.cn; eqjiahao@gmail.com

† chleecn@szu.edu.cn

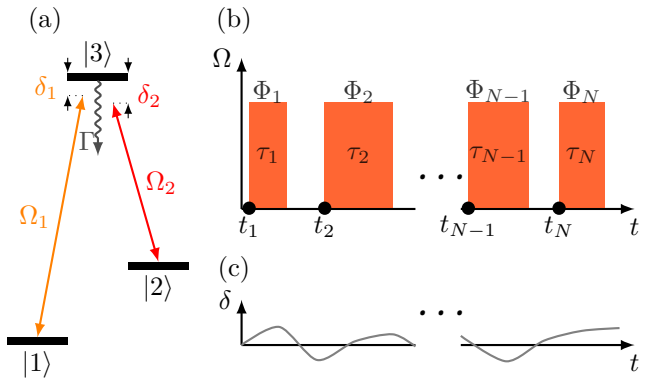


图 1. 三**能级** Λ 系统及相干布居俘获的时序。(a) 拉比频率为 Ω_1 和 Ω_2 的双色光将两个基态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 耦合到激发态 $|3\rangle$。δ_1 和 δ_2 分别是相对于 $|3\rangle$的 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 的频率失谐。激发态 $|3\rangle$ 的衰减率为 Γ。(b) 橙色脉冲为拉比频率为 Ω 的 CPT 脉冲。τ_i 为脉冲长度，t_i 为起始时刻，Φ_i 为第 i 个 CPT 脉冲的相位。(c) δ 随时间 t的变化。δ 可以随时间随机变化。

或相位跳变的CPT-拉姆齐干涉、多脉冲CPT-拉姆齐干涉，以及具有频移的多脉冲CPT-拉姆齐干涉。对于周期性CPT脉冲序列 [20]，我们可以解析地研究脉冲长度、脉冲强度、脉冲间隔和脉冲数对谱线宽度的影响。我们推导出的公式是一种适用于任意CPT脉冲序列下大多数情形的通用解。

II. 三能级 Λ 系统中的相干布居俘获

A. 模型

如图 1 所示，相干布居俘获通常可以在三能级 Λ结构中实现。拉比频率为 Ω_1 和 Ω_2 的双色场将两个基态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 耦合到激发态 $|3\rangle$。其中，δ_1 和 δ_2 为相应的失谐，Γ为激发态 $|3\rangle$的衰减率。在旋转波近似下，相互作用绘景中的哈密顿量为 [28]

$$\begin{aligned}\hat{H}_I =&\hbar\left(\delta_1|1\rangle\langle 1| + \delta_2|2\rangle\langle 2|\right)\\ &+\hbar\left(\frac{\Omega_1}{2}|1\rangle\langle 3| + \frac{\Omega_2}{2}|2\rangle\langle 3| + h.c.\right).\end{aligned} \tag{1}$$

根据林德布拉德方程，密度矩阵 ρ 的时间演化满足

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\hat{H}_I, \rho\right] + \frac{\Gamma}{2}\sum_{j=1}^{2}\left[\hat{L}_j\rho\hat{L}_j^\dagger - \frac{1}{2}\{\hat{L}_j^\dagger\hat{L}_j, \rho\}\right]. \tag{2}$$

这里，$\hat{L}_j = |j\rangle\langle 3|$ 及其厄米共轭$\hat{L}_j^\dagger$ 是林德布拉德算符。在大多数情况下，单色光的拉比频率相等，即 $|\Omega_1| = |\Omega_2| = \Omega$。因此，拉比频率可表示为$\Omega_1 = \Omega e^{i\phi_1}$ 和$\Omega_2 = \Omega e^{i\phi_2}$，其中 ϕ_1 和 ϕ_2 是单色光的相位。在这种情况下，式（2）可写为：

$$\begin{cases}
\frac{d}{dt}\rho_{11} = \frac{\Gamma}{2}\rho_{33} - \mathrm{i}\left(\frac{\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_1}}{2}\rho_{13}^* - \frac{\Omega e^{\mathrm{i}\phi_1}}{2}\rho_{13}\right)\\
\frac{d}{dt}\rho_{12} = -\mathrm{i}\frac{\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_1}}{2}\rho_{23}^* + \mathrm{i}\frac{\Omega e^{\mathrm{i}\phi_2}}{2}\rho_{13} - \mathrm{i}\left(\delta_1 - \delta_2\right)\rho_{12}\\
\frac{d}{dt}\rho_{13} = -\frac{\Gamma}{2}\rho_{13} + \mathrm{i}\frac{\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_1}}{2}\rho_{11} - \mathrm{i}\frac{\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_1}}{2}\rho_{33}\\
\qquad + \mathrm{i}\frac{\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_2}}{2}\rho_{12} - \mathrm{i}\delta_1\rho_{13}\\
\frac{d}{dt}\rho_{12}^* = \mathrm{i}\frac{\Omega e^{\mathrm{i}\phi_1}}{2}\rho_{23} - \mathrm{i}\frac{\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_2}}{2}\rho_{13}^* + \mathrm{i}\left(\delta_1 - \delta_2\right)\rho_{12}^*\\
\frac{d}{dt}\rho_{22} = \frac{\Gamma}{2}\rho_{33} - \mathrm{i}\left(\frac{\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_2}}{2}\rho_{23}^* - \frac{\Omega e^{\mathrm{i}\phi_2}}{2}\rho_{23}\right)\\
\frac{d}{dt}\rho_{23} = -\frac{\Gamma}{2}\rho_{23} + \frac{\mathrm{i}\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_1}}{2}\rho_{12}^* + \frac{\mathrm{i}\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_2}}{2}\rho_{22}\\
\qquad - \frac{\mathrm{i}\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_2}}{2}\rho_{33} - \mathrm{i}\delta_2\rho_{23}\\
\frac{d}{dt}\rho_{13}^* = -\frac{\Gamma}{2}\rho_{13}^* - \mathrm{i}\frac{\Omega e^{\mathrm{i}\phi_1}}{2}\rho_{11} + \mathrm{i}\frac{\Omega e^{\mathrm{i}\phi_1}}{2}\rho_{33}\\
\qquad - \mathrm{i}\frac{\Omega e^{\mathrm{i}\phi_2}}{2}\rho_{12}^* + \mathrm{i}\delta_1\rho_{13}^*\\
\frac{d}{dt}\rho_{23}^* = -\frac{\Gamma}{2}\rho_{23}^* - \frac{\mathrm{i}\Omega e^{\mathrm{i}\phi_1}}{2}\rho_{12} - \frac{\mathrm{i}\Omega e^{\mathrm{i}\phi_2}}{2}\rho_{22}\\
\qquad + \frac{\mathrm{i}\Omega e^{\mathrm{i}\phi_2}}{2}\rho_{33} + \mathrm{i}\delta_2\rho_{23}^*\\
\frac{d}{dt}\rho_{33} = -\Gamma\rho_{33} + \frac{\mathrm{i}\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_1}}{2}\rho_{13}^* - \frac{\mathrm{i}\Omega e^{\mathrm{i}\phi_1}}{2}\rho_{13}\\
\qquad + \frac{\mathrm{i}\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_2}}{2}\rho_{23}^* - \frac{\mathrm{i}\Omega e^{\mathrm{i}\phi_2}}{2}\rho_{23},
\end{cases} \tag{3}$$

其中 $\rho_{ij} = \langle i|\rho|j\rangle$。接下来，我们解析求解这些方程。

B. 基态相干性的解析公式

在拉比频率远小于衰减率 $\Omega \ll \Gamma$ 的条件下，可以得到 $\frac{d}{dt}\rho_{33} \ll \Gamma\rho_{33}$，进而可得

$$\rho_{33} = \frac{1}{\Gamma}\left(\frac{\mathrm{i}\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_1}}{2}\rho_{13}^* - \frac{\mathrm{i}\Omega e^{\mathrm{i}\phi_1}}{2}\rho_{13} + \frac{\mathrm{i}\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_2}}{2}\rho_{23}^* - \frac{\mathrm{i}\Omega e^{\mathrm{i}\phi_2}}{2}\rho_{23}\right). \tag{4}$$

通常，相干布居俘获在近共振情形下工作$\delta_{1,\ 2} \ll \Gamma$。由于激发态的衰减率较大，可以忽略激发态中的布居（与基态布居相比），即 $\rho_{33} \ll \rho_{11}$ 且 $\rho_{33} \ll \rho_{22}$。因此可得

$$\rho_{13} = \frac{1}{\Gamma}\left(\mathrm{i}\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_1}\rho_{11} + \mathrm{i}\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_2}\rho_{12}\right), \tag{5}$$

$$\rho_{23} = \frac{1}{\Gamma}\left(\mathrm{i}\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_1}\rho_{12}^* + \mathrm{i}\Omega e^{-\mathrm{i}\phi_2}\rho_{22}\right), \tag{6}$$

$$\rho_{13}^* = \frac{1}{\Gamma}\left(-\mathrm{i}\Omega e^{\mathrm{i}\phi_1}\rho_{11} - \mathrm{i}\Omega e^{\mathrm{i}\phi_2}\rho_{12}^*\right), \tag{7}$$

$$\rho_{23}^* = \frac{1}{\Gamma}\left(-\mathrm{i}\Omega e^{\mathrm{i}\phi_1}\rho_{12} - \mathrm{i}\Omega e^{\mathrm{i}\phi_2}\rho_{22}\right). \tag{8}$$

在相干布居俘获过程中，布居主要处于 $\rho_{11} + \rho_{22} \approx 1$所对应的基态中。将式 (5)–(8) 代入

式 (3) 和 (4)，可得

$$\rho_{33} = \frac{\Omega^2}{\Gamma^2}\left(1 + 2\Re(\rho_{12}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(t)})\right), \tag{9}$$

and

$$\frac{d}{dt}\rho_{12} = -\frac{\Omega^2}{2\Gamma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t)} - \left(\frac{\Omega^2}{\Gamma} + \mathrm{i}\delta\right)\rho_{12}. \tag{10}$$

这里，$\delta = \delta_1 - \delta_2$ 是双光子失谐，$\phi(t) = \phi_1 - \phi_2$ 是单色光的相位。对于一列CPT 脉冲，可以对方程（10）进行解析求解。

我们可以构造方程（10）对发生在 t_0 处的冲击脉冲的响应，即格林函数 [29]

$$G(t, t_0) = H(t - t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\Omega^2(u)}{\Gamma} + \mathrm{i}\delta(u)\right)du\right), \tag{11}$$

其中，$H(x)$ 是赫维赛德函数。若密度矩阵初始为混合态 $\rho = |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|$，取初始值 $\rho_{12}(0) = 0$，则有

$$\rho_{12}(t, \Omega) = -\int_0^t \frac{\Omega^2(t')}{2\Gamma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi(t')}G(t, t')dt' \tag{12}$$

它是 $\delta(t)$ 和 $\Omega(t)$ 的函数。我们结合一般CPT脉冲序列分析方程（12），如图 1(b,c) 所示。橙色脉冲表示拉比频率为 Ω、脉冲持续时间可变的 CPT 脉冲 τ_i，其相位为 Φ_i。灰色实线表示时变失谐 $\delta(t)$。因此，方程（12）可表示为

$$\begin{aligned}\rho_{12}(t, \Omega) = &-\frac{\Omega^2}{2\Gamma}\sum_{l=1}^{N}\left(\prod_{k=l+1}^{N}\exp\left(-\frac{\Omega^2}{\Gamma}\tau_k\right)\right)\\ &\times\exp\left(-\int_{t_l+\tau_l}^{t}\mathrm{i}\delta(u)du\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi_l}\\ &\times\int_{t_l}^{t_l+\tau_l}\exp\left(-\int_{t'}^{t_l+\tau_l}\left(\frac{\Omega^2}{\Gamma} + \mathrm{i}\delta(u)\right)du\right)dt'.\end{aligned} \tag{13}$$

这是基态相干性的通用公式。式（13）可用于描述大多数脉冲序列情形，包括在频率失谐和相位固定或随时间变化时的双脉冲 CPT-拉姆齐干涉测量及多脉冲 CPT-拉姆齐干涉。然而，在式（5）至式（8）的推导中未考虑单光子失谐δ_1 和 δ_2，这意味着未计入激发态引起的光频移的影响。

根据公式（9），如果每个 CPT 脉冲的相位相同，相位值不会影响观测量 ρ_{33}。这是因为，如果我们选择不含非对角项的初始混合态，就可以将拉比频率的全局相位规范变换到态中，而不改变密度矩阵。这意味着，只要为 $|1\rangle$ and $|2\rangle$ 选择适当的初始相位，拉比频率的模就可以为实数。通常，我们将相位规范变换为将最后一个 CPT 脉冲 Φ_N 的相位设为零，从而消去公式（9）中的相位，因此

$$\rho_{33} = \frac{\Omega^2}{\Gamma^2}\left(1 + 2\Re\left(\rho_{12}\right)\right). \tag{14}$$

如果 CPT 脉冲的相位恒定，则所有相位都可以通过规范变换设为零。

如果失谐 $\delta(t)$ 在 CPT 脉冲期间固定为 δ，并在暗期内随时间 t 变化，则式（13）可写为

$$\rho_{12} = f(\delta)\, Q, \tag{15}$$

其中

$$f(\delta) = -\frac{\Omega^2}{2\Gamma\left(\frac{\Omega^2}{\Gamma} + \mathrm{i}\delta\right)}, \tag{16}$$

是慢变包络，Q 是多脉冲CPT-拉姆齐干涉项，

$$\begin{aligned}Q = \sum_{l=1}^{N}\left(\prod_{k=l+1}^{N}\mathrm{e}^{-\frac{\Omega^2}{\Gamma}\tau_k}\right)\exp\left(-\int_{t_l+\tau_l}^{t}\mathrm{i}\delta(u)du\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Phi_l}\\ \times\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{\Omega^2}{\Gamma} + \mathrm{i}\delta\right)\tau_l\right)\right).\end{aligned} \tag{17}$$

III. CPT-拉姆齐光谱中的应用

我们的解析公式 Eq. (13) 可应用于各种实验中的 CPT-拉姆齐情形。下面展示其在常规双脉冲 CPT-拉姆齐光谱、带频移的反对称双脉冲 CPT-拉姆齐光谱以及多脉冲 CPT-拉姆齐光谱中的应用。

A. 双脉冲序列

在大多数情况下，CPT-拉姆齐干涉测量采用双脉冲实现，如图 2 (a) 所示。在这一方案中，CPT脉冲序列包含一个持续时间为 τ_1 的制备脉冲和一个持续时间为 τ_2 的探测脉冲，两者之间间隔着一段暗时间为 T [30] 的自由演化。利用脉冲数为 $N = 2$ 时的 Eq. (13)，我们可以轻松得到相应的解析结果，作为基准示例。我们的解析结果还可用于按需优化 CPT脉冲序列。

1. *Conventional Two-pulse CPT-Ramsey Spectroscopy*

考虑一种简单情况，即失谐不随时间变化且相位为零。于是，

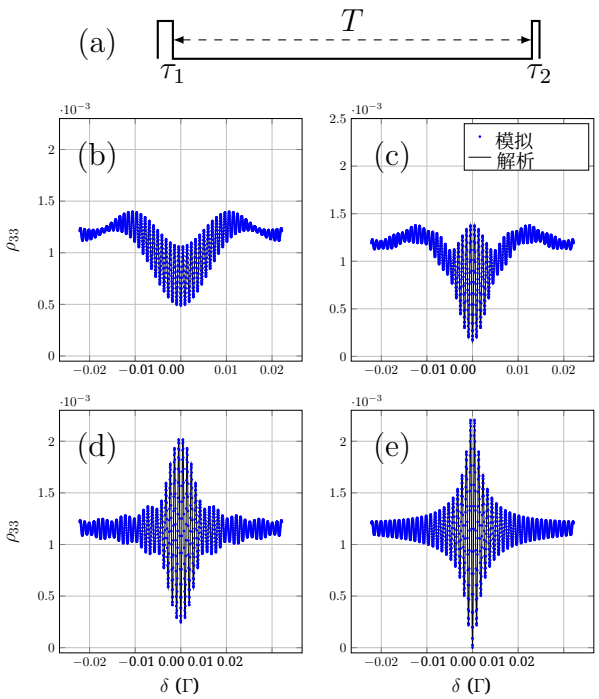


图 2. **双脉冲 CPT-拉姆齐谱**。(a) 传统 CPT-拉姆齐的时序包括制备脉冲 τ_1、探测脉冲 τ_2 和暗时间 T。拉比频率为 $\Omega = 0.035\Gamma$。模拟（蓝色圆点）和解析（黑色实线）得到的 CPT-拉姆齐谱采用暗时间 $T = 1000 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$，以及以下脉冲序列：(b) $\tau_1 = 60 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 和 $\tau_2 = 60 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$，(c) $\tau_1 = 200 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 和 $\tau_2 = 60 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$，(d) $\tau_1 = 200 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 和 $\tau_2 = 10 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$，(e) $\tau_1 = 1000 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 和 $\tau_2 = 10 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$。

式（13）可简化为

$$\rho_{12}(t,\delta,\Omega) = -\frac{\Omega^2}{2\Gamma\left(\frac{\Omega^2}{\Gamma}+\mathrm{i}\delta\right)}\sum_{l=1}^{N}\left(\prod_{k=l+1}^{N}\exp\left(-\frac{\Omega^2}{\Gamma}\tau_k\right)\right) \times \exp\left(-\mathrm{i}\delta\left(t-t_l-\tau_l\right)\right) \times\left(1-\exp\left(-\left(\frac{\Omega^2}{\Gamma}+\mathrm{i}\delta\right)\tau_l\right)\right). \tag{18}$$

对于双脉冲CPT-拉姆齐干涉测量，CPT-拉姆齐干涉项为

$$Q = Q_1^T + Q_2^T, \tag{19}$$

其中

$$Q_1^T = \exp\left(-\frac{\Omega^2}{\Gamma}\tau_2\right)\left(1-\exp\left(-\left(\frac{\Omega^2}{\Gamma}+\mathrm{i}\delta\right)\tau_1\right)\right) \times \exp\left(-\mathrm{i}\delta\left(T+\tau_2\right)\right),$$

and

$$Q_2^T = \left(1-\exp\left(-\left(\frac{\Omega^2}{\Gamma}+\mathrm{i}\delta\right)\tau_2\right)\right).$$

传统的 CPT-拉姆齐条纹主要由式（19）中的 Q_1^T 主导。它随制备脉冲持续时间 τ_1 的增加而增强，随探测脉冲持续时间 τ_2的增加而减弱。式（19）中的 Q_2^T 随探测脉冲 τ_2 的增加而增大，这会带来缓慢变化的趋势，从而导致垂直不对称性 [30]。

作为基准示例，我们考察由持续时间为 τ_1 的制备脉冲、持续时间为 τ_2 的探测脉冲以及脉冲间隔 $T = 1000 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 组成的传统 CPT-拉姆齐脉冲序列，如图 2 (a) 所示。CPT 脉冲的拉比频率为 $\Omega = 0.035\Gamma$。当探测脉冲持续时间为$\tau_2 = 60 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 时，若制备脉冲持续时间较短，即$\tau_1 = 60 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$，CPT-拉姆齐谱的对比度较低，如图 2 (b) 所示。黑色实线为式（19）的解析结果，蓝点为林德布拉德方程的数值结果。随着制备脉冲持续时间 τ_1 增加至 $\tau_1 = 200 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$，式（19）的 Q_1^T 增大，从而提高 CPT-拉姆齐条纹的对比度，见图 2 (c)。同时，将探测脉冲持续时间缩短至 $\tau_2 = 10 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$，可进一步提高 CPT-拉姆齐条纹的对比度，并使谱呈现垂直对称，如图 2 (d) 所示。当制备脉冲持续时间 $\tau_1 = 1000 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 足够长时，谱将达到饱和，见图 2 (e)。由于 Q_1^T在频域中的周期为 $\frac{2\pi}{T+\tau_2}$，CPT-拉姆齐谱的线宽满足 $\Delta\nu = \frac{1}{2(T+\tau_2)}$。因此，具有较长暗时间 T 的 CPT-拉姆齐方案能够缩窄谱线宽，这与我们的常识一致。这些结果表明，我们的解析公式适用于传统的双脉冲 CPT-拉姆齐情形。

2. *Anti-symmetric Two-pulse CPT-Ramsey Spectroscopy with Frequency shift*

通常，我们需要以不同频率进行两次 CPT-拉姆齐干涉测量，并比较它们的差值，以获得用于时钟锁定的反对称误差信号 [20]。为实现实时反对称谱，我们可以在暗时间 T 内直接施加频移 $\Delta\delta$，或者基于传统的 CPT-拉姆齐干涉测量改变探测脉冲的相位$\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$，如图3 (a)所示。这里，$\Phi_1$ 和 Φ_2 分别为制备脉冲和探测脉冲的相位。根据式 (13)，双脉冲 CPT-拉姆齐干涉项变为

$$Q = Q_1^{T\prime} + Q_2^T, \tag{20}$$

其中

$$Q_1^{T\prime} = Q_1^T \exp\left(-\mathrm{i}\Delta\delta\Delta t + \mathrm{i}\Delta\Phi\right). \tag{21}$$

例如，我们设定 $\tau_1 = 1000 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$、$\tau_2 = 10 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 和 $T = 1000 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$。当两个相位相等，即 $\Phi_1 = \Phi_2$ 和 $\Delta\Phi = 0$时，便退化为

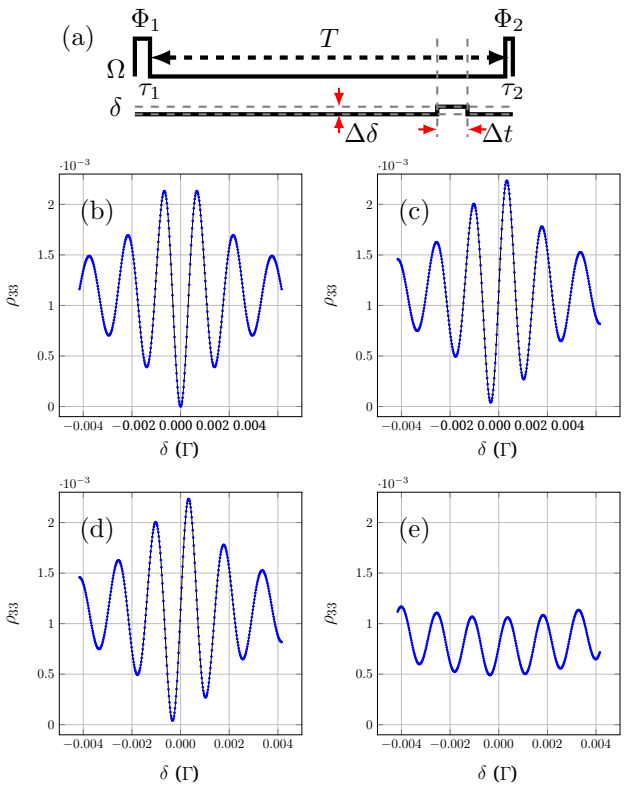


图3. **存在频移和相移的双脉冲CPT-拉姆齐干涉**。(a) 两脉冲CPT-拉姆齐序列中拉比频率 Ω 和失谐 δ 的时序，其中时间为 $T = 600 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$。拉比频率的振幅为 0.035Γ， τ_1 和 τ_2 分别为制备和探测时长， $\Delta\delta$ 和 $\Delta t = 100 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 分别为频移的大小和持续时间。 Φ_1和 Φ_2 分别为制备脉冲和探测脉冲的相位。数值模拟（蓝色圆点）与解析公式（黑色实线）得到的CPT-拉姆齐光谱，其中$\tau_1 = 1000 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$、 $\tau_2 = 10 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$，以及(b)零频移 $\Delta\delta = 0$ 和 $\Phi_1 = \Phi_2$; (c)频移 $\Delta\delta = \frac{\pi/2}{\Delta t}$ 和 $\Phi_1 = \Phi_2$; (d)零频移 $\Delta\delta = 0$、 $\Phi_1 = 0$和$\Phi_2 = -\frac{\pi}{2}$。(e) 数值模拟（蓝色圆点）与解析公式（黑色实线）得到的CPT-拉姆齐光谱，其中 $\tau_1 = 60 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$、 $\tau_2 = 60 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$，以及零频移$\Delta\delta = 0$、 $\Phi_1 = 0$ 和 $\Phi_2 = -\frac{\pi}{2}$。

图3(b)所示的传统CPT-拉姆齐干涉测量。当频移和相移满足$\Delta\delta\Delta t - \Delta\Phi = \frac{\pi}{2}$时，谱会变为水平反对称，如图3(c)和(d)所示。此时即可实现误差信号的实时处理。在自动平衡CPT-拉姆齐干涉中， [25]，可将$\Delta\Phi$或 $\Delta\delta$ 用作补偿光频移的附加参数。然而，如果 $\tau_1 = 60 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 较短且 $\tau_2 = 60 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 较大，那么误差信号将不会呈水平反对称，因为与 Q_1^T相比， Q_2^T 不可忽略。这意味着，如果探测脉冲持续时间与制备脉冲持续时间相当，谱将变得水平非对称

度量，如图3（e）所示。黑色实线表示式（20）的解析结果，蓝色圆点表示相应的数值结果。所有结果都完全吻合。

B. 多脉冲序列

在第III A节中，我们使用解析公式分析了常规双脉冲CPT-拉姆齐谱和频移双脉冲CPT-拉姆齐谱。本节将分析多脉冲CPT-拉姆齐干涉。采用多脉冲序列时，由于相长干涉，中心峰变得明显，而相邻峰则通过相消干涉受到抑制。多脉冲CPT-拉姆齐干涉使中心峰更容易识别，并提高了信噪比（SNR）。因此，多脉冲序列有助于开发实用的量子传感器，例如原子钟。然而，在实际应用中，多脉冲CPT-拉姆齐干涉涉及多个需要精细调节的脉冲。我们的解析公式提供了一种简单的方法，可根据需要分析和优化脉冲序列。我们考虑多脉冲CPT-拉姆齐干涉从一个制备脉冲 τ_1 开始，用于制备暗态，随后施加 N 个脉冲，每个脉冲的持续时间为 τ，脉冲间隔为 T，如图4（a）所示。下面，我们将利用解析公式分析制备脉冲和周期性脉冲序列的作用，并给出一个实现具有频移的反对称谱的示例。

1. *The influence of preparation pulse*

我们假设所有 CPT 脉冲的相位都相同，因此可以将相位设为零。根据式（10），干涉项

$$Q = Q_1^M + Q_2^M, \tag{22}$$

包含两部分，

$$Q_1^M = \exp\left(-\frac{\Omega^2}{\Gamma}N\tau\right)\exp\left(-\mathrm{i}\delta N\left(T+\tau\right)\right) \times\left(1-\exp\left(-\left(\frac{\Omega^2}{\Gamma}+\mathrm{i}\delta\right)\tau_1\right)\right),$$

and

$$Q_2^M = \sum_{i=1}^{N}\exp\left(-\frac{\Omega^2}{\Gamma}(N-i)\tau\right)\exp\left(-\mathrm{i}\delta(N-i)\left(T+\tau\right)\right) \times\left(1-\exp\left(-\left(\frac{\Omega^2}{\Gamma}+\mathrm{i}\delta\right)\tau\right)\right).$$

Q_1^M是随 δ变化的快速振荡项。显然，制备脉冲持续时间 τ_1 只影响 Q_1^M，并且Q_1^M随 τ_1增大。因此，

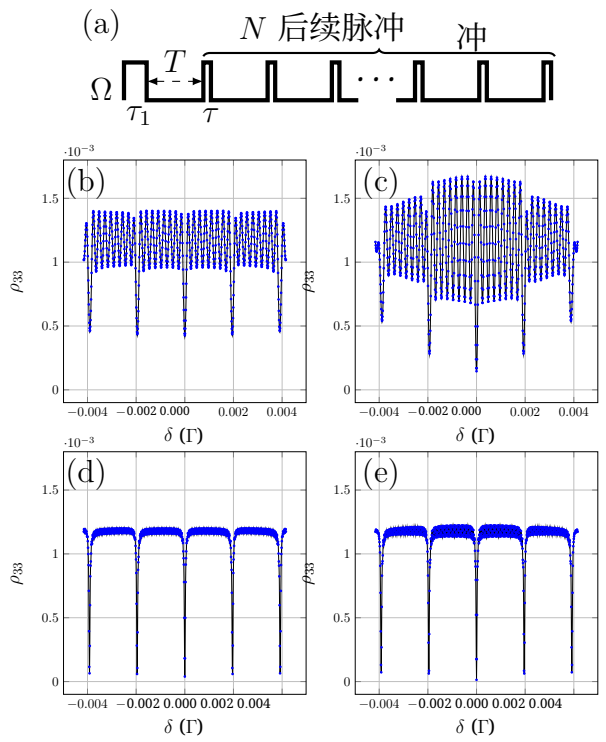


图4. **多脉冲CPT-拉姆齐干涉**。(a) 多脉冲CPT-拉姆齐时序中的拉比频率Ω时序。这里，τ_1 为制备脉冲，$T = 500 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 为暗时间，$\tau = 10 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 为脉冲持续时间，N 为脉冲数。多脉冲CPT-拉姆齐光谱分别对应(b) $\tau_1 = 60 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 和 $N = 8$，(c) $\tau_1 = 200 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 和 $N = 8$，(d) $\tau_1 = 60 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 和 $N = 40$，(e) $\tau_1 = 200 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 和 $N = 40$。

谱随制备脉冲持续时间增加而增强。如图4(b)和(c)所示，制备脉冲持续时间较长$\tau_1 = 200 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 的多脉冲CPT-拉姆齐干涉测量谱，其峰值振幅高于制备脉冲持续时间较短 $\tau_1 = 60 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 时的谱。

然而，后续的 CPT 脉冲也会影响 Q_1^M。后续 CPT 脉冲越多或持续时间越长，Q_1^M就越小。因此，当后续 CPT 脉冲的数量 N 或持续时间 τ较大时，制备脉冲的持续时间 τ_1 对光谱的影响很小。如图4(d)和(e)所示，当脉冲数 N 较大时，制备脉冲对多脉冲CPT-拉姆齐干涉的光谱影响很小。

2. *Periodic pulse sequence*

当脉冲数 N 很大时，可以忽略第一个 CPT 脉冲持续时间的影响。为简单起见，许多实验采用周期性多脉冲序列 [20]。对于间隔为 T、脉冲数为 N、脉冲持续时间为 τ、拉比频率Ω的周期性CPT脉冲序列，根据式（13），我们有

$$\rho_{12}(\delta) = f(\delta) \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{R}^l \exp\left(-\mathrm{i}l\delta T\right) \mathcal{T}. \tag{23}$$

这在时间上类似于光通过法布里-珀罗谐振腔 [23],，其中 $\mathcal{R} \equiv \exp\left(-\frac{\Omega^2}{\Gamma}\tau\right)$起反射系数的作用，而 $\mathcal{T} \equiv 1 - \exp\left(-\left(\frac{\Omega^2}{\Gamma} + \mathrm{i}\delta\right)\tau\right)$则对应于透射系数。利用级数求和，式(23)可简化为

$$\rho_{12}(\delta) = f(\delta)\mathcal{T}S, \tag{24}$$

with

$$S = \frac{1 - R^N \exp(-\mathrm{i}N\delta T)}{1 - R\exp(-\mathrm{i}\delta T)}. \tag{25}$$

对于多脉冲CPT-拉姆齐干涉，$f(\delta)$和$\mathcal{T}$在共振点附近比 S 更平坦。ρ_{12} 的线形主要由 S描述，如图5所示。当脉冲数为 $N \to \infty$时，$\Re\rho_{12}$ 的半高全宽（FWHM）$2\pi\Delta\nu_\infty$ 由反射系数 $\mathcal{R}$ 和脉冲周期 $T_p = T + \tau$决定，其分布为艾里分布 [31],

$$2\pi\Delta\nu_\infty = \frac{4}{T_p} \arcsin\left(\sqrt{\frac{(1-\mathcal{R})^2}{2\left(\mathcal{R}^2+1\right)}}\right). \tag{26}$$

方程（26）在 $\mathcal{R}^N \ll 1$的饱和区内有效。

对于有限脉冲数，无法精确给出方程（24）的半高全宽 [32]。不过，我们可以通过对^1 $\mathrm{Re}(S)$进行泰勒展开，计算洛伦兹线宽，

$$\frac{1}{\mathrm{Re}\,(S)} = F_0 + \frac{1}{2}F_2 T_p^2 \delta^2 + \mathcal{O}\left(T^4\delta^4\right), \tag{27}$$

with

$$F_0 = \frac{1-\mathcal{R}}{1-\mathcal{R}^N}, \tag{28}$$

and

$$F_2 = \frac{\mathcal{R}\left(1+\mathcal{R}\right)}{\left(1-\mathcal{R}\right)\left(1-\mathcal{R}^N\right)} - \frac{N^2\mathcal{R}^N\left(1-\mathcal{R}\right) + 2N\mathcal{R}^{N+1}}{\left(1-\mathcal{R}^N\right)^2}. \tag{29}$$

S 的实部可以近似为洛伦兹形式

$$\mathrm{Re}(S) \approx \widetilde{S} = A\frac{\left(\frac{1}{2}W\right)^2}{\left(\frac{1}{2}W\right)^2 + \delta^2}. \tag{30}$$

其中，$A = \frac{1}{F_0}$ 和 $W = \frac{2\sqrt{2}}{T}\sqrt{\frac{F_0}{F_2}}$ 分别是 S的振幅和半高全宽。代入式 (28) 和式 (29)，可得

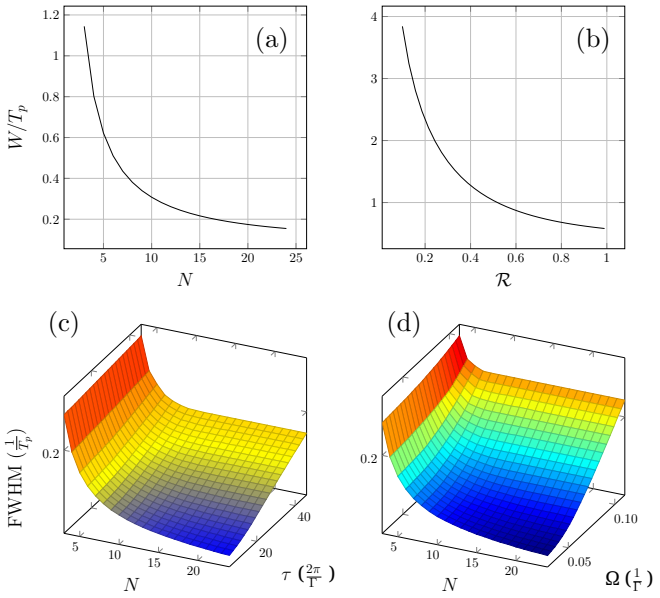


图5. **多脉冲 CPT-拉姆齐谱的线宽**。(a) 线宽 W 随脉冲数 N的变化。(b) 线宽 W 随反射系数 $\mathcal{R}$的变化。(c) 半高全宽的数值结果随脉冲数 N 和脉冲持续时间 τ 的变化，其中拉比频率为 $\Omega = 0.04\Gamma$。(d) 半高全宽的数值结果随脉冲数 N 和拉比频率 Ω 的变化，其中脉冲持续时间为 $\tau = 10 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$。

—

that

$$W = \frac{2}{T_p}\left[\frac{2\left(\mathcal{R}^2+\mathcal{R}\right)}{\left(1-\mathcal{R}\right)^2} - \frac{2N^2\mathcal{R}^N}{1-\mathcal{R}^N} - \frac{4N\mathcal{R}^{N+1}}{\left(1-\mathcal{R}^N\right)\left(1-\mathcal{R}\right)}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{31}$$

图5 (a) 展示了 W 随脉冲数N的变化，其中 W随脉冲数 N增加而减小。直观来看，脉冲数越多，线宽越窄。由于 $\mathcal{R}$ 随 τ 和 Ω 增大而减小，因此较大的 Ω 和 τ 会导致线宽增大。较大的 Ω 和 τ意味着达到饱和所需的脉冲数更少，参与多脉冲干涉的脉冲数也更少，因此线宽会变宽。作为示例，图5 (c) 展示了 $\Omega = 0.04\Gamma$时，半高全宽随脉冲数 N 和脉冲持续时间 τ 的变化。图5 (d) 则展示了$\tau = 10 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 时，半高全宽随脉冲数 N 和拉比频率 Ω 的变化。

—

3. *Anti-symmetric multi-pulse CPT-Ramsey spectroscopy with frequency shift*

如第 III A2 节所述，频率锁定时可以采用反对称谱。在多脉冲CPT-拉姆齐干涉中，如图6(a)所示，在第 k个后续脉冲 [之前，将频率偏移 $\Delta\delta$ 持续 Δt], , 或者引入

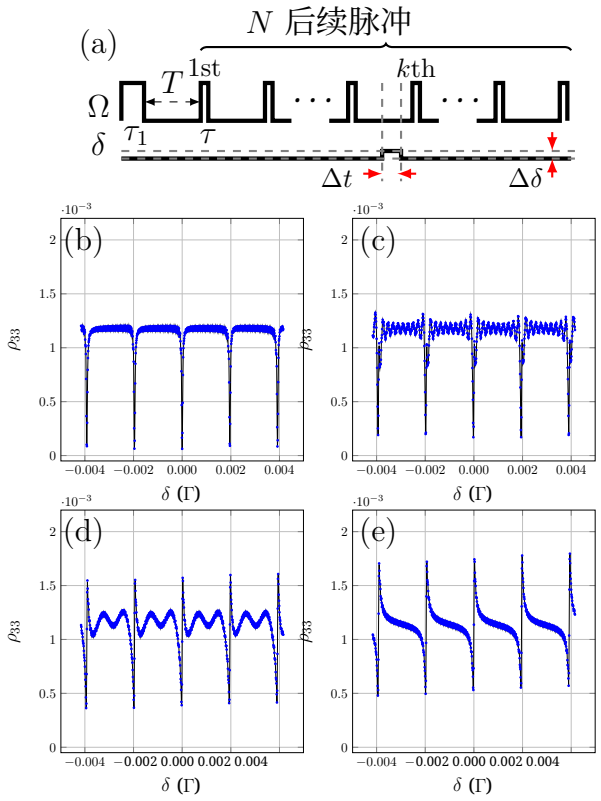


图6. **存在频移时的多脉冲CPT-拉姆齐干涉测量**。(a) Rabi 频率 Ω 的时序：在后续第 k 个脉冲之前立即施加频移。$\tau_1 = 200 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 为制备时间，$T = 500 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 为暗时间，$\tau = 10 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$和 $N = 40$ 分别为所施加周期性脉冲的持续时间和数量。 $\Delta\nu = 0.0025\Gamma$ 和 $\Delta t = 100 \times \frac{2\pi}{\Gamma}$ 分别为频移的幅度和持续时间。存在频移时的多脉冲CPT-拉姆齐谱分别出现在：(b) 制备脉冲 τ_1 之后立即，(c) 最后第10个脉冲之前立即，(d) 倒数第三个脉冲之前立即，(e) 最后一个脉冲之前立即。

相位跳变 $\Delta\Phi$，都可以改变谱的水平对称性，使其呈反对称。然而，如何确定采用频率偏移或相位跳变的脉冲序列仍然颇具挑战。在此，我们使用解析公式来解决这一问题。

在后续第 k 个脉冲之前施加频移和相位跳变后，我们可以将干涉项分为三部分

$$Q = Q_1^{M\prime} + Q_2^{M\prime} + Q_3^{M\prime}, \tag{32}$$

其中

$$Q_1^{M\prime} = \exp\left(-\frac{\Omega^2}{\Gamma}N\tau\right)\left(1-\exp\left(-\left(\frac{\Omega^2}{\Gamma}+\mathrm{i}\delta\right)\tau_1\right)\right) \times \exp\left(-\mathrm{i}\delta N\left(T+\tau\right)\right)\exp\left(-\mathrm{i}\Delta\delta\Delta t+\mathrm{i}\Delta\Phi\right),$$

$$Q_2^{M\prime} = \sum_{i=1}^{k-1} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{\Gamma}(N-i)\tau\right) \times \left(1-\exp\left(-\left(\frac{\Omega^2}{\Gamma}+\mathrm{i}\delta\right)\tau\right)\right) \times \exp\left(-\mathrm{i}\delta(N-i)\left(T+\tau\right)\right)\exp\left(-\mathrm{i}\Delta\delta\Delta t+\mathrm{i}\Delta\Phi\right),$$

and

$$Q_3^{M\prime} = \sum_{i=k}^{N} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{\Gamma}(N-i)\tau\right) \times \left(1-\exp\left(-\left(\frac{\Omega^2}{\Gamma}+\mathrm{i}\delta\right)\tau\right)\right) \times \exp\left(-\mathrm{i}\delta(N-i)\left(T+\tau\right)\right).$$

频移 $\Delta\delta$ 会影响 $Q_1^{M\prime}$和 $Q_2^{M\prime}$的水平对称性，但 $Q_3^{M\prime}$仍保持水平对称。若频移满足 $\Delta\delta\Delta t = \pi/2$，则会使 $Q_1^{M\prime}$和 $Q_2^{M\prime}$在水平方向上由对称变为反对称。为了获得水平反对称的谱，水平对称项 $Q_3^{M\prime}$的贡献应较小。因此，在最后一个脉冲之前立即施加频移，是抑制$Q_3^{M\prime}$的自然选择。在图6 (b)-(e)中，我们分别在制备脉冲 τ_1之后、倒数第10个脉冲之前、倒数第三个脉冲之前以及最后一个脉冲之前，施加了频移 $\Delta\delta\Delta t = \pi/2$ 。制备脉冲为 $\tau_1 = 200\times\frac{2\pi}{\Gamma}$ ，脉冲间隔为 $T = 500\times\frac{2\pi}{\Gamma}$。持续时间为 $\tau = 10\times\frac{2\pi}{\Gamma}$，脉冲数为 $N = 40$。显然，随着频移施加时间的延后，$Q_3^{M\prime}$减小，谱也趋于反对称。因此，我们的解析分析可为设计用于CPT-拉姆齐干涉测量的多脉冲序列提供直接的方法，这将有助于开发自动平衡拉姆齐光谱等高精度方案 [24–26]。

IV. 讨论

总之，我们从林德布拉德方程出发，推导出一个解析公式，用于描述具有任意脉冲序列的多脉冲 CPT-拉姆齐干涉。该解析公式有望用于优化脉冲序列，并分析时变失谐的影响。我们通过常见的 CPT-拉姆齐情形验证了解析结果，并获得了相应的见解。

对于双脉冲CPT-拉姆齐干涉，我们研究了制备脉冲和探测脉冲的影响。我们定量表明，制备脉冲应尽可能长，以获得更大的谱振幅；探测脉冲则应较短，以避免破坏CPT相干性。频移或相位跳变会改变谱对称性。解析结果表明，要获得反对称谱，需要较长的制备脉冲和较短的探测脉冲。对于多脉冲情形，随着后续脉冲数量的增加，制备脉冲的作用变得不那么显著。随着脉冲数量增加，旁峰在干涉作用下不断减弱，从而形成高对比度的中心峰。在最后一个脉冲之前加入频移或相位跳变，可以得到反对称的多脉冲 CPT-拉姆齐谱。我们的理论结果可用于设计新型多脉冲和频率调制 CPT-拉姆齐方案。对于周期性脉冲序列，我们找到了谱的近似洛伦兹线形，并得到了半高全宽与 CPT 脉冲序列参数之间的关系。这定量刻画了多脉冲干涉的作用。

对于多脉冲和频率调制的相干布居俘获拉姆齐干涉，其潜在应用很多，例如CPT钟和CPT磁力计。有效的优化方法有助于提高测量精度。在本研究中，我们消除了单光子失谐，并忽略了光频移的影响。然而，实际系统总是包含许多态，因此从三能级系统推导光频移并无意义。由于我们的解析结果可以描述时变失谐的情况，我们也可以通过将光频移纳入失谐，分析CPT脉冲对当前光频移的影响。这些问题值得进一步研究。

致谢

本研究得到中国国家重点研发计划（项目编号：2022YFA1404104）、中国国家自然科学基金（项目编号：12025509）以及广东省重点领域研发计划（项目编号：2019B030330001）的资助。

[1] G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, Nuov Cim B **36**, 5 (1976). [2] L. J. Rogers, K. D. Jahnke, M. H. Metsch, A. Sipahigil, J. M. Binder, T. Teraji, H. Sumiya, J. Isoya, M. D. Lukin, P. Hemmer, and F. Jelezko, 《物理评论快报》 **113**, 263602（2014）。[3] S. Das、P. Liu、B. Gr´emaud 和 M. Mukherjee, 《物理评论A》**97**, 033838（2018）。[4] K. Xia、R. Kolesov、Y. Wang、P. Siyushev、R. Reuter、T. Kornher、N. Kukharchyk、A. D. Wieck、B. Villa,

S. Yang 和 J. Wrachtrup, 《物理评论快报》**115**, 093602 (2015年)。[5] C. Santori、P. Tamarat、P. Neumann、J. Wrachtrup、D. Fattal、R. G. Beausoleil、J. Rabeau、P. Olivero、A. D. Greentree、S. Prawer、F. Jelezko 和 P. Hemmer, 《物理评论快报》**97**, 247401 (2006年)。[6] P. Jamonneau、G. H´etet、A. Dr´eau、J.-F. Roch 和 V. Jacques, 《物理评论快报》**116**, 043603 (2016年)。[7] K.-K. Ni、S. Ospelkaus、M. H. G. de Miranda、A. Pe'er、B. Neyenhuis、J. J. Zirbel、S. Kotochigova、P. S. Julienne、D. S. Jin 和 J. Ye, 《科学》**322**, 231 (2008年)。[8] A. Aspect、E. Arimondo、R. Kaiser、N. Vansteenkiste 和 C. Cohen-Tannoudji, 《物理评论快报》**61**, 826 (1988年)。[9] J. Vanier, 《应用物理B》**81**, 421 (2005年)。[10] M. Merimaa、T. Lindvall、I. Tittonen 和 E. Ikonen, 《美国光学学会杂志B》**20**, 273 (2003年)。[11] P. Yun、F. Tricot、C. E. Calosso、S. Micalizio、B. Fran¸c¸cois、R. Boudot、S. Gu´erandel 和 E. de Clercq, 《物理评论应用》**7**, 014018 (2017年)。[12] X. Liu、E. Ivanov、V. I. Yudin、J. Kitching 和 E. A. Donley, 《物理评论应用》**8**, 054001 (2017年)。[13] M. O. Scully 和 M. Fleischhauer, 《物理评论快报》**69**, 1360 1992( )。[14] A. Nagel、L. Graf、A. Naumov、E. Mariotti、V. Bian- calana、D. Meschede 和 R. Wynands, 《欧洲物理快报》**44**, 31 (1998年)。[15] P. D. D. Schwindt、S. Knappe、V. Shah、L. Hollberg、J. Kitching、L.-A. Liew 和 J. Moreland, 《应用物理快报》**85**, 6409 (2004年)。[16] R. Tripathi 和 G. S. Pati, 《IEEE光子学期刊》**11**, 1 2019( )。[17] T. Zanon、S. Guerandel、E. de Clercq、D. Holleville、N. Dimarcq 和 A. Clairon, 《物理评论快报》**94**, 193002 (2005年)。[18] J. Vanier、M. W. Levine、D. Janssen 和 M. Delaney, 《物理评论A》**67**，065801（2003年）。[19] S. Guerandel、T. Zanon、N. Castagna、F. Dahes、E. de Clercq、N. Dimarcq 和 A. Clairon, IEEE 仪器与测量汇刊**56**，383（2007）。[20] P. Yun、Y. Zhang、G. Liu、W. Deng、L. You 和 S. Gu，**97**，63004，16 次引用（Crossref） [2023-02-27]。[21] Z. Warren、M. S. Shahriar、R. Tripathi 和 G. S. Pati, 《应用物理学杂志》**123**，053101（2018）。[22] L. Nicolas、T. Delord、P. Jamonneau、R. Coto、J. Maze、V. Jacques 和 G. H´etet, 《新物理学杂志》**20**，033007（2018）。[23] R. Fang、C. Han、X. Jiang、Y. Qiu、Y. Guo、M. Zhao、J. Huang、B. Lu 和 C. Lee, 《npj量子信息》**7**，1（2021）。[24] M. Abdel Hafiz、G. Coget、M. Petersen、C. Rocher、S. Gu´erandel、T. Zanon-Willette、E. de Clercq 和 R. Boudot, 《物理评论应用》**9**，064002（2018）。[25] M. Abdel Hafiz、G. Coget、M. Petersen、C. E. Calosso、S. Gu´erandel、E. de Clercq 和 R. Boudot, 《应用物理快报》**112**，244102（2018）。[26] V. I. Yudin、A. V. Taichenachev、M. Yu. Basalaev、T. Zanon-Willette、J. W. Pollock、M. Shuker、E. A. Don-ley 和 J. Kitching, 《物理评论应用》**9**，054034（2018）。[27] S. Kotler、N. Akerman、Y. Glickman、A. Keselman 和 R. Ozeri, 《自然》**473**，61（2011）。[28] M. Shahriar、Y. Wang、S. Krishnamurthy、Y. Tu、G. Pati 和 S. Tseng, 《现代光学杂志》**61**，351（2014）。[29] M. N. Berberan-Santos, 《数学化学杂志》**48**，175（2010）。[30] T. Zanon-Willette、S. Gu´erandel、E. de Clercq、D. Holleville、N. Dimarcq 和 A. Clairon, 《物理评论快报》**94**，193002（2005年）。[31] N. Ismail、C. C. Kores、D. Geskus 和 M. Pollnau, 《光学快报》**24**，16366（2016年）。[32] S. Pissadakis，南安普顿大学（2000年）。