arXiv:2303.07258v1 [math.DS] 13 Mar 2023

# 具有一个或两个临界胞腔的曲面上最优离散梯度向量场的结构

Svitlana Bilun、Maria Hrechko、Olena Myshnova 和 Alexandr Prishlya k

2023年3月14日

**摘要**

我们描述了二维圆盘（1 个胞腔）、二维球面（2 个胞腔）、圆柱面（2 个胞腔）和莫比乌斯带（2 个胞腔）的正则 CW 复形上，具有最少临界胞腔的离散向量场（离散莫尔斯函数）的所有可能结构。

## 引言

拓扑图论有助于描述曲面上函数和流的拓扑结构。这些结构由离散结构给出，即带有附加信息的图。这些图通常嵌入在曲面中，由此得到的不变量是离散莫尔斯函数。这类函数构成的集合上存在一种自然的等价关系，Forman 在论文 [6] 中首次探讨了这种关系。与此同时，等价类由离散梯度向量场给出。在最一般的情形下，这类向量场和函数是在正则胞腔复形上考察的。在给定空间中，最有用的离散函数和向量场，是在所有可能的函数和向量场中，定义于胞腔数最少的正则胞腔分解上的、临界胞腔数最少的那些。这类向量场称为最优向量场。因此，研究这类向量场的结构十分重要。

Kronrod [14] 和 Reeb [37] 的论文中，将图用作函数的拓扑不变量，研究了可定向流形； [17] 研究了不可定向二维流形； [5, 12, 13] 研究了带边界的流形； [31] 研究了非紧流形。

一般而言，莫尔斯向量场（即没有闭轨道的 Morse–Smale向量场）是莫尔斯函数的梯度场。如果固定函数在奇点处的取值，那么该向量场就确定了函数 [17, 39] 的拓扑结构。因此，Morse–Smale向量场的分类与函数的分类密切相关。

闭二维流形上光滑函数的拓扑分类也在 [13, 12, 31, 中进行了研究
30, 35, 17, 22, 45, 42, 2, 38], 在带边界的二维流形上（见 [11, 13] ），以及在闭三维流形上（见 [29]）。
在 [15, 18, 19, 21, 36, 1, 26, 20, 40, 44, 27, 28, 34], 中，研究者得到了闭二维流形上的流的分类；在[16, 20, 26, 23, 33, 34] 中，得到了带边界流形上的流的分类。 [41, 43, 32, 22, 44, 24, 25, 9, 4, 3]研究了三维流形上Morse–Smale向量场的拓扑性质。

主 要图及其在曲面中的嵌入的不变量可在 [21, 8, 10, 7 中找到 ].
本文的主要目的是研究曲面上具有一个或两个临界胞腔的最优离散梯度向量场的拓扑性质。这些向量场在胞腔数最少的正则胞腔复形上具有最少数量的临界胞腔。

第一节介绍离散莫尔斯函数和离散梯度向量场的基本定义及拓扑性质。

在第二节中，我们描述二维圆盘上所有可能的最优离散向量流结构；第三节讨论二维球面上的情形，第四节讨论圆柱面上的情形，第五节讨论莫比乌斯带上的情形。

# 1 离散莫尔斯函数与向量场

如果给定胞腔复形（或单纯复形） $K$，那么离散函数就是一个将每个单形映射到一个实数的映射。如果在流形 $M$上给定胞腔复形（三角剖分）的结构，那么对于函数 $f: M \to \mathbb{R}$，我们取每个胞腔（单形）中心处的函数值。由此，我们构造出一个离散莫尔斯函数。反过来，如果在一个经过三角剖分的流形上给定莫尔斯函数，那么它就确定了每个单形中心处的函数值。考虑第一次重心细分。这样，我们便在每个顶点处都有函数值。利用线性性，我们将函数延拓到每个单形上，从而得到流形上的分片线性函数。借助光滑化，可以由此得到一个光滑函数。对于正则笼复形，也可以进行类似的构造。

Forman方法以离散梯度流的运用为基础，最初在 [6]中提出。这些设计更易于构建算法并在计算机上实现。

在 $K$ 复形的单形（胞腔）集合上，我们引入序关系：

$$\tau < \sigma \Leftrightarrow \tau \subset \sigma, \tau \neq \sigma.$$

我们用 $|A|$ 表示集合 $A$中元素的个数。

若对任意维数为$k$的单形（胞腔） $\sigma$，满足以下条件，则称函数 $f: K \to \mathbb{R}$ 为离散莫尔斯函数：

$$|\tau^{k-1} : \tau^{k-1} < \sigma, f(\tau^{k-1}) \geq f(\sigma)| + |\tau^{k+1} : \tau^{k+1} > \sigma, f(\tau^{k+1}) \leq f(\sigma)| \leq 1.$$

$$|\tau^{k-1} : \tau^{k-1} < \sigma, f(\tau^{k-1}) \geq f(\sigma)| + |\tau^{k+1} : \tau^{k+1} > \sigma, f(\tau^{k+1}) \leq f(\sigma)| = 0.$$

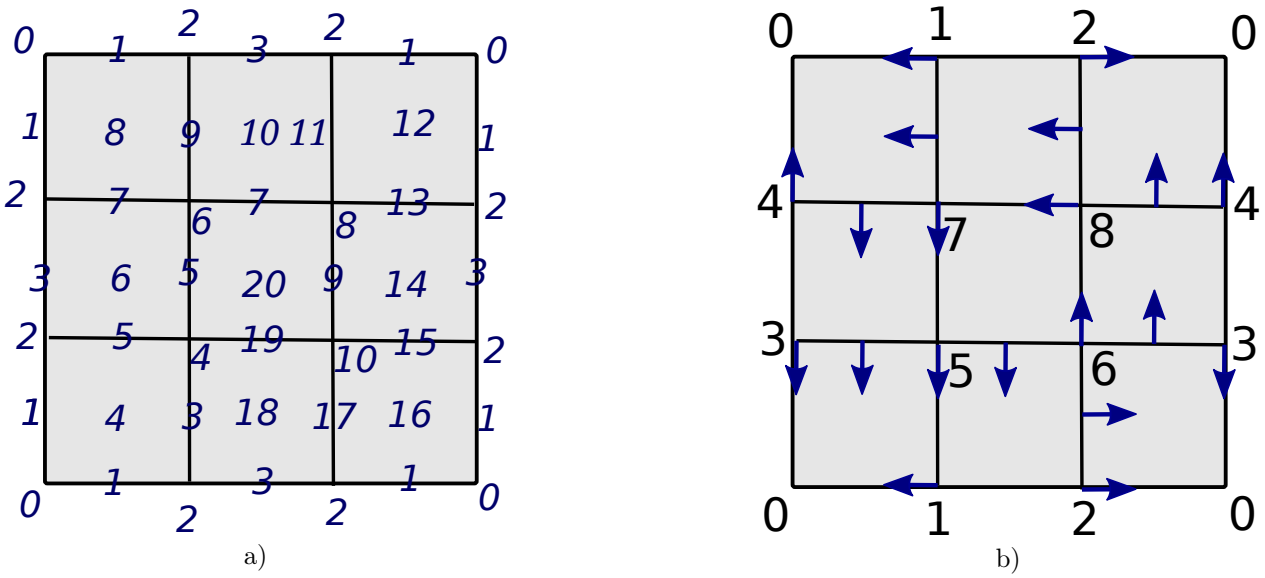
非临界单形称为正则单形。

如果离散莫尔斯函数在不同的临界单 p形上取不同的值，则称其为简单的 p单形（胞腔）.

复形 $K$上的离散向量场是由满足条件 $V = \{(\sigma, \tau)\}$且 $\sigma$， $\tau \in K$、 $\sigma < \tau$、$dim\sigma =$维数$\tau + 1$ 的配对构成的集合，其中复形的每个单形（胞腔）至多属于一个配对。每个这样的配对称为一个向量，并用一支从第一个单形（胞腔）的中心指向第二个单形（胞腔）中心的箭头表示。

离散莫尔斯函数的梯度向量场 $V_f$ 称为该场

$$V_f = \{\sigma^{(k)}, \tau^{(k+1)} : \sigma^{(k)} < \tau^{(k+1)}, f(\sigma^{(k)}) \geq f(\tau^{(k+1)}).$$




a) b)

图 1：环面上的离散莫尔斯函数 a) 及其梯度场 b)

图 1 展示了环面上的离散莫尔斯函数及其梯度场。临界胞腔包括：1）顶点 0；2）边 $\{1,2\}$ 和 $\{3,4\}$；3）2-胞腔 $[5,6,8,7]$。

临界胞腔（单形）的指标是其维数。

$T$离散向量场的梯度路径 $V$ 称为一列胞腔（单形），

$$\tau_0, \sigma_1, \tau_1, \ldots, \sigma_{m-1}, \tau_{m-1}, \sigma_m$$

满足

$$(\sigma_i, \tau_i) \in V, \sigma_i < \tau_{i-1}, 1 \leq i \leq m, \dim \sigma_0 = \dim \sigma_m.$$

1 b) 中梯度路径的示例：1）从 $\{1,2\}$ 到 $\{0\}$ 的两条路径—— $\{1,2\}, \{1\}, \{0,1\}, \{0\}$ 和$\{1,2\}, \{2\}, \{0,2\}, \{0\}$；2）从 $[5,6,8,7]$ 到 $\{1,2\}$ 的两条路径—— $[5,6,8,7], \{5,6\}, [1,2,6,5], \{1,2\}$ 和 $[5,6,8,7], \{5,6\}, [1,2,6,5], \{2,6\}, [2,0,3,6], \{3,6\}, [6,3,4,8], \{8,4\}, [8,4,0,2], \{2,8\}, [8,2,1,7], \{2,1\}$。

$$\tau < \sigma \Leftrightarrow \tau \subset \sigma, \tau \neq \sigma.$$

如果存在一个保持胞腔对的 CW 复形同构，则称两个离散向量场同构。

我们的目标是 描述具有一个或两个临界胞腔的流在同构意义下的所有可能结构 .

# 2 二维圆盘上的离散向量场

由于二维圆盘与一个点同伦等价，因此其上的任意离散梯度向量场都将具有一个临界零胞腔。二维圆盘的最优胞腔划分是一个三角形——3 个顶点、3 条边和一个面（不能再少，因为曲面的边界上至少要有三个顶点和三条边，才能满足正则胞腔复形的定义）。为指定二维圆盘上的离散向量场，我们采用图2中的胞腔编号和记法。

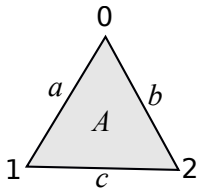



图2：二维圆盘上胞腔的编号

由于二维胞腔不是临界的，因此它属于一对胞腔。无妨假设这是一对 cA。注意，存在一种保持这对胞腔不变的轴对称。考虑到这一点，选择临界零胞腔有两种可能：0 或 1。第一种情况下，我们会得到如下向量场：

$$V_1 = \{1a, 2b, cA\}.$$

第二种情况下，向量场为

$$V_2 = \{0a, 2b, cA\}.$$

因此，以下结论成立。

**定理1** 二维圆盘上的非同构最优离散向量场的数量等于 *2*。

# 3 二维球面上的离散向量场

根据离散莫尔斯理论，二维球面上的最优离散梯度向量场有一个临界零胞腔和一个临界二维胞腔。球面的最优正则 CW 复形有四个零维胞腔、六个一维胞腔和四个二维胞腔。我们将正则胞腔划分中的胞腔按图3所示进行标记。

不失一般性，我们假设临界二维胞腔是胞腔 $B$。如果与其相邻的三个一维胞腔（$e$、$d$、$f$）都没有与二维胞腔配对，那么它们就会构成一个环，这是不可能的。因此，有三种情况：

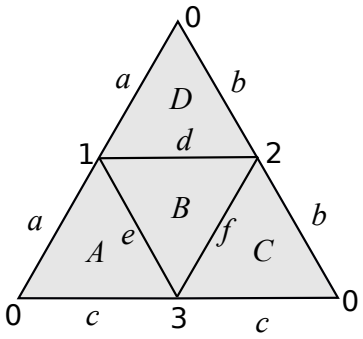



图3：2-球面上胞腔的编号

可能：1）其中一个胞腔与某个二维胞腔配对（$eA$）；2）有两对（$eA$和 $fC$）；3）有三对（$eA$、 $fC$和 $dD$）。在第一种情况下，有 2 种变体：

$$V_{1-3} = \{\ldots, eA, aD, cC\},$$

$$V_{4-7} = \{\ldots, eA, aD, bC\}.$$

我们用 $V_{1-3}$ 表示以下三个向量场：
在第一种情况下，由于对称性，临界顶点有 3 种选择方式：

$$V_1 = \{2b, 1d, 3f, eA, aD, cC\},$$

$$V_2 = \{0b, 2d, 3f, eA, aD, cC\},$$

$$V_3 = \{0b, 1d, 3f, eA, aD, cC\}.$$

在第二种情况下，我们有 4 个向量场：

$$V_4 = \{1d, 2f, 3c, eA, aD, bC\},$$

$$V_5 = \{0c, 2d, 3f, eA, aD, bC\},$$

$$V_6 = \{0c, 1d, 3f, eA, aD, bC\},$$

$$V_7 = \{0c, 1d, 2f, eA, aD, bC\}.$$

在第二种情况下

$$V_{8-11} = \{\ldots, eA, fC, aD\}$$

临界顶点的位置有四种选择方式。
在第三种情况下

$$V_{12-13} = \{\ldots, eA, dD, fC\}$$

临界顶点的位置有两种方式。因此，以下结论成立。

**定理2** 二维球面上的非同构最优离散向量场的数量等于*13* .

# 4 圆柱面上的离散向量场

圆柱面上胞腔复形的最优结构由三个沿圆形粘合在一起的二维胞腔（四边形）组成。复形中的所有顶点都相同。我们将临界顶点标记为0。沿着粘合处切开圆柱面，并在该顶点处结束切口，得到一个被分成三个正方形的矩形。我们按照图4为其中的胞腔编号。注意，最优向量场有一个临界顶点和一条临界边。胞腔复形到自身存在一个非平凡同构，该同构固定临界顶点。在图3中，它对应于关于竖直轴的轴对称。

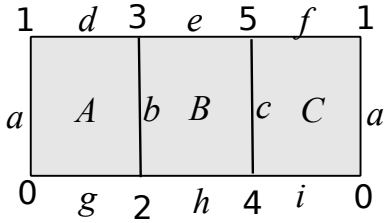



图4：圆柱面上胞腔的编号

向量场由包含二维胞腔的配对以及临界1-胞腔的位置确定。以下是可能的选项：

$$V_{1-3}=\{\ldots,aA,bB,iC\},\ V_{4-6}=\{\ldots,aA,bB,fC\},\ V_{7-9}=\{\ldots,gA,bB,aC\},\ V_{10-12}=\{\ldots,gA,bB,iC\},$$

$$V_{13-15}=\{\ldots,gA,bB,cC\},\quad V_{16-20}=\{\ldots,gA,bB,fC\},\quad V_{21-23}=\{\ldots,dA,bB,aC\},$$
$$V_{24-28}=\{\ldots,dA,bB,iC\},\quad V_{29-31}=\{\ldots,dA,bB,cC\},\quad V_{32-34}=\{\ldots,dA,bB,fC\},$$
$$V_{35-39}=\{\ldots,gA,eB,aC\},\quad V_{40-44}=\{\ldots,gA,eB,iC\},\quad V_{44-49}=\{\ldots,gA,eB,cC\},$$
$$V_{50-54}=\{\ldots,gA,eB,fC\},\quad V_{55-57}=\{\ldots,aA,eB,cC\},\quad V_{58-60}=\{\ldots,aA,eB,fC\},$$
$$V_{61-63}=\{\ldots,bA,eB,cC\},\quad V_{64-66}=\{\ldots,bA,eB,fC\},\quad V_{67-69}=\{\ldots,dA,eB,fC\},$$
$$V_{70-72}=\{\ldots,gA,hB,aC\},\quad V_{73-75}=\{\ldots,gA,hB,iC\},\quad V_{76-78}=\{\ldots,gA,hB,cC\},$$
$$V_{79-83}=\{\ldots,gA,hB,fC\},\quad V_{84-86}=\{\ldots,aA,hB,cC\},\quad V_{87-91}=\{\ldots,aA,hB,fC\},$$
$$V_{92-94}=\{\ldots,bA,hB,cC\},\quad V_{95-99}=\{\ldots,bA,hB,fC\},\quad V_{100-104}=\{\ldots,dA,hB,fC\}.$$

因此，以下结论成立。

**定理3** 圆柱面上的非同构最优离散向量场的数量 $S^1\times[0,1]$ 等于*104*。

# 5 莫比乌斯带上的离散向量场

莫比乌斯带的情形与圆柱面的情形类似。矩形的轴对称被中心对称取代。胞腔的编号如图4所示。

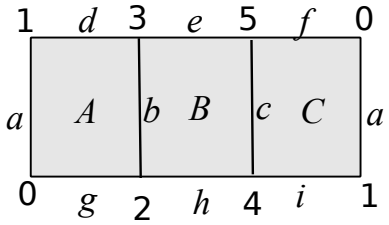



图5：莫比乌斯带上胞腔的编号

向量场由包含二维胞腔的配对以及临界1-胞腔的位置决定。可能的情况如下：

$$V_{1-4}=\{\ldots,aA,bB,iC\},\ V_{5-8}=\{\ldots,aA,bB,fC\},\ V_{9-12}=\{\ldots,gA,bB,aC\},\ V_{13-16}=\{\ldots,gA,bB,iC\},$$

$$V_{17-20}=\{\ldots,gA,bB,cC\},\quad V_{21-24}=\{\ldots,gA,bB,fC\},\quad V_{25-28}=\{\ldots,dA,bB,aC\},$$
$$V_{29-32}=\{\ldots,dA,bB,iC\},\quad V_{33-36}=\{\ldots,dA,bB,cC\},\quad V_{37-40}=\{\ldots,dA,bB,fC\},$$

$$V_{41-44} = \{\dots, gA, eB, aC\},\quad V_{45-50} = \{\dots, gA, eB, iC\},\quad V_{51-54} = \{\dots, gA, eB, cC\},$$
$$V_{55-58} = \{\dots, gA, eB, fC\},\quad V_{59-62} = \{\dots, aA, eB, cC\},\quad V_{63-66} = \{\dots, aA, eB, iC\},$$
$$V_{58-70} = \{\dots, aA, eB, fC\},\quad V_{71-74} = \{\dots, bA, eB, cC\},\quad V_{75-78} = \{\dots, bA, eB, iC\},$$
$$V_{79-82} = \{\dots, bA, eB, aC\},\quad V_{83-86} = \{\dots, bA, eB, fC\},\quad V_{87-90} = \{\dots, dA, eB, aC\},$$
$$V_{91-94} = \{\dots, dA, eB, iC\},\quad V_{95-98} = \{\dots, dA, eB, fC\},\quad V_{99-102} = \{\dots, dA, eB, cC\}.$$

因此，以下结论成立。

**定理 4** 圆柱面上非同构最优离散向量场的数量为 *102*。

## 结论

本文的结果证明了所提出的不变量（判别图和码）在对具有一个奇点的二维圆盘上的流进行分类时的有效性。我们希望这些不变量也能用于在其他曲面上构造类似的不变量，以研究具有大量奇点的流。

## 参考文献


[1] O. Akchurin、S. Bilun 和 A. Prishlyak。作为 2-球面三角剖分 1-骨架的三色图。*arXiv* 预印本 *arXiv:2209.05737*，2022。doi:10.48550/ARXIV.2209.05737。[2] S. Bilun 和 A. Prishlyak。闭曲面上的闭莫尔斯 1-形式。*Visn., Mat. Mekh., Kyv. Univ.Im. Tarasa Shevchenka*，2002(8):77–81，2002。[3] S. Bilun 和 A. Prishlyak。3-球面图中具有两个鞍点的莫尔斯流可视化。*arXiv* 预印本 *arXiv:2209.12174*，2022。doi:10.48550/ARXIV.2209.12174。[4] S. Bilun、A. Prishlyak 和 A. Prus。3-流形边界上具有不动点的莫尔斯流。*arXiv* 预印本 *arXiv:2209.04019*，2022。doi:10.48550/arXiv.2209.04019。[5] A.V. Bolsinov 和 A.T. Fomenko。可积哈密顿系统：几何、拓扑、分类。CRC 出版公司，博卡拉顿、伦敦、纽约、华盛顿哥伦比亚特区，2004。724 页。[6] R. Forman。胞腔复形的莫尔斯理论。《数学进展》。134 (1): 90–145。1998。doi: 10.1006/aima.1997.1650。[7] J. Gross 和 T. Tucker。拓扑图论。Wiley，1987。[8] F. Harary。图论。Westview出版社，1969。[9] Ch. Hatamian 和 A. Prishlyak。亏格为 1 和 2 的不可定向 3-流形上的海加德图与最优莫尔斯流。《国际几何中心论文集》，13(3):33–48，2020。doi:10.15673/tmgc.v13i3.1779。[10] P. Hilton 和 S. Wylie。同调论：代数拓扑导论。剑桥大学出版社，1968。[11] B. I. Hladysh 和 A. O. Pryshlyak。曲面边界上具有非退化临界点的函数。《乌克兰数学杂志》，68(1):29–41，2016。doi:10.1007/s11253-016-1206-5。[12] B.I. Hladysh 和 A.O. Prishlyak。二维流形边界上具有孤立临界点的函数的拓扑。*SIGMA*。《对称性、可积性与几何：方法与应用》，13:050，2017。doi:0.3842/SIGMA.2017.050。[13] B.I. Hladysh 和 A.O. Prishlyak。带边界定向曲面上的简单莫尔斯函数。《数学物理、分析与几何杂志》，15(3):354–368，2019。doi:10.15407/mag15.03.354。

[14] A.S. Kronrod。二元函数。俄罗斯数学评论，5:24–134，1950。[15] Z. Kybalko、A. Prishlyak 和 R. Shchurko。闭曲面上最优莫尔斯流的轨道等价。国际几何中心学报，11(1):12–26，2018。doi:10.15673/tmgc.v11i1.916。[16] M. Losieva 和 A. Prishlyak。二维圆盘边界上具有奇点的莫尔斯–斯梅尔流的拓扑。Pr. Mizhnar. Heometr. Tsentr，9(2):32–41，2016。doi:10.15673/tmgc.v9i2.279。[17] D.P. Lychak 和 A.O. Prishlyak。不可定向曲面上的莫尔斯函数与流。泛函分析与拓扑方法，15(03):251–258，2009。[18] A.A. Oshemkov 和 V.V. Sharko。二维流形上莫尔斯–斯梅尔流的分类。数学文集，189(8):93–140，1998。[19] M.M. Peixoto。关于二维流形上流的分类。《动力系统》（巴伊亚大学研讨会论文集，萨尔瓦多，巴西，1971），第389–419页，1973。[20] A. Prislyak 和 A. Prus。带孔环面上的莫尔斯–斯梅尔流。国际几何中心学报，10(1):47–58，2017。doi:10.15673/tmgc.v1i10.549。[21] A.O. Prishlyak。关于嵌入曲面中的图。俄罗斯数学评论，52(4):844，1997。doi:10.1070/RM1997v052n04ABEH002074。[22] A.O. Prishlyak。流形上无闭轨道的莫尔斯–斯梅尔向量场。数学札记，71(1-2):230–235，2002。doi:10.1023/A:1013963315626。[23] A.O. Prishlyak。分层集上具有孤立不动点的流的指标和。《数学物理、分析与几何杂志》 /《数学物理、分析与几何杂志》/, 10(1):106–115，2003。[24] A.O. Prishlyak。莫尔斯–斯梅尔流的完备拓扑不变量与3-流形的把手分解。基础与应用数学，11(4):185–196，2005。[25] A.O. Prishlyak。莫尔斯–斯梅尔流的完备拓扑不变量与3-流形的把手分解。数学科学杂志，144:4492–4499，2007。[26] A. Prishlyak 和 M. Loseva。姑娘曲面上最优流的拓扑结构。《国际几何中心论文集》，15(3-4):184–202，2022。[27] A. Prishlyak、A. Prus 和 S. Guraka。球面上的集体动力学流。国际几何中心学报，14(1):61–80，2021。doi:10.15673/tmgc.v14i1.1902。[28] A. Prishlyak 和 M. Loseva。闭可定向曲面上具有集体动力学的最优流的拓扑。《国际几何中心论文集》，13(2):50–67，2020。doi:10.15673/tmgc. v13i2.1731。[29] A.O. Prishlyak。3-流形上莫尔斯函数的等价。泛函分析与拓扑方法，5(3):49–53，1999。[30] A.O. Prishlyak。取值于直线和圆上的曲面莫尔斯函数的共轭。《乌克兰数学杂志》，52(10):1623–1627，2000。doi:10.1023/A:1010461319703。[31] A.O. Prishlyak。平面上具有有限个奇点的莫尔斯函数。Meth. Funct. Anal. Topol，8:75–78，2002。[32] A.O. Prishlyak。三维流形上带有 beh2 的莫尔斯–斯梅尔向量场的拓扑等价。《乌克兰数学杂志》，54(4):603–612，2002。[33]A.O. Prishlyak。带边界二维和三维流形上 m-场的拓扑分类。《乌克兰数学杂志》，55(6):966–973，2003。

[34] A.O. Prishlyak 和 M.V. Loseva. 曲面边界上具有奇点的最优莫尔斯–斯梅尔流. 数学科学杂志, 243:279–286, 2019.[35] A.O. Prishlyak 和 K.I. Mischenko. 带边界非紧曲面的分类. 泛函分析与拓扑方法, 13(01):62–66, 2007年.[36] A.O. Prishlyak 和 A.A. Prus. 带边界紧曲面上的莫尔斯流三色图.数学科学杂志, 249(4):661–672, 2020. doi:10.1007/s10958-020-04964-1.[37] G. Reeb. 关于完全可积的 Pfaff 形式或数值函数的奇点. 巴黎科学院院报, 222:847—849, 1946.[38] V.V. Sharko. 流形上的函数：代数与拓扑方面。, 数学专著译丛第131卷。美国数学会，普罗维登斯，RI，1993.[39] S. Smale. 关于梯度动力系统. 数学年刊, 74:199–206, 1961.[40] В.М. Кузаконь、В.Ф. Кириченко 和 О.О. Пришляк. 光滑流形：几何与拓扑方面。乌克兰国家科学院数学研究所论丛.—*2013.—97.—500*页，2013.[41]А.О. Пришляк. 三维流形上具有有限条奇异轨道的莫尔斯–斯梅尔向量场。乌克兰国家科学院通报, (6):43–47, 1998.[42]А.О. Пришляк. 莫尔斯函数的共轭。现代数学若干问题。乌克兰科学院数学研究所，基辅, 1998.[43] А.О. Пришляк. 三维流形上函数与莫尔斯–斯梅尔向量场的拓扑等价性。拓扑与几何。乌克兰数学大会论文集, 第29–38页, 2001.[44]А.О. Пришляк. 三维流形上无闭轨道的莫尔斯–斯梅尔向量场。数学札记, 71(2):254–260, 2002年.[45] О.О. Пришляк. 流形的拓扑学。基辅大学，2015。

基辅塔拉斯·舍甫琴科国立大学 Svitlana Bilun 电子邮箱：bilun@knu.ua *Orcid ID*：0000-0003-2925-5392
Maria Hrechko 电子邮箱：mariyagr2808@gmail.com *Orcid ID*：0009-0005-5347-0342 Olena
Myshnova 电子邮箱：myshnova.olena@gmail.com *Orcid ID*：0009-0001-8808-0038
AlexandrPrishlyak 电子邮箱：prishlyak@knu.ua *Orcid ID*：0000-0002-7164-807X