arXiv:2303.07210v1 [cs.CG] 13 Mar 2023

# 使用局部分隔符的多层骨架化

**J. Andreas Bærentzen** ！

丹麦丹麦技术大学应用数学与计算机科学系

**RasmusEmil Christensen**丹麦丹麦技术大学应用数学与计算机科学系

**Emil Toftegaard Gæde** ！

丹麦丹麦技术大学应用数学与计算机科学系

**Eva Rotenberg** ！

应用数学与计算机科学系 ，丹麦技术大学，丹麦 丹麦

**摘要**

本文提出了一种基于局部分隔符计算曲线骨架的新型高效算法。该算法的高效性源于一种多层方法：我们在不同细节层级上求解小规模问题，并将结果结合起来，从而快速获得骨架。我们采用高度模块化的方式实现这一方法，确保能够灵活地针对特定类型的输入调整算法，或以其他方式面向特定应用。

基于分隔符的骨架化最初由 Bærentzen 和 Rotenberg 在 [ACM Tran. Graphics'21], 中提出，展示了高质量的输出，但运行时间对于大型输入而言过长，难以接受。我们的新方法保留了高质量输出，并且适用于任何空间嵌入图，同时在所有实际应用中都快了几个数量级。

我们在实践中测试了骨架化算法的效率和质量，并将其与格罗宁根大学骨架化基准测试 [Telea' 16] 上的局部分隔器骨架化进行比较。

**2012 年 ACM 学科分类** 计算方法 → 计算机图形学；计算理论 → 计算几何；软件及其工程 → 软件设计工程

**关键词与短语** 算法工程、实验与实现、形状骨架化、曲线骨架、多层算法

**资助** *Emil Toftegaard Gæde* 和 *Eva Rotenberg*：获 Eva Rotenberg 的嘉士伯基金会青年研究员奖学金 CF21-0302 资助——"具有几何应用的图算法"。

*J. Andreas Bærentzen*：部分经费由 Villum基金会通过 Villum研究员项目 InnoTop 提供支持。

## 1 引言

曲线骨架是形状的一种紧凑简化表示，仅由曲线构成。在此语境中，骨架化是指为给定输入计算此类曲线骨架。本文余下部分中，骨架 专指曲线骨架。包括特征提取、可视化和医学影像在内的多个领域，关注的不仅是形状和物体，也包括它们的结构和特征。在形状匹配等应用中，骨架作为物体的简化表示，可降低计算成本 [8], ；而在虚拟导航中，曲线骨架可用作无碰撞导航结构 [24, 30]。

广泛的应用领域以及骨架所发挥的不同作用，导致人们对骨架究竟是什么有着不同的理解。尽管尚未形成广泛认同的骨架定义，但已有研究致力于归纳一般情况下骨架应具备的理想属性 [11]。

我们不采用形式化定义，而是以一种形象但不够精确的定义为基础开展工作：骨架是对底层结构和

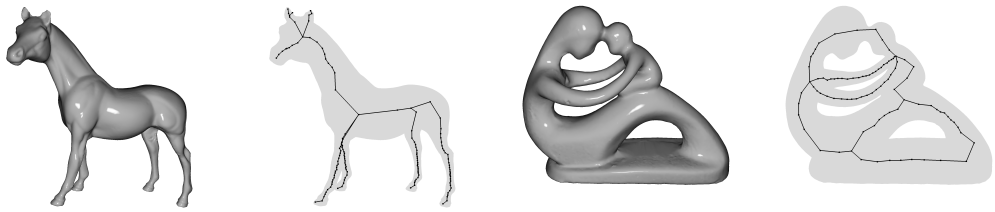


**图 1** 由我们的算法生成的三角网格及其骨架的着色渲染图。

拓扑的简化曲线表示。图 1 展示了各种输入的骨架，以说明我们的定义。

骨架化有许多不同的方法 [27], ，例如计算并修剪中轴面 [12], 、计算平均曲率流 [26] 或收缩网格 [20]。在一篇近期论文中，A. Bærentzen 和 E. Rotenberg 提出了一种基于计算局部分隔符 [5]的新算法。我们将这种算法称为局部分隔器骨架化算法$LSS$。这种方法的优点是，只要求输入以空间嵌入图的形式给出，而不要求采用特定的形状表示。因此，该方法适用于各种输入，例如网格、体素网格，甚至是不一定表示某种形状的输入。此外，它生成的骨架质量很高，能够捕捉到收缩方法往往会遗漏的特征。然而，该算法的计算开销也很大。

本文介绍一种用于计算曲线骨架的多层算法，该算法通过将 LSS 改造为多层框架而得到。下文首先介绍一些预备知识，然后概述我们的贡献。接着，在讨论相关工作的基础上，我们将介绍图粗化、将分隔符投影到更细层级图上的方法，以及基于这些组件构建的多层骨架化算法。我们在文中分析了这些算法，并在骨架化基准测试中检验了我们的方法。结果表明，与 Bærentzen 和 Rotenberg 提出的方法相比，我们的算法速度提高了几个数量级，同时生成的骨架质量相当。

## 1.1 预备知识

我们研究离散骨架化问题，其中输入和输出都表示为空间嵌入的无向图。形式上，我们考虑对图 $G = (V, E)$ 进行骨架化，其中每个顶点都关联一个几何位置 $p_{v \in V} \in \mathbb{R}^3$。请注意，我们不对图作其他任何假设，例如它是否从流形的表面采样而来、由点云生成，或以其他方式构建。

在图论中，顶点分隔集 是一个顶点集合，移除该集合后会使图断开连接。在 [5], 这里，这一概念扩展为局部分隔符，其定义为一个顶点子集$S \subset V$，它是由$S$的闭邻域诱导的子图的顶点分隔集。同样，极小局部分隔器被定义为局部分隔符，且它是由闭邻域诱导的子图的极小顶点分隔集。直观地说，从极小局部分隔器中移除一个顶点后，剩余集合便不再是局部分隔符。本文其余部分中，分隔符 一词均指局部分隔符。

## 1.2 贡献

LSS 算法通过三个阶段来计算骨架。首先计算大量极小局部分隔符，再使用贪心打包方法选出极小分隔符，最后从打包后的极小分隔符集合中提取骨架。这些阶段的可视化见图 2。

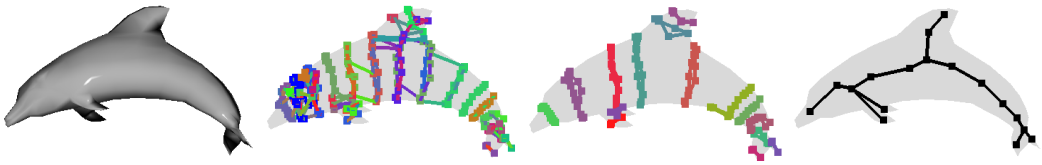


**图 2** LSS 算法三个阶段的可视化。从左至右：输入的阴影渲染图、若干计算得到的极小分隔符、这些分隔符中一个互不重叠的子集，以及提取后得到的骨架。

由于前两个阶段的算法在我们的算法中发挥着内在作用，我们对其作简要介绍。

局部分隔符的计算分为两个步骤。首先，使用区域生长方法寻找局部分隔符。选取一个顶点，然后迭代地将一个相邻顶点加入分隔符，并检查邻域是否断开。我们将此过程称为生长分隔符。找到局部分隔符后，通过移除不会破坏该分隔符的顶点，以启发式方法将其极小化。我们将此过程称为收缩分隔符。

由于 LSS 的运行时间通常主要耗费在搜索局部分隔符上，因此使用采样方案来减少计算。根据该方案，选择顶点进行分隔符计算的概率为 $2^{-x}$，其中 $x$ 是此前计算得到的、包含该顶点的分隔符数量。

遗憾的是，采样只解决了需要计算的分隔符数量问题，却没有解决计算每个分隔符所需的时间问题。本文采用多层方法来解决后一个问题。具体而言，我们在图的较粗层级上寻找分隔符，再将其投影回原始图。重要的是，这使我们能够为从给定顶点寻找分隔符所需的计算量设置耐心阈值 。超过阈值后，我们便停止搜索，并依靠在较粗层级上找到一个包含该顶点的分隔符。

## 1.3 相关工作

就计算曲线骨架而言，骨架化是一个多元化的领域，不仅对骨架的理解各不相同，算法方法也多种多样。已有若干种基于算法内在特征的算法分类方法 [11, 27], 。

将曲线骨架视为应位于中轴面上的理解，催生了一类方法；从某种意义上说，这类方法从输入的中轴面中提取曲线骨架 [12,29, 19, 25, 32]。由于中轴面对噪声高度敏感，这些方法生成的骨架也同样如此。

一类对噪声具有鲁棒性的算法是收缩方法，其依据的理念是不断缩小输入的体积和表面积，直至找到骨架 [31, 4, 26]。在最简单的形式下，这些算法要求输入为流形，但也可以扩展到其他类型的输入 [10, 17]。

形状分析中一个相关的概念是Reeb图 [7, 6]。它们可用于骨架化，从而形成一类由拓扑驱动的算法 [22, 23, 13]。生成的骨架取决于一个参数，因此可以灵活地针对输出的特定属性进行调整，但也需要格外谨慎地选择该参数。

此外，还有一些算法属于本文未介绍的分类 [20, 14, 2]。针对图划分这一NP完全问题，一种非常成功的启发式方法是多层算法 [9]。虽然所考虑的问题有所不同，但我们采用类似的多层方案，大幅提升实际性能。这类多层方案已得到广泛研究 [15, 21, 1]。

## 2 多层框架

从最广义上讲，多层框架是一种启发式方法，旨在通过求解一个规模更小的问题来获得原问题的解。

首先，生成一系列对输入逐步简化的近似问题。我们称之为粗化 阶段，并将这一系列简化后的问题称为层级。由于最后一层规模较小，求解速度会快得多。在图划分文献中，这被称为划分 阶段；不过，我们将其视为求解一个受限问题。随后，通过反粗化，将最后一层上得到的解转换为输入问题的解。这个过程有时也称为投影与细化，因为从某一层反粗化到前一层时，通常先将解投影到前一层，再通过某种细化过程，根据启发式方法改进解。

多层框架在设计上具有很高的灵活性。可以采用各种粗化方案，在简化输入时优先保留不同的属性。受限问题可以通过任何合理的方法求解，细化策略也可以根据具体应用进行调整。

我们的算法首先将输入粗化为若干个分辨率逐渐降低的层级。第 2.1 节介绍了这种粗化的细节。生成图层次结构后，我们会在每个分辨率层级上受限搜索局部分隔符。相关细节见第 2.2 节，其基本思路是：在实践中，搜索较大的局部分隔符速度很慢，而限制搜索范围可以减少计算。不过，由于找到的分隔符较小，这也意味着我们只能捕获结构中的小型特征。

由于低分辨率下获得的小型特征可能对应于原始输入中的大型特征，因此我们通过在每个层级搜索分隔符，获得能够捕获不同大小特征的分隔符。

通过投影与细化（见第 2.3 节），我们随后将各层级中找到的极小局部分隔符转换为输入图上的极小局部分隔符。接着可以采用 LSS 方法将其打包并提取。该过程如图 3 所示。

### 2.1 粗化

给定输入图 $G = (V, E)$，我们构造一系列逐渐简化的图 $G_0, G_1, \ldots, G_l$，使得 $G_0 \succ G_1 \succ \ldots \succ G_l$，其中 $l = O(\log n)$，$G_i \succ G_j$ 表示 $G_j$ 是 $G_i$ 的图子式，且 $G_i = (V_i, E_i)$。此外，$G_0 = G$ 和 $\forall i \in [0, l)\ |V_i| \geq 2|V_{i+1}|$。

我们采用匹配收缩方案来实现这一点，即反复构造并收缩极大匹配。文献中存在多种此类粗化方案 [21]，我们从中选择考察轻边匹配。

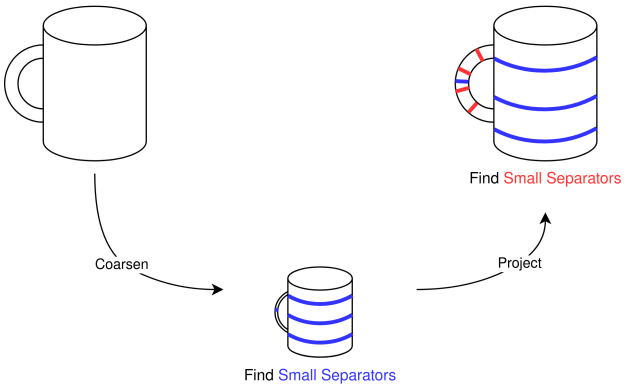



**图 3** 多层骨架化方法的可视化。对带有把手的实心圆柱体进行粗化，直至其尺寸变小。找到若干小型局部分隔符（以蓝色显示），然后将其投影回原始输入。再次搜索小型局部分隔符，可找到把手周围的分隔符（以红色显示），但在这一层级，圆柱体周围的分隔符过大，无法被发现。我们将这些分隔符组合起来，得到一个通用解。

要从 $G_i$ 构造 $G_{i+1}$，需贪心地寻找一个极大匹配并将其收缩。按随机顺序遍历顶点，并将每个顶点与一个未匹配且欧几里得距离最小的邻居匹配，即可在 $O(|E_i|)$ 时间内构造这样的匹配。重复此过程，直到顶点数至少减半。

图 4 展示了对一个类似海王星雕像的三角网格进行粗化时得到的一些图。



**图 4** 通过轻边匹配收缩，得到的一系列逐步简化的 `neptune.ply` 近似模型，取自格罗宁根骨架化基准。

请注意，收缩始终会保留连通分量的数量。这是该算法的保同伦性质之一。

## 理论分析

在最坏情况下，我们可能需要进行 $O(|V_i|)$轮收缩，才能达到所需的顶点数。这是一般图中匹配收缩方案的一个众所周知的问题

，但几何领域中的图通常只需少数几轮收缩 [1]。

因此，粗化阶段所耗时间的一般上界为 $\sum_{i=0}^{l}(|V_i||E_i|) = |E|\sum_{i=0}^{l}|V_i| = O(|V||E|)$。对于在常数轮数内完成收缩的图，我们得到 $\sum_{i=0}^{l}|E_i|$；若进一步满足 $|E_i| = O(|V_i|)$，如三角网格和体素网格的情形，则上界变为 $O(|V|)$。

## 2.2 受限分隔符搜索

对于给定的连通顶点集 $V'$，我们将由与 $V'$ 相邻、但自身不属于 $V'$ 的顶点所诱导的子图称为 $V'$ 的前沿，并记作 $F(V')$。

文献 [5]，提出了一种基于区域生长的局部分隔符计算方法：分隔符 $\Sigma$ 逐步扩展，直至 $F(\Sigma)$ 不连通。该方法利用围绕 $\Sigma$ 中顶点的包围球来指导下一步将 $F(\Sigma)$ 中的哪个顶点加入其中，随后通过遍历检查 $F(\Sigma)$ 的连通性。正如作者所指出的，可以使用动态连通性数据结构维护前沿，从而避免每次迭代都进行遍历，进而提升搜索性能。

除了调整算法以使用动态连通性数据结构外，我们还会限制搜索执行的迭代次数。给定一个顶点 $v$，令$\Sigma_0 = \emptyset$，$F_0 = \{v\}$，然后迭代构造 $\Sigma_i = \Sigma_{i-1} \cup \{v_i \in F(\Sigma_{i-1})\}$，其中 $v_i$ 是前沿中距离围绕 $\Sigma_{i-1}$ 的包围球最近的邻居。维护 $F(\Sigma_i)$，更新包围球并重复此过程，直到 $F(\Sigma_i)$ 不连通或为空，或者 $|\Sigma_i|$ 超过阈值。该受限分隔器搜索的伪代码见算法1。

**算法1** 受限分隔搜索给定一个空间嵌入图 $G$、一个起始顶点 $v_0$ 和一个阈值 $\alpha$，搜索一个大小不超过 $\alpha$ 的分隔符并返回，若失败则返回 $\emptyset$。这里，$\epsilon$ 是一个较小的常数，用于避免除以零。

---

受限分隔搜索$(G, v_0, \alpha)$**:**
  $\Sigma = \emptyset$
  $F = (\{v_0\}\ \emptyset)$
  $\mathbf{c} = \mathbf{p}_{v_0}$
  $i = 0$
  $r = 0$
  **重复**
    $v =$取最小值$_{f \in V(F)} \|\mathbf{c} - \mathbf{p}_f\|$ // Scan front for closest vertex
    **若** $\|\mathbf{c} - \mathbf{p}_v\| > r$ **则**
      $r = \frac{1}{2}(r + \|\mathbf{c} - \mathbf{p}_v\|)$ // Update the sphere
      $\mathbf{c} = \mathbf{p}_v + \frac{r}{\epsilon + \|\mathbf{c} - \mathbf{p}_v\|}(\mathbf{c} - \mathbf{p}_v)$
    $\Sigma = \Sigma \cup \{v\}$
    移除$(F, v)$
    **对于** $(x, y) \in E($邻域$(G, v) - \Sigma)$ **执行**
      连接$(F, x, y)$ // Maintain the front of $\Sigma$
    $i = i + 1$
  **直到** 连通分量数$(F) > 1$ **或** $i = \alpha$
  **如果** 连通分量数$(F) = 1$ **则**
    **返回** $\emptyset$
  **返回** $\Sigma$

---

**理论分析**

我们使用 Holm、de Lichtenberg 和 Thorup 的动态连通性数据结构（其更新操作的摊还时间为 $O(\log^2 n')$ [16]），根据图 $G' = \Sigma \cup F(\Sigma)$（含有 $n'$ 个顶点和 $m'$ 条边）来分析这种受限分隔器搜索的复杂度。由于分隔符的大小至多为 $\alpha$，且每次迭代都会添加一个顶点，因此我们至多执行 $\alpha$ 次迭代；每次迭代都从前沿中选取最近的顶点、更新包围球，并维护动态连通性结构。选取最近的顶点时，我们以朴素方式扫描前沿，耗时 $O(n')$；每次迭代更新包围球耗时 $O(1)$。因此，运行时间为 $O(\alpha n')$。动态连通性结构中的每条边至多插入和删除一次，每次操作的摊还时间为 $O(\log^2 n')$，总计 $O(m' \log^2 n')$。因此，总运行时间为$O(\alpha n' + m' \log^2 n')$。

一般情况下，我们无法给出优于 $O(\alpha|V| + |E|\log^2 |V|)$ 的最坏情况界。对于最大度有界的图，我们可以界定前沿的大小。令 $\Delta$ 为 $G$ 的最大度，则 $n' = O(|\Sigma|\Delta) = O(\alpha\Delta)$ 且 $m' = O(\alpha\Delta^2)$。由此可得运行时间为 $O(\alpha^2\Delta + \alpha\Delta^2 \log^2(\alpha\Delta))$。此外，如果我们选择将 $\alpha$ 设为一个较小的常数，则界还可进一步改进为 $O(\Delta^2 \log^2 \Delta)$。对于 $\Delta = O(1)$ 的图，例如体素网格或 knn 图，搜索便成为 $O(1)$。请注意，要使这一界适用于整个算法，度在粗化过程中必须保持有界。

## 2.3 投影与细化

为了将分隔符投影到更高细节层级的图上，我们采用一种简单的非粗化技术。通过存储粗化过程中哪些顶点被收缩的信息，我们可以撤销导致给定分隔符顶点产生的收缩。不过请注意，以这种方式投影得到的分隔符不一定是极小的。

因此，最简单的细化方案是采用 LSS 中用于最小化分隔符的算法。该最小化算法是一种启发式方法，旨在将分隔符最小化，使其结构成为一条窄带。用于通过投影得到的分隔符时，可供选择的空间未必很大。因此，我们考虑对细化方案进行调整：在投影后，通过添加相邻顶点来“加厚”分隔符，前提是这样做不会破坏分隔符。这为启发式最小化提供了更多选择，以创建长度更短的分隔符，如图 5 所示。

投影分隔符所需的时间与最终分隔符的大小成线性关系，而最小化在最坏情况下需要二次时间（见附录 C.2）。

以这种方式处理每个分隔符后，我们得到当前层级的一组极小分隔符。如果不加区分地累积分隔符，我们就会花时间投影和细化最终因重叠而被丢弃的分隔符。如果在每个层级都进行集合装箱，我们又会过于急于求成，丢弃那些进一步投影后可能并不重叠的分隔符。直观而言，我们希望仅在重叠较大时才丢弃分隔符。

为此，我们为每个图 $G_i$ 中的每个顶点 $v$ 指定一个容量 $c_v^i$，其值等于收缩得到该顶点的各顶点容量之和。对于 $G_0$ 的顶点，我们将容量定义为 1，形式上记为 $\forall v \in V(G_0)$ $c_v^0 = 1$。这样，给定顶点的容量就是它所代表的原始输入中的顶点数。

接着，我们修改 LSS 的贪心集合装箱算法，使其仅在不会导致任何顶点超出其容量时才纳入一个分隔符

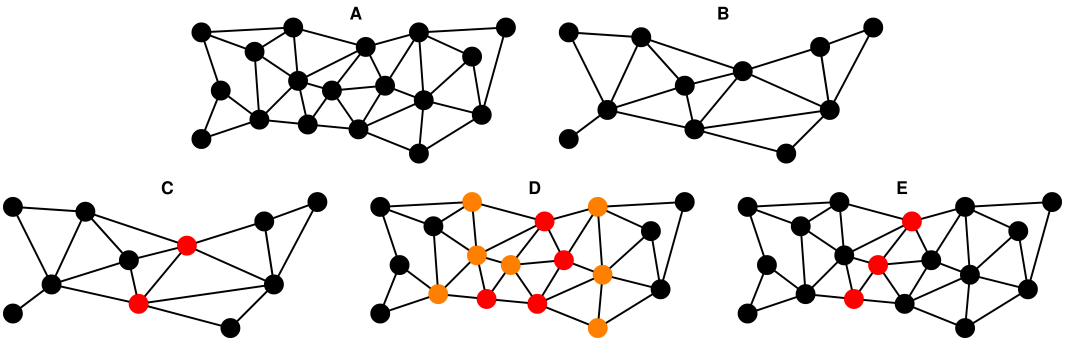



**图 5** 作为细化过程的一部分，一个分隔符正在扩展。(A) 显示输入，(B) 显示粗化表示，(C) 显示计算得到的分隔符（以红色顶点表示），(D) 显示投影后的分隔符（以红色顶点表示），以及新增的顶点（以橙色表示）；(E) 显示通过最小化加厚后的分隔符得到的分隔符。

。由于 $G_0$ 的容量为 1，在最高分辨率层级应用该打包算法时，它与原算法等效，因此最终仍会得到互不重叠的分隔符集合。

但请注意，这种打包方式会使重复项在打包过程中继续存在，实质上降低顶点的容量，却没有提供任何有价值的信息。为了解决这一问题，我们在打包过程之前使用哈希执行筛选步骤，以去除重复项。以这种方式进行筛选和打包所需的时间，与集合中各分隔符大小之和呈线性关系。

## 2.4 多层骨架化算法

各阶段的细节确定后，我们便可将其结合起来，构建多层骨架化算法。给定一个空间嵌入输入图 $G = (V, E)$ 和阈值 $\alpha$，我们通过以下步骤构建曲线骨架：

通过粗化从 $G_{i-1}$ 生成 $G_i$，直到对于某个 $l$ 满足 $|G_l| \leq \alpha$。这将生成分辨率逐渐降低的图序列 $G_0, G_1, \ldots, G_l$，其中 $l = O(\log |V|)$ 且 $\sum_{i=0}^{l} |V_i| = O(|V|)$。

然后，从分辨率最低的层级 $G_l$ 开始，寻找受限分隔符。我们通过受限分隔器搜索来完成这一过程：以概率 $2^{-x}$ 从每个顶点开始搜索，其中 $x$ 是当前已计算出的、包含该顶点的分隔符数量，并使用 $\alpha$ 限制搜索规模。计算出某一层级的分隔符后，我们执行容量打包，然后将计算出的分隔符投影到下一层级并对其进行细化。对每个层级重复这一过程，直至回到原始图。此时，在执行容量打包后，我们得到一组互不重叠的极小分隔符，并使用 LSS [5] 的提取过程从中提取骨架。该算法的伪代码见算法 2。

### 理论分析

为完整起见，我们接下来分析算法的复杂度。回顾一下，通常情况下，粗化阶段在最坏情况下需要 $O(|V||E|)$ 时间，但对于不太不规则的输入，只需 $O(|V|)$ 时间。然后，我们在每个层级从每个顶点开始执行受限分隔器搜索；在通常情况下，最坏情况需要 $O(\alpha|V|^2 + |V||E| \log^2 |V|)$，而对于在粗化过程中始终保持常数有界度的图，则需要 $O(\alpha|V|)$。接下来，我们考察

**算法 2** 多层骨架化给定空间嵌入图 $G$ 和阈值 $\alpha$，计算曲线骨架。

---

多层骨架化($G$, $\alpha$):
  $G_0 = G$
  $l = 0$
  **重复** // Coarsening phase
    $l = l + 1$
    $G_l$ =粗化($G_{l-1}$)
  **直到** $|V(G_l)| \leq \alpha$
  $S = \emptyset$ // Maintain set of minimal separators
  **对于** $i = l$ **到** $0$，**执行** // From low to high resolution
    $S' = \emptyset$
    **对于** $s \in S$，**执行** // Project and refine from previous levels
      $S' = S' \cup$投影-细化($s$)
    $S = S'$
    **对于** $v \in V(G_i)$，**以** $2^{-x(v)}$ **的概率执行** // Search on this level
      $s$ =受限分隔搜索($G_i, v, \alpha$)
      $S = S \cup \{$最小化分隔器($s$)$\}$
    $S$ =容量打包($S$)
  **返回** 提取骨架($G$, $S$)

---

单个分隔符在扩展、筛选和打包过程中对总耗时的贡献。这些操作在每个层级上的运行时间与分隔符的大小呈线性关系，在层级 $i$ 上最坏情况下为 $O(|V_i|)$。因此，单个分隔符在所有层级上的这些操作总计需要 $\sum_{i=0}^{l} O(|V_i|) = O(|V|)$。单个分隔符的最小化在层级 $i$ 上最坏情况下需要 $O(|V_i|^2)$，因此单个分隔符在所有层级上的最小化总计需要 $\sum_{i=0}^{l} O(|V_i|^2) = O(|V|^2)$。我们还会在每个层级执行打包，其运行时间与分隔符大小之和呈线性关系，总计需要 $\sum_{i=0}^{l} O(|V_i|^2) = O(|V|^2)$ 时间。因此，通常情况下的最坏情况界变为 $O(|V|^3 + |V||E| \log^2 |V|)$，优于 LSS。不过值得一提的是，在实践中，LSS 和我们的算法的运行时间都主要受分隔符搜索支配，而最小化等理论上开销较大的过程，仅占运行时间的一小部分。

## 3 实验

在这项工作中，我们的主要目标是设计一种算法，在采用新的算法思想和算法工程的同时，能够生成与 LSS [5]，质量相同的骨架，并缩短运行时间。正如本节将展示的那样，实际运行时间的改善非常令人满意。

关于质量，我们总体认为，加速并未损害质量。

然而，目前并没有比较骨架的统一标准。 [27]中指出，量化骨架的质量仍是一项开放挑战，但我们将只与 LSS 得到的骨架进行比较，以量化采用多层方法所带来的偏差。

为此，我们将测量若干度量指标，包括骨架中的顶点数、叶节点数、分支节点数，以及用于估算输入亏格的无弦环数

，还包括两个方向上的有向豪斯多夫距离。在比较中，重要的是有向豪斯多夫距离之间的关系，而非其大小。从 LSS 骨架到我们的骨架的距离较大，而反向距离较小，这可能表明 LSS 捕捉到了我们的骨架未能捕捉到的特征。反之亦然，这可能表明我们捕捉到了 LSS 认为不存在的特征。我们将豪斯多夫距离除以包围球的半径，以减小输入尺度不同所带来的影响。

我们在格罗宁根骨架化基准 [28], 上运行测试，该基准包含若干结构各异的三角网格。测试在配备 Xeon Gold 6226R（2.90GHz）CPU 的 HPC 集群节点上执行，每项测试使用单个 CPU 的 8 个核心。为测量运行时间，每项测试运行三次，并报告中位数。

我们比较了三种算法，即局部分隔器骨架化算法（LSS）；我们在第 2.1 节中介绍的、使用轻边匹配作为收缩方案的多层算法（LEM）；以及使用轻边匹配和加厚分隔集作为细化方案的算法（LEMTS），相关内容见第 2.3 节。

请注意，与我们的算法进行比较的 LSS 变体也采用了动态连通性结构，因此除阈值参数外，搜索过程完全相同。

**实现**

我们的实现采用 C++ 编写，基于 GEL 库的一个分支构建，并已公开发布 [18]。这是包含 LSS 的同一个库，因此我们的算法使用相同的底层数据结构和子程序。所有程序均使用 `-O3` 优化标志编译。动态连通性结构的细节见附录 C.1。我们在每个层级内部并行执行受限搜索，采用与 LSS 相同的简单分叉-汇合模式。为了适应算法的多层级结构，随后我们使用单个线程进行打包，使用至多两个线程进行投影，然后在下一个层级重复这一模式。投影仅使用两个线程，是因为启动线程的开销很快就会超过并行投影带来的收益；打包后通常只剩下少量分隔符。

## 3.1 结果

这里我们根据格罗宁根骨架化基准测试上的测量数据展示结果。首先，我们论证选择 $\alpha$ 的依据，并说明阈值如何影响骨架质量和运行时间。接着，我们展示若干与骨架本身相关的结果，以体现输出质量。最后，我们给出运行时间的测量数据，并讨论一些有趣的观察结果。

更多测量数据见附录A和附录B。

**恰到好处的耐心——确定阈值 $\alpha$**

为了展示 $\alpha$ 对运行时间的影响，我们使用一个小型测试套件，通过细分网格来生成不同规模的输入。这样做是为了确保整个测试过程中底层结构相似。我们针对 $\alpha = 8, 16, 32, 64, 128$ 测试了多层算法（见图6）。不出所料，阈值越低，运行时间就越短。

然而，骨架质量与阈值之间可能存在取舍，我们对此进行了定性探讨。

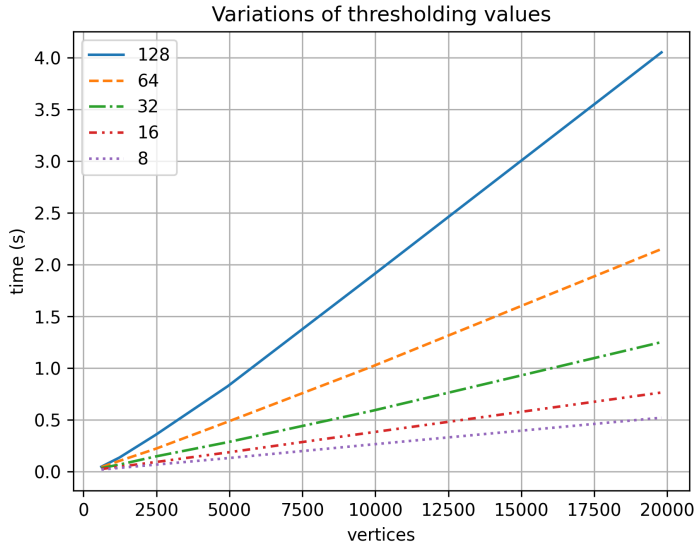



**图6** 在网格细分上使用不同 $\alpha$ 值的运行时间测量。

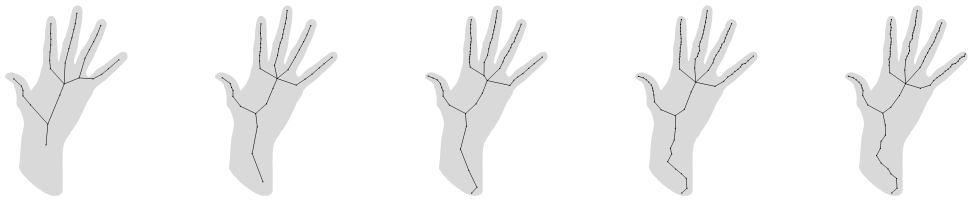


**图7** 随着耐心阈值逐渐增大，在 `human_hand.ply` 上找到的骨架。从左到右： $\alpha = 8$，16，32，64，128。

我们直观地检查了针对 `human_hand.ply` 上的 $\alpha$ 所生成的骨架，如图7所示。 $\alpha$ 的值非常低时，骨架在相对较厚的区域中包含的曲线很少。阈值较低时，必须在较低分辨率下寻找分隔符，因此能找到的分隔符也很少。随着 $\alpha$ 的值逐渐升高，骨架的细节层次也随之提升，直至达到某个点。直观而言，如果阈值足够高，使得更高细节层级能够捕捉到这些细节，那么较低分辨率层级就不会带来任何收益。

可以说，对于这个特定输入， $\alpha = 16$ 或 $\alpha = 32$ 生成的骨架在视觉上最为美观；不过，我们发现，对于其他考察的输入（例如图8所示的输入）， $\alpha = 64$ 在运行时间方面提供了最佳折衷。

因此，我们使用 $\alpha = 64$ 进行其余测试。

### 骨架质量

图8展示了 LSS、LEM 和 LEMTS 得到的一些骨架。请注意，LEM 和 LEMTS 的结果看起来都更平滑，同时在许多情况下也能找到 LSS 找到的特征。此外，对于这些输入，我们的方法似乎找到了更少的伪特征，因此结果更加简洁。比较 LEM 和 LEMTS 时，二者的差异是

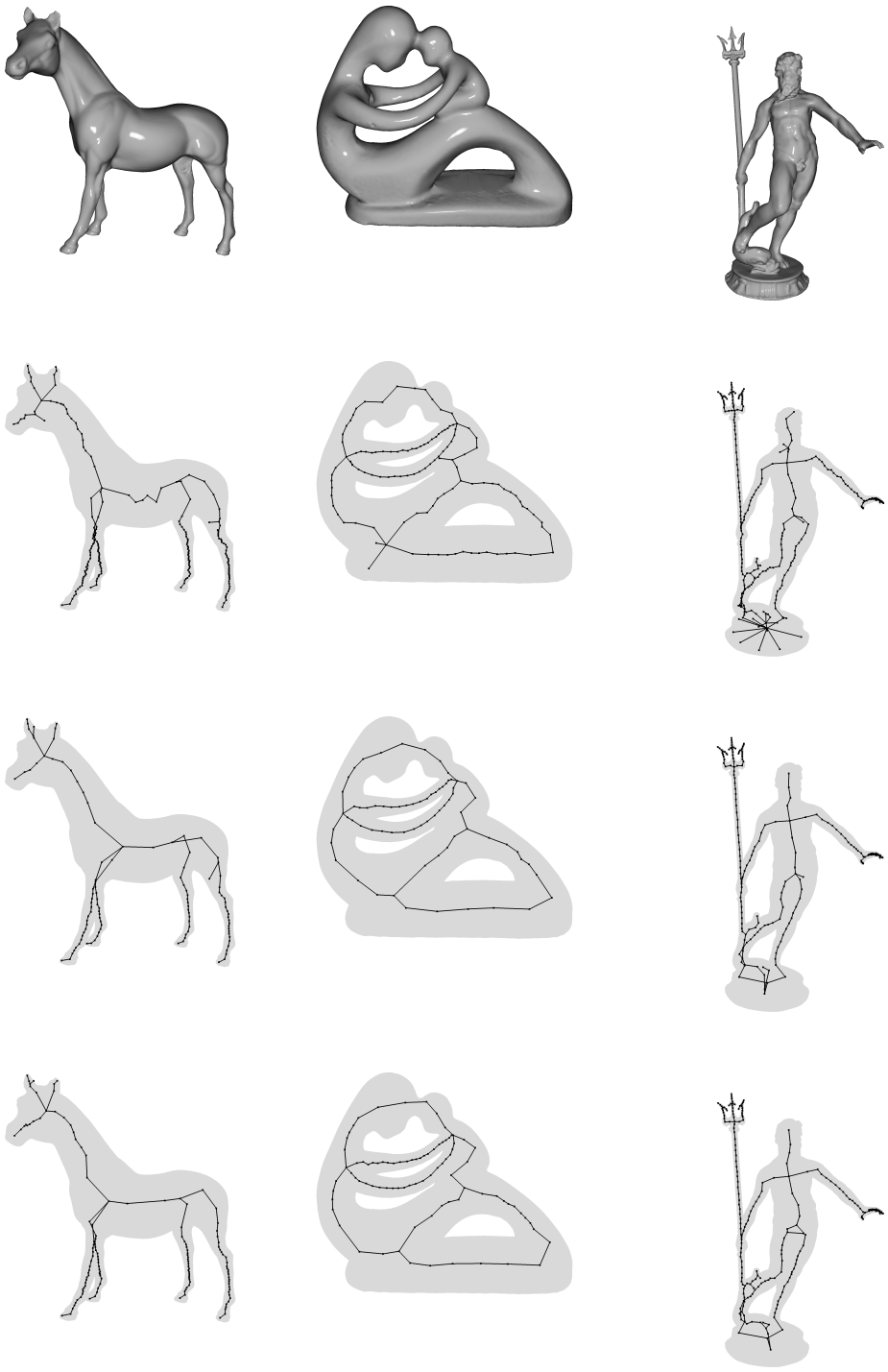


**图8** 每一列代表不同的输入，每一行展示不同的方法。从上到下依次为：输入的着色渲染图、使用 LSS 获得的骨架、使用 LEM 获得的骨架、使用 LEMTS 获得的骨架

略有差异。在 `horse.ply` 中可以看到，前腿与身体相接处的顶点位置更靠左。这是因为 LEMTS 的骨架更密集。另一方面，LEMTS 似乎不像 LEM 那样能很好地捕捉 `neptune.ply` 的腹股沟区域结构。虽然看起来 LEMTS 找到了一个环，但实际上并非如此。不过，骨架分支的位置并不像预期的那样。

| 输入 | 算法 | Δ顶点 | Δ叶节点 | Δ分支 | Δ亏格 | $H(*,\ LSS)$ | $H(LSS,\ *)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 19465 | LEM | -563 | -3 | -35 | 2 | 0.0437028 | 0.0415616 |
| | LEMTS | -416 | 11 | -24 | 3 | 0.0355444 | 0.0382796 |
| 生育能力 | LEM | -46 | -3 | -1 | 0 | 0.273804 | 0.0874419 |
| | LEMTS | -30 | -3 | -1 | 0 | 0.240033 | 0.165239 |
| happy4 | LEM | -589 | -409 | -21 | -100 | 0.199295 | 0.0887277 |
| | LEMTS | -560 | -384 | -22 | -99 | 0.160472 | 0.100934 |
| 马 | LEM | -95 | -1 | -1 | 0 | 0.112222 | 0.111066 |
| | LEMTS | -66 | -2 | -2 | 0 | 0.0883287 | 0.0851157 |
| 海王星 | LEM | -73 | -16 | -5 | 0 | 0.200924 | 0.0508065 |
| | LEMTS | -51 | -15 | -1 | 0 | 0.225756 | 0.0516766 |

**表1** 骨架测量数据节选。 Δ 表示相对于 LSS 骨架的度量指标，负值意味着 LSS 拥有更多的顶点、叶节点、分支等。这里， $H(A,\ B)$表示 $A$ 与 $B$之间的有向豪斯多夫距离除以包围球半径； $*$ 表示由我们的多层算法生成的骨架。

此外，我们还展示了附录B中的一小段测量数据，可见表1。显然，LEM 和 LEMTS 生成的骨架略为简单，顶点、叶节点和分支更少。然而，通过对模型进行视觉检查可以发现（至少对于表中的模型而言），骨架中缺失的细节对应着一些非常细微的特征，因此这些骨架细节可能会被视为多余。除 `happy4.ply` 外，基准测试中的所有输入与 LSS 相比，亏格几乎没有偏差。

为说明 `happy4.ply` 上出现的异常亏格，我们在图 9 中展示了生成的骨架。值得注意的是，该网格存在多个缺失面片，这似乎导致所有基于局部分隔器的方法都找到了不恰当的小型分隔符。我们认为这是所有受检方法的一个错误案例。

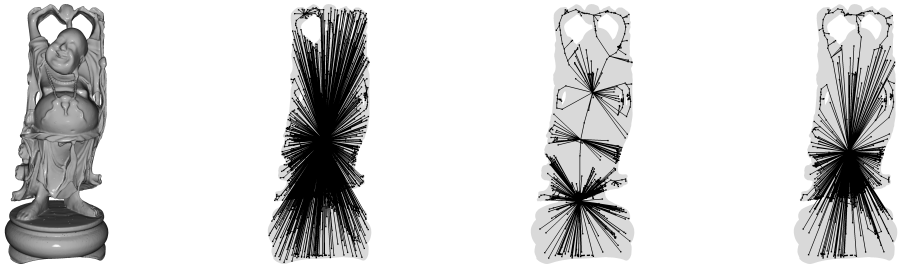


**图 9** 表面存在大量缺失面片的三角网格， `happy4.ply`，导致 LSS、LEM 和 LEMTS 的输出错误

### 运行时间

尽管局部分隔器骨架化方法的运行时间很大程度上取决于分隔符的搜索，而搜索又取决于输入的结构，但我们在图10中给出了受检方法在整个 Groningen 骨架化基准测试 [28] 中的运行时间，并将其表示为输入顶点数的函数。

值得注意的是，我们发现，多层算法不仅比 LSS 快几个数量级，而且似乎对三角网格的底层结构依赖性较低，因此呈现出略微超线性的曲线。只考虑搜索分隔符所花费的时间时，这种效果更为明显。在关于图的度的假设下，我们证明了搜索单个分隔符的复杂度为 $O(1)$，总复杂度为 $O(|V|)$。这一实验似乎证实，对于经典输入而言，这一假设是恰当的；格罗宁根骨架化基准中的三角网格便是如此。

表2摘录展示了运行时间测量数据，其中包括算法各阶段的测量数据。性能上的巨大差距显而易见，尤其是对于 `dragon.ply`而言；在限定 20 小时的时间内，这是我们能够运行 LSS 的最大输入。对于这个特定实例，我们实现了快近一千倍的运行时间。

值得注意的是，正如预期，LEMTS 在投影上花费的时间比 LEM 更多，但在打包上花费的时间更少。如前所述，搜索分隔符通常是耗时最多的阶段；然而，某些类型的输入并非如此，`19465.ply`便证明了这一点。该网格由平面片层组成，上面刻有细小的细节，如图11所示。对于 LSS 和多层算法，打包和投影占用了大量时间。如果分隔符通常较小且数量众多，就可能出现这种情况，从而能够快速找到许多分隔符。对于 `19465.ply` ，顶部片层上的压印文字周围尤其存在许多这样的分隔符。值得注意的是，这也很可能是一个输入结构会极大影响我们多层算法运行时间的例子。

## 4 结论与未来工作

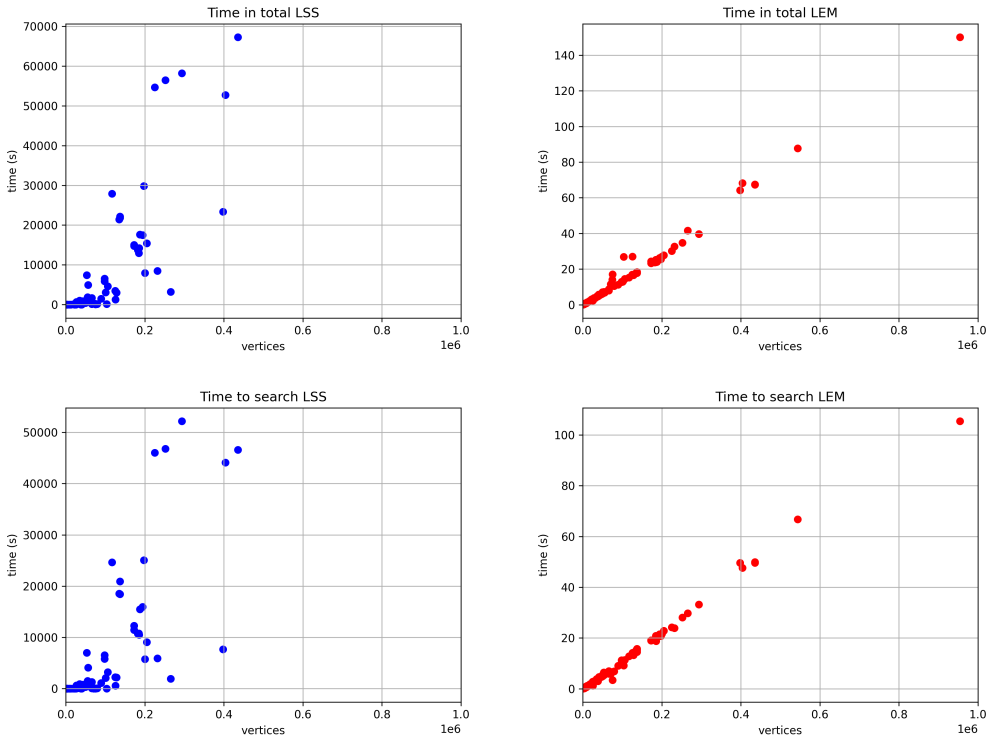
我们提出了一种用于计算基于局部分隔符的曲线骨架的多层算法，并证明该方法效率很高。我们获得了实用的运行时间，其随输入顶点数的增长看起来接近线性（见图10）；运行时间最多提升了千倍，同时输出质量并未明显下降，甚至完全没有下降。

这种运行时间的改进使基于分隔符的骨架化能够作为生物医学图像分析工具，包括对视频进行逐帧骨架化 [3]。

将其应用于视频骨架化，促使我们探索一条尚未研究的相关工作方向，即如何高效地动态更新一系列相关形状的骨架。

多层方法具有很大的灵活性，尚待探索。例如，可以设想针对输入特定结构的粗化方案，比如在体素输入上收缩簇，而不是收缩边。这些收缩方案或许能在实际性能与骨架质量之间带来新的权衡。

将粗化应用于无标度图时（例如在数据可视化或非骨架化传统应用领域中），我们便进入了一个已知会给匹配收缩方案带来难题的领域，即图划分 [1]。




**(a)** LSS 的运行时间。 **(b)** LEM 的运行时间。

**图10** 格罗宁根骨架化基准上，总运行时间（上）和搜索时间（下）随顶点数量变化的情况。超过20小时的数值未显示。

| 输入 | 算法 | 粗化（秒） | 搜索（秒） | 投影（秒） | 打包（秒） | 总计（秒） |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 19465 | LSS | - | 25.8787 | - | 138.836 | 164.714 |
| | LEM | 1.20002 | 9.18989 | 9.410914 | 12.4392 | 26.8306 |
| | LEMTS | 1.21294 | 9.41457 | 14.851733 | 9.8696 | 26.5518 |
| 龙 | LSS | - | 46615.4 | - | 20637.9 | 67255.9 |
| | LEM | 6.25851 | 49.6567 | 18.753684 | 3.42042 | 67.4554 |
| | LEMTS | 6.19801 | 50.2347 | 24.6420235 | 3.22507 | 69.4672 |
| 生育能力 | LSS | - | 95.8574 | - | 42.1409 | 136.664 |
| | LEM | 0.234681 | 2.38572 | 0.7753682 | 0.0600592 | 3.03186 |
| | LEMTS | 0.244822 | 2.4305 | 1.8177949 | 0.0559833 | 3.44687 |
| happy4 | LSS | - | 7646.21 | - | 15731.9 | 23379.2 |
| | LEM | 6.89638 | 49.6684 | 12.7328477 | 2.22244 | 64.2245 |
| | LEMTS | 6.93433 | 50.1269 | 16.0581559 | 1.75872 | 65.4557 |
| 马 | LSS | - | 544.182 | - | 85.6915 | 628.3 |
| | LEM | 0.504898 | 5.10887 | 1.2762728 | 0.0669417 | 6.27845 |
| | LEMTS | 0.502791 | 5.17779 | 2.7604771 | 0.0542464 | 6.86374 |
| 海王星 | LSS | - | 56.296 | - | 62.8555 | 119.232 |
| | LEM | 0.312728 | 2.7382 | 1.0849813 | 0.230939 | 3.77785 |
| | LEMTS | 0.308124 | 2.76549 | 2.4149765 | 0.182575 | 4.22093 |

**表2** 运行时间测量摘录。除了测量总时间外，我们还测量了算法各阶段所耗费的时间。

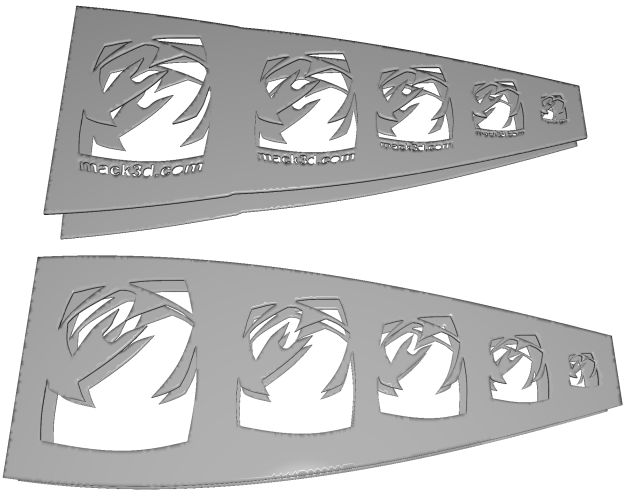



**图11** 三角网格 `19465.ply`，其中打包占据了（所有）基于局部分隔符的骨架化算法运行时间的很大一部分。

令人感兴趣的是，实际性能的提升以及对任意空间嵌入图的适用性，是否会为骨架开辟新的应用领域。

## 参考文献

1 Amine Abou-Rjeili 和 George Karypis。用于划分幂律图的多层算法。载于 第*20*届国际并行与分布式处理研讨会（*IPDPS 2006*）论文集，*2006*年*4*月*25*日至*29*日，希腊罗得岛。IEEE，2006年。doi:10.1109/IPDPS.2006.1639360。2 Nina Amenta、Sunghee Choi 和 Ravi Krishna Kolluri。幂壳。载于 David C. Anderson 和 Kunwoo Lee 编，第六届 *ACM* 固体建模与应用研讨会，喜来登酒店，美国密歇根州安娜堡，*2001*年*6*月*4*日至*8*日，第249–266页。ACM，2001年。doi:10.1145/376957.376986。3 Kasra Arnavaz、Oswin Krause、Kilian Zepf、Jakob Andreas Bærentzen、Jelena M. Krivokapic、Silja Heilmann、Pia Nyeng 和 Aasa Feragen。通过活体三维显微镜成像量化胰腺管状网络的拓扑。 生物医学成像机器学习，1，2022年。网址：https://melba-journal.org/papers/2022:015.html。4 Oscar Kin-Chung Au、Chiew-Lan Tai、Hung-Kuo Chu、Daniel Cohen-Or 和 Tong-Yee Lee。通过网格收缩提取骨架。 *ACM*图形学汇刊，27(3):44，2008年。doi:10.1145/1360612.1360643。5 Andreas Bærentzen 和 Eva Rotenberg。通过局部分隔符进行骨架化。 *ACM*图形学汇刊，40(5):187:1–187:18，2021年。doi:10.1145/3459233。6 Silvia Biasotti、Leila De Floriani、Bianca Falcidieno、Patrizio Frosini、Daniela Giorgi、Claudia Landi、Laura Papaleo 和 Michela Spagnuolo。通过几何

实函数的拓扑性质。ACM计算调查，40(4):12:1–12:87，2008年。doi:10.1145/1391729.1391731。7 Silvia Biasotti、Daniela Giorgi、Michela Spagnuolo 和 Bianca Falcidieno。用于形状分析与应用的 Reeb图。理论计算机科学，392(1-3):5–22，2008年。doi:10.1016/j.tcs.2007.10.018。8 Angela Brennecke 和 Tobias Isenberg。利用骨架图进行三维形状匹配。载于 Thomas Schulze、Stefan Schlechtweg 和 Volkmar Hinz 编，《Simulation und Visualisierung 2004》（SimVis 2004），2004年3月4日至5日，马格德堡，第299–310页。SCS Publishing House e.V.，2004年。网址：http://wwwisg.cs.uni-magdeburg.de/graphik/pub/files/Brennecke_2004_3SM.pdf。9 Aydin Buluç、Henning Meyerhenke、Ilya Safro、Peter Sanders 和 Christian Schulz。图划分的最新进展。载于 Lasse Kliemann 和 Peter Sanders 编，《算法工程——精选成果与综述》，计算机科学讲义第9220卷，第117–158页。Springer国际出版公司，2016年。doi:10.1007/978-3-319-49487-6_4。10 Junjie Cao、Andrea Tagliasacchi、Matt Olson、Hao Zhang 和 Zhixun Su。通过基于拉普拉斯算子的收缩对点云进行骨架化。载于 SMI 2010，国际形状建模会议，法国普罗旺斯地区艾克斯，2010年6月21日至23日，第187–197页。IEEE计算机学会，2010年。doi:10.1109/SMI.2010.25。11 Nicu D. Cornea、Deborah Silver 和 Patrick Min。曲线骨架的性质、应用与算法。IEEE可视化与计算机图形学汇刊，13(3):530–548，2007年。doi:10.1109/TVCG.2007.1002。12 Tamal K. Dey 和 Jian Sun。利用中轴测地函数定义并计算曲线骨架。载于 Alla Sheffer 和 Konrad Polthier 编，《第四届欧洲计算机图形学协会几何处理研讨会论文集》，意大利撒丁岛卡利亚里，2006年6月26日至28日，第256卷，ACM国际会议论文集系列，第143–152页。Eurographics协会，2006年。 doi:10.2312/SGP/SGP06/143-152。13 William Harvey、Yusu Wang 和 Rephael Wenger。一种用于计算任意单纯复形 Reeb图的随机 O(m log m) 时间算法。载于 David G. Kirkpatrick 和 Joseph S. B. Mitchell 编，《第26届 ACM 计算几何研讨会论文集》，美国犹他州雪鸟镇，2010年6月13日至16日，第267–276页。ACM，2010年。doi:10.1145/1810959.1811005。14 M. Sabry Hassouna 和 Aly A. Farag。利用梯度向量流的变分曲线骨架。IEEE模式分析与机器智能汇刊，31(12):2257–2274，2009年。doi:10.1109/TPAMI.2008.271。15 Bruce Hendrickson 和 Robert W. Leland。一种用于图划分的多层算法。载于 Sidney Karin 编，《Supercomputing '95 论文集》，美国加利福尼亚州圣迭戈，1995年12月4日至8日，第28页。ACM，1995年。 doi:10.1145/224170.224228。16 Jacob Holm、Kristian de Lichtenberg 和 Mikkel Thorup。用于连通性、最小生成树、2-边连通性和双连通性的多对数时间确定性全动态算法。ACM学报，48(4):723–760，2001年。doi:10.1145/502090.502095。17 Hui Huang、Shihao Wu、Daniel Cohen-Or、Minglun Gong、Hao Zhang、Guiqing Li 和 Baoquan Chen。点云的 L1中轴骨架。ACM图形学汇刊，32(4):65:1–65:8，2013年。 doi:10.1145/2461912.2461913。18 Rasmus E. Christensen、J. Andreas Bærentzen 和 Emil T. Gæde。GEL。https://github.com/Sgelet/GEL，2022年。19 Andrei C. Jalba、Jacek Kustra 和 Alexandru C. Telea。利用图形处理器对大型三维模型进行曲面与曲线骨架化。IEEE模式分析与机器智能汇刊，35(6):1495–1508，2013年。doi:10.1109/TPAMI.2012.212。20 Wei Jiang、Kai Xu、Zhi-Quan Cheng、Ralph R. Martin 和 Gang Dang。通过图收缩与曲面聚类相结合提取曲线骨架。图形模型，75(3):137–148，2013年。doi:10.1016/j.gmod.2012.10.005。

21 George Karypis 和 Vipin Kumar。多层级图划分分析。载于 Sidney Karin（编），《Supercomputing '95 会议录》，美国加利福尼亚州圣迭戈，1995年12月4日至8日，第29页。ACM，1995年。 doi:10.1145/224170.224229。22 Mattia Natali、Silvia Biasotti、Giuseppe Patanè 和 Bianca Falcidieno。点云的基于图的表示。图形模型，73(5):151–164，2011年。doi:10.1016/j.gmod.2011.03.002。23 Valerio Pascucci、Giorgio Scorzelli、Peer-Timo Bremer 和 Ajith Mascarenhas。Reeb图的稳健在线计算：简洁与速度。ACM图形学汇刊，26(3):58，2007年。doi:10.1145/1276377.1276449。24 Diane Perchet、Catalin I. Fetita 和 Françoise J. Prêteux。虚拟支气管镜检查的高级导航工具。载于 Edward R. Dougherty、Jaakko Astola 和 Karen O. Egiazarian（编），《图像处理：算法与系统 III》，美国加利福尼亚州圣何塞，2004年1月18日，第5298卷《SPIE会议录》，第147–158页。SPIE，2004年。 doi:10.1117/12.533096。25 Dennie Reniers、Jarke J. van Wijk 和 Alexandru C. Telea。使用全局重要性度量计算属零形状的多尺度曲线与曲面骨架。IEEE可视化与计算机图形学汇刊，14(2):355–368，2008年。doi:10.1109/TVCG.2008.23。26 Andrea Tagliasacchi、Ibraheem Alhashim、Matt Olson 和 Hao Zhang。平均曲率骨架。Comput. Graph. Forum，31(5):1735–1744，2012年。doi:10.1111/j.1467-8659.2012.03178.x。27 Andrea Tagliasacchi、Thomas Delamé、Michela Spagnuolo、Nina Amenta 和 Alexandru C. Telea。三维骨架：前沿综述。Comput. Graph. Forum，35(2):573–597，2016年。doi:10.1111/cgf.12865。28 Alexandru C. Telea。三维骨架化基准。 https://webspace.science.uu.nl/~telea001/Shapes/SkelBen2016年。访问日期：2022-10-31。29 Alexandru C. Telea 和 Andrei C. Jalba。基于三维形状的中轴曲面计算曲线骨架。载于 Hamish A. Carr 和 Silvester Czanner 编，计算机图形学理论与实践，英国拉瑟福德，*2012*年。会议论文集，第 99–106 页。Eurographics协会，2012年。doi:10.2312/LocalChapterEvents/TPCG/TPCG12/099-106。30 Ming Wan、Frank Dachille 和 Arie E. Kaufman。用于虚拟导航的基于距离场的骨架。载于 Thomas Ertl、Kenneth I. Joy 和 Amitabh Varshney 编，第*12*届 *IEEE* 可视化会议，*IEEE Vis 2001*，美国加利福尼亚州圣迭戈，*2001*年*10*月*24*日至*26*日，会议论文集，第 239–246 页。IEEE计算机学会，2001年。doi:10.1109/VISUAL.2001.964517。31 Yu-Shuen Wang 和 Tong-Yee Lee。使用迭代最小二乘优化提取曲线骨架。*IEEE*可视化与计算机图形学汇刊，14(4):926–936，2008年。doi:10.1109/TVCG.2008.38。32 Yajie Yan、Kyle Sykes、Erin W. Chambers、David Letscher 和 Tao Ju。三维形状中轴上的侵蚀厚度。*ACM*图形学汇刊，35(4):38:1–38:12，2016年。doi:10.1145/2897824.2925938。

# A 测量时间

## A.1 LSS

| 输入 | 顶点 | 边 | 搜索（秒） | 打包（秒） | 总计（秒） |
|---|---|---|---|---|---|
| 17674 | 124998 | 375000 | 2210.77 | 1267.03 | 3478.68 |
| 18020 | 75122 | 225599 | 3.99153 | 45.1806 | 49.2553 |
| 19465 | 103351 | 310989 | 25.8787 | 138.836 | 164.714 |
| 20304 | 928 | 2790 | 0.241744 | 0.0326365 | 0.276727 |
| 20306 | 300 | 894 | 0.0331013 | 0.0025101 | 0.0371508 |
| 21362 | 1828 | 5862 | 1.35847 | 0.311618 | 1.67805 |
| 21464 | 9041 | 26817 | 0.855021 | 0.163493 | 1.02239 |
| 21747 | 2918 | 8766 | 0.0958573 | 0.0691565 | 0.167391 |
| 21788 | 23062 | 69132 | 34.9016 | 7.44311 | 42.3761 |
| 22081 | 3970 | 11934 | 0.892292 | 0.485193 | 1.3761 |
| 22290 | 944 | 2832 | 1.28241 | 0.0388288 | 1.32425 |
| 22601 | 12554 | 37704 | 2.08853 | 2.40571 | 4.50452 |
| 22669 | 28738 | 86208 | 199.372 | 25.7059 | 225.13 |
| 22701 | 52784 | 158346 | 7008.77 | 396.256 | 7405.48 |
| 22711 | 2820 | 8460 | 1.23153 | 0.252354 | 1.49249 |
| 22808 | 9640 | 28920 | 4.3411 | 0.936791 | 5.28941 |
| 22826 | 56143 | 168453 | 4086.67 | 867.461 | 4951.25 |
| 23091 | 4120 | 12354 | 5.90686 | 0.169803 | 6.0869 |
| 711_dente | 9337 | 28005 | 34.1009 | 4.06142 | 38.1319 |
| 犰狳 | 172974 | 518916 | 11448.4 | 3543.65 | 14997.0 |
| 犰狳_vc | 106289 | 318861 | 3204.65 | 1383.1 | 4592.3 |
| asiandragon9a | 231606 | 694743 | 5918.86 | 2587.44 | 8507.07 |
| 球形关节 | 137062 | 411180 | 20924.2 | 1264.41 | 22189.5 |
| bird2 | 11718 | 35148 | 21.1993 | 5.67294 | 26.8925 |
| bird3 | 46866 | 140592 | 502.613 | 119.191 | 625.678 |
| 鸟4 | 187458 | 562368 | 15499.6 | 2143.4 | 17643.8 |
| bird | 11718 | 35148 | 21.455 | 5.69072 | 27.1211 |
| bmw2 | 125424 | 375531 | 592.198 | 723.553 | 1313.84 |
| bmw | 70536 | 211048 | 30.796 | 175.206 | 205.87 |
| 波音 | 3975 | 10811 | 0.0979876 | 0.0840983 | 0.185436 |
| brain2 | 294016 | 882048 | 52170.7 | 6002.66 | 58175.3 |
| 兔子 | 34834 | 104288 | 871.727 | 128.254 | 1000.12 |
| 包_拉链 | 34834 | 104288 | 875.806 | 125.535 | 1004.16 |
| 包_拉链_res2 | 8260 | 24480 | 25.3724 | 4.08634 | 29.4296 |
| 包_拉链_res3 | 2000 | 5775 | 1.02591 | 0.143932 | 1.17524 |
| 包_拉链_res4 | 518 | 1425 | 0.0644569 | 0.00645594 | 0.0730992 |
| 鸡_高 | 135142 | 405420 | 18539.4 | 2860.69 | 21424.2 |
| cow10 | 181839 | 545481 | 10713.4 | 3048.3 | 13762.7 |
| cow2 | 185730 | 557184 | 10498.4 | 3797.46 | 14222.4 |
| cow3 | 252054 | 756090 | 46773.5 | 9664.54 | 56448.4 |
| cube2 | 98306 | 294912 | 5827.69 | 35.6819 | 5863.63 |
| dog | 18114 | 54336 | 36.1876 | 13.7726 | 49.996 |
| 龙 | 435680 | 1307182 | 46615.4 | 20637.9 | 67255.9 |
| ele12a | 50488 | 151470 | 430.976 | 107.081 | 538.198 |

## 20 使用局部分隔符的多层骨架化

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ele_fine | 173026 | 519060 | 12251.0 | 2526.92 | 14778.7 |
| elk2 | 35062 | 105186 | 132.307 | 98.1348 | 230.095 |
| 生育能力 | 24994 | 75000 | 95.8574 | 42.1409 | 136.664 |
| frog | 37225 | 111669 | 325.885 | 102.875 | 431.331 |
| 滴水嘴兽 | 25002 | 75000 | 221.986 | 68.5221 | 291.185 |
| 三角钢琴 | 2904 | 8136 | 0.132531 | 0.0202437 | 0.154685 |
| happy4 | 397569 | 1190310 | 7646.21 | 15731.9 | 23379.2 |
| 心脏 | 23062 | 69132 | 34.0533 | 6.79733 | 40.8846 |
| 七环面 | 79056 | 237294 | 66.3978 | 109.493 | 176.037 |
| hh2 | 197245 | 591230 | 25040.0 | 4864.86 | 29869.8 |
| hh | 49374 | 147871 | 649.029 | 180.944 | 830.178 |
| hht | 53754 | 161109 | 1115.03 | 214.659 | 1329.94 |
| 河马 | 40367 | 121082 | 355.525 | 132.543 | 489.036 |
| 马3 | 193934 | 581796 | 15966.7 | 1511.87 | 17478.4 |
| 马9 | 89400 | 268187 | 1071.45 | 387.892 | 1458.51 |
| 马 | 48485 | 145449 | 544.182 | 85.6915 | 628.3 |
| 猎犬2 | 200463 | 600913 | 5757.82 | 2253.16 | 7977.3 |
| 猎犬 | 12578 | 37592 | 7.98674 | 3.63663 | 11.6414 |
| 人类 _hand | 49374 | 147871 | 611.868 | 172.992 | 783.473 |
| 肱骨 | 35002 | 105000 | 303.445 | 37.4675 | 340.978 |
| ico | 40962 | 122880 | 583.475 | 5.22691 | 588.763 |
| 小猫3 | 54838 | 164508 | 1491.24 | 389.112 | 1884.23 |
| 小猫 | 137098 | 411294 | 18429.4 | 3380.57 | 21810.9 |
| 狮子2 | 65648 | 196696 | 1304.7 | 378.208 | 1683.55 |
| lion | 184738 | 550783 | 10751.5 | 2252.04 | 12985.5 |
| lucy | 100697 | 302085 | 2067.93 | 1035.66 | 3104.06 |
| 纪念品 | 26277 | 78825 | 100.99 | 36.0391 | 137.863 |
| micscope2 | 265410 | 792121 | 1947.31 | 1260.84 | 3206.91 |
| 显微镜 | 4146 | 12355 | 0.373911 | 0.0657359 | 0.443446 |
| m | 25631 | 71054 | 1.14553 | 1.7946 | 2.95392 |
| mouse2 | 403652 | 1210944 | 44112.1 | 8690.16 | 52701.7 |
| 鼠标 | 6311 | 18921 | 2.92597 | 0.691586 | 3.62578 |
| 海王星 | 28052 | 84168 | 56.296 | 62.8555 | 119.232 |
| noisydino2 | 23370 | 69872 | 67.7212 | 30.5944 | 98.2667 |
| noisydino8a | 31497 | 94485 | 174.728 | 45.5758 | 219.857 |
| noisydino | 23370 | 69872 | 69.0721 | 30.8234 | 100.0 |
| pig2 | 225282 | 675840 | 46042.1 | 8980.69 | 54639.5 |
| pig | 3522 | 10560 | 2.13615 | 0.539077 | 2.67718 |
| pipe | 2820 | 8460 | 1.20779 | 0.253799 | 1.46849 |
| rcube2 | 98306 | 294912 | 6511.13 | 63.371 | 6574.24 |
| rcube | 24578 | 73728 | 281.882 | 3.76864 | 285.555 |
| 犀牛2 | 128342 | 384790 | 2160.26 | 859.125 | 3025.39 |
| 犀牛 | 8075 | 24058 | 3.43115 | 1.16439 | 4.60909 |
| 摇臂2 | 43213 | 129639 | 792.765 | 118.601 | 911.377 |
| 摇臂 | 40177 | 120531 | 629.687 | 62.2081 | 692.141 |
| 转子 | 2328 | 7104 | 0.168337 | 0.0910922 | 0.261838 |
| 骶骨 | 204710 | 614226 | 9076.89 | 6283.98 | 15415.7 |
| 凉鞋2 | 40316 | 119568 | 27.8837 | 14.9089 | 42.8545 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 凉鞋3 | 22473 | 66039 | 35.9975 | 9.61242 | 45.7281 |
| 凉鞋 | 2636 | 7608 | 0.150706 | 0.0515755 | 0.205492 |
| 肩胛骨 | 116930 | 350784 | 24658.3 | 3220.81 | 27880.1 |
| 螺丝刀 | 27152 | 81450 | 635.749 | 48.1479 | 683.989 |
| 海碗 | 45095 | 135303 | 569.478 | 119.554 | 688.461 |
| 船1 | 2526 | 7220 | 0.0986438 | 0.0514934 | 0.152607 |
| 船2 | 38122 | 113189 | 13.0851 | 20.6763 | 33.8212 |
| ship3 | 74544 | 222199 | 56.9407 | 168.925 | 225.95 |
| 蜘蛛 | 4675 | 13929 | 0.524195 | 0.252 | 0.780605 |
| tomgun2 | 65638 | 196496 | 82.568 | 78.9012 | 161.01 |
| tomgun | 4177 | 12305 | 0.388707 | 0.112197 | 0.504491 |
| walleye2 | 49518 | 146582 | 309.593 | 81.8352 | 389.27 |
| walleye | 3343 | 9286 | 0.927982 | 0.128176 | 1.06049 |

**表 3** 格罗宁根骨架化基准上的 LSS 运行时间测量

## A.2 LEM

| 输入 | 顶点 | 边 | 粗化（s） | 搜索（s） | 投影（s） | 打包（s） | 总计（s） |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17674 | 124998 | 375000 | 1.42035 | 13.4979 | 3.4347296 | 0.349129 | 16.8551 |
| 18020 | 75122 | 225599 | 0.713029 | 3.41843 | 6.5007303 | 10.2568 | 17.022 |
| 19465 | 103351 | 310989 | 1.20002 | 9.18989 | 9.410914 | 12.4392 | 26.8306 |
| 20304 | 928 | 2790 | 0.00472449 | 0.101381 | 0.022000955 | 0.000595655 | 0.119704 |
| 20306 | 300 | 894 | 0.00202366 | 0.0381954 | 0.012915355 | 0.000244554 | 0.0477475 |
| 21362 | 1828 | 5862 | 0.00957011 | 0.211413 | 0.03324375 | 0.00390133 | 0.249427 |
| 21464 | 9041 | 26817 | 0.0507172 | 0.605148 | 0.3172494 | 0.0488438 | 0.850748 |
| 21747 | 2918 | 8766 | 0.013928 | 0.16035 | 0.12938649 | 0.0353876 | 0.272814 |
| 21788 | 23062 | 69132 | 0.187331 | 2.19023 | 0.57236465 | 0.0442584 | 2.69455 |
| 22081 | 3970 | 11934 | 0.0225922 | 0.3726 | 0.10956878 | 0.0134095 | 0.463392 |
| 22290 | 944 | 2832 | 0.00453149 | 0.138593 | 0.018698548 | 0.000293809 | 0.154601 |
| 22601 | 12554 | 37704 | 0.0887529 | 0.95333 | 0.4130805 | 0.120493 | 1.35994 |
| 22669 | 28738 | 86208 | 0.274313 | 2.98669 | 0.51025489 | 0.0317114 | 3.5369 |
| 22701 | 52784 | 158346 | 0.473056 | 6.44374 | 0.28137197 | 0.00285178 | 7.15982 |
| 22711 | 2820 | 8460 | 0.0140559 | 0.318642 | 0.12283238 | 0.00448683 | 0.395761 |
| 22808 | 9640 | 28920 | 0.0650948 | 0.998223 | 0.20622033 | 0.0163558 | 1.17796 |
| 22826 | 56143 | 168453 | 0.512271 | 6.07731 | 1.0100605 | 0.0550804 | 7.14747 |
| 23091 | 4120 | 12354 | 0.0196667 | 0.455104 | 0.083162039 | 0.00300366 | 0.526664 |
| 711_dente | 9337 | 28005 | 0.0641343 | 0.985219 | 0.22779954 | 0.0100632 | 9 |
| 犰狳 | 172974 | 518916 | 2.51794 | 19.0322 | 5.0844824 | 0.48021 | 24.3899 |
| 犰狳_vc | 106289 | 318861 | 1.43063 | 11.3844 | 3.0456077 | 0.28918 | 14.4931 |
| asiandragon10a | 954227 | 2862226 | 14.0947 | 105.433 | 56.60956 | 7.17272 | 150.045 |
| asiandragon9a | 231606 | 694743 | 2.89486 | 23.9127 | 10.1410711 | 1.61975 | 32.5958 |
| 球形关节 | 137062 | 411180 | 1.66799 | 15.7521 | 1.5901205 | 0.0301499 | 18.3389 |
| bird2 | 11718 | 35148 | 0.092326 | 1.15743 | 0.35719044 | 0.0373765 | 1.44558 |
| 鸟3 | 46866 | 140592 | 0.531434 | 4.70348 | 1.0330702 | 0.0722855 | 5.81154 |
| 鸟4 | 187458 | 562368 | 2.23458 | 20.2136 | 2.6803021 | 0.134734 | 24.0237 |
| bird | 11718 | 35148 | 0.101527 | 1.13771 | 0.35191275 | 0.036676 | 1.42879 |
| bmw2 | 125424 | 375531 | 1.53246 | 14.1645 | 7.991554 | 7.8399 | 26.958 |
| bmw | 70536 | 211048 | 0.699872 | 5.86059 | 3.613716 | 3.39631 | 11.5671 |

## 22 使用局部分隔符进行多层骨架化

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 波音 | 3975 | 10811 | 0.0174186 | 0.192201 | 0.140817 | 0.0562142 | 0.336693 |
| brain2 | 294016 | 882048 | 3.57649 | 33.2128 | 5.1804536 | 0.266868 | 39.709 |
| 兔子 | 34834 | 104288 | 0.351915 | 3.78063 | 0.67709918 | 0.0480589 | 4.5399 |
| bun_zipper | 34834 | 104288 | 0.359259 | 3.79813 | 0.66139868 | 0.046271 | 4.5309 |
| 兔子_拉链_res2 | 8260 | 24480 | 0.06046 | 0.86436 | 0.18984358 | 0.0197775 | 1.04349 |
| 兔子_拉链_res3 | 2000 | 5775 | 0.0103474 | 0.197153 | 0.058296746 | 0.00757159 | 0.245245 |
| 兔子_拉链_res4 | 518 | 1425 | 0.00334376 | 0.0538328 | 0.019278557 | 0.000693185 | 0.0692462 |
| 鸡_高 | 135142 | 405420 | 1.6475 | 15.2427 | 1.868914 | 0.041709 | 17.9348 |
| cow10 | 181839 | 545481 | 2.13711 | 19.3315 | 4.4587347 | 0.226973 | 23.704 |
| cow2 | 185730 | 557184 | 2.13695 | 18.7325 | 5.4557653 | 0.530463 | 23.8909 |
| cow3 | 252054 | 756090 | 3.43701 | 28.0588 | 6.0824288 | 0.546523 | 34.7918 |
| cow9 | 136988 | 410946 | 1.59892 | 14.5176 | 3.3032935 | 0.169401 | 17.7899 |
| cube2 | 98306 | 294912 | 0.883138 | 11.2845 | 1.1164629 | 0.0178002 | 12.8058 |
| dog | 18114 | 54336 | 0.155731 | 1.79058 | 0.5426249 | 0.0481439 | 2.25427 |
| 龙 | 435680 | 1307182 | 6.25851 | 49.6567 | 18.753684 | 3.42042 | 67.4554 |
| 龙_vrip | 435680 | 1307182 | 6.06857 | 49.8861 | 18.780025 | 3.46152 | 67.4061 |
| 龙_vrip_res2 | 102112 | 303088 | 1.26637 | 10.3709 | 2.9057934 | 0.333104 | 13.3148 |
| 龙_vrip_res3 | 24417 | 71126 | 0.230862 | 2.22082 | 0.7889312 | 0.0935623 | 2.91563 |
| 龙_vrip_res4 | 5743 | 16431 | 0.0387931 | 0.47057 | 0.21363361 | 0.0264042 | 0.63171 |
| ele12a | 50488 | 151470 | 0.53858 | 5.01851 | 1.2827198 | 0.0729709 | 6.25953 |
| ele_fine | 173026 | 519060 | 2.29251 | 19.088 | 3.5553908 | 0.187306 | 23.2524 |
| elk2 | 35062 | 105186 | 0.377056 | 3.53251 | 0.81446343 | 0.0563738 | 4.33083 |
| 生育能力 | 24994 | 75000 | 0.234681 | 2.38572 | 0.7753682 | 0.0600592 | 3.03186 |
| frog | 37225 | 111669 | 0.362007 | 3.89609 | 1.0568452 | 0.153736 | 4.929 |
| 滴水嘴兽 | 25002 | 75000 | 0.236856 | 2.72392 | 0.5215487 | 0.0393314 | 3.23942 |
| 三角钢琴 | 2904 | 8136 | 0.0113828 | 0.175221 | 0.0559794 | 0.00671873 | 0.224557 |
| happy4 | 397569 | 1190310 | 6.89638 | 49.6684 | 12.7328477 | 2.22244 | 64.2245 |
| 快乐 | 543822 | 1631680 | 7.9146 | 66.7996 | 20.8506963 | 3.93399 | 87.752 |
| 心脏 | 23062 | 69132 | 0.20292 | 2.16714 | 0.594186 | 0.0456437 | 2.69486 |
| 七环面 | 79056 | 237294 | 0.969235 | 6.84475 | 3.6109921 | 1.1477 | 10.5038 |
| hh2 | 197245 | 591230 | 2.50199 | 20.7739 | 3.9906898 | 0.190638 | 25.4634 |
| hh | 49374 | 147871 | 0.517598 | 4.89417 | 1.366125 | 0.0889966 | 6.14942 |
| hht | 53754 | 161109 | 0.649063 | 5.36146 | 1.4218338 | 0.111029 | 6.83171 |
| 河马 | 40367 | 121082 | 0.407343 | 4.28243 | 0.9159472 | 0.0617453 | 5.18609 |
| 马3 | 193934 | 581796 | 2.46719 | 21.5099 | 4.4235634 | 0.160395 | 26.2848 |
| 马9 | 89400 | 268187 | 1.02295 | 9.02118 | 2.4578347 | 0.153465 | 11.2601 |
| 马 | 48485 | 145449 | 0.504898 | 5.10887 | 1.2762728 | 0.0669417 | 6.27845 |
| 猎犬2 | 200463 | 600913 | 2.21726 | 21.6746 | 5.4904756 | 0.53687 | 26.9504 |
| 猎犬 | 12578 | 37592 | 0.101115 | 1.15836 | 0.4332293 | 0.0557417 | 1.52113 |
| 人类 _hand | 49374 | 147871 | 0.563042 | 4.92293 | 1.2874627 | 0.084787 | 6.17145 |
| 肱骨 | 35002 | 105000 | 0.368269 | 3.59696 | 0.9222292 | 0.0306101 | 4.42637 |
| ico | 40962 | 122880 | 0.385356 | 4.70133 | 0.2181534 | 0.000810135 | 5.27336 |
| 小猫3 | 54838 | 164508 | 0.564621 | 5.72572 | 0.92238507 | 0.0368314 | 6.8351 |
| 小猫 | 137098 | 411294 | 1.63015 | 15.2895 | 1.9815453 | 0.0444201 | 18.0658 |
| 狮子2 | 65648 | 196696 | 0.761081 | 6.9304 | 1.6788871 | 0.16808 | 8.70898 |
| lion | 184738 | 550783 | 2.2956 | 20.9184 | 3.6100428 | 0.288113 | 25.2353 |
| lucy | 100697 | 302085 | 1.20264 | 10.2482 | 2.5055618 | 0.201589 | 12.8405 |
| 纪念品 | 26277 | 78825 | 0.251496 | 2.57331 | 0.9146878 | 0.0917045 | 3.3258 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| micscope2 | 265410 | 792121 | 3.0882 | 29.8056 | 13.284129 | 3.11965 | 41.5345 |
| 显微镜 | 4146 | 12355 | 0.020966 | 0.407153 | 0.0991788 | 0.0213976 | 0.502653 |
| m | 25631 | 71054 | 0.172642 | 1.23407 | 0.7839142 | 0.511338 | 2.2808 |
| mouse2 | 403652 | 1210944 | 4.65876 | 47.6706 | 20.374639 | 7.6661 | 68.2746 |
| 鼠标 | 6311 | 18921 | 0.0383902 | 0.652853 | 0.23409506 | 0.0430953 | 0.847976 |
| 海王星 | 28052 | 84168 | 0.312728 | 2.7382 | 1.0849813 | 0.230939 | 3.77785 |
| noisydino2 | 23370 | 69872 | 0.235437 | 2.25831 | 0.7979447 | 0.0873257 | 2.91716 |
| noisydino8a | 31497 | 94485 | 0.319535 | 3.00893 | 0.9531643 | 0.0592822 | 3.78642 |
| noisydino | 23370 | 69872 | 0.223275 | 2.25698 | 0.8086116 | 0.0826377 | 2.92994 |
| pig2 | 225282 | 675840 | 2.76833 | 24.2396 | 5.5608734 | 0.502856 | 30.1216 |
| pig | 3522 | 10560 | 0.0212906 | 0.286789 | 0.12774142 | 0.0229754 | 0.395927 |
| pipe | 2820 | 8460 | 0.0142335 | 0.321047 | 0.1244618 | 0.00482331 | 0.396382 |
| rcube2 | 98306 | 294912 | 0.956272 | 11.0931 | 1.2481161 | 0.0166792 | 12.7712 |
| rcube | 24578 | 73728 | 0.184148 | 2.7447 | 0.28438118 | 0.00394089 | 3.11112 |
| 犀牛2 | 128342 | 384790 | 1.48467 | 13.2432 | 3.2735371 | 0.26516 | 16.5302 |
| 犀牛 | 8075 | 24058 | 0.0515384 | 0.736705 | 0.26798898 | 0.0347169 | 0.949532 |
| 摇臂2 | 43213 | 129639 | 0.458789 | 4.56635 | 0.8497291 | 0.0225036 | 5.48141 |
| 摇臂 | 40177 | 120531 | 0.40493 | 4.16544 | 0.8525191 | 0.0211871 | 5.00707 |
| 转子 | 2328 | 7104 | 0.0119959 | 0.178435 | 0.09086232 | 0.0205675 | 0.257278 |
| 骶骨 | 204710 | 614226 | 2.81857 | 22.8123 | 3.8453268 | 0.223871 | 27.7257 |
| 凉鞋2 | 40316 | 119568 | 0.344412 | 3.9165 | 1.8148215 | 0.581826 | 5.66137 |
| 凉鞋3 | 22473 | 66039 | 0.203555 | 2.18896 | 0.782279 | 0.250619 | 3.01813 |
| 凉鞋 | 2636 | 7608 | 0.0122295 | 0.209453 | 0.10131738 | 0.0163152 | 0.288116 |
| 肩胛骨 | 116930 | 350784 | 1.50627 | 12.7815 | 1.6220242 | 0.0559348 | 15.2969 |
| 螺丝刀 | 27152 | 81450 | 0.256815 | 2.90263 | 0.54800159 | 0.022825 | 3.46602 |
| 海碗 | 45095 | 135303 | 0.499152 | 4.7644 | 1.0131984 | 0.0813877 | 5.8672 |
| 船1 | 2526 | 7220 | 0.0123951 | 0.149451 | 0.09039014 | 0.0201223 | 0.226589 |
| 船2 | 38122 | 113189 | 0.339199 | 2.99193 | 1.5399452 | 0.589327 | 4.64253 |
| ship3 | 74544 | 222199 | 0.862242 | 6.60576 | 3.8058408 | 4.91441 | 14.06 |
| 蜘蛛 | 4675 | 13929 | 0.0256434 | 0.364411 | 0.16410401 | 0.0562838 | 0.529353 |
| tomgun2 | 65638 | 196496 | 0.651883 | 5.95249 | 2.2170524 | 0.441005 | 8.03167 |
| tomgun | 4177 | 12305 | 0.0214907 | 0.294542 | 0.1132001 | 0.0142692 | 0.384086 |
| walleye2 | 49518 | 146582 | 0.471817 | 5.38596 | 1.4151858 | 0.535818 | 7.05759 |
| walleye | 3343 | 9286 | 0.0165995 | 0.314689 | 0.08863707 | 0.0095865 | 0.390043 |

**表 4** 使用轻边匹配进行多层骨架化的运行时间测量，基于 the 格罗宁根骨架化基准

## A.3 LEMTS

| 输入 | 顶点 | 边 | 粗化 (s) | 搜索 (s) | 投影 (s) | 打包（秒） | 总计（秒） |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17674 | 124998 | 375000 | 1.37288 | 13.8259 | 6.1536268 | 0.252363 | 18.094 |
| 18020 | 75122 | 225599 | 0.70643 | 3.50639 | 12.0219301 | 9.39802 | 18.3356 |
| 19465 | 103351 | 310989 | 1.21294 | 9.41457 | 14.851733 | 9.8696 | 26.5518 |
| 20304 | 928 | 2790 | 0.00476734 | 0.105907 | 0.051260507 | 0.000753875 | 0.135355 |
| 20306 | 300 | 894 | 0.00249888 | 0.0371973 | 0.024086454 | 0.000285874 | 0.0506875 |
| 21362 | 1828 | 5862 | 0.00991051 | 0.210066 | 0.09045887 | 0.00351191 | 0.270029 |
| 21464 | 9041 | 26817 | 0.0559211 | 0.619575 | 0.69601524 | 0.0423914 | 0.996912 |
| 21747 | 2918 | 8766 | 0.014122 | 0.172405 | 0.29007067 | 0.0304931 | 0.338011 |

## 24 使用局部分隔符进行多层骨架化

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 21788 | 23062 | 69132 | 0.193463 | 2.16468 | 1.28154913 | 0.0426115 | 2.93941 |
| 22081 | 3970 | 11934 | 0.0226519 | 0.380269 | 0.25070048 | 0.0123173 | 0.519388 |
| 22290 | 944 | 2832 | 0.00448527 | 0.139352 | 0.038550872 | 0.000262215 | 0.160744 |
| 22601 | 12554 | 37704 | 0.0975062 | 0.987717 | 0.851674 | 0.100677 | 1.54694 |
| 22669 | 28738 | 86208 | 0.286316 | 3.0546 | 1.04230053 | 0.0200472 | 3.79582 |
| 22701 | 52784 | 158346 | 0.461819 | 6.42563 | 0.44446955 | 0.00207974 | 7.17059 |
| 22711 | 2820 | 8460 | 0.014311 | 0.323639 | 0.29059017 | 0.00287403 | 0.458739 |
| 22808 | 9640 | 28920 | 0.0634594 | 1.03166 | 0.41110239 | 0.00978584 | 1.27532 |
| 22826 | 56143 | 168453 | 0.519806 | 5.99483 | 2.4316612 | 0.0505605 | 7.60915 |
| 23091 | 4120 | 12354 | 0.0194701 | 0.469513 | 0.189625955 | 0.00240466 | 0.575799 |
| 711_dente | 9337 | 28005 | 0.0686141 | 0.998655 | 0.53344135 | 0.00867415 | 1.30378 |
| 犰狳 | 172974 | 518916 | 2.46986 | 19.1877 | 9.4305278 | 0.327339 | 25.8982 |
| 犰狳_vc | 106289 | 318861 | 1.39404 | 11.5249 | 6.2142442 | 0.214773 | 15.7169 |
| asiandragon10a | 954227 | 2862226 | 14.0653 | 105.332 | 83.178314 | 4.52812 | 155.153 |
| asiandragon9a | 231606 | 694743 | 2.8553 | 24.0592 | 16.917632 | 1.13746 | 34.8331 |
| 球形关节 | 137062 | 411180 | 1.67507 | 15.6877 | 3.3411102 | 0.020369 | 18.9884 |
| bird2 | 11718 | 35148 | 0.0805309 | 1.14146 | 0.84050036 | 0.0315955 | 1.59471 |
| bird3 | 46866 | 140592 | 0.50282 | 4.73525 | 2.300044 | 0.0632088 | 6.22924 |
| 鸟4 | 187458 | 562368 | 2.40017 | 20.3605 | 5.5991965 | 0.101529 | 25.3824 |
| bird | 11718 | 35148 | 0.093867 | 1.13195 | 0.81265529 | 0.0290167 | 1.57061 |
| bmw2 | 125424 | 375531 | 1.51884 | 14.236 | 12.5885782 | 6.99201 | 28.1195 |
| bmw | 70536 | 211048 | 0.691096 | 5.92067 | 6.792073 | 2.90765 | 12.4277 |
| 波音 | 3975 | 10811 | 0.0177992 | 0.196806 | 0.26577117 | 0.0488982 | 0.379375 |
| brain2 | 294016 | 882048 | 3.57092 | 33.3187 | 8.5313576 | 0.242088 | 40.9286 |
| 兔子 | 34834 | 104288 | 0.363232 | 3.79656 | 1.37544507 | 0.039346 | 4.79618 |
| bun_zipper | 34834 | 104288 | 0.352807 | 3.84765 | 1.29270687 | 0.0410116 | 4.79398 |
| bun_zipper_res2 | 8260 | 24480 | 0.0529122 | 0.878866 | 0.39589784 | 0.0167918 | 1.11783 |
| bun_zipper_res3 | 2000 | 5775 | 0.010301 | 0.204269 | 0.12545401 | 0.00639514 | 0.279434 |
| bun_拉链_res4 | 518 | 1425 | 0.00291506 | 0.0560733 | 0.04312842 | 0.000641622 | 0.0777027 |
| 鸡肉_高 | 135142 | 405420 | 1.60237 | 15.1774 | 3.5583817 | 0.0341168 | 18.4927 |
| cow10 | 181839 | 545481 | 2.17961 | 19.437 | 8.4240864 | 0.175242 | 25.198 |
| cow2 | 185730 | 557184 | 2.18291 | 19.0676 | 10.1746708 | 0.399085 | 25.9429 |
| cow3 | 252054 | 756090 | 3.47587 | 28.2994 | 9.7904799 | 0.352022 | 36.1018 |
| cow9 | 136988 | 410946 | 1.61981 | 14.357 | 6.3390355 | 0.144272 | 18.8167 |
| cube2 | 98306 | 294912 | 0.888989 | 11.229 | 2.1635131 | 0.0130268 | 13.1271 |
| dog | 18114 | 54336 | 0.157395 | 1.79984 | 1.2110295 | 0.0413447 | 2.50017 |
| 龙 | 435680 | 1307182 | 6.19801 | 50.2347 | 24.6420235 | 3.22507 | 69.4672 |
| 龙_vrip | 435680 | 1307182 | 6.15461 | 50.2762 | 25.094422 | 3.18479 | 69.3239 |
| 龙_vrip_res2 | 102112 | 303088 | 1.19471 | 10.4939 | 4.989363 | 0.250379 | 14.0577 |
| 龙_vrip_res3 | 24417 | 71126 | 0.230291 | 2.25178 | 1.39281064 | 0.0784439 | 3.1478 |
| 龙_vrip_res4 | 5743 | 16431 | 0.037996 | 0.472024 | 0.42511038 | 0.0251362 | 0.713175 |
| ele12a | 50488 | 151470 | 0.53404 | 5.03626 | 2.7621634 | 0.0612321 | 6.73142 |
| ele_fine | 173026 | 519060 | 2.37588 | 19.1998 | 6.5201373 | 0.151195 | 24.563 |
| elk2 | 35062 | 105186 | 0.381521 | 3.61194 | 1.60635173 | 0.0517945 | 4.71299 |
| 生育能力 | 24994 | 75000 | 0.244822 | 2.4305 | 1.8177949 | 0.0559833 | 3.44687 |
| frog | 37225 | 111669 | 0.389961 | 3.90161 | 2.3034716 | 0.128718 | 5.41558 |
| 滴水嘴兽 | 25002 | 75000 | 0.256161 | 2.72948 | 1.14925343 | 0.0307409 | 3.48302 |
| 三角钢琴 | 2904 | 8136 | 0.0110036 | 0.17332 | 0.12285781 | 0.00571585 | 0.257232 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| happy4 | 397569 | 1190310 | 6.93433 | 50.1269 | 16.0581559 | 1.75872 | 65.4557 |
| 快乐 | 543822 | 1631680 | 8.00506 | 66.9676 | 25.5106596 | 3.69385 | 89.5235 |
| 心脏 | 23062 | 69132 | 0.173748 | 2.15771 | 1.35531625 | 0.0421466 | 2.93709 |
| 七环面 | 79056 | 237294 | 0.916259 | 6.89268 | 7.5853171 | 0.811116 | 11.527 |
| hh2 | 197245 | 591230 | 2.47622 | 20.8036 | 7.4632686 | 0.141546 | 26.6708 |
| hh | 49374 | 147871 | 0.549817 | 4.90281 | 2.5108662 | 0.0721409 | 6.57878 |
| hht | 53754 | 161109 | 0.622599 | 5.42222 | 2.9174229 | 0.0837678 | 7.35467 |
| 河马 | 40367 | 121082 | 0.448026 | 4.35356 | 2.0381683 | 0.0544027 | 5.67898 |
| 马3 | 193934 | 581796 | 2.42718 | 21.594 | 8.339175 | 0.119572 | 27.6041 |
| 马9 | 89400 | 268187 | 0.997401 | 8.90845 | 5.3143602 | 0.116107 | 12.1142 |
| 马 | 48485 | 145449 | 0.502791 | 5.17779 | 2.7604771 | 0.0542464 | 6.86374 |
| 猎犬2 | 200463 | 600913 | 2.27636 | 21.788 | 10.7396585 | 0.43615 | 28.8567 |
| 猎犬 | 12578 | 37592 | 0.104805 | 1.18453 | 0.9476307 | 0.05026 | 1.72187 |
| 人类 _hand | 49374 | 147871 | 0.540201 | 4.91299 | 2.5593691 | 0.0726399 | 6.53822 |
| 肱骨 | 35002 | 105000 | 0.353858 | 3.68623 | 1.8732058 | 0.0239917 | 4.85062 |
| ico | 40962 | 122880 | 0.367218 | 4.71673 | 0.2244697 | 0.000601861 | 5.29382 |
| 小猫3 | 54838 | 164508 | 0.556148 | 5.78029 | 1.6071862 | 0.0306763 | 7.14854 |
| 小猫 | 137098 | 411294 | 1.64587 | 15.2583 | 3.3345443 | 0.0400726 | 18.4326 |
| 狮子2 | 65648 | 196696 | 0.697095 | 6.87126 | 3.0194409 | 0.141892 | 8.98981 |
| lion | 184738 | 550783 | 2.26651 | 21.0421 | 6.0643192 | 0.200554 | 26.2529 |
| lucy | 100697 | 302085 | 1.15179 | 10.2905 | 4.5310875 | 0.166912 | 13.5347 |
| 纪念品 | 26277 | 78825 | 0.2703 | 2.57669 | 2.1355263 | 0.0789704 | 3.78361 |
| micscope2 | 265410 | 792121 | 2.99505 | 29.5575 | 21.684033 | 2.22369 | 43.0669 |
| 显微镜 | 4146 | 12355 | 0.0204097 | 0.403439 | 0.19514139 | 0.0205848 | 0.536987 |
| m | 25631 | 71054 | 0.185894 | 1.24326 | 1.4135061 | 0.40673 | 2.45396 |
| mouse2 | 403652 | 1210944 | 4.61188 | 47.9421 | 31.821861 | 5.08602 | 69.811 |
| 鼠标 | 6311 | 18921 | 0.0384411 | 0.662394 | 0.52321536 | 0.0358318 | 0.972776 |
| 海王星 | 28052 | 84168 | 0.308124 | 2.76549 | 2.4149765 | 0.182575 | 4.22093 |
| noisydino2 | 23370 | 69872 | 0.236898 | 2.26549 | 1.7555544 | 0.0726686 | 3.26698 |
| noisydino8a | 31497 | 94485 | 0.30512 | 3.03009 | 2.0297282 | 0.0489356 | 4.20738 |
| noisydino | 23370 | 69872 | 0.239336 | 2.25737 | 1.7335359 | 0.0699845 | 3.25217 |
| pig2 | 225282 | 675840 | 2.69757 | 24.441 | 10.4396925 | 0.39946 | 31.8039 |
| pig | 3522 | 10560 | 0.0200319 | 0.306373 | 0.29780277 | 0.0225411 | 0.477153 |
| pipe | 2820 | 8460 | 0.0143922 | 0.328995 | 0.28918437 | 0.00284439 | 0.457443 |
| rcube2 | 98306 | 294912 | 0.975693 | 11.1107 | 2.1495174 | 0.0140855 | 13.1207 |
| rcube | 24578 | 73728 | 0.186935 | 2.79348 | 0.52618835 | 0.00214423 | 3.2175 |
| rhino2 | 128342 | 384790 | 1.44105 | 13.5052 | 6.3808746 | 0.215573 | 17.6696 |
| 犀牛 | 8075 | 24058 | 0.0539976 | 0.736505 | 0.57325506 | 0.0331398 | 1.06554 |
| 摇臂2 | 43213 | 129639 | 0.463274 | 4.54615 | 1.99677959 | 0.01904 | 5.82642 |
| 摇臂 | 40177 | 120531 | 0.392621 | 4.1855 | 1.82895265 | 0.0141119 | 5.34244 |
| 转子 | 2328 | 7104 | 0.0118651 | 0.181803 | 0.17895838 | 0.0197181 | 0.2917 |
| 骶骨 | 204710 | 614226 | 2.73006 | 22.9159 | 6.8929541 | 0.177687 | 28.8622 |
| 凉鞋2 | 40316 | 119568 | 0.346656 | 4.06497 | 3.8798318 | 0.430996 | 6.39904 |
| 凉鞋3 | 22473 | 66039 | 0.191946 | 2.23852 | 1.6852481 | 0.210204 | 3.33725 |
| 凉鞋 | 2636 | 7608 | 0.0121956 | 0.212033 | 0.1907273 | 0.0166909 | 0.325527 |
| 肩胛骨 | 116930 | 350784 | 1.51976 | 12.8966 | 3.0576659 | 0.0464446 | 15.87 |
| 螺丝刀 | 27152 | 81450 | 0.246062 | 2.97392 | 1.08712076 | 0.0162187 | 3.69605 |
| 海碗 | 45095 | 135303 | 0.470481 | 4.82754 | 2.1035185 | 0.0734754 | 6.33133 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 船1 | 2526 | 7220 | 0.0122548 | 0.160322 | 0.17935572 | 0.0204451 | 0.27645 |
| 船2 | 38122 | 113189 | 0.328891 | 3.04911 | 3.2117841 | 0.473475 | 5.20903 |
| ship3 | 74544 | 222199 | 0.866528 | 6.60474 | 7.1166426 | 3.51893 | 13.8594 |
| 蜘蛛 | 4675 | 13929 | 0.0240519 | 0.385193 | 0.3277413 | 0.0539168 | 0.607832 |
| tomgun2 | 65638 | 196496 | 0.65928 | 6.10129 | 4.5972224 | 0.347689 | 8.98068 |
| tomgun | 4177 | 12305 | 0.0210423 | 0.299244 | 0.23149471 | 0.0134622 | 0.434965 |
| walleye2 | 49518 | 146582 | 0.450784 | 5.3944 | 2.9724058 | 0.528678 | 7.53503 |
| walleye | 3343 | 9286 | 0.015999 | 0.311624 | 0.21487931 | 0.00890859 | 0.43915 |

**表 5** 在 Groningen 骨架化基准测试上，使用轻边匹配和加厚分隔符进行多层骨架化的运行时间测量数据

# B 骨架比较

## B.1 LSS 和 LEM

| 输入 | Δ顶点 | Δ叶节点 | Δ分支 | Δ亏格 | $H$(LEM,LSS) | $H$(LSS,LEM) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 17674 | -214 | -6 | -7 | -2 | 0.242987 | 0.136002 |
| 18020 | -132 | 0 | 2 | 0 | 0.0267864 | 0.0265365 |
| 19465 | -563 | -3 | -35 | 2 | 0.0437028 | 0.0415616 |
| 20304 | 0 | 6 | -1 | -2 | 0.534996 | 0.365925 |
| 20306 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0.13103 | 0.137122 |
| 21362 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0.138338 | 0.0941336 |
| 21464 | -94 | -1 | -1 | 0 | 0.0287383 | 0.0848934 |
| 21747 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0.0232842 | 0.0247181 |
| 21788 | -39 | -4 | 3 | 0 | 0.331518 | 0.253539 |
| 22081 | -41 | 2 | 2 | 0 | 0.0191042 | 0.0364621 |
| 22290 | -4 | -8 | 2 | -1 | 0.724273 | 0.584943 |
| 22601 | -12 | -4 | 6 | 0 | 0.0448619 | 0.0455526 |
| 22669 | -106 | 1 | 1 | 0 | 0.144748 | 0.123809 |
| 22701 | -4 | 2 | -1 | 0 | 0.595045 | 0.353578 |
| 22711 | -10 | 0 | 0 | 0 | 0.0529444 | 0.0371701 |
| 22808 | -76 | 0 | 0 | 0 | 0.0371294 | 0.0360032 |
| 22826 | -35 | 16 | 1 | -4 | 0.263343 | 0.257184 |
| 23091 | -29 | 0 | -1 | 0 | 0.396678 | 0.28389 |
| 711_dente | -10 | -3 | -2 | 0 | 0.474553 | 0.201984 |
| 犰狳 | -149 | -17 | -6 | 0 | 0.220078 | 0.165342 |
| 犰狳_vc | -130 | -19 | -10 | 0 | 0.249026 | 0.0830985 |
| asiandragon10a | 485 | 63 | 27 | 1 | - | - |
| asiandragon9a | -303 | -27 | -3 | 0 | 0.146472 | 0.0809961 |
| 球形关节 | -34 | -9 | -5 | 0 | 0.335091 | 0.128461 |
| bird2 | -40 | -2 | -2 | 0 | 0.0911887 | 0.0434792 |
| bird3 | -66 | -6 | -2 | 0 | 0.102782 | 0.0483936 |
| 鸟4 | -99 | -6 | -2 | 0 | 0.131071 | 0.0457664 |
| bird | -35 | -1 | -1 | 0 | 0.064136 | 0.0591958 |
| bmw2 | -61 | -5 | 5 | 0 | 0.181548 | 0.165533 |
| bmw | -96 | -10 | 0 | 0 | 0.140737 | 0.13919 |
| 波音 | -6 | 4 | 2 | 0 | 0.0700192 | 0.0958734 |
| brain2 | -91 | -51 | -11 | 2 | 0.380483 | 0.274007 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 兔子 | -35 | -13 | -2 | 0 | 0.371084 | 0.218552 |
| 兔子_拉链_res2 | -23 | -5 | -5 | -1 | 0.309635 | 0.228842 |
| 兔子_拉链_res3 | -10 | -2 | -1 | -1 | 0.387004 | 0.224203 |
| 兔子_拉链_res4 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0.237761 | 0.19944 |
| 兔子_拉链 | -34 | -12 | -2 | 0 | 0.366736 | 0.184346 |
| 鸡_高 | -65 | -25 | -10 | 0 | 0.352596 | 0.128001 |
| cow10 | -204 | -2 | 0 | 0 | 0.131613 | 0.0956342 |
| cow2 | -213 | -1 | 0 | 0 | 0.0974546 | 0.0992171 |
| cow3 | -200 | 1 | -2 | 0 | 0.161176 | 0.118553 |
| cow9 | 145 | 15 | 3 | 1 | - | - |
| cube2 | -36 | -1 | -1 | 0 | 0.545168 | 0.322115 |
| dog | -58 | -9 | -4 | 0 | 0.0901815 | 0.058035 |
| 龙 | -277 | -35 | -31 | -2 | 0.221926 | 0.124984 |
| 龙_vrip_res2 | 390 | 174 | 51 | 1 | - | - |
| 龙_vrip_res3 | 307 | 152 | 39 | 1 | - | - |
| 龙_vrip_res4 | 152 | 65 | 24 | 1 | - | - |
| 龙_vrip | 777 | 222 | 71 | 23 | - | - |
| ele12a | -87 | -3 | -1 | 0 | 0.185378 | 0.123558 |
| ele_fine | -196 | -4 | -6 | 0 | 0.187097 | 0.157745 |
| elk2 | -53 | -1 | -2 | 0 | 0.212646 | 0.251487 |
| 生育能力 | -46 | -3 | -1 | 0 | 0.273804 | 0.0874419 |
| frog | -86 | -2 | 0 | 0 | 0.22128 | 0.141774 |
| 滴水嘴兽 | -56 | -19 | -10 | 0 | 0.318482 | 0.147751 |
| 三角钢琴 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0.164264 | 0.190796 |
| happy4 | -589 | -409 | -21 | -100 | 0.199295 | 0.0887277 |
| 快乐 | 982 | 308 | 58 | 44 | - | - |
| 心脏 | -41 | -7 | 5 | 0 | 0.336127 | 0.243949 |
| 七环面 | -245 | 0 | 0 | 0 | 0.0705061 | 0.068063 |
| hh2 | -100 | -1 | -2 | 0 | 0.193822 | 0.189663 |
| hh | -61 | 0 | -3 | 0 | 0.17783 | 0.141936 |
| hht | -86 | 1 | 1 | 0 | 0.149574 | 0.174906 |
| 河马 | -80 | -17 | -12 | 0 | 0.20746 | 0.153264 |
| 马3 | -190 | -2 | -3 | 0 | 0.130538 | 0.123331 |
| 马9 | -148 | -2 | -1 | 0 | 0.110968 | 0.101046 |
| 马 | -95 | -1 | -1 | 0 | 0.112222 | 0.111066 |
| 猎犬2 | -88 | -20 | 1 | 0 | 0.17887 | 0.0557737 |
| 猎犬 | -25 | 0 | 2 | -1 | 0.0854626 | 0.0731542 |
| 人类 _hand | -64 | -3 | -1 | 0 | 0.181229 | 0.0866464 |
| 肱骨 | -60 | -4 | -1 | 0 | 0.0959782 | 0.0774577 |
| 小猫3 | -25 | -5 | 0 | 0 | 0.234016 | 0.267631 |
| 小猫 | -46 | -8 | -1 | 0 | 0.26524 | 0.197679 |
| 狮子2 | -179 | -56 | -17 | 0 | 0.171686 | 0.118093 |
| lion | -246 | -60 | -18 | 1 | 0.206408 | 0.10091 |
| lucy | -175 | -93 | -13 | 0 | 0.163102 | 0.133512 |
| 纪念品 | -72 | -1 | -2 | 0 | 0.326454 | 0.226977 |
| micscope2 | -1447 | 1 | -5 | 0 | 0.0999958 | 0.410087 |
| 显微镜 | -6 | -6 | -5 | 2 | 0.0163587 | 0.526192 |
| mouse2 | -202 | -19 | -5 | 0 | 0.133177 | 0.0925803 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 鼠标 | -2 | -3 | 1 | 0 | 0.0942147 | 0.110964 |
| m | 44 | 15 | 6 | 1 | 0.0580312 | 0.181962 |
| 海王星 | -73 | -16 | -5 | 0 | 0.200924 | 0.0508065 |
| noisydino2 | -59 | -10 | -7 | 0 | 0.0858338 | 0.0586712 |
| noisydino8a | -63 | -3 | -3 | 0 | 0.0876304 | 0.0788599 |
| noisydino | -51 | -6 | -5 | 0 | 0.0871886 | 0.0806523 |
| pig2 | -233 | -3 | -1 | 0 | 0.281781 | 0.13851 |
| pig | -5 | 1 | 1 | 0 | 0.136812 | 0.185151 |
| pipe | -9 | 0 | 0 | 0 | 0.0608525 | 0.0367033 |
| rcube2 | -26 | -2 | -2 | 0 | 0.82234 | 0.37449 |
| rcube | -35 | -1 | -1 | 0 | 0.552556 | 0.481529 |
| 犀牛2 | -190 | -52 | -20 | 0 | 0.285996 | 0.107248 |
| 犀牛 | -28 | -13 | -6 | 0 | 0.207169 | 0.124026 |
| 摇臂2 | -46 | -1 | -1 | 0 | 0.254169 | 0.157712 |
| 摇臂 | -33 | -1 | -1 | 0 | 0.262787 | 0.147716 |
| 转子 | -29 | 3 | 1 | 0 | 0.0792849 | 0.0977375 |
| 骶骨 | -147 | -22 | -12 | -4 | 0.408094 | 0.169373 |
| 凉鞋2 | -315 | 5 | -6 | -2 | 0.136338 | 0.0763513 |
| 凉鞋3 | -95 | 16 | -11 | -6 | 0.148504 | 0.0690598 |
| 凉鞋 | 6 | 4 | 4 | -2 | 0.102921 | 0.0923182 |
| 肩胛骨 | -81 | -10 | -9 | 0 | 0.325198 | 0.170676 |
| 螺丝刀 | -55 | -2 | -1 | 0 | 0.19814 | 0.0929329 |
| 海碗 | -88 | -19 | -5 | -1 | 0.366275 | 0.173513 |
| 船1 | 2 | -9 | 6 | 4 | 0.248314 | 0.187957 |
| 船2 | -79 | 2 | -1 | -6 | 0.196807 | 0.20017 |
| ship3 | -167 | 13 | -5 | -5 | 0.166875 | 0.23599 |
| 蜘蛛 | 12 | -2 | -2 | 0 | 0.0914775 | 0.0515585 |
| tomgun2 | -89 | 51 | -9 | -2 | 0.0771206 | 0.0655649 |
| tomgun | 3 | -5 | -2 | 0 | 0.045953 | 0.0647683 |
| walleye2 | -49 | 0 | 4 | -1 | 0.133166 | 0.041185 |
| walleye | -1 | -10 | 3 | 0 | 0.212548 | 0.0931524 |

**表 6** LSS 和 LEM 生成的骨架之间的比较。 Δ所表示的度量指标是相对于 LSS 的骨架而言的，负值意味着 LSS 的顶点、叶节点、分支等更多。这里， $H$(LEM,LSS) 表示 LEM 到 LSS 的有向豪斯多夫距离除以包围球的半径，反之亦然。

## B.2 LSS 和 LEMTS

| 输入 | Δ顶点 | Δ叶节点 | Δ分支 | Δ亏格 | $H$(LEMTS，LSS) | $H$(LSS，LEMTS) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 17674 | -173 | -9 | -7 | 0 | 0.255787 | 0.140655 |
| 18020 | -141 | 0 | 8 | 0 | 0.0369842 | 0.0388943 |
| 19465 | -416 | 11 | -24 | 3 | 0.0355444 | 0.0382796 |
| 20304 | 1 | 9 | -2 | -2 | 0.331099 | 0.371398 |
| 20306 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0.141557 | 0.175343 |
| 21362 | 3 | 3 | 0 | 0 | 0.0831445 | 0.205519 |
| 21464 | -37 | -1 | -1 | 0 | 0.0287383 | 0.0847032 |
| 21747 | -3 | 0 | 0 | 0 | 0.0122935 | 0.0121544 |
| 21788 | -21 | -1 | 4 | 0 | 0.316065 | 0.241109 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 22081 | -36 | 1 | 0 | 0 | 0.0184155 | 0.0292149 |
| 22290 | -3 | -9 | 1 | -1 | 0.701622 | 0.593782 |
| 22601 | -13 | -8 | 3 | 0 | 0.0505034 | 0.041482 |
| 22669 | -95 | 1 | 1 | 0 | 0.107136 | 0.18301 |
| 22701 | -1 | 2 | 0 | 0 | 0.47311 | 0.324789 |
| 22711 | -4 | 0 | 0 | 0 | 0.0496445 | 0.0350731 |
| 22808 | -79 | 0 | 0 | 0 | 0.0509979 | 0.0508452 |
| 22826 | -23 | 17 | 2 | -2 | 0.142766 | 0.179552 |
| 23091 | -28 | 0 | 0 | 0 | 0.194078 | 0.142976 |
| 711_dente | -9 | -4 | -2 | 0 | 0.461223 | 0.304697 |
| 犰狳 | -108 | -17 | -3 | 0 | 0.218784 | 0.145593 |
| 犰狳_vc | -95 | -17 | -4 | 0 | 0.256114 | 0.149753 |
| asiandragon10a | 664 | 63 | 33 | 1 | - | - |
| asiandragon9a | -204 | -26 | 0 | 0 | 0.149798 | 0.0878272 |
| 球形关节 | -30 | -9 | -5 | 0 | 0.345708 | 0.107102 |
| bird2 | -24 | 0 | 1 | 0 | 0.0646921 | 0.0660722 |
| bird3 | -45 | -6 | -2 | 0 | 0.106499 | 0.0485063 |
| 鸟4 | -79 | -6 | -1 | 0 | 0.154138 | 0.0779006 |
| bird | -29 | -1 | -1 | 0 | 0.0540386 | 0.049263 |
| bmw2 | -49 | -9 | 11 | 3 | 0.204429 | 0.154384 |
| bmw | -25 | 17 | 22 | 1 | 0.143202 | 0.139063 |
| 波音 | 1 | 21 | 2 | -9 | 0.0911128 | 0.0844408 |
| brain2 | -71 | -50 | -5 | -1 | 0.442813 | 0.243605 |
| 兔子 | -29 | -10 | -1 | -1 | 0.381509 | 0.185589 |
| 包子_拉链_res2 | -21 | -6 | -4 | 0 | 0.332003 | 0.206632 |
| 包子_拉链_res3 | -10 | -4 | -2 | 0 | 0.353706 | 0.228834 |
| 包子_拉链_res4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0.18867 | 0.390443 |
| 包子_拉链 | -35 | -10 | -3 | -1 | 0.373315 | 0.186499 |
| 鸡_高 | -56 | -25 | -10 | 0 | 0.345959 | 0.104203 |
| cow10 | -129 | -2 | 0 | 0 | 0.132759 | 0.0965579 |
| cow2 | -132 | -1 | 1 | 0 | 0.145401 | 0.187487 |
| cow3 | -126 | 0 | 0 | 0 | 0.188258 | 0.10453 |
| cow9 | 217 | 15 | 8 | 1 | - | - |
| cube2 | -35 | -1 | -1 | 0 | 0.502338 | 0.334772 |
| dog | -44 | -9 | -4 | 0 | 0.0854458 | 0.072164 |
| 龙 | -222 | -36 | -26 | -3 | 0.255397 | 0.11414 |
| 龙_vrip_res2 | 412 | 170 | 52 | 1 | - | - |
| 龙_vrip_res3 | 323 | 155 | 44 | 1 | - | - |
| 龙_vrip_res4 | 149 | 64 | 22 | 1 | - | - |
| 龙_vrip | 824 | 227 | 74 | 19 | - | - |
| ele12a | -54 | -3 | 0 | 0 | 0.174368 | 0.182298 |
| ele_fine | -158 | -4 | -3 | 0 | 0.202761 | 0.163576 |
| elk2 | -35 | -1 | -1 | 0 | 0.189953 | 0.170198 |
| 生育能力 | -30 | -3 | -1 | 0 | 0.240033 | 0.165239 |
| frog | -65 | -2 | 2 | 0 | 0.213764 | 0.176573 |
| 滴水嘴兽 | -54 | -21 | -11 | 0 | 0.379466 | 0.147014 |
| 三角钢琴 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0.129011 | 0.162077 |
| happy4 | -560 | -384 | -22 | -99 | 0.160472 | 0.100934 |

## 30 使用局部分隔符进行多层骨架化

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 快乐 | 1020 | 334 | 57 | 41 | - | - |
| 心脏 | -21 | -2 | 5 | 0 | 0.326899 | 0.232986 |
| 七环面 | -132 | 0 | 2 | 0 | 0.0975426 | 0.0763043 |
| hh2 | -70 | 2 | -1 | 0 | 0.19555 | 0.170324 |
| hh | -44 | 0 | 0 | 0 | 0.169264 | 0.116556 |
| hht | -60 | 1 | -1 | 0 | 0.177192 | 0.16365 |
| 河马 | -64 | -13 | -6 | 0 | 0.19232 | 0.132381 |
| 马3 | -125 | 0 | -1 | 0 | 0.119945 | 0.110306 |
| 马9 | -96 | -2 | -1 | 0 | 0.113884 | 0.103661 |
| 马 | -66 | -2 | -2 | 0 | 0.0883287 | 0.0851157 |
| 猎犬2 | -54 | -16 | 2 | 0 | 0.190078 | 0.0818325 |
| 猎犬 | -22 | -3 | 1 | 0 | 0.0846057 | 0.0696693 |
| 人类 _hand | -46 | -2 | -1 | 0 | 0.147885 | 0.0809871 |
| 肱骨 | -37 | -6 | -3 | 0 | 0.112056 | 0.0725165 |
| 小猫3 | -18 | -5 | 0 | 0 | 0.221592 | 0.306183 |
| 小猫 | -29 | -5 | 1 | 0 | 0.271288 | 0.201393 |
| 狮子2 | -147 | -55 | -10 | 0 | 0.170177 | 0.121737 |
| lion | -203 | -59 | -19 | 1 | 0.209613 | 0.102484 |
| lucy | -173 | -95 | -17 | 0 | 0.181825 | 0.147681 |
| 纪念品 | -47 | -1 | -2 | 0 | 0.335567 | 0.234729 |
| micscope2 | -1188 | 7 | 5 | 0 | 0.107463 | 0.514925 |
| 显微镜 | -8 | 0 | -6 | -1 | 0.0139525 | 0.73694 |
| mouse2 | -100 | -15 | 2 | 0 | 0.122646 | 0.079835 |
| 鼠标 | -3 | -4 | 1 | 0 | 0.105162 | 0.14296 |
| m | 82 | 44 | 13 | -1 | 0.0563222 | 0.19182 |
| 海王星 | -51 | -15 | -1 | 0 | 0.225756 | 0.0516766 |
| noisydino2 | -59 | -10 | -6 | 0 | 0.0938331 | 0.0921727 |
| noisydino8a | -49 | -3 | -2 | 0 | 0.0855693 | 0.0707761 |
| noisydino | -49 | -4 | -5 | 0 | 0.0789956 | 0.073725 |
| pig2 | -141 | -3 | 0 | 0 | 0.275567 | 0.124252 |
| pig | -8 | 1 | 0 | 0 | 0.124846 | 0.152941 |
| pipe | -4 | 0 | 0 | 0 | 0.0496445 | 0.0350761 |
| rcube2 | -24 | -1 | -1 | 0 | 0.6971 | 0.583039 |
| rcube | -37 | -2 | -2 | 0 | 0.487541 | 0.225971 |
| 犀牛2 | -144 | -46 | -18 | 0 | 0.240027 | 0.211737 |
| 犀牛 | -14 | -7 | -2 | 0 | 0.398101 | 0.126916 |
| 摇臂2 | -36 | 0 | 0 | 0 | 0.240848 | 0.250368 |
| 摇臂 | -25 | -1 | -1 | 0 | 0.212998 | 0.0977234 |
| 转子 | -23 | 7 | 5 | 0 | 0.0882883 | 0.0897212 |
| 骶骨 | -126 | -28 | -8 | -1 | 0.427385 | 0.157824 |
| 凉鞋2 | -241 | 10 | -4 | -2 | 0.0668588 | 0.0665051 |
| 凉鞋3 | -73 | 17 | -10 | -6 | 0.0947857 | 0.0566952 |
| 凉鞋 | 7 | 4 | 3 | -2 | 0.123407 | 0.0806454 |
| 肩胛骨 | -65 | -9 | -8 | 0 | 0.332365 | 0.244491 |
| 螺丝刀 | -36 | -1 | 0 | 0 | 0.203488 | 0.104393 |
| 海碗 | -77 | -20 | -4 | -1 | 0.32748 | 0.206797 |
| 船1 | 2 | -6 | 1 | 2 | 0.215595 | 0.182269 |
| 船2 | -74 | 1 | 1 | 1 | 0.170628 | 0.168638 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ship3 | -164 | -1 | -4 | -2 | 0.151358 | 0.160943 |
| 蜘蛛 | 31 | -2 | -2 | 0 | 0.0956197 | 0.0793788 |
| tomgun2 | -33 | 75 | 7 | -2 | 0.0602913 | 0.032726 |
| tomgun | 10 | -5 | 1 | 1 | 0.0462826 | 0.0491785 |
| walleye2 | -16 | 13 | 18 | -3 | 0.150528 | 0.0501536 |
| walleye | -2 | -11 | 2 | 0 | 0.212825 | 0.0933191 |

**表 7** LSS 和 LEM 生成的骨架之间的比较。 Δ所表示的度量指标是相对于 LSS 的骨架而言的，负值意味着 LSS 的顶点、叶节点、分支等更多。这里， $H$(LEMTS,LSS) 表示 LEMTS 与 LSS 之间的有向豪斯多夫距离除以包围球的半径，反之亦然

# C 局部分隔符的计算

## C.1 动态连通性

为了加快计算局部分隔符时对前沿是否断开的检查，Bærentzen 和 Rotenberg 建议 [5] 使用动态连通性数据结构，例如 Holm、de Lichtenberg 和 Thorup 提出的结构 [16]。该数据结构利用欧拉游览森林的层次结构，使 $O(\log^2 |V|)$ 成为摊销更新时间和查询时间。实践中，当森林规模较小时，停止使用该层次结构可能会更有利。

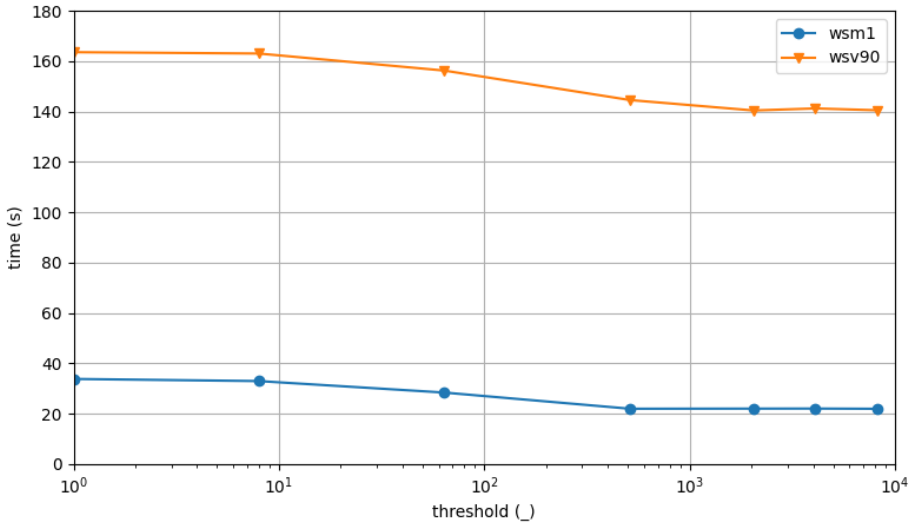



**图 12** 在动态连通性数据结构中采用递增阈值进行局部分隔器骨架化的运行时间。测试输入 wsm1 是网格，而 wsv 是表示相同形状的体素网格。

我们实现了该结构，将其集成到 GEL 的局部分隔器骨架化实现中，并测试了在不同阈值下停止使用层次结构时的性能。测量数据见图 12。我们发现，随着阈值增大，性能会有所提升，直到整个层次结构都处于单一层级。此时，数据结构便简化为维护一个增强欧拉游森林。这可能是由于计算局部分隔符时特定的访问

模式所致：边只插入和删除一次，而且早期插入的分隔符通常会比最近插入的分隔符更早被删除。

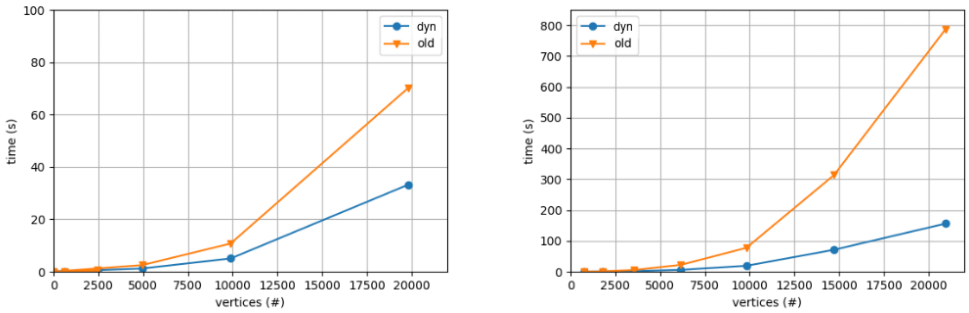



**图 13** 使用动态连通性前后（旧方法与 dyn 方法）局部分隔器骨架化的运行时间。左侧展示网格上的性能，右侧展示体素上的性能。

我们还考察并比较了使用动态连通性时的运行时间。在图 13 中，我们将旧方法与使用动态连通性的方法（dyn）进行了比较，发现无论是网格还是体素，性能都有显著提升。值得注意的是，体素上的提升似乎更为明显。

## C.2 分隔集最小化分析

给定图 $G$ 上的局部分隔符 $\Sigma$，该图有 $n$ 个顶点和 $m$ 条边，我们说明将 $\Sigma$最小化所需的时间。

为了平滑顶点的属性，我们必须考虑该顶点邻居的位置，因此时间复杂度与该顶点的度成正比。由于我们对分隔符中的每个顶点都执行此操作，所需时间与分隔符中各顶点度数之和成正比；根据握手引理，该和不超过分隔符邻域中的边数的两倍。设 $m'$ 为 $\Sigma$的闭邻域中的边数，则平滑所需时间为 $O(m')$。平滑后计算启发式方法，每个顶点需要 $O(1)$时间，总计需要 $O(|\Sigma|)$时间。随后，我们按照平滑后的属性对顶点进行排序，耗时 $O(|\Sigma|\log |\Sigma|)$。

排序后，我们迭代地将顶点从分隔符移至前沿连通分量。最坏情况下，每次迭代只移动常数个顶点，因此对包含 $O(|\Sigma|)$ 个顶点的集合，总共需要进行$O(|\Sigma|)$ 次迭代。假设将一个顶点从一个集合移至另一个集合所需的时间为常数，则此步骤需要 $O(|\Sigma|^2)$ 时间。

因此，总时间为 $O(|\Sigma|^2 + m')$。同样，我们可以保守地将两个集合的大小都界定为图的规模，即 $|\Sigma| = O(n)$ 和 $m' = O(m)$，同时也有 $m = O(n^2)$。最坏情况下，缩小单个分隔符所需的时间上界为 $O(n^2)$。