arXiv:2303.07285v1 [econ.TH] 13 Mar 2023

不稳定性的动态

César Barilla* ⓡ Duarte Gonçalves†

2023年3月10日

摘要

我们研究了一种模型，其中两个利益对立的参与者试图通过制造不稳定的行动改变现状。我们表明，即使制造不稳定需要付出代价，且不会带来短期收益，不稳定仍可用于实现更持久的长期变化。在均衡中，当现状越有利于某个参与者时，该参与者制造的不稳定性就越低。均衡总是包含一个稳定状态区域，在该区域内现状得以维持。随着参与者的威胁能力增强，这一区域会缩小，最终收缩为单一稳定状态，并由一种威慑机制支撑。这里存在长期的路径依赖和不平等：尽管不稳定最终会导向稳定状态，但它通常会使最初处于弱势的参与者落入对其最不利的状态。

关键词： 不稳定性；社会冲突；随机博弈。**JEL分类：** C72, C73, C78, D74.

* 哥伦比亚大学经济系；cesar.barilla@columbia.edu.

† 伦敦大学学院经济系；duarte.goncalves@ucl.ac.uk。我们感谢 Jean-Paul Carvalho、Yeon-Koo Che、Joan Esteban、Teresa Esteban-Casanelles、Laura Doval、Navin Kartik、Elliot Lipnowski、Frederic Malherbe、Margaret Meyer、Christopher Sandmann、Ludvig Sinander 和 Yu Fu Wong 提供的宝贵意见与讨论。我们也感谢牛津2021年东南理论节、2021年SMYE 和 SEA 2022年年会的研讨会参与者提供的有益反馈。最后，我们感谢编辑 Simon Board 和两位匿名审稿人提出的建议。

不稳定性是冲突的重要组成部分。两个政党为了争取选民支持而持续竞争，可能会通过泄露谣言或采取引发争议的过激立场，掀起难以预测的变化。两个国家争夺争议领土时，可能采取高风险策略；这些策略往往成败难料：煽动内部叛乱、发起宣传活动，或诉诸国际组织。叛乱团体往往试图制造骚动，希望从动荡局势中获利。有时，某些行动除了增加不确定性之外，并无可预测的效果；不稳定性本身也就成了达到目的的手段：利益截然对立的团体可以有策略地制造不稳定，以推进其议程。

本文研究在冲突情境中将不稳定性用作手段的战略影响。我们考虑这样一个模型：两位前瞻性参与者获得有界的常和总流量收益。在任何时刻，参与者都可以付出成本，提高决定现状收益分配的过程的波动性。具体而言，不稳定性在除极端状态之外的所有位置都会产生对称影响；在极端状态下，它只能使过程朝着较不极端的状态反射。

我们表明，在这类情境中，不稳定性是一种有效手段。如果参与者唯一能做的，就是以一种使变化有同等可能带来有利或不利结果的方式破坏现状的稳定，那么不稳定性在短期内无法带来任何优势。此外，即使不稳定性可能使参与者处于更有利的境况，持相反观点的其他人也可能以进一步制造不稳定来回应，从而进一步削弱采取行动的动机。但当参与者无所失去时，不稳定性似乎是反对极端不利现状的一种自然手段。我们表明，即使短期内收益与损失发生的可能性相同，制造不稳定所造成的负面后果存在下界，也能带来期权价值，而耐心的参与者可以利用这种价值。

我们确定了参与者最优（马尔可夫）行为的两个关键性质。首先，对于对手的任何策略，最优波动率策略都由一种阈值机制刻画：在比目标“满意”状态更不利的情形下，参与者会持续产生正波动率；在更有利的情形下，则不会造成不稳定性。其次，对单调策略的最佳响应也是单调的，会在较不利的状态下造成更多不稳定性。由于相对于现状的收益取决于下界所赋予的期权价值，而该下界限制了状态可能变得多么不利，因此，现状越有利，这种期权价值就越低；而参与者可能蒙受的损失越大，行为也就越保守。

状态可能变得多么不利；现状越有利，这种期权价值就越低，而参与者可能蒙受的损失越大，行为也就越保守。

接着，我们证明其存在性，并对均衡集合给出完整的构造性刻画。这一刻画的核心是一个直观的解耦论证：在任何给定时刻，至多只有一名玩家会制造不稳定性。由于不稳定性无法带来现状上的短期收益，而且参与者的利益截然对立，因此双方不可能都指望从中获益。由此，均衡可完全由两个阈值刻画，它们界定了两个不稳定区域，以及一个现状得以维持的稳定区域。不稳定性出现在最极端的状态中，而最不倾向于维持现状的玩家会制造不稳定性，以推动改变。不稳定性被用作反制极端现状的工具；状态越极端，不稳定性就越强。相反，在稳定区域——对应着相对温和的状态——双方都看不到破坏现状稳定性的好处。

均衡稳定状态始终存在，但它们可能体现为包容型均衡行为，也可能体现为权力平衡机制。前一种情况下，参与者从不反制对手引发的不稳定性，因此每位参与者都会制造不稳定性，以谋求现状下的收益，恰如他们没有受到任何阻力时那样。当不耐心程度和不稳定性成本足够高时，就会出现这种包容型行为；由于最佳响应具有阈值结构，这将支持唯一均衡。一般而言，这一唯一均衡具有一个稳定状态连续统：这些状态令双方都满意，即使受到扰动，也不会引发任何不稳定性。当参与者更有耐心且不稳定性成本足够低时，情况便完全相反：多个均衡随之出现，且每个均衡都由一个唯一的稳定状态刻画。此外，这一唯一的稳定现状源于参与者积极反制对手改善自身前景的企图。此时，均衡行为体现为稳定现状下的权力平衡机制：参与者知道，如果现状受到扰动且有损对手的利益，对手就会引发社会不稳定；这种认知会阻止该参与者继续谋求改善。

均衡还表现出清晰的单调比较静态。我们发现，降低玩家制造不稳定性的成本，会按照强集合序将稳定状态集合推向该玩家偏好的状态，因为玩家愿意制造更多不稳定性来追求自己的目标。

最后，我们讨论模型中不稳定性的动态。我们证明，无论起点如何，该过程几乎必然收敛到一个均衡稳定状态。不过，我们注意到一种路径依赖：如果该过程从某位玩家的不稳定区域开始，就会收敛到该玩家最不偏好的稳定状态。

本文为研究冲突理论模型的文献作出了贡献。借用Fearon（1995年，第387页）的话来说，冲突是“一场赌博，其结果可能由随机事件或其他不可预见的事件决定”。这一观察促使研究者利用竞赛来对冲突进行建模，也就是说，在这类情境中，参与者付出高成本努力，以影响自己获得更有利结果的相对可能性。从Tullock（1980）研究政党竞争的开创性工作起，多篇论文采用这一建模方法，探讨与冲突和竞争相关的问题，包括围绕租金攫取的冲突（Besley 和 Persson 2011年；Powell2013）、游说（Baye 等，1993年；Che 和 Gale 1998年）、领土扩张（Bueno de Mesquita 2020年；Dziubiński 等，2021年），以及不平等如何影响社会冲突强度（Esteban 和 Ray 1999年，2011年）。与本文思路更为接近的是，Fang 和 Noe（2016年）；Fang 和 Noe（2022年）研究了平均绩效约束下竞赛情境中的风险承担行为。相较于现有冲突研究文献，本文的主要贡献在于提出一种新颖的不稳定机制，并将其与冲突动态中的关键概念和现象联系起来。我们的模型对不稳定性的动态给出了定性上合理的预测，并由此指出，在冲突情境中，不稳定性未必只是纯粹的外生副产品，也可能是一种强大而重要的手段。

不稳定性会引发其他冲突模型中常见的两种现象。首先，由弱势参与者触发不稳定性这一事实，让人想起这样的观点：结果过于不平等会引发冲突（Fearon 1995），而落后者在研发或体育竞赛中会选择风险更高的策略（Cabral 2003；Anderson andCabral 2007）；从更广泛的意义上说，这也符合“孤注一掷以求翻身”的观点（Kräkel et al. 2014；Calveras et al. 2004）。其次，尽管 Jackson and Morelli (2009) 或 Chassangand Padró i Miquel (2010)采用了不同的建模方式，但威慑这一共同主题也出现在我们的模型中：当均衡中只有一个状态是稳定的，而这种稳定性仅仅是因为两个利益对立的参与者一旦现状受到影响，都会升级冲突时，便会出现这种情况。

另一支相关文献涉及拉锯战模型和消耗战。在Moscarini and Smith's(2011) 对Harris and Vickers(1987)模型所作的连续时间类比中，偏好对立的参与者通过付出努力来提高状态向其偏好结果移动的概率，控制的是过程的漂移，而非波动率。Agastya and McAfee (2006) 考察了一个相关模型，其中存在漂移控制和吸收边界；在平局均衡中，中间状态之所以稳定，是因为双方的漂移控制相互抵消。Gul and Pesendorfer (2012)和Gieczewski(2020) 考察了消耗战情境，在这些情境中，参与者通过选择何时停止收益过程，实际上控制了方差。由于这些模型中只有在冲突停止时才会累积收益，且极端状态是吸收状态，因此在足够接近边界时，胜方力求取得决定性胜利，败方则让步，从而实现稳定；在中间状态，双方会发生冲突（因而导致不稳定），以决定天平将向哪一方倾斜。由于不存在决定性胜利，这一预测在我们的情境中恰好相反。败方可失去的远少于胜方，因此不稳定性在极端状态下会成为一种强有力的工具，但在中间状态下风险过高。

最后，我们的论文也为不断发展的连续时间博弈文献作出了贡献。尽管将微分方法用于零和博弈可追溯至Isaacs（1965年）的开创性研究，但近期已有多项研究有效地运用随机微积分和微分方程技术来分析连续时间博弈。[1] 与其他近期经济学论文（例如Faingold 和 Sannikov 2011年；Kaplan 等人 2018年；Achdou 等人 2021年；Lester 2020年；Kuvalekar 和 Lipnowski 2020年；Escudé 和 Sinander 2023年）以及金融领域的大量应用一样，[2] 我们依靠粘性解来求解一个非光滑最优控制问题。本文以Lions（1986）的研究为基础，通过证明在宽松正则性条件下，反射过程的波动率最优控制问题存在唯一解，为这一文献作出了技术性贡献。我们希望，本文也能展示这一方法在经济应用中的价值：只需施加最少的假设，即可获得精确的刻画。

本文其余部分安排如下：第1节介绍模型。在第2节中，我们通过研究对固定对手策略的最佳响应，详细刻画最优不稳定策略；我们尤其关注基准情形，即对手不参与、由单个玩家控制波动率的情况。我们利用这些结果在第3节构建

[1]关于重复博弈的应用，参见 Sannikov（2007）；关于连续新闻流入和议价能力演变背景下讨价还价的应用，参见 Daley 和 Green (2012年；2020年) 以及 Ortner（2019）。[2]更多详情请参阅 Fleming 和 Soner（2006年）或 Pham（2009）的专著。

并刻画均衡；在第4节中，我们讨论现状的均衡动态：即向稳定状态收敛。第5节讨论模型的一些自然变化。

1. 模型

现在我们来介绍模型。时间是连续的，并以$t \in \mathbb{R}_+$为索引。时间t的状态由$X_t \in [0,1]$给出，对应于现状；参与者A和B对现状持有对立偏好，这由常和流收益体现。参与者A严格偏好较高的现状值，而B则偏好较低的值；此外，考虑到风险中性偏好，我们排除了产生不稳定性的内在动机。在这些假设下，将参与者A在时间t的总收益规范化为X_t，将参与者B的总收益规范化为$1-X_t$，不失一般性。

状态按照以下带反射的随机微分方程，随时间随机且连续地演变：

$$dX_t = \sqrt{2(\alpha_t + \beta_t)}dB_t - dK_t,$$

其中B_t是标准布朗运动，$\alpha_t \geq 0$和$\beta_t \geq 0$分别是由参与者A和B控制的非负适应过程；K_t表示调节过程，当状态触及任一边界时，它会将过程反射并限制在$[0,1]$之内，而在内部则不起作用——也就是说，若$X_t \in (0,1)$，则有$dK_t = 0$.[3]

这体现了这样一种观点：不稳定性在边界以外的所有地方都产生对称的影响。在一小段时间内，现状的变化完全由不稳定性驱动：在任意时刻，X_t要么上升，要么下降，二者的概率相等；但在边界（0和1）处，变量无法变得更加极端。在所有内部区域，现状都以纯粹的随机方式变化。

一个关键假设是，任何玩家都无法获得负的流收益——直观而言，在分享有限资源时，一个人不可能拥有少于“什么都没有”的份额（也不可能多于“全部”）。反射边界体现了这样一个事实：即使某个玩家的收益触及下界，

[3]调节过程的存在K_t纯粹是一个技术手段，用于定义这样一个过程：其无穷小变化实质上遵循$dX_t = \sqrt{2(\alpha_t + \beta_t)}dB_t$，但每当有变化会使过程越出有界定义域时，都会有一个向内的推力予以抵消$[0,1]$；K_t正是用来定义这种补偿，以确保我们定义的过程始终处于$[0,1]$之上。关于该过程定义的更多技术细节，见附录A。

博弈也不会终止。这与具有吸收边界的模型[4] 形成对比：在那些模型中，状态一旦到达极端点，博弈便会停止。这类模型更适用于具有明确终点和终端收益的情形（例如选举、专利竞赛或体育比赛）；而我们的模型则更适合描述没有明确终点、收益持续累积的重复互动情形（例如政党之间的竞争、国家之间旷日持久的领土争端，以及长期战争与叛乱）。尽管过程的连续性对于捕捉我们所需的直觉至关重要——因为在很短的时间间隔内，状态触及任一边界的概率为零，从而确保了某种局部对称性——但玩家能够控制不稳定性的程度，这意味着状态可能发生极快的变化，也可能完全不变。

参与者A 和B 分别控制 α_t 和 β_t ——即各自为破坏现状所付出的努力。总不稳定性努力 $\alpha_t + \beta_t$ 采用加法方式汇总，对应于缩放布朗运动的波动率，这由平方根变换 $\sqrt{2(\alpha_t + \beta_t)}$ 表示（因子2 只是为了方便而采用的归一化处理，不影响一般性）。这里的瞬时波动率，是离散~~时间情境~~下方差增加的连续时间类比。换言之，参与者总能加剧不稳定性，但无法降低对手引发的不稳定性。

这里的不稳定性完全是内生的：如果参与者选择不提高波动率（$\alpha_t = \beta_t = 0$），就可以永远维持当前现状；但每位参与者都有能力单方面引发不稳定性。从这个意义上说，若在状态X_t 下，没有任何参与者有动机引发不稳定性，那么该状态就对应着稳定的现状。我们聚焦于一种简化情形，其中所有不稳定性都是内生的，以便清楚地识别其特异性效应。

制造不稳定性需要付出成本。我们假设不稳定性努力的成本是凸的，并为简便起见采用二次形式设定。A 和B 的瞬时（净）收益分别为：

$$u_a(X_t, \alpha_t) := X_t - \frac{c_a}{2}\alpha_t^2, \qquad u_b(X_t, \beta_t) := (1 - X_t) - \frac{c_b}{2}\beta_t^2,$$

其中，c_a，$c_b \in \mathbb{R}_{++}$ 是每位玩家的特异性成本参数。

[4]如上文所讨论的，例如 Gul 和 Pesendorfer（2012）；Gieczewski（2020）；Moscarini 和 Smith（2001）；Agastya 和 McAfee（2006）。

由于制造不稳定性需要付出成本，这并非零和博弈。在任一给定时刻，不稳定性都会造成剩余的纯粹损耗；只有抱着在某种恰当意义上获得更持久、更好局面的希望，这种损耗才可能是合理的。

每个玩家在无限期内选择其不稳定性努力。参与者的折现因子分别为r_a 和r_b ；流收益按折现因子归一化。策略和现状（过程$X_0 = x$的初始点）决定的期望效用为

$$U_a(\alpha,\beta \mid x) := \mathbb{E}\left[\int_0^\infty r_a e^{-r_a t} u_a(X_t,\alpha_t) d_t\right], \quad U_b(\alpha,\beta \mid x) := \mathbb{E}\left[\int_0^\infty r_b e^{-r_b t} u_b(X_t,\beta_t) d_t\right].$$

我们将注意力限制在连续策略下的马尔可夫完美均衡（Maskin 和 Tirole， 2001）。因此，我们将策略记作 $\alpha_t = a(X_t)$、 $\beta_t = b(X_t)$，其中a 和b 是从 $[0,1]$到 $\mathbb{R}_+$的连续函数。形式上，策略属于X_t-适应的渐进可测过程这一类，我们将其记作 $\mathscr{A}$。文献中常见将分析限制在马尔可夫完美均衡上，部分原因在于连续时间下定义路径外行为存在众所周知的问题（参见 Simon 和 Stinchcombe， 1989）。连续性在一定程度上是一个技术性假设，不过在我们的设定中也很自然。此外，该假设也很宽松，只需很少的正则性条件，就能确保相关对象得到恰当定义。我们对均衡概念作如下正式定义：

定义 1. 一个　　均衡是一对连续函数 $(a,\ b)$，其定义域为 $[0,1]$至 $\mathbb{R}_+$，并满足　　：

(i) 过程 $\alpha_t^* = a(X_t)$ 在给定 b 的情况下，解决玩家 A 的控制问题　　：

$$\alpha^* \in \arg\max_{\alpha\in\mathscr{A}} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty r_a e^{-r_a t}\left(X_t - \frac{c_a}{2}\alpha_t^2\right) d_t\right] \quad \text{s.t. } dX_t = \sqrt{2(\alpha_t + b(X_t))} dB_t - dK_t,\ X_0 = x.$$

(ii) 过程 $\beta_t^* = b(X_t)$ 在给定 a 的情况下，解决玩家 B 的控制问题：

$$\beta^* \in \arg\max_{\beta\in\mathscr{A}} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty r_b e^{-r_b t}\left((1-X_t) - \frac{c_b}{2}\beta_t^2\right) d_t\right] \quad \text{s.t. } dX_t = \sqrt{2(a(X_t) + \beta_t)} dB_t - dK_t,\ X_0 = x.$$

在下一节中，我们将针对对手的固定策略，详细研究控制问题，以刻画该博弈中的最佳响应。为此，我们将验证先前对均衡的定义是恰当的；具体而言，最优策略是良定义且连续的。这也使我们能够识别最佳响应的相关性质，这些性质将有助于在第3节中直接构造均衡。

2. 最佳响应的刻画

本节通过微分刻画来研究参与者最佳响应的性质。我们考察一名玩家的控制问题，同时固定对手的策略。根据定义，将流收益中的X_t替换为 $1-X_t$后，双方玩家的个体问题具有对称性，因此我们将考察玩家A的问题。所有结果对玩家B的问题也对称成立。由于我们关注玩家A的问题，本节中我们将省略参数a 的下标，参数r_a、c_a 将分别简记为r、c ，以简化记号。

为正式定义本节研究的控制问题，设$(\Omega,\ \mathscr{F},\ (\mathscr{F}_t),\ \mathbb{P})$表示一个配备一维布朗运动$B_t$的完备滤过概率空间。固定$b:[0,1]\to\mathbb{R}_+$为连续函数。玩家的控制问题如下：

$$v_a(x)=\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\mathbb{E}\left[\int_0^\infty re^{-rt}\Big(X_t-\frac{c}{2}\alpha_t^2\Big)dt\right]\qquad \text{s.t. } dX_t=\sqrt{2\big(\alpha_t+b(X_t)\big)}dB_t-dK_t,\ X_0=x,$$

其中X_t，K_t满足反射问题，即$X_t\in[0,1]$。

以下小节将介绍求解该控制问题的方法：问题的微分刻画以及粘性解理论。

2.1. 微分刻画：存在唯一性

控制问题的价值函数（因此也包括最优控制）完全由一个二阶微分方程的解刻画，即哈密顿–雅可比–贝尔曼方程（HJB），并满足反射边界条件；这些条件体现了现状在一个闭区间上发生反射这一事实。

为陈述本小节的主要结果，用下标 $+$ 表示$y\in\mathbb{R}$ 的正部$y_+:=\max\{y,0\}$，并令$n(x)$表示外法向单位向量，其中$n(0)=-1,n(1)=1$。

定理 1. 价值函数v_a 是以下哈密顿–雅可比–贝尔曼方程的唯一粘性解：

$$rv_a(x)-\sup_{a\in\mathbb{R}_+}\Big\{rx-\frac{rc}{2}a^2+\big(a+b(x)\big)v_a''(x)\Big\}=0\quad \text{on } (0,1)\tag{HJB}$$

满足反射边界条件：

$$n(x)v_a'(x)=0\quad \text{on } \{0,1\}.\tag{BC}$$

此外，v_a 是连续的，并且只要v_a'' 存在，最优控制就由下式给出

$$a(x) = \frac{1}{rc} v_a''(x)_+.$$

我们将 （HJB）与（BC）的组合称为满足以下条件的反射问题 （RP）： b .

价值函数仅在下文定义的适当弱意义下求解（RP）：它是一个粘性解。[5] 我们采用粘性解，是因为若干问题使得我们的情形并非标准情形。首先，如果不存在不稳定性，该过程会退化为确定性过程。若对于某个 $x \in [0,1]\, b(x) = 0$，那么通过设定 $\alpha_t = 0$，玩家便能使过程保持恒定。尤其是，这意味着边界条件未必需要满足，因为玩家可以通过设定 $a(x) = b(x) = 0$，在 $x \in \{0,1\}$ 时“停用”反射。事实上，若 $b(1) = 0$，显然，当现状为 1 时，玩家 A 没有理由制造不稳定性，因为A可以永远享有尽可能高的收益。这实际上使1 成为一个吸收点，因此通常意义上的强边界条件不成立。一般而言，（强）边界条件是否成立，与另一位玩家的行为密切相关。

其次，参与者的最佳响应通常不满足标准的正则性条件（如 Lipschitz 连续性），这使我们无法借助关于存在唯一性的著名结果。最后，价值函数可能不可微；我们将在下文展示，它在均衡中可能出现折点。折点的存在并非只是一个技术上的趣闻，它反映了均衡的本质特征：稳定现状受到支持，但双方都威胁要在现状的任一侧制造足够的不稳定性，以阻止任何偏离。我们将在刻画价值函数和均衡时进一步详述。在介绍粘性解之前，请注意，哈密顿–雅可比–贝尔曼方程（HJB）可以改写为：

$$rv_a(x) - rx - b(x)v_a''(x) - \frac{1}{2rc}\left[v_a''(x)_+\right]^2 = 0.$$

为方便起见，我们定义如下微分算子的记号：

$$F_a(x,v,M) := rv - rx - b(x)M - \frac{1}{2rc}\left[M_+\right]^2 \qquad \text{for } (x,v,M) \in [0,1]\times[0,1]\times\mathbb{R}$$

$$B(x,p) := n(x)p \qquad \text{for } (x,p) \in \{0,1\}\times\mathbb{R}$$

[5]关于椭圆型二阶微分方程粘性解理论及其在最优控制中的应用，一般性参考文献可参见 Crandall etal.(1992), Fleming 和 Soner（2006），以及 Pham（2009）。

即，(RP) 由 $F_a(x,\ v_a(x),\ v_a''(x))=0$ 定义于 $(0,1)$ 上，而 $B(x,\ v_a'(x))=0$ 定义于 $\{0,1\}$ 上。现在我们给出 (RP) 的粘性解的定义：

定义 2。定义在 $[0,1]$ 上的函数 w 是（RP）的粘性**下解**，如果其上半连续包络 w^* 满足

$$F_a(x_0,w^*(x_0),\varphi''(x_0))\le 0 \text{ if } x_0\in(0,1)$$
$$\text{and } \min\{F_a(x_0,w^*(x_0),\varphi''(x_0)),B(x_0,\varphi'(x_0))\}\le 0 \text{ if } x_0\in\{0,1\}$$

对所有满足以下条件的 $\varphi\in\mathscr{C}^2([0,1])$：$x_0$ 是 $w^*-\varphi$ 的局部**最大值点**。

定义在 $[0,1]$ 上的函数 w 是（RP）的粘性**上解**，如果其下半连续包络 w_* 满足

$$F_a(x_0,w_*(x_0),\varphi''(x_0))\ge 0 \text{ if } x_0\in(0,1)$$
$$\text{and } \max\{F_a(x_0,w_*(x_0),\varphi''(x_0)),B(x_0,\varphi'(x_0))\}\ge 0 \text{ if } x_0\in\{0,1\}$$

对所有满足以下条件的 $\varphi\in\mathscr{C}^2([0,1])$：$x_0$ 是 $w_*-\varphi$ 的局部**最小值点**。

函数 w 是**粘性解**，当且仅当它既是粘性下解又是粘性上解。

粘性解提供了一种强大的广义可微性概念，非常适合用于研究 HJB 型方程。理解粘性方法的一种经典直观方式是：设想用光滑测试函数——定义中以 φ 表示——在给定点处与该函数相切，而在其他所有位置都位于其上方（对于下解）或下方（对于上解），并要求每个这样的测试函数都满足带有相应不平等关系的微分方程。

定理 1 的证明结合了两个命题（已在附录中证明）。首先，我们证明价值函数是所述方程的粘性解。

Pr命题 1(最优性)。价值函数 v_a 是 (RP 的粘性解).

命题 1可由标准动态规划论证以及对适当测试函数应用伊藤引理得出，尽管我们的设定仅施加了最低限度的假设。

接下来，我们将证明粘性解唯一，因此它也就是价值函数本身。为此，我们首先建立一个比较原理结果，这对于刻画均衡性质也具有实际意义。

引理 1（比较原理）。若w 是粘性上解，且w 是 (RP) 的粘性次解(RP)，则$w \geq w$ 在 $[0,1]$ 中。

比较原理使我们能够通过构造下解和上解来为解找到界。此外，由于可以通过一般性论证确立存在性，比较原理对于证明唯一性至关重要。[6]

命题 2（存在唯一性）。（RP）存在唯一的粘性解。此外，它是连续的。

引理 1 和 命题 2 的证明 依赖于对现有文献中的技术进行调整（参见 Crandall 等人, 1992），并结合针对当前问题特点的论证。

2.2 最佳响应的性质

现在，我们刻画玩家 A 面对玩家 B 任意策略时的最优控制。回想一下，玩家 A 的控制由以下内容刻画：

$$a(x) = \frac{1}{rc} v_a''(x)_+,$$

即使玩家 A 的最优控制确实取决于 b（对 b 的依赖关系包含在价值函数 v_a 中），以下定理表明，最佳响应和价值函数始终呈现由阈值机制刻画的简单结构。

定理 2。（最佳响应刻画）设 b 为连续函数，且 v_a 为给定 (RP)b 时问题的解。最优控制 a^* 存在，控制问题的解完全由两个阈值 x_a、$x_a \in (0,1], x_a \leq x_a$刻画，满足：

(i) 在 $[0, x_a)$ (有利不稳定区域)内，v_a 严格凸，且严格高于恒等函数；

(ii) 在 $[x_a, \bar{x}_a]$（中性区域），$v_a(x) = x$；

(iii) 在$(\bar{x_a}, 1]$（有害不稳定区域）上，v_a 严格凹，且严格低于恒等函数；

[6]要证明存在性，只需给出一个下解（取 $v(x) := 0$）和一个上解（取 $v(x) := 1$），使后者处处高于前者。随后，我们可以取那些处处低于该上解的下解的逐点上确界，从而构造出一个解。这在粘性解文献中称为佩龙方法。比较原理随即推出粘性解的唯一性。

(iv) a^* 连续，在 $[0, x_a)$ 上严格为正，在其他地方为零。

此外，v_a 处处递增且二阶连续可微，唯独在x_a处可能例外。如果v_a 在$x_a < 1$处不可微，那么$\lim_{x \to x_a^-} v_a'(x) \geq \lim_{x \to x_a^+} v_a'(x)$（只允许出现凹折点）。

让我们探讨一下定理 2 背后的直觉及其含义。

首先请注意，无论玩家B采取何种策略，阈值结构都是最佳响应的一般特征。对于A 而言，最优策略始终是在现状足够不利时制造严格为正的不稳定性，并随着玩家达到“满意”阈值x_a而逐渐消退。v_a 在有利不稳定区域严格高于恒等函数，这体现了这样一种观点：在该区域，A 的处境严格优于永远维持该现状。进一步说，v_a 在该区域内为凸函数，体现了不稳定性带来的（正的）期权价值。随着玩家A的份额接近x_a ，这种期权价值会降低；由于可失去的东西更多，玩家也会变得更加谨慎。

下界阈值 x_a 综合体现了玩家 A利用不稳定性为自己谋利的能力，其大小由 b（折现因子）和成本参数共同决定。从本质上说，不稳定性带来的预期收益源于能够持久地处于更有利的状态。超过 x_a后，试图制造有利于自己的不稳定性，成本会过高，或者收益不足。这可能是因为，要利用下界所提供的期权价值并确保局面得到持久改善，就需要经历过长时间的不稳定性，从而导致成本过高；也可能是因为，在对玩家 A 更有利的情形下，玩家 B 会制造足够的不稳定性，阻止玩家 A 在那里持久地改善自身处境。

有利不稳定区域 $[0, x_a)$ 始终非空：当现状过于不利时，制造一些不稳定性总是有益的。反射在下界处起作用，此时玩家的收益最差；对于任何内部现状，不稳定性使玩家处境变差或变好的可能性在局部上相同。然而，最差状态的存在会产生期权价值，而在下界处增加波动率的严格动机也会延伸至附近区域，使制造不稳定性变得有利可图。这样的阈值不仅对任意b总是存在，而且始终严格大于零，这表明不稳定性总能帮助参与者摆脱过于不利的局面。

上阈值 x_a 仅在确定玩家A 不促成不稳定性的状态下的收益结构时才有意义。它划分出一个中间中性区域 $[x_a, x_a]$ 在该区域内，尽管玩家A 选择不制造不稳定性，但对手可能制造的任何不稳定性都不会造成损害（期望收益等于现状收益）。对于玩家A 严格偏好的x_a 状态——也就是玩家有很多可失去的状态——对手制造的任何不稳定性都会对玩家A造成实际损害。这一点可由该区域内$v_a(x) < x$ 这一事实体现：玩家A 更愿意维持现状，而v_a 是凹函数，因为不稳定性的期权价值为负。尽管中性区域始终非空（但可能仅由一个点构成），有害不稳定区域却可能为空。此外，一般而言，中性区域内不一定有$b(x) = 0$。

前述结果的一个推论是，$x_a < 1$ 当且仅当$b(1) > 0$。这凸显了极端状态下的不稳定性会如何显著影响玩家在定义域内部的行为。如果$b(1) = 0$，那么玩家B 在定义域内部无论产生多大程度的不稳定性，都不会对A 造成伤害（有害不稳定区域为空）。在这种情况下，b 意味着玩家A偏好的状态下不存在不稳定性（$x = 1$）；而且玩家A 绝不会在这一最有利的现状下选择产生不稳定性，因此A 能够使这条边界完全吸收。极端状态下发生的情况会对其他所有地方造成巨大影响：无论B 原本会产生何种不稳定性，都不会造成伤害，反而会让玩家A受益。另一方面，如果1处的边界是主动反射的（$b(1) > 0$），玩家A 就无法单方面阻止过程在1处继续，而在接近 1 时增加不稳定性的期权价值为负。

最后，我们给出一个单调性结果，以揭示均衡的结构：如果一名玩家在处境越不利时越会加剧不稳定性，但在现状对自己越有利时越趋于保守，那么另一名玩家也会有动机采取同样的做法。

命题 3. 如果 b 在 $[0, x_a]$上单调不减，那么问题 （RP）的最优控制单调不增。

2.3. 非活跃基准

考虑对手完全不采取行动、从不引发任何不稳定性的情形。我们从玩家 A 的角度出发，令 $b(x) \equiv 0$ 对所有 x 都成立，因此，玩家 A 的行动是现状不稳定性的唯一来源。对这一个体决策问题的分析不仅

有助于建立直觉，更重要的是，均衡的关键性质将取决于非活跃基准下会发生什么。

HJB方程有着清晰的解释：它将最优状态下的瞬时控制成本与相对于现状的边际收益联系起来，而后者可视为不稳定性的期权价值。这也突显了为何在此情境中，二阶导数体现了期权价值。事实上，将 HJB 方程改写为：

$$\underbrace{r(v_a(x)-x)}_{\text{improvement on the status quo}} = \underbrace{\frac{1}{2rc}[v_a''(x)_+]^2}_{\text{option value}} = \underbrace{\frac{rc}{2}a^*(x)^2}_{\text{instantaneous cost of control}}$$

接下来的命题在限定于特殊情况 定理 2 $b \equiv 0$时，进一步加强了该定理。

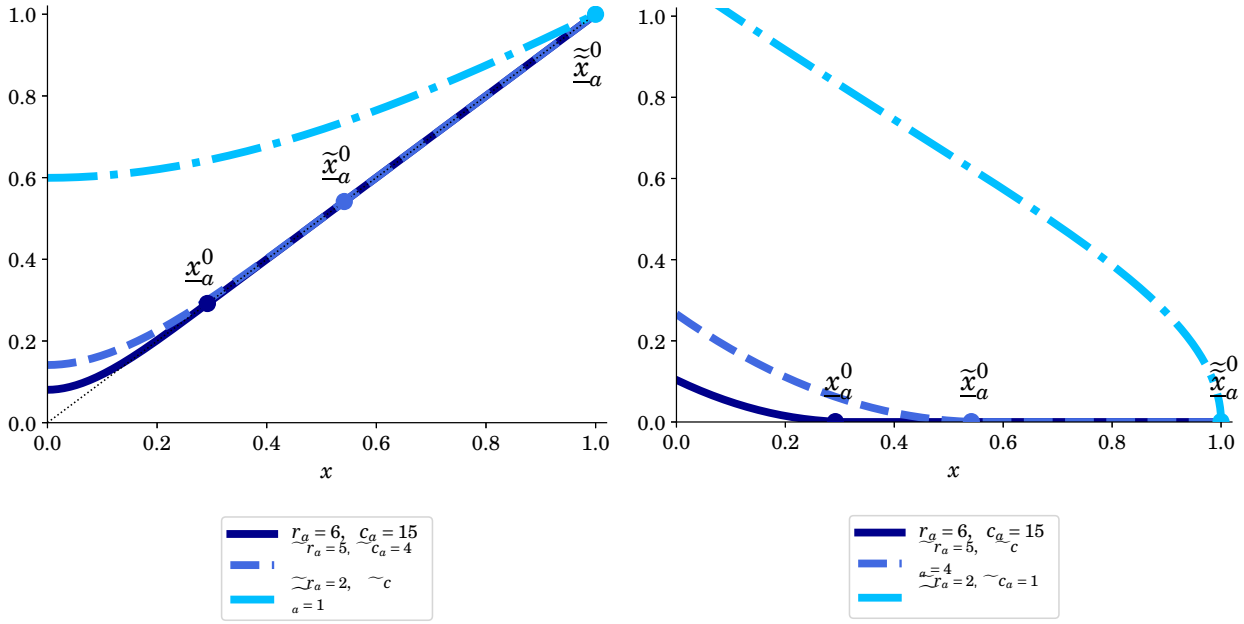
命题 4 （非活跃基准的性质）。 设 v_a^0 为给定$b \equiv 0$时（RP）中的价值函数，且$a^{*,0}$ 为相应的最优控制。那么，存在$x_a^0 \in (0,1]$ 使得

(i) 在 $[0,x_a^0)$ 上，v_a^0 严格凸，$v_a^0(x) > x$，且 $a^{*,0}$ 严格为正且严格递减；(ii) 在 $[x_a^0,1]$ 上，$v_a^0(x) = x$ 且 $a^{*,0}(x) = 0$。

此外，v_a^0 和$a^{*,0}$ 除$x_a^0 = 1$处可能例外外，均为二阶连续可微，其中$v_a^{0\prime} \le 1$。

图1通过数值近似展示了命题 4：不同参数值下，玩家A 在非活跃基准中的价值函数和最优控制。它呈现出典型的最佳响应结构：当x足够小时，价值函数为凸函数且高于恒等函数；在x_a^0处与恒等函数相交，并在x取较大值时保持现状。

由于 $b \equiv 0$，有害不稳定区域为空：如果玩家 A 完全控制不稳定性，那么他们绝不会选择有害的不稳定性水平，因为他们总能确保维持现状——因此，$v_a^0(x) \ge x$ 处处成立。此外，玩家 A 的不行动区域 $[x_a^0,1]$ 确定了在给定成本和贴现参数下，玩家 A 无法从不稳定性中获得任何内在收益的状态。活跃区域 $[0,x_a^0)$ 则对称地划定了r 和 c 使玩家 A 能够严格从不稳定性中获利的情形。依照同样的逻辑，$a^{*,0}$ 在活跃区域 $[0,x_a^0)$ 上严格递减，这体现了不稳定性回报会随着现状离零越来越远而下降：在更有利的状态下，现状的改善幅度会缩小，制造不稳定性的价值也随之降低。



(a)**价值函数** (b) **最优策略**

图1. **非活跃基准下玩家 A 的比较静态** **k**

图1b 还展示了与图1a相对应的最优控制，说明了这种递减行为。

我们进一步给出关于 r、c 的全面比较静态结果，这些结果随后将有助于推导均衡的比较静态。将 HJB 方程重写为 $2r^2c(v_a(x)-x)-[v_a''(x)_+]^2=0$。假设 v_a 满足该方程以及 r、c 对应的边界条件（在黏性意义下），并令 x_a 为相应的不行动阈值。令 $\tilde{r}$、$\tilde{c}$ 满足 $\tilde{r}^2\tilde{c} \geq r^2c$。直接可得$2\tilde{r}^2\tilde{c}(v_a(x)-x)-[v_a''(x)_+]^2 \geq 0$。由于边界条件仍在黏性意义下得到满足，我们可以得出结论：v_a 是 $\tilde{r}$、$\tilde{c}$ 对应问题的上解。由比较原理（引理 1）即可得到比较静态结果；这些结果汇总于下一个命题中：

命题 5。考虑两组成本和贴现参数：r、c 和 $\tilde{r}$、$\tilde{c}$。记 v_a^0、x_a^0、$a^{*,0}$ 为对应于参数 r、c 的问题的价值函数、最优阈值和控制。类似地，在 $\tilde{r}$、$\tilde{c}$ 下定义 $\tilde{v}_a^0$、$\tilde{x}_a^0$、$\tilde{a}^{*,0}$、$a^{*,0}$。若 $\tilde{r}^2\tilde{c} > r^2c$，则，

(i) $\tilde{x}_a^0 \leq x_a^0$，若 $\tilde{x}_a^0 < 1$，则为严格不平等；(ii) $\tilde{a}^{*,0} \leq a^{*,0}$ 在 $[0,1]$, 上，若在 $[0,x_a^0)$上，则为严格不平等；以及

(iii) $\tilde{v}_a^0 \le v_a^0$ 在 $[0,1]$ 上，若在 $[0,x_a^0)$ 上，则为严格不平等。

对命题 5 的解释相当直观。成本或不耐心程度越高，不稳定性总体上就越无利可图。由于产生不稳定性的期权价值完全源于玩家的前瞻行为，不耐心程度提高会降低状态下界x所带来的期权价值。较高的c 会提高不稳定性的边际成本。因此，成本或不耐心程度提高，会使产生不稳定性有利可图的区域缩小（$\tilde{x}_a^0 \le x_a^0$）。在任意状态x 下产生的不稳定性都会更温和（$\tilde{a}^{*,0} \le a^{*,0}$），从而使收益降低（$\tilde{v}_a^0 \le v_a^0$）。

随着玩家变得更加有耐心，且面临的不稳定性成本降低，玩家可能会发现，除了在 1 处以外，在所有状态下产生严格为正的不稳定性都值得，即 $x_a^0 = 1$。如图1b所示，玩家的阈值也与其最优不稳定性的形状有关。当玩家 A 在 $x_a^0 < 1$ 处停止引发不稳定性时，流收益有界于 1（x 表示份额）这一事实不会起作用：上界并未生效。在这种情况下，玩家的最优控制呈凸形，玩家 A 产生的不稳定性平滑地消失；当 $x \to x_a^0$ 时，$a^{*,0\prime}(x) \to 0$，这从图1b中较深的实线和虚线可以看出。相比之下，我们发现，如果贴现率或不稳定性成本足够低，玩家会调整波动率，使其恰好达到第一最佳，并避免上界开始主动反射。此时，玩家只会在 $x_a^0 = 1$ 处停止产生不稳定性，并且得到 $a^{*,0}$ 的凸-凹形状，这正是图1b点划线所示的形状；与之对应，不稳定性会在 x_a^0 处突然消失。我们将证明，图1b所示两种情况之间的区别实际上是一种普遍性质：

命题 6（有效上界的含义）。设 v_a^0 为 (RP) 中给定$b \equiv 0$时的价值函数，且 $a^{*,0}$ 为相应的最优控制。则，

(i) $a^{*,0}$ 为凸函数，当且仅当$v_a^{0\prime}(x_a^0) = 1$；

(ii) 存在$\hat{x}_a \in [0,x_a^0)$使得$a^{*,0}$ 在 $[0,\hat{x}_a]$ 上为凸函数，在 $[\hat{x}_a, x_a^0]$ 上为凹函数，当且仅当$v_a^{0\prime}(x_a^0) < 1$。

此外，$v_a^{0\prime}(x_a^0) = 1$ 当 $x_a^0 < 1$，且当$v_a^{0\prime}(x_a^0) < 1$时，$\lim_{x \uparrow x_a^0} a^{*,0\prime}(x) = -\infty$.

本节中的所有结果都可以对称地推广到玩家B的问题，只需进行变量替换$y = 1 - x$（通过将1 重新标记为0，反之亦然，从而反转区间）。这是由问题的对称性所决定的，因为玩家B的最佳响应问题与玩家A的问题完全相同

进行变量替换后——参数r_b, c_b可能存在异质性。等价地说，这相当于将一切都表示为玩家B而非玩家A的收益。

3. 均衡的刻画

现在我们转而刻画该博弈的（马尔可夫完美）均衡。这些均衡将是策略对(a,b)，其中每个策略都是对另一个策略的最佳响应，因此任何均衡都必然符合上一节讨论的性质。在本小节中，我们首先确立任何均衡都具有的三项必要性质：（i）至多有一名玩家制造不稳定性；（ii）玩家的现状越有利，该玩家造成的不稳定性就越低；（iii）与对手不采取行动时相比，每名玩家造成的不稳定性都更低。

这一刻画使我们能够根据各玩家非活跃基准中的不稳定区域是否重叠，划分出均衡的两种可能情形。如果这些区域不重叠，就会产生唯一的包容型均衡：参与者对对手追求更有利现状持包容态度，从而产生许多稳定状态。如果这些区域重叠，则会存在多个威慑均衡，每个均衡都以一个独特的稳定现状为特征，并由威慑机制维持。

3.1. 均衡的必要性质

我们首先探讨均衡的一项关键性质：均衡不稳定策略彼此分离——在任何给定的现状下，至多只有一名玩家会引发不稳定性。请注意，这一特征并不能直接从我们在第2.2节中对个体最佳响应的刻画中推导出来：存在一些策略b，使得玩家A在x状态下的最佳响应涉及引发不稳定性，而这些状态满足$b(x) > 0$。然而，任何博弈均衡都由两个阈值唯一刻画，这两个阈值将状态划分为三个区域：一个稳定区域、一个仅玩家A引发不稳定性的区域，以及一个仅玩家B引发不稳定性的区域。下一个命题概述这些性质，并刻画均衡的结构。

命题 7。在任何均衡中，都存在x、$\underline{x} \in (0,1)$，$\underline{x} \leq \bar{x}$，使得

(i) $\forall x \in [0, \underline{x}), a(x) > 0 = b(x)$; (ii) $\forall x \in (\bar{x}, 1], a(x) = 0 < b(x)$; 以及

（iii） $\forall x \in [\underline{x}, \bar{x}], a(x) = 0 = b(x)$。

此外，a（分别为 b）在 $[0, \underline{x})$ 上严格递减（分别在 $(\bar{x}, 1]$ 上递增），且均衡由 $\underline{x}$、$\bar{x}$ 唯一确定。

首先要注意的是，命题 7 区分了会引发不稳定性的状态与达到稳定性的状态。前者是指被任一玩家认为极为不利的状态：玩家A — $x \in [0, \underline{x})$ —或玩家B — $x \in (\bar{x}, 1]$。

均衡之所以呈现这种“脱钩”结构，原因很简单：由于双方利益截然对立（常和总流量收益），不可能两位参与者都预期相对于同一现状严格改善。对于任何给定的现状，至多只有一位参与者认为制造不稳定性有利可图。我们知道，在极端状态$x = 0$ 和$x = 1$处，弱势参与者会主动反击，制造不稳定性。毕竟，他们没有什么可失去的；尽管不稳定性代价高昂，却只会改善他们的处境。接着，由于对于对手的任何策略，弱势参与者认为制造不稳定性有利可图的状态集合都是凸集，且包含对他们最不利的状态（如定理 2所示），因此我们得到这三个区域的存在性。

其次，命题 7告诉我们，随着参与者从可用收益中获得的份额增加，他们会更加谨慎地控制自己制造的波动率。回想一下，不稳定性的收益完全源于分享资源有限所带来的期权价值；当$x \in (0,1)$时，不稳定性不会带来即时收益。然而，由于结果可能有多糟糕存在一个自然下界，耐心的参与者或许愿意冒经过权衡的风险，以获取这种期权价值带来的收益。证明基于以下事实：均衡策略呈现出这种解耦结构；此外，如果对手对不稳定性不作反应，那么最优控制关于状态是单调的，正如命题 4 中讨论的非活跃基准那样。命题 4。

均衡的下一个性质，将参与者的均衡策略与他们在非活跃基准情形下的最优不稳定性策略联系起来。虽然人们很容易认为，一般而言，当对手不采取行动时，玩家总能获得最高的期望收益（$b \equiv 0$），但事实并非如此。玩家 B 可能会取代A，通过制造最优不稳定性，替 A 省下这样做的成本。然而，在均衡中，玩家 A 的处境确实不可能比面对一个被动对手时更好：

命题 8. 在任何均衡中，$v_a \trianglelefteq v_a^0$ 且 $v_b \trianglelefteq v^0\, b$。

该结果基于两个观察。首先，在非活跃基准情形下，v_a 是（RP）的下解，而v_a^0 是一个解。其次，根据比较原理（引理 1），我们知道任何下解都弱小于一个上解，因此也弱小于一个解。由此，我们可以比较均衡阈值与非活跃基准阈值，以及均衡中的不稳定性与非活跃基准策略（$a^*,\ ^0$，$b^*,\ ^0$）。具体而言，玩家在任何时点造成的不稳定性都不会超过其在非活跃基准情形下造成的不稳定性。以下推论将这一观察形式化：

推论 1. 在任何阈值为 x、x 且均衡策略为 a*、b*的均衡中，（i）$x \le x_a^0$且 $x^0\, b \le x$；（ii）$a^* \ge a^*,\ ^0$ 且 $b^* \le b^*,\ ^0$。此外，当且仅当 $x < x_a^0$ 且 $x^0\, b < x$ 时，$a^* < a^*,\ ^0$ 和 $b^* < b^*,\ ^0(x)$ 分别在 $[0, x_a^0)$ 和 $(x^0\, b, 1]$ 上成立。

如果对手被动行事，玩家可能会采取什么行动以及愿意采取什么行动，决定了均衡的结构。在均衡中，对手的最优策略 b 永远不会让玩家 A 受益，因为双方的利益截然对立：均衡中不可能有两位玩家同时从不稳定性中获益。换言之，若在给定点上，当$b \equiv 0$时，不稳定性并无益处，那么当$b \neq 0$ 时不稳定性仍无益处，这一看法在均衡中成立，但一般情况下并不成立。此外，非活跃基准的最优策略以及不行动阈值x_a^0 尤其可以解释为参与者威胁对手的能力。这也构成了如下论证的基础：第 2.3 节讨论的非活跃情形确实是恰当的基准。

虽然命题 7 和8 给出了任何均衡都必须具备的性质，但并未说明均衡是否存在。本节余下部分不仅将证明均衡的存在性，还将进一步细化均衡的刻画，阐明均衡可能具有的两种类型；这两种类型取决于参数值，尤其取决于x_a^0 与$x^0\, b$的相对位置。

3.2. 均衡的特征：威慑与容纳

本小节的主要结果全面刻画了该博弈的均衡；根据非活跃基准中阈值的相对位置，结果分为两种可能情形。当非活跃基准中的有利可图的不稳定区域彼此不重叠时，存在唯一的

包容型均衡，双方玩家均遵循各自的非活动基准策略，并且存在许多稳定状态（$x < x$）。如果非活跃基准中的有利可图的不稳定区域彼此重叠，则存在多个威慑均衡，每个均衡都由一个稳定状态刻画$x = x$。此时，可以通过在双方各自的受限区间上求解一个“仿佛”非活跃基准，得到均衡策略——$[0, x]$对应A，$[x,\ 1]$对应B——仿佛反射发生在x处。我们先陈述定理，然后阐释其直觉和含义。

定理 3。存在一个均衡$(a^*,\ b^*)$。

（包容型均衡）如果 $x_a^0 \le x^0 b$，则存在一个由 $(a^*, b^*) = (a^{*,0}, b^{*,0})$ 给出的唯一均衡。此外，在任何满足 $x < x$ 的均衡中，必有 $(x, x) = (x_a^0, x^0 b)$。

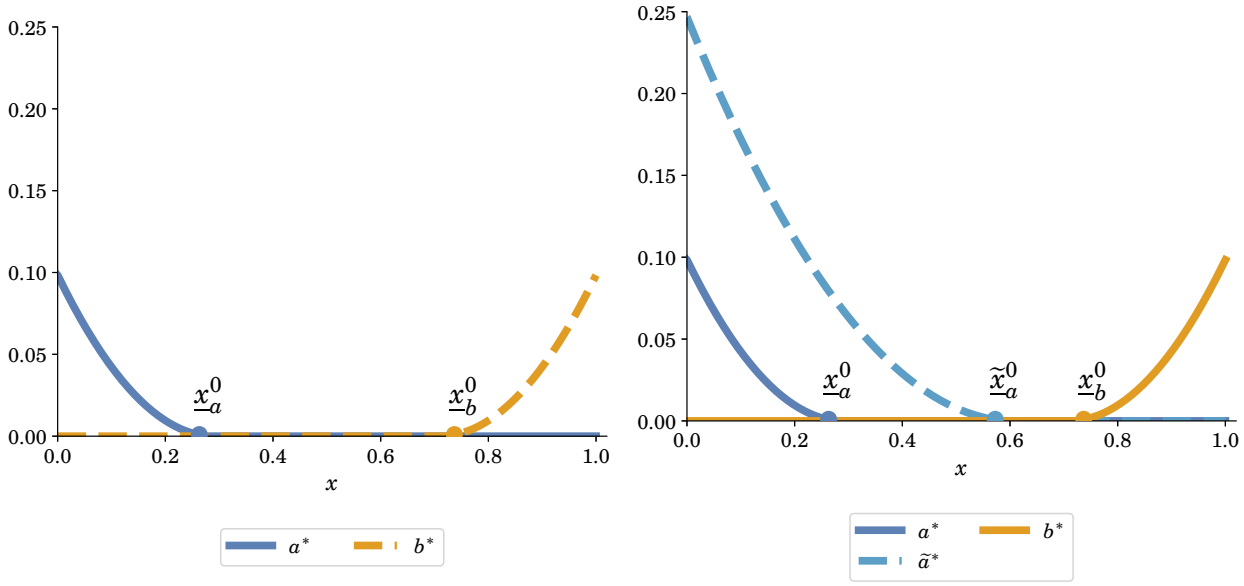
（威慑均衡）如果 $x_a^0 > x^0 b$，则一对策略 (a^*, b^*) 是均衡，当且仅当 $a^*(x) = \mathbf{1}_{(x<x)}\ {}^1 r_a c_a v_a''(x)$ 且 $b^*(x) = \mathbf{1}_{(x>x)}\ {}^1 r_b c_b v''b(x)$，其中 v^a 和 v_b 是相应非活跃基准问题在 $[0, x]$ 和 $[x$ 上的唯一粘性解，$1]$，且 $x \in [x^0 b,\ x_a^0] \setminus \{0,1\}$。

只要存在这样一种现状：即使对手不采取行动，双方都不愿增加不稳定性（$x_a^0 \le x^0 b$），那么在所有情况下，均衡行为都仿佛对手确实没有采取行动。每位玩家都会包容对手的期望，通过制造一定的不稳定性来为自己争取更好的结果；参与者从不相互“反击”。

值得强调的是，包容型均衡一旦存在，就必定是唯一均衡。换言之，如果非活跃基准下不存在这样一种现状：双方都愿意在对方不采取行动时制造不稳定性，那么这就是唯一的均衡结果。

包容型均衡的另一个显著特征是，它们存在一个稳定状态区间 $[x_a^0,\ x^0 b]$在此区间内，现状得以维持。这个区间可能非常大，例如图 2a1/4 与3/4 之间几乎所有状态都稳定。在这种情况下，无法通过制造不稳定性获利，意味着双方都愿意接受范围很广的状态。因此，某些状态即使可能受到一方的偏好远远高于另一方，也能长期维持。

鉴于根据命题 5，x_a^0（分别为$x^0 b$）关于r^a和c_a（分别为r_b 和c_b）呈递减（分别呈递增）趋势，当且仅当参与者的.....时，均衡行为才会表现为迁就型



(a) (b)

图2. **包容型均衡中的均衡策略**

注：参数 实线的值为 $r_a = r_b = 7$ 和 $c_a = c_b = 15$，虚线的值为 $\tilde{r}_a = 4$、$\tilde{c}_a = 5$。

不耐心程度以及引发不稳定性的成本足够高。如果两位参与者引发不稳定性的成本都足够低，或者足够有耐心，以至于存在一个区域，使得只要另一方不活跃，双方都愿意引发不稳定性，会怎样？在这种情况下，不可能存在包容型均衡：两位参与者都采用非活跃基准策略，会导致在某个现状下双方都引发严格为正的不稳定性，这与命题 7$x^0{}_b < \underline{x}_a^0$时，任何均衡中稳定区域都必定缩减为一个点这一事实相矛盾。

引理2。 如果 $\underline{x}_a^0 > \underline{x}^0{}_b$，那么在任何均衡中 $x = \underline{x}$。

要理解为何必然如此，请注意，如果 $x < \underline{x}$，那么双方的价值函数在 $[x, \underline{x}]$ 上都必须等于恒等函数，因为在该区域内没有人造成不稳定性。根据 推论8，至少有一位参与者会希望在对手始终不采取行动时引发不稳定性，即 $x < \underline{x}_a^0$ 或 $x^0{}_b < x$。引理2 进而表明，如果某位玩家在给定的现状下、对手始终不采取行动时会造成不稳定性（如不活跃基准情形所示），那么在对手于该状态附近不采取行动的任何均衡中，他也会如此。此外，引理2 与命题 8 结合起来意味着，如果 $\underline{x}_a^0 > x^0{}_b$，那么 $x = \underline{x} \in [x^0{}_b, \underline{x}_a^0]$。

第二个关键观察是，在任何满足 $x_a^0 > x > x^0 b$ 的均衡中，参与者的均衡策略都会在 x 处骤然消失。玩家 A 的价值函数是一个粘性解 v_a，满足 $F_a(x, v_a(x), v_a''(x)) = 0$ on $[0, x]$, $B(0, v_a'(x)) = 0$，且 $v_a(x) = x$。因此，价值函数在 x 处的左导数将严格小于 1，因为 $v_a \le v_a^0$ 且 $v_{a,-}'(x) \le v_{a,-}^{0\prime}(x) < v_{a,-}^{0\prime}(x_a^0) \le 1$；最后一个不平等关系源于 v_a^0 在 (x, x_a^0) 上严格凸。由于我们的问题具有正则性，我们可以推导出，对于 $x \in (0, x)$,

$$a^{*\prime}(x) \propto v_a'''(x) = r^2 c \frac{v_a'(x) - 1}{v_a''(x)} < 0,$$

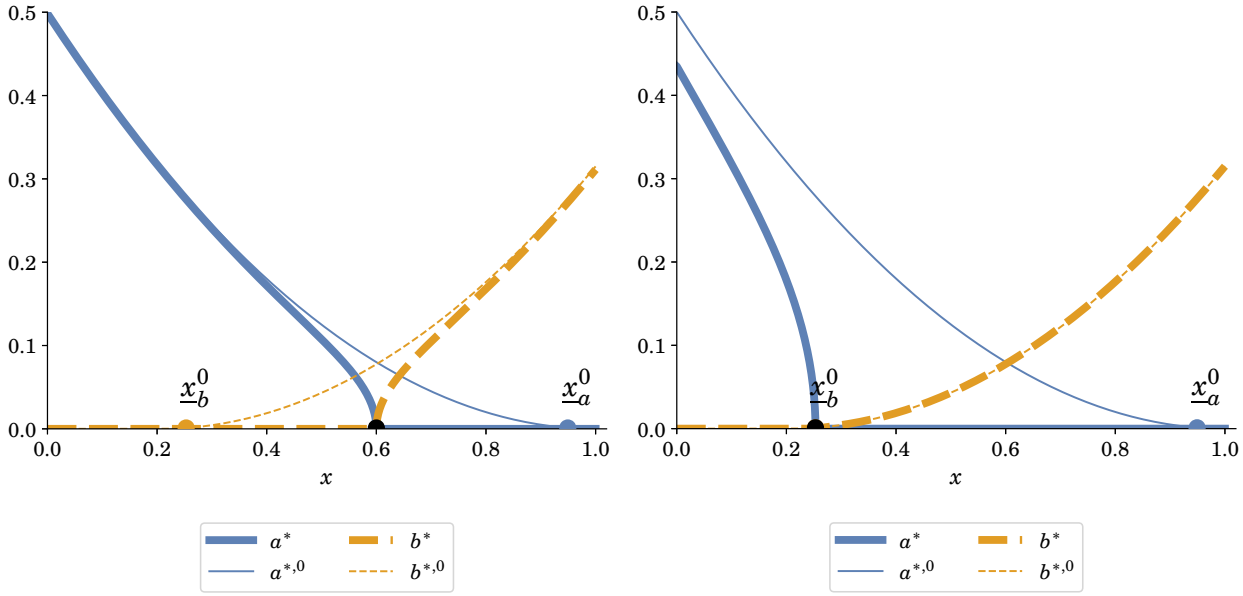
我们发现，当分子远离零且严格为负 $a^{*\prime}(x) \to -\infty$ 时，随着 $x \uparrow x$，而分母趋于零。

第二个观察表明，在任何满足 $x_a^0 > x > x^0{}_b$ 的均衡中，参与者的行为仿佛 x 是一个主动反射边界。事实上，玩家 A 的均衡策略在 x 处骤然降为零，这让人联想到非活跃基准情形中，最优控制如何受到主动反射上界的影响（命题 6）：若 $v_{a,-}^{0\prime}(x_a^0) < 1$，则 $a_-^{*\,0\prime}(x_a^0) = -\infty$。

综合这两点观察，我们可以用一种构造性方法刻画任意均衡：取一个候选稳定点 $x \in (x^0{}_b, x_a^0)$，并求出玩家 A（分别为玩家 B）在 $[0, x]$（分别为 $[x, 1]$）上非活跃基准问题的唯一粘性解，仿佛反射发生在 x 而非 1（分别为 0）。然后，在玩家不活跃的区域内，给定对手的策略并施加适当的边界条件，求解哈密顿–雅可比–贝尔曼方程；再将两部分拼接起来，并验证所得函数在给定对手策略的情况下是原问题的粘性解。具体而言，所得函数不仅需要在阈值处连续，在 x 处也不能出现凸折点。

上述观察表明，任何均衡都必须符合这一构造，因此由阈值 x 唯一确定。均衡是否存在的问题可改述如下：是否存在一个状态 $x \in [x^0 b, x_a^0]$，使得这一构造成立？定理 3 肯定地回答了这个问题，并给出了完整的刻画：只要 $x^0 b < x_a^0$，每个 $x \in [x^0 b, x_a^0] \setminus \{0, 1\}$ 都确定一个均衡（将其作为上述构造中的稳定点），而且所有均衡都对应于某个 $x \in [x^0 b, x_a^0] \setminus \{0, 1\}$ 所确定的这一构造。

该证明验证了任何均衡都必须满足上述构造，并且只要……，这种构造就能成功刻画均衡粘性解。



(a) 在 $x = \bar{x} = .6$处的均衡 (b) 在 $x = \bar{x} = \underline{x}^0 b$处的均衡

图 3. **威慑均衡中的均衡策略**

注意：参数值为 $r_a = 5$、$c_a = 6$、$r_b = 6$ 和 $c_b = 15$。

$\bar{x} \in [\underline{x}^0 b, \underline{x}_a^0] \setminus \{0,1\}$。请注意，$\bar{x}$ 不可能等于 0 或 1，因为正如定理 2，$v_a(0), v_b(1) > 0$：在极端状态下，一无所有的玩家会在均衡中造成严格为正的不稳定性。

在此类情况下，均衡的稳定性是通过威慑维持的：如果对手不作出反应，双方玩家都希望破坏现状，以期在x处改善自身处境。正是因为对手会作出反应并予以反击，而且反击力度足够大，$\bar{x}$ 才是稳定现状。这与价值函数中凹折点的存在及其解释有关。只有一种非常特殊的情形下才会出现折点：威慑均衡，其中只有一个稳定现状，且现状两侧都有足够强烈的不稳定性威胁作为支撑。事实上，如果x处存在折点，那么b 在$(x, 1]$ 上严格为正，但在x处为零，这意味着x 是一个双方玩家都不会造成不稳定性的现状。

只有凹折点才可能出现，这一事实可以理解为每个玩家都在向稳定现状“足够强硬地”反击，以阻止另一位玩家试图进一步改善自身处境。

。[7] 宽泛地说，正是玩家B 通过在稳定现状右侧突然加剧不稳定性进行反击，使其成为吸收状态，因为这会让v_a 的斜率不连续地变得更平缓。这会阻止玩家A 采取行动，因为要推动过程越过这一点，代价会过于高昂；对玩家B同样也存在对称的论证。

包容型均衡与威慑均衡中的均衡策略呈现出显著不同的特性：当A（B）玩家满足$x_a^0 \le x$（$x \le x^0{}_b$）时，其均衡策略为凸函数；否则则为先凸后凹。在包容型均衡中（如图 2a所示），双方的均衡策略均为凸函数，不稳定性平滑地消失。相比之下，在威慑均衡中（如图 3a所示），均衡策略先凸后凹，且在稳定现状处斜率趋于无穷大；当上界成为约束时，非活跃基准中也会出现同样的情形。这再次体现了威慑均衡受约束的性质：仿佛另一位玩家在稳定现状处设置了一道反射障碍。在图 3b中，我们还展示了第二种威慑均衡的情形，其中唯一的稳定现状恰好与$x^0{}_b$重合。在这种情况下，B玩家的均衡策略也与其在非活跃基准下的最优控制相同。由于$x = x^0{}_b$ 处设有反射边界，B玩家的最优控制不会受到影响——这解释了控制策略的凸性结构。然而，这限制了A玩家达到更有利状态（$x_a^0 > x = x^0{}_b$）的雄心，从而使其均衡不稳定性策略呈现先凸后凹的结构。

3.3. 均衡比较静态

均衡的刻画表明，阈值$x_a^0, x^0{}_b$ 体现了每个玩家的最大威胁能力：不存在一种均衡，其稳定现状对玩家A 而言比$\max\{x_a^0, x^0{}_b\}$ 更有利、同时又比$\min\{x_a^0, x^0{}_b\}$更不利；而对玩家B而言，情况恰恰相反。

均衡对非活跃基准阈值$x_a^0, x^0{}_b$ 的这种内在依赖，意味着我们可以直接利用个体决策问题上的比较静态结果（命题 5），推导出均衡相对于参与者的不稳定性成本c和耐心程度或贴现率r的比较静态结果。

[7] 如果x处存在一个凸折点，那么v_a 在x 右侧的增速会快于左侧，因此玩家A 可以通过严格提高波动率来获利，从而推动过程向上；玩家B的情况则对称。

当参与者足够缺乏耐心且面临足够高的不稳定性成本时，我们会得到唯一的包容型均衡，其稳定状态构成一个范围较大的区域，$[x_a^0, x^0\, b]$, with $x_a^0 \le x^0\, b$。固定 r_b, c_b（因此 $x^0\, b$），随着 r_a 或 c_a 下降，x_a^0 会上升，稳定状态集合会缩小，如图2b所示：玩家 A 现在会发现，在原先稳定的状态下制造不稳定性是值得的。当参与者足够有耐心且成本足够低（r_a, c_a 足够小）时，最终会出现 $x_a^0 > x^0\, b$，并转入威慑均衡。所有均衡都只有一个稳定状态 $x \in [x^0\, b,\ x_a^0] \setminus \{0, 1\}$。因此，随着 r_a, c_a 进一步下降，x_a^0 会上升，均衡集合也会扩大。令 $\le_{SSO}$ 表示强集合序。以下推论总结了这些结果：

推论2。固定 $r_b,\ c_b > 0$。

(i) 存在唯一的 $\theta > 0$，使得 $r_a^2 c_a \le (<) \theta$ 当且仅当 $x_a^0 \ge (>) x^0\, b$。

(ii) 令 (r_a, c_a)、$(\tilde{r}_a, \tilde{c}_a)$，并且给定 (r_b, c_b)，分别用 $\mathscr{S}$ 和 $\tilde{\mathscr{S}}$ 表示与相应均衡相关联的稳定状态集合。若 $r_a^2 c_a \le (<)\ \tilde{r}_a^2 \tilde{c}_a$，则均衡稳定状态按强集合序递增，$\mathscr{S} \le_{SSO} (<_{SSO}) \tilde{\mathscr{S}}$。此外，若 $\theta \le r_a^2 c_a$，则 $\tilde{\mathscr{S}} \supseteq (\supset) \mathscr{S}$；若 $\tilde{r}_a^2 \tilde{c}_a \le \theta$，则 $\mathscr{S} \subseteq (\subset) \tilde{\mathscr{S}}$。

若固定 $r_a,\ c_a$ 并改变玩家B的参数，结论同样对称成立。

因为如果玩家更有耐心（r更低），或面临的不稳定性成本更低（c），均衡稳定状态就会按强集合序移动，这表明也有可能就均衡收益进行比较静态。对于合作型均衡，比较很直接；但考虑威慑均衡时则有一个微妙之处。降低c 仍会使玩家在所有情况下都过得更好，因为这会提高其在不稳定区域内的价值函数，而在被动区域内则保持不变。然而，降低r 的影响则变得模棱两可：固定一个给定的均衡（即一个稳定点），这会使玩家在不稳定区域内境况更好，而在被动区域内境况更差。均衡的多重性进一步使比较变得复杂，因为在不同参数下可能选择不同的均衡，并出现相互交叉的均衡价值函数。下面的命题总结了均衡收益分别关于c 和r 的比较静态——证明直接由比较原理得出：

命题 9。固定 r_b, c_b。设 $\tilde{v}_a, v_a$ 和 $\tilde{x}, x$ 分别为玩家 A 在给定 $\tilde{r}_a, \tilde{c}_a$ 和 r_a, c_a 时，与均衡相关的价值函数和均衡阈值，且满足 $(\tilde{r}_a, \tilde{c}_a) \le (r_a, c_a)$ 且 $\tilde{x} \ge x$。则 $\tilde{v}_a \ge v_a$ 在 $[0, \tilde{x}]$ 上成立。此外，若 $\tilde{r}_a = r_a$ 或 $\tilde{x} < x^0\, b$，则 $\tilde{v}_a \ge v_a$ 在 $[0, 1]$ 上成立。

4. 均衡动态

参与者策略性地利用不确定性生成机制，会对不稳定性的动态变化以及现状的演变产生什么影响？上一节对均衡的精确刻画可以直接用于回答这些问题。

我们模型的一个显著特征是，所有均衡（无论是迁就型还是威慑型）都呈现出某种路径依赖。考虑一个任意均衡，其阈值为 x，x 将状态空间划分为 $[0,1]$，，并将 X_0 记为该过程的初始点。如果我们从一个稳定状态 $X_0 \in [x, x]$ 开始，那么它将永远维持现状，因为没有玩家会引发任何不稳定性。此外，如果过程从比如 A 的不稳定区域 $[0, x]$ 开始，它也会一直停留在该区域——B 的不稳定区域 $[x, 1]$ 也是如此。这是因为过程具有连续性，而且外边界（分别为 0 或 1）是反射边界，而内边界（分别为 x 或 x）在均衡中是吸收边界。这意味着，起初处于最不利地位的玩家在均衡中将永远如此，最多只能期望达到自己最不偏好的稳定现状。

该过程长期来看会收敛到稳定现状吗？还是说，如果从不稳定区域出发，不稳定性会持续下去？根据前文讨论，如果某个玩家的不稳定区域内存在（概率意义上的）收敛，那么收敛目标将是其最不偏好的稳定现状。下一个命题证实了这一直觉。

命题10. 令 X_t 为与均衡策略 a^*, b^* 相关的过程，并将 x, x 记为相应的均衡阈值。那么，（i）若 $X_0 \in [x, x]$，$X_t = X_0$ 对所有 t 均成立；且（ii）若 $X_0 < x$（分别地，$> x$），则 X_t 几乎必然收敛到 x（分别地，x）。

对于 $X_0 \in [x, x]$ 的情形，鉴于该过程是退化的且不存在不稳定性，命题10 的证明是显而易见的。对于 $X_0 < x$，我们可以采用构造性方法证明 X_t 是下鞅。具体而言，构造过程 Y_t，定义为 $dY_t := \sqrt{2a^*(|X_t|)}dB_t$。由于 a^* 的结构，Y_t 在 $[-x, x]$ 上具有吸收边界，因此利用 a^* 的有界性和可选停止定理，可以验证它是一个鞅。利用解 X_t 的路径唯一性，我们可以论证 $Y_t = |X_t|$，也就是说，Y_t 是 X_t 的镜像，只是没有在 0 处发生反射——具体做法是固定一条布朗路径 $B_t(\omega)$，路径唯一性会唯一确定 $X_t(\omega)$。接着我们论证，Y_t 和 X_t 只能在同一时刻穿过原点，并且在两次到达零的时刻之间，要么完全相同，要么互为镜像（因为它们具有相同的增量）。

由于绝对值是凸函数，我们可以得出 X_t 是下鞅；根据鞅收敛定理，它几乎必然收敛。随后我们可以用反证法证明 X_t 收敛到 x，因为收敛到任何$x < x$，都只能在布朗运动的零测度轨迹下才能维持。对于 $X_0 > x$ 的论证是对称的，只需围绕1进行类似构造。

命题10意味着从长期来看，不稳定性会逐渐减弱。随着参与者逐渐接近稳定现状，无论是哪位参与者在制造不稳定性，都会变得更加保守——这是最佳响应的性质所导致的结果。因此，从长期来看，稳定性将占据上风。

5. 讨论

现在，我们讨论模型的若干变体。

外生不稳定性。为了清楚地识别制造不稳定性的策略性激励，我们聚焦于不稳定性完全由内生因素导致的情形。由于我们的最佳响应刻画允许对手采取任意策略，而这些策略对应于连续的外生状态依赖波动结构，因此，在第 2.1 节和2.2中的所有结论，在允许存在外生不稳定性来源（在给定X_t的条件下，该来源独立于 α_t 和 β_t）时仍完全成立。考虑固定的外生不稳定性水平 $\sigma > 0$，使得$dX_t = \sqrt{\alpha_t + \beta_t + \sigma^2} dB_t - dK_t$，则均衡存在。[8] 然而，尽管任何均衡都存在一个唯一状态$x \in (0,1)$，在该状态下$a^*(x) = b^*(x) = 0$，修改后的模型会（机械地）表现出持续不断的不稳定性。现状不再会收敛至稳定状态：状态最终会变得对任何给定参与者都过于不利。因此，参与者将永远交替制造不稳定性，以寻求相对于现状的（暂时）改善。

不稳定性成本。虽然为便于阐述，我们采用了二次成本，但只要正则性足够，[9] 相关结果可推广至平滑的严格凸不稳定性成本。具体而言，关于最佳响应阈值结构（以及定理 2中的其他性质）、单调性和均衡刻画的证明，均可调整以适应一般成本

[8]容易证明，唯一的黏性解v_a 对于任意连续的b 现在都是三次连续可微的，且前三阶导数均有界。随后，应用阿尔泽拉-阿斯科利定理和绍德尔不动点定理，即可得出均衡的存在性。[9]具体而言，成本需足够光滑、严格递增，并且在 $\mathbb{R}_+$上严格凸，其中 $0 = c(0) = c'(0)$。尽管刻画其适用范围超出了本文的讨论范围，但只要成本函数具有足够的正则性，定理 1（或其某个版本）的证明策略仍然适用。

结构。HJB方程可表示为

$$rv_a(x) - \sup_{a\in\mathbb{R}_+}\left\{rx - rc(a) + (a + b(x))v_a''(x)\right\}.$$

此外，当 $rc'(a^*(x)) = v_a''(x)_+$ 时，只要 $a^*(x) > 0$，那么我们就有

$$r(v_a(x) - x) - b(x)rc'(a^*(x)) = rc'(a^*(x))a^*(x) - rc(a^*(x)),$$

由此可得，b 的单调性意味着a^*的单调性。[10]

状态空间。 我们的模型有一个实质性假设，即状态空间位于一个闭区间上，因为下界所提供的期权价值会促使参与者产生严格为正的不稳定性。若状态空间没有下界，除非参与者不是风险中性的，否则他们不会有意产生不稳定性。如果边界是吸收边界而非反射边界，也会得出类似的结论。

终端收益。 最后，我们考虑存在终端收益的情形：参与者不再获得流量收益，而仅在双方都不产生不稳定性时获得该收益。这可以看作冲突的一种极端形式，因为制造不稳定性会完全剥夺对手的任何流量收益。显然，对于给定的对手策略b，玩家A的最优控制必须满足$a(x) = 0$，只要$b(y) > 0$ 对于任意$y \geq x$成立，因此任何最佳响应都会出现解耦。直观而言，在非活跃基准（$b \equiv 0$）下，玩家A的价值函数应满足

$$rv_a(x) = \max\left\{rx, \frac{1}{2rc}[v_a''(x)_+]^2\right\} \quad \text{on } (0,1)$$

在边界条件 $v_a'(0) = 0$、$v_a(1) = 1$ 下，控制由 $a^{*,0}(x) = 1\ rc\ v_a''(x)_+$ 给出。不同于我们的模型，我们注意到，在这种情况下，非活跃基准中的不稳定性将会增加而非减少。这一结果让人联想到 Gul and Pesendorfer（2012年）以及 Gieczewski（2020年）的研究。[11] 聚焦于单调策略，可以构造出容纳均衡，其稳定状态区域为 $[x_a^0,\ x^0\ b]$（如果 $x_a^0 < x^0\ b$），以及

[10]感谢 Yu Fu Wong 指出，在个体决策情形下，单调性可推广到一般的成本结构——这对应于我们的非活跃基准，其中 $b \equiv 0$。[11]此外，Moscarini 和 Smith（2001）研究的不是冲突，而是学习。

具有唯一稳定状态的威慑均衡$x \in [x^0{}_b、x_a^0]$（否则）将是直接的，[12]不稳定性在接近稳定状态区域的状态处最大。

我们关于不稳定性机制及其在冲突情境中的战略重要性所提出的新颖模型，为未来研究开辟了若干方向。该模型表明，不稳定性可能具有内生性，并由此产生非平凡动态；对此应进一步研究，尤其是为了更好地理解在更丰富的环境中各种冲突机制之间的相互作用，以及它们在冲突、讨价还价等具体情境中的应用。

6. 参考文献

Achdou, Y., J. Han, J.-M. Lasry, P.-L. Lions, and B. Moll. 2021年。“宏观经济学中的收入与财富分配：连续时间方法。”《经济研究评论》1–42. 4 Agastya, Murali, and Randolph Preston McAfee. 2006年。“持续消耗战。”工作论文 1–36. 4, 6 Alvarez, Olivier, Jean-Michel Lasry, and Pierre-Louis Lions. 1997年。“凸粘性解与状态约束。”纯粹与应用数学杂志 76 (3): 265–288. 10.1016/S0021-7824(97)89952-7. 41 Anderson, Axel, and Luís Cabral. 2007。“孤注一掷还是稳扎稳打？选择方差的动态竞争。”兰德经济学期刊 38 (3): 593–609. 3 Bass, Richard F., Krysztof Burdzy, and Zhen-Qing Chen. 2007。“退化随机微分方程的路径唯一性。”概率年鉴 2385–2418. 33 Bass, Richard F., and Zhen-Qing Chen. 2005。“具有奇异和退化系数的一维随机微分方程。”Sankhy¯a: 印度统计学杂志 19–45. 33 Baye, Michael R., Dan Kovenock, and Casper G. de Vries. 1993。“操纵游说过程：全付拍卖的一个应用。”《美国经济评论》83 (1): 289–294. 3 Besley, Timothy, and Torsten Persson. 2011。“政治暴力的逻辑。”《经济学季刊》126 (3): 1411–1445. 3

[12]注意，在威慑均衡下，没有任何参与者有动机在x 处制造不稳定性，因为这会导致永久性不稳定，因此对双方而言，不稳定性都不会带来任何收益。

Cabral, Luís. 2003年。“企业选择方差时的研发竞争。”《经济学与管理战略杂志》12 (1): 139–150. 3 Calveras, Aleix, Juan J. Ganuza, and Esther Hauk. 2004年。“疯狂竞标：采购合同中的绝地反击式赌博。”《规制经济学杂志》26 (1): 41–68. 3 Chassang, Sylvain, and Gerard Padró i Miquel. 2010年。“战略风险下的冲突与威慑。”《经济学季刊》125 (4): 1821–1858. 3 Che, Yeon-Koo, and Ian L. Gale. 1998年。“政治游说上限。”《美国经济评论》88 (3): 643–651. 3 Crandall, Michael G., Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. 1992年。“二阶偏微分方程粘性解用户指南。”《美国数学会通报》27 1–67. 10.1090/S0273-0979-1992-00266-5. 9, 11, 33, 37, 38, 40, 43 Daley, Brendan, and Brent Green. 2020年。“讨价还价与新闻。”《美国经济评论》110 (2): 428–74. 4 Daley, Brendan, and Brett Green. 2012年。“在柠檬市场等待新闻。”《计量经济学》80 (4): 1433–1504. 4 Dziubiński, Marcin, Sanjeev Goyal, and David E. N. Minarsch. 2021年。“征服策略。”《经济理论杂志》191 (105161): 1–38. 3 Escudé, Matteo, and Ludvig Sinander. 2023年。“缓慢说服。”《理论经济学》18 (1): 129–162. 4 Esteban, Joan, and Debraj Ray. 1999年。“冲突与分配。”《经济理论杂志》87 (2): 379–415. 3 Esteban, Joan, and Debraj Ray. 2011年。“族群冲突模型。”《欧洲经济学会杂志》9 (3): 496–521. 3 Faingold, Eduardo, and Yuliy Sannikov. 2011年。“连续时间博弈中的声誉。”《计量经济学》79 (3): 773–876. 4 Fang, Dawei, and Thomas Noe. 2016年。“扭转胜算：为基于排名的奖励承担风险。”工作论文 1–70. 3 Fang, Dawei, and Thomas Noe. 2022年。“更少竞争，更多贤能主义？”《劳动经济学杂志》40 (3): 669–701. 3 Fearon, James D. 1995年。“战争的理性主义解释。”《国际组织》49 (3): 379–414. 3

Fleming, Wendell H., 和 H. Mete Soner。2006年。《受控马尔可夫过程与黏性解》。第25卷。Springer Science & Business Media。4, 9 Gieczewski, Germán。2020年。《演变中的消耗战》。工作论文 1–51。4, 6, 28 Gul, Faruk, 和 Wolfgang Pesendorfer。2012年。《信息之战》。《经济研究评论》79 (2): 707–734。4, 6, 28 Harris, Christopher, 和 John Vickers。1987年。《不确定性下的竞赛》。《经济研究评论》54 (1): 1–21。4 Isaacs, Rufus。1965年。《微分博弈》。Wiley，纽约。4 Jackson, Matthew O., 和 Massimo Morelli。2009年。《战略性军事化、威慑与国家间战争》。《政治科学季刊》4。3 Kaplan, Greg, Benjamin Moll, 和 Giovanni L. Violante。2018年。《基于异质性主体新凯恩斯模型的货币政策》。《美国经济评论》108 (3): 697–743。4 Kräkel, Matthias, Petra Nieken, 和 Judith Przemeck。2014年。《选举竞争中的风险承担与投资》。《欧洲政治经济学杂志》33 98–120。3 Kuvalekar, Aditya, 和 Elliot Lipnowski。2020年。《就业不安全》。《美国经济学杂志：微观经济学》12 (2): 188–229。4 Lester, Chandler。2020年。《宏观经济模型中的有限理性：连续时间方法》。工作论文 1–43。4 Lions, Pierre-Louis。1986年。《反射扩散过程的最优控制：状态约束的一个例子》。载于《随机微分系统》，N. Christopeit、K. Helmes 和 M. Kohlmann 编，269–276，Springer Berlin Heidelberg，。10.1007/BFb0041170。4, 34 Lions, Pierre-Louis, 和 Alain-Sol Sznitman。1984年。《具有反射边界条件的随机微分方程》。《纯粹与应用数学通讯》37 (4): 511–537。10.1002/cpa.3160370408。32, 33 Maskin, Eric, 和 Jean Tirole。2001年。《马尔可夫完美均衡：I. 可观察行动》。《经济理论杂志》100 (2): 191–219。7 Bueno de Mesquita, Ethan。2020年。《内生租金引发的领土冲突》。《政治学杂志》82 (1): 162–181。3 Moscarini, Giuseppe, 和 Lones Smith。2001年。《最优试验水平》。《计量经济学》69 (6): 1629—1644。6, 28 Moscarini, Giuseppe, 和 Lones Smith。2011年。《最优动态竞赛》。工作论文 1–41。4

Ortner, Juan。2019年。《双边讨价还价的连续时间模型》。《博弈与经济行为》113 720–733。4 Pham, Huyen。2009年。《连续时间随机控制与优化：金融应用》。第61卷。Springer Science & Business Media。4, 9, 34 Powell, Robert。2013年。《垄断暴力与巩固权力》。《经济学季刊》128 (2): 807–859。3 Sannikov, Yuliy。2007年。《连续时间下具有不完全可观测行动的博弈》。《计量经济学》75 (5): 1285–1329。4 Simon, Leo K., 和 Maxwell B. Stinchcombe。1989年。《连续时间扩展式博弈：纯策略》。《计量经济学》1171–1214。7 Skorokhod, Anatoliy V.。1961年。《有界区域中扩散过程的随机方程》。《概率论及其应用》6 (3): 264–274。33 Tullock, Gordon。1980年。《有效寻租》。3–16，德克萨斯农工大学。3 Yamada, Toshio, 和 Shinzo Watanabe。1971年。《关于随机微分方程解的唯一性》。《京都大学数理科学纪要》11 (1): 155–167。33

附录A. 预备知识

A.1. 带反射的随机微分方程

考虑我们感兴趣的方程，其中给定连续可测函数a,b：

$$dX_t = \sqrt{2\big(a(X_t)+b(X_t)\big)}dB_t - dK_t$$

设 X_t、K_t 在 $\mathcal{O}:=(0,1)$ 上解反射问题，若它们是连续的 $\mathscr{F}_t$-适应过程，并满足：(i) $dX_t = \sqrt{2(\alpha_t + b(X_t))}dB_t - dK_t$；(ii) $\overline{X_t \in [0,1]}$几乎必然成立；(iii) K_t非递减，其全变差为 $|K|_t = \int_0^t \mathbb{1}_{X_t\in\{0,1\}}d|K|_s$，且 $K_t = \int_0^t n(X_s)d|K|_s$，其中 $n(\cdot)$ 表示 $\mathcal{O}$ 的单位外法向量，即 $n(1) = 1$，$n(0) = -1$。

K_t 是过程在边界处的局部时——当 X_t 撞上边界时，它会以最小的作用将其推回定义域内部（朝向内法向量），通过补偿那些会使 X_t 离开定义域的变化来实现。 Lions 和 Sznitman（1984）证明，在更一般的反射区域中，只要满足能够保证……的假设，这类过程便是唯一确定的

无反射的随机微分方程（SDE）存在强（路径）唯一解。[13]

A.2. 测试函数与二阶半喷流

我们回顾二阶半喷流的定义。v 在$x_0 \in (0,1)$ 处的二阶次喷流记为$J^{2,-}_{[0,1]}v(x_0) \subset \mathbb{R}^2$，其定义如下：

$$(p,M) \in J^{2,-}_{[0,1]}v(x_0) \iff v(x) \geq v(x_0) + p(x-x_0) + \frac{1}{2}M(x-x_0)^2 + o(|x-x_0|^2) \quad \text{as } x \to x_0$$

由于边界起着特殊作用，当 $x_0 \in \{0,1\}$ x 只能从一侧趋近于 x_0。遵循 Crandall 等人（1992），我们考虑次喷流 $J^{2,-}_{[0,1]}v(x)$ 的闭包，以便在边界和不可微点处恰当地定义黏性刻画。

为了将次喷流与我们用测试函数定义的粘性解联系起来，我们回顾一个经典结果：$(p, M) \in J^{2,-}_{[0,1]}v(x_0)$ 当且仅当存在一个 $\mathscr{C}^2$ 函数 ϕ，使得 x_0 是 $v - \phi$ 的局部最大值，并且 $\phi'(x_0) = p$，$\phi''(x_0) = M$。要求该最大值为全局最大值并施加条件 $\phi(x_0) = v(x_0)$ 并不失一般性。换句话说，次喷流包含一类可接受的一阶和二阶导数值：它们对应于一个处处严格小于 v（因此称为次喷流）、且在 x_0处与 v 相等的光滑函数 ϕ。这囊括了关于 v 的所有相关微分信息，确实可以视为一种针对不可微函数的可微性概念。上喷流的定义与之对称，但考虑的是从上方给出的凸二次近似（或光滑测试函数）。我们将其记为 $J^{2,+}_{[0,1]}v(x_0) \subset \mathbb{R}^2$，其定义如下：

$$(p,M) \in J^{2,+}_{[0,1]}v(x_0) \iff v(x) \leq v(x_0) + p(x-x_0) + \frac{1}{2}M(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) \quad \text{as } x \to x_0$$

[13]一般而言，这一结果不能直接应用于我们的方程。自Yamada 和 Watanabe (1971) 的开创性论文以来，众所周知，对于形式为 $dX_t = \sigma(X_t)dB_t$ 的随机微分方程，除了一般条件——σ 具有至少 1/2 阶的赫尔德连续性——之外，通常很难保证解的路径唯一性。显然，在我们的模型中，对于一般的连续 a,b，这一条件并不成立。不过，后续研究针对特定情形放宽了赫尔德1/2条件。就我们的情形而言，反射的存在有助于保证解的存在性和路径唯一性，尽管在无界定义域上，这些性质实际上未必成立。具体而言，Bass 和 Chen (2005)证明，在温和的正则性条件下，对于一个具有 α 阶赫尔德连续扩散系数的单侧反射问题，其解具有路径唯一性，$\alpha \in (0,1/2)$。Bass 等人 (2007) 对此结果作了推广，并给出了另一种证明。他们关于单侧反射的证明策略基本涵盖了我们关注的情形，而且很容易扩展到具有第二反射屏障的情形：这保证了我们方程在零点具有单侧反射时解的路径唯一性。随后，我们可以利用Lions 和 Sznitman (1984) 的分析工具，或采用 Skorokhod (1961) 的原始方法，在单侧反射过程具有路径唯一性的前提下，证明带有第二反射屏障时解的存在性和路径唯一性。

其中 $\mathcal{J}^{2,+}_{[0,1]}v(x_0)$ 表示上喷流的闭包。对于测试函数，类似的结果也成立：$(p, M) \in J^{2,+}_{[0,1]} v(x_0)$ 当且仅当存在一个 $\mathcal{C}^2$ 函数 ϕ，使得 x_0 是 $v - \phi$ 的局部（不失一般性地，亦可为全局）最小值，并且 $\phi'(x_0) = p$，$\phi''(x_0) = M$（不失一般性地，$\phi(x_0) = v(x_0)$）。

我们交替采用以测试函数和半喷流表述黏性性质的（等价）方式，以便选择最方便、最直观的方法。

附录B. 省略的证明

B.1. 定理 1 （黏性刻画：存在性与唯一性）

B.1.1. 命题 1 （黏性刻画）

回顾控制问题：

$$v(x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\int_0^\infty e^{-rt} f(X_t, \alpha_t) dt\right] \qquad \text{s.t. } dX_t = \sqrt{2\big(\alpha_t + b(X_t)\big)} dB_t - n(X_t) dK_t$$

其中 $f(x,a) = x - c\,a^{2}_{2}$

解的黏性刻画的证明是标准的，依赖于应用动态规划原理（DPP）和伊藤公式——尽管如此，我们仍未能找到一份推导能完全符合我们的所有假设，因此我们按照通常步骤给出直接推导。[14] 我们的特定设定使我们能够大幅放宽对模型原始要素的正则性假设——特别是，只要我们能保证随机微分方程的路径唯一性，b 连续即可。

我们采用以下版本的动态规划原理（DPP）（参见例如 Pham 2009，第3.3节），其中包含两个结论：(1) 对所有 $\alpha \in \mathcal{A}$，以及所有停时 τ，$v(x) \geq \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau e^{-rt} f(X\,x_t, \alpha_t) dt + e^{-r\tau} v(X\,x_\tau)\Big]$；(2) 对所有 $\epsilon > 0$，存在 $\alpha \in \mathcal{A}$，使得对所有停时 τ，$v(x) - \epsilon \leq \mathbb{E}\Big[\int_0^\tau e^{-rt} f(X\,x_t, \alpha_t) dt + e^{-r\tau} v(X\,x_\tau)\Big]$。这里，我们用 $X\,x_t$ 表示过程 $X_t = \sqrt{2\alpha_t + b(X_t)} dB_t - n(X_t) dK_t$ 从 $X_0 = x$ 出发时在 t 时刻的取值。

[14] 最接近的结果见于 Lions（1986），其针对更一般的情形采用了更强的正则性假设。以下证明紧密遵循 Pham（2009，第4节.3）的思路。

我们首先证明 v 是（RP）的上解。取 $x_0 \in [0,1]$ 和 $\varphi \in \mathscr{C}^2([0,1])$，使得 x_0 是 $v_* - \varphi$ 的一个全局最小值；不失一般性地，令 $(x_0) = v_*(x_0)$，其中 v_* 表示 v 的下半连续（l.s.c.）包络。根据定义，$\exists\{x_n\}_n$ 满足 $x_n \to x_0$ 且 $v(x_n) \to v_*(x_0)$，当 n 趋于无穷时成立。由 ϕ的连续性，$\gamma_n := v(x_n) - \phi(x_n) \to v_*(x_0) - \phi(x_0) = 0$。定义 h_n 为任意严格正数列，满足 $h_n \to 0$ 且 $\gamma_n / h_n \to 0$ 在 n 趋于无穷时成立。任取一个 $\eta > 0$，并定义停时 $\tau_n := \inf\{t \geq 0, |X x^{n}t - x_n| > \eta\}$（即从 x_n 出发的过程首次离开半径为 η的球的时刻）。接着定义停时 $\theta_n := \tau_n \wedge h_n$。在 x_n 处，采用任意常值策略 $\alpha_t \equiv a$ 和停时 θ_n应用动态规划原理：

$$v(x_n) \geq \mathbb{E}\left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt} f(X_t^{x_n}, a)dt + e^{-r\theta_n} v(X_{\theta_n}^{x_n})\right].$$

由于x_0是$v_* - \phi$的全局最小值，$v(x) \geq v_*(x) \geq \phi(x)$对所有$x \in [0,1]$都成立；根据构造，$v(x_n) = \phi(x_n) + \gamma_n$，因此：

$$\varphi(x_n) + \gamma_n \geq \mathbb{E}\left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt} f(X_t^{x_n}, a)dt + e^{-r\theta_n} \varphi(X_{\theta_n}^{x_n})\right].$$

在 θ_n,x_n 处应用伊藤公式并重新整理，得到：

$$\begin{aligned}\gamma_n \geq \mathbb{E}\Big[&\int_0^{\theta_n} e^{-rt}\left(f(X_t^{x_n}, a) + (a + b(X_t^{x_n}))\varphi''(X_t^{x_n}) - r\varphi(X_t^{x_n})\right)dt \\ &- \int_0^{\theta_n} e^{-rt}\varphi'(X_t^{x_n})n(X_t^{x_n})dK_t + \int_0^{\theta_n} e^{-rt}\varphi'(X_t^{x_n})\sqrt{2(a + b(X_t^{x_n}))}dB_t\Big].\end{aligned}$$

最后一项中的被积函数 $\int^{\theta_n}{}_0 \ \varphi'(X_{x\ n_t})(a + b(X_{x\ n_t}))dB_t$ 是有界的，因此其期望等于零。重新整理并除以h_n，得到：

$$\frac{\gamma_n}{h_n} + \mathbb{E}\left[\frac{1}{h_n}\int_0^{\theta_n} e^{-rt}\left(r\varphi(X_t^{x_n}) - f(X_t^{x_n}, a) - (a + b(X_t^{x_n}))\varphi''(X_t^{x_n})\right)dt\right] + \mathbb{E}\left[\frac{1}{h_n}\int_0^{\theta_n} \varphi'(X_t^{x_n})n(X_t^{x_n})dK_t\right] \geq 0.$$

当n 足够大时，由X_t的轨道几乎处处连续性，$\theta_n = h_n$ 几乎处处成立。我们使用控制收敛定理和中值定理，得到当n 趋于无穷时，

$$r\varphi(x_0) - f(x_0, a) - (a + b(x_0))\varphi''(x_0) + \varphi'(x_0)n(x_0)\mathbb{1}_{x_0 \in \{0,1\}} \geq 0,$$

其中最后一项由定义可得 $dK_0 = 0 \text{ if } x_0 \in (0,1)$。因此：

$$r\varphi(x_0) - \sup_{a \geq 0}\left\{f(x_0, a) + (a + b(x_0))\varphi''(x_0)\right\} + \varphi'(x_0)n(x_0)\mathbb{1}_{x_0 \in \{0,1\}} \geq 0.$$

这意味着，对所有 $x \in (0,1)$，$r\varphi(x_0) - \sup_{a\geq 0}\{f(x_0,a)+(a+b(x_0))\varphi''(x_0)\} \geq 0$；在边界处，对于 $x \in \{0,1\}$，要么 $r\varphi(x_0) - \sup_{a\geq 0}\{f(x_0,a)+(a+b(x_0))\varphi''(x_0)\} \geq 0$，要么 $\varphi'(x_0)n(x_0) \geq 0$（因为它们的和非负，所以不可能两者都为负）。由此我们可以直接得出，v 是 (RP) 的上解。

现在证明v是（RP）的下解。考虑$x_0 \in [0,1]$和 $\varphi \in \mathscr{C}^2([0,1])$使得 x_0是$v^* - \varphi$ 的全局最大值，且 $\varphi(x_0) = v^*(x_0)$，其中v^* 表示v的上半连续（u.s.c.）包络。反设v 不是（RP）的下解。

由于 $\varphi'(x_0)n(x_0)\mathbb{1}_{x\in\{0,1\}}$ 在边界上严格为正，在其外为零，且 $x_0 \mapsto r\varphi(x_0) - \sup_{a\geq 0}\left\{f(x_0,a)+(a+b(x_0))\varphi''(x_0)\right\}$是连续的，因此存在 $\epsilon > 0$和 $\eta > 0$，使得对所有 $x \in B(x0,\eta) \cup [0,1]$,

$$r\varphi(x) - \sup_{a\geq 0}\left\{f(x,a)+(a+b(x))\varphi''(x)\right\} + \varphi'(x)n(x)\mathbb{1}_{x\in\{0,1\}} \geq \epsilon.$$

于是，根据上半连续包络的定义，我们可以考虑一个取值于 $B(x0,\eta)\cup[0,1]$ 的序列 x_n，使得 $x_n \to x_0$，并且当 n 趋于无穷时，$v(x_n) \to v^*(x_0)$。与之前一样，我们记 $\gamma_n := v(x_n) - \varphi(x_n) \to 0$，并取一个严格正数列 h_m，使得 $h_m \to 0$ 且 $\gamma_m/h_m \to 0$。

定义停时 $\tau_n := \inf\{t \geq 0, |X_x{}^{n}{}_t - x_n| > \eta'\}$，其中 η' 满足 $0 < \eta' < \eta$ 且 $\theta_n := \tau_n \wedge h_n$。将上文所述动态规划原理的第二部分应用于 with $\epsilon h_n/2$，并取停时 θ_n，可得存在 $\alpha^n \in \mathscr{A}$ 使得:

$$v(x_n) - \frac{\epsilon h_n}{2} \leq \mathbb{E}\left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt} f(X_t^{x_n}, \alpha_t^n)dt + e^{-r\theta_n} v(X_{\theta_n}^{x_n})\right]$$

回想一下，根据构造，$v(x_n) = \varphi(x_n) + \gamma_n$，且 $v^* \leq \varphi$，因此

$$\varphi(x_n) + \gamma_n - \frac{\epsilon h_n}{2} \leq \mathbb{E}\left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt} f(X_t^{x_n}, \alpha_t^n)dt + e^{-r\theta_n} \varphi(X_{\theta_n}^{x_n})\right]$$

对$e^{-r\theta_n}\varphi(X_x{}^{\theta}{}^{n}{}_n)$应用伊藤公式并重新整理，得到:

$$\gamma_n - \frac{\epsilon h_n}{2} \leq \mathbb{E}\left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt}\left\{\left(-r\varphi(X_t^{x_n}) + f(X_t^{x_n}, \alpha_t^n) + (\alpha_t^n + b(X_t^{x_n}))\varphi''(X_t^{x_n})\right)dt - \varphi'(X_t^{x_n})n(X_t^{x_n})dK_t\right\}\right]$$
$$- \mathbb{E}\left[\int_0^{\theta_n} e^{-rt}\varphi'(X_t^{x_n})\sqrt{2(\alpha_t^n + b(X_t^{x_n}))}dB_t\right]$$

由于根据假设b是连续的，$\left|\varphi'(X_{x\ \ n}t)\sqrt{2(\alpha_t^n+b(X_{x\ \ n}t))}\right|$有界（因为$X_t$根据构造有界），因此最后一个期望项为零。化简并除以h_n：

$$\frac{\gamma_n}{h_n}-\frac{\epsilon}{2}+\mathbb{E}\left[\frac{1}{h_n}\int_0^{\theta_n}e^{-rt}\left\{\left(r\varphi(X_t^{x_n})-f(X_t^{x_n},\alpha_t^n)-(\alpha_t^n+b(X_t^{x_n}))\varphi''(X_t^{x_n})\right)dt+\varphi'(X_t^{x_n})n(X_t^{x_n})dK_t\right\}\right]\leq 0$$

根据构造，积分中的项始终大于ϵ，因此我们得到：

$$\frac{\gamma_n}{h_n}+\epsilon\left(\frac{\mathbb{E}[\theta_n]}{h_n}-\frac{1}{2}\right)\leq 0$$

由于根据构造，当n趋于无穷大（h_n趋于零）时，$\frac{\mathbb{E}[\theta_n]}{h_n}$收敛于1，因此我们得出矛盾，证明至此完成。

B.1.2. 命题 2 的证明（控制问题中的存在性与唯一性）

命题 2 的证明采用了一个标准策略：我们首先为该问题证明比较原理（每个上解都不低于每个下解）；然后利用佩龙方法证明存在性。这两个结果结合起来便可得到唯一性和连续性。

在详细说明比较原理证明的各个步骤之前，我们先概述其证明结构。[15] 任取一个上解w（不失一般性，取下半连续）和一个下解$\underline{w}$（不失一般性，取上半连续），并反设上确界$\sup_{x\in[0,1]}\underline{w}(x)-w(x)>0$。注意，该上确界可以取到，记$x^*$为取到上确界的点。

首先，我们利用粘性解的标准逼近技巧（变量加倍法和 Ishii 引理）证明，上确界不可能在定义域$x^*\notin(0,1)$内部取得。

接下来考虑$x^*=0$。我们证明，$\underline{w}$在0右侧的某个邻域内单调不增；此外，如果$w(0)>0$或$b(0)>0$，那么$\underline{w}$在0右侧的某个邻域内单调不减。$\underline{w}(0)<0$蕴含$b(0)>0$；因此，如果$w(0)>\underline{w}(0)$，那么$w(0)>0$或$b(0)>0$必有其一。因此，根据前一点，$\underline{w}$在0右侧的某个邻域内单调不减。这就产生了矛盾，因为如果$\underline{w}$在0右侧的某个邻域内既单调不减又w单调不增，那么上确界就不可能在0处取得。

接下来，对称地考虑$x^*=1$。我们证明，在 1 左侧的某个邻域内，$\underline{w}$单调不减；此外，如果$\underline{w}(1)>1$或$b(1)>0$，那么在

[15] 证明策略与文献中的标准证明思路相似（例如 Crandall 等人，1992），但由于 HJB 方程中存在非利普希茨项，经典逼近方法的某些部分将会失效。因此，我们需要采用针对该问题的论证方法（而这类问题通常会有严重的病态条件）。

0 左侧的某个邻域内，w单调不增。由于 $w(1) < 1$ 蕴含 $b(1) \geq 0$，如果 $w(1) > w(1)$，那么要么 $w(1) > 1$，要么 $b(1) > 0$。根据前一点，w 在 1 左侧的某个邻域内单调不增——因此同理，上确界不可能在1处取得。

这就得到了一个矛盾，因此我们得出上确界$x\in[0,1]w(x)-w(x)\leq 0$，这意味着对所有$x, w \leq w$.

证明。 考虑 w 是 (RP) 的上解，而w 是 (RP) 的下解。不失一般性，假设w 是下半连续的，且w 是上半连续的——对于w 的下半连续包络（分别对于w的上半连续包络），证明过程完全相同；由于$w(x) \geq w_*(x) \geq w^*(x) \geq w(x)$，最终仍得到相同结论。

反设上确界$x\in[0,1]w(x)-w(x)>0$。该上确界可以取到（因为$w-w$是上半连续的），记x^* 为取到该上确界的点。

我们首先证明一个最大值原理结果：$w-w$ 的上确界不能在定义域内部取到，即$x^*\in\{0,1\}$。反设$x^*\in(0,1)$。定义：

$$M_\alpha := \sup_{x,y\in[0,1]} \underline{w}(x)-\overline{w}(y)-\frac{\alpha}{2}|x-y|^2$$

该上确界可以取到，我们将 (x_α, y_α) 记为取到该上确界的点。显然 $M_\alpha \geq w(x^*)-w(x^*) > 0$。此外，$\lim_{\alpha\to\infty}\alpha|x_\alpha-y_\alpha|^2=0$，且 $\lim_{\alpha\to\infty}M_\alpha = w(x^*)-w(x^*)$（这是一个一般性结果，参见 Crandall 等人（1992年，引理 3.1））。

令 $f(x,y) := \underline{w}(x)-\overline{w}(y)$。根据 Ishii 引理（Crandall 等人，1992年，定理 3.2），我们知道，若 $\psi\in\mathscr{C}^2([0,1]^2)$ 使得 $(\hat{x},\hat{y})$ 是 $f-\psi$ 的局部最大值，那么，对每个 $\epsilon>0$，存在 Y、$X\in\mathbb{R}$，使得 (1) $(D_x\psi(\hat{x},\hat{y}), X)\in \overline{J}^{2,+}\underline{w}(\hat{x})$，即存在 $\varphi\in\mathscr{C}^2$，使得 $\hat{x}$ 是 $w-\varphi$ 的局部极小值，且 $\varphi'(\hat{x}) = D_x\psi(\hat{x},\hat{y})$，并且 $\varphi''(\hat{x}) = X$；以及 (2) $(-D_y\psi(\hat{x},\hat{y}), Y)\in \overline{J}^{2,-}\overline{w}(\hat{y})$，即存在 $\varphi\in\mathscr{C}^2$，使得 $\hat{y}$ 是 $w-\varphi$ 的局部最大值，且 $\varphi'(\hat{y}) = -D_y\psi(\hat{x},\hat{y})$，并且$\varphi''(\hat{y}) = Y$。于是我们有

$$-\left(1+||D^2\psi(\hat{x},\hat{y})||\right) I_2 \leq \begin{pmatrix} \underline{\varphi}''(\hat{x}) & 0 \\ 0 & -\overline{\varphi}''(\hat{y}) \end{pmatrix} \leq D^2\psi(\hat{x},\hat{y}) + \epsilon\left(D^2\psi(\hat{x},\hat{y})\right)^2.$$

因此，对任意 $\alpha>0$，我们可以取 $\epsilon = 1/\alpha$，并在 (x_α, y_α) 处应用此结果，其中 $\psi_\alpha(x,y) := \frac{\alpha}{2}|x-y|^2$。这意味着存在 $\underline{\varphi}_\alpha, \overline{\varphi}_\alpha$，使得 w、w 在 x_α, y_α 处分别有适当的测试函数，满足 $\underline{\varphi}''_\alpha(x_\alpha) \leq \overline{\varphi}''_\alpha(y_\alpha)$ 对所有 $\alpha>0$ 均成立。由于 $x^*\in(0,1)$，上解和下解的性质可得

对任意 α：$F(x_\alpha, w(\underline{x}_\alpha), \underline{\varphi}''_\alpha(x_\alpha)) \le 0 \le F(y_\alpha, \overline{w}(y_\alpha), \overline{\varphi}''_\alpha(y_\alpha))$。整理后得到

$$r(\underline{w}(x_\alpha) - \overline{w}(y_\alpha)) - r(x_\alpha - y_\alpha) \le b(x)\left(\underline{\varphi}''_\alpha(x_\alpha) - \overline{\varphi}''_\alpha(y_\alpha)\right) + \frac{1}{2rc}\left([\underline{\varphi}''_\alpha(x_\alpha)]^2 - [\overline{\varphi}''_\alpha(y_\alpha)_+]^2\right) \le 0,$$

这进而意味着 $r(w(x_\alpha) - w(y_\alpha) - \frac{\alpha}{2}|x_\alpha - y_\alpha|^2) - r(x_\alpha - y_\alpha) \le 0$。令左侧取极限，得到 $w(x^*) - w(x^*) \le 0$。这与我们的前提矛盾。因此，若 $\sup_{x\in[0,1]} w(x) - w(x) > 0$，则上确界只能在边界处取得，即 $x^* \in \{0, 1\}$。

现在考虑$x^* = 0$的情况。我们首先证明，w 在0右侧的某个邻域内单调不增。根据二阶次喷流的定义，只需证明，对所有$(p, M) \in J^{2,-}_{[0,1]} w(0)$，$p \le 0$。

反设存在 $(p, M) \in J^{2,-}_{[0,1]} w(0)$，使得 $p > 0$。任取满足 $0 < p' < p$ 的 p'，并任取 $M' > 0$。必定存在 0 的某个（右侧）邻域，使得 $px + \frac{1}{2}Mx^2 \le p'x + \frac{1}{2}M'x^2$（当 x 足够小时，一阶项占主导）。因此，当 $x \to 0$ 时，$w(x) \ge w(0) + px + Mx^2/2 + o(x^2) \ge w(0) + p'x + M'x^2/2 + o(x^2)$。因此 $(p', M') \in J^{2,-}_{[0,1]} w(0)$。由于对任意大的 M'，上述结论都成立（只要足够接近零），因此产生矛盾：当 M'足够大时，$B(0, p') < 0$ 且 $F(0, w(0), M') < 0$。

我们断言，如果 $w(0) \ge 0$ 或 $b(0) > 0$，那么 w 必定在 0 的某个邻域内单调不减。再次，只需证明，对于所有 $(p, M) \in J^{2,+}_{[0,1]} w(0)$，都有 $p \ge 0$。

用矛盾法，假设存在 $(p, M) \in J^{2,+}_{[0,1]} w(0)$，其中 $p < 0$。任取满足 p' 且 $p < p' < 0$ 的 p。对于任意 $M' < 0$，必定存在 0 右侧的某个邻域，使得 $px + \frac{1}{2}Mx^2 \le p'x + \frac{1}{2}M'x^2$（当 x 趋近于零时，二阶项趋零得更快），因此，当 $x \to 0$ 时，$w(x) \le w(0) + px + Mx^2/2 + o(x^2) \le w(0) + p'x + M'x^2/2 + o(x^2)$。这意味着 $(p', M') \in J^{2,+}_{[0,1]} w(0)$。注意，当 $w(0) > 0$ 或 $b(0) > 0$ 时，$F(0, w(0), M') = rw(0) - b(0)M' > 0$。因此，这是一个矛盾，因为 $B(0, p) > 0$ 且 $F(0, w(0), 0) > 0$。

若 $\overline{w}(0) < 0$，则必有 $b(0) > 0$。事实上，若 $b(0) = 0$，那么根据连续性，对所有满足 $0 \le b(x_\varepsilon) < \varepsilon$ 的 $\varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon > 0$，均有此性质。对于任意 ϵ，任意选取 $(p_\varepsilon, M_\varepsilon) \in J^{2,-}_{[0,1]} w(x_\varepsilon)$。我们对所有 $\varepsilon > 0$ 均有，

$$0 \le F(x_\varepsilon, \overline{w}(x_\varepsilon), M_\varepsilon) = r\overline{w}(x_\varepsilon) - rx_\varepsilon - b(x_\varepsilon)M_\varepsilon - \frac{1}{2rc}M_{\varepsilon+}^2 \le r\overline{w}(0) - b(x_\varepsilon)M_\varepsilon$$

由于 $b(x_\varepsilon) < \varepsilon$，这必然意味着 $M_\varepsilon < -\frac{rw(0)}{\varepsilon}$。换言之，当我们足够接近零时，次喷流中的二阶项有界于任意负常数之上。这就导致了矛盾，因为这意味着 w 在局部有界于任意

凹抛物面之上，而且越接近零越是如此。为使这一点更加严谨，定义 $M'_\varepsilon := M_\varepsilon + \varepsilon$；根据前一点 $(p_\varepsilon, M'_\varepsilon) \notin J^{2,-}_{[0,1]} w(x_\varepsilon)$，也就是说，按定义，当 $x \to x_\varepsilon$ 时，$w(x) \prec w(x_\varepsilon) + p_\varepsilon(x - x_\varepsilon) + M'_\varepsilon (x - x_\varepsilon)^2/2 + o((x - x_\varepsilon)^2)$。

定义 $\varphi_\varepsilon(x) := w(x_\varepsilon) + p_\varepsilon(x - x_\varepsilon) + \frac{1}{2} M'_\varepsilon (x - x_\varepsilon)^2$，$x_\varepsilon$ 不是 $w - \varphi_\varepsilon$ 的局部极小值。但是，根据构造，由于 $M'_\varepsilon \to -\infty$ 且当 ε 趋于零时 $x_\varepsilon \to 0$，$\varphi_\varepsilon(x) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \mathbb{1}_{x \neq 0} \times (-\infty)$，也就是说，该函数在 0 处取值为 0，在其他所有地方都取负无穷，因此 $\liminf_{x \to 0} w(x) = -\infty < w(0)$，这与 w 是下半连续函数相矛盾。

这意味着，如果 $\underline{w}(0) > w(0)$，那么 $\underline{w}$ 在 0 右侧的某个邻域内单调不减——因为要么 $w(0) \geq 0$，这意味着 $\overline{w}(0) > 0$；要么 $w(0) < \underline{0}$，这意味着 $b(0) > 0$。因此，在 0 的某个邻域内，w 单调不增，而 w 单调不减，这直接与 $\overline{w} - w$ 的上确界在 0 处取得、而非在内部取得这一事实相矛盾。

唯一剩下的可能性是 $x^* = 1$。推导过程与前一种情况对称，因此我们得到，在 1 w 的某个邻域内，函数单调不减，而 w 单调不增，这直接与 $w - \underline{w}$ 的上确界在 1 处取得、而非在内部取得这一事实矛盾。

综合这些结论便得到一个矛盾。因此，我们得出 $\sup^{x \in [0,1]} w(x) - \underline{w}(x) \leq 0$，这意味着，对于所有 $x \in [0,1]$，都有 $\overline{w}(x) \geq \underline{w}(x)$，从而完成证明。□

引理 3（存在性——佩龙方法）。若（RP）满足比较原理，且存在一个下解 $\underline{w}$ 和一个上解 $\overline{w}$ 满足边界条件（在黏性意义下），则 $\hat{w}(x) := \sup\{w(x) : \underline{w} \leq w \leq \overline{w}$，并且 $\underline{w}$ 是（RP）的下解，$\}$ 是（RP）的解。

这是标准结果，可直接应用，例如Crandall 等人（1992年）。此外，我们可以给出一个显式的上解（取 $\overline{w}(x) := 1$ 对所有 x），以及一个显式的下解（取 $\underline{w}(x) := 0$ 对所有 x），从而直接得到存在性。

B.2. 定理 2（最佳响应刻画）的证明

定理 2 的证明由以下中间结果构成：

命题 11. 存在 $x_a, x_a \in (0,1]$，$x_a \leq x_a$，使得 (i) 在 $[0, x_a)$ 上，v_a 是凸函数且严格高于恒等函数；(ii) 在 $[x_a, x_a]$ 上，v_a 等于恒等函数；(iii) 在 $(x_a, 1]$ 上，v_a 是凹函数且严格低于恒等函数。此外，v_a 是递增的，并且 $\forall x \in [0,1], \max\{\sup_{x \in [0, x_a]} \partial v_a(x), \sup_{x \in [x_a, 1]} \partial v_a(x)\} \leq 1$。

其中 ∂v_a 和 ∂v_a 分别表示 v_a 在 $[0,x_a]$ 和 $[0,x_a]$；[16] 以及

命题 12. v_a 处处可微，除了可能在 x_a 处不可微。此外，(i) $v_a'(0)=0$，且 (ii) v_a 仅当以下条件成立时才在 x_a 处不可微：(a) $\lim^{x\to x_a^-} v_a'(x) \geq \lim^{x\to x_a^+} v_a'(x)$，(b) $b(x_a)=0$，以及 (c) 若 $x_a<1$，则 $b(1)>0$。

B.2.1. 命题 11 的证明 (价值函数是凸凹的)

证明。根据命题 2，唯一的粘性解 v 是连续的。令 $X^{>}:=\{x\in[0,1]\mid v_a(x)>x\}$ 且 $X^{<}:=\{x\in[0,1]\mid v_a(x)<x\}$，$X^{=}:=[0,1]\setminus(X^{>}\cup X^{<})$。由于 v_a 是下解（分别为上解），$F_a(x,v_a(x),M):=r(v_a(x)-x)-b(x)M-\frac{1}{2}rc[M_+]^2$ 且 $b\geq 0$，因此对任意区间 $I\subseteq X^{>}$（分别为 $I\subseteq X^{<}$），对于所有 $x\in I$ 及所有 $(\psi,M)\in J^{2,+}_{[0,1]}v_a(x)$（分别为 $J^{2,-}_{[0,1]}v_a(x)$），均有 $M>0$（分别为 $M<0$）。注意，在 $X^{=}$ 上，v_a 是线性的。由 Alvarez等人（1997年，引理 1）可知，对于任意凸开子集 $I\subseteq X^{>}\cup X^{=}$（分别为 $I\subseteq X^{<}\cup X^{=}$），$v_a$ 在 I 上是凸的（分别为凹的）。

现在证明，对于开区间 $I\subseteq X^{>}$ 中的任意元素 x，其次梯度满足 $\max\partial v_a(x)<1$。由于 v_a 在 I 上是凸的，因此其取值非空、紧、凸且单调不减。若 $\max\partial v_a(x)\geq 1$，则对于任意满足 $x'\in I$ 且 $x'>x$ 的 x，都有 $v_a(x')\geq v_a(x)+x'-x>x'$。由 v_a 的连续性，$[x,1]\subseteq X^{>}$，并得到 $v_a(1)>1$。然而，由于 v_a 是下解，我们必须有 $0\geq\min\{F_a(1,v_a(1),M),B(1,p)\}=B(1,p)$，对任意 $(p,M)\in J^{2,+}_{[0,1]}v_a(1)$ 均成立。此外，由 v_a 在 $[x,1]$ 上的凸性以及 $\max\partial v_a(x)\geq 1$，可知 $(1,0)\in J^{2,+}_{[0,1]}v_a(1)$，从而 $B(1,p)=1>0$，这就产生了矛盾。类似的论证可用于证明，v_a 在开区间 $I\subseteq X^{<}$ 中任意一点 x 处的上梯度满足 $\max\partial v_a(x)<1$。

v_a 的上梯度界意味着，若 $x\in X^{<}$，则必有 $\forall x'\in[x,1], v_a(x')<v_a(x)+x'-x<x'$，因此 $x'\in X^{<}$。由此立即得到 $\sup X^{>}\leq\inf X^{<}$。于是 $\exists x_a$，存在 $x_a\in[0,1]$ 使得 $[0,x_a)=X^{>}$，$[x_a,x_a]=X^{=}$，且 $(x_a,1]=X^{>}$，其中 $X^{<}$ 和 $X^{>}$ 可能为空。

接下来，我们说明事实上 $X^{>}$，$X^{=}\neq\emptyset$（注意 $X^{>}$ 是 $[0,1]$ 中的一个开集），方法是证明 $0\in X^{>}$。反设 $v_a(0)=0$（因此 $X^{<}=[0,1]$，且 v_a 在 $[0,1]$ 上是凹的）。若存在某个 $x'\in[0,1]$ 使得 $v(x')>0$，令 $p:=v_a(x')/x'>0$。由于 v 是凹的，对所有 $x\in[0,x']$，都有 $v_a(x)=v_a(x)-v_a(0)\geq p(x-0)=p\cdot x>p/2\cdot(x+x^2)$，因此 $(p/2,p)\in J^{2,-}_{[0,1]}v_a(0)$，且 $\max\{F_a(0,v_a(0),p),B(0,p/2)\}<0$，这与 v_a 是上解矛盾。若不存在这样的 x'，则 $v_a\equiv 0$，且 $(0,-1)\in J^{2,-}_{[0,1]}v_a(1/2)$，同时 $F(1/2,v_a(1/2),-1)=-1/2<0$，再次与 v_a 是上解矛盾。

[16] 也就是说，$\partial v_a(x):=\{p\mid v_a(x')-v_a(x)\geq p(x'-x),\ \forall x'\in[0,x_a]\}$ 且 $\partial v_a(x):=\{p\mid v_a(x')-v_a(x)\leq p(x'-x),\ \forall x'\in[x_a,1]\}$。

最后一步是证明 v_a 递增。首先注意，由于 v_a 的凸性，对于任意满足 $x' \in X$ 且 $x' > x$ 的 x，都有 $\max \partial v_a(x) \le \min \partial v_a(x')$。反设 $\max \partial v_a(0) < 0$。这意味着 $\forall x \in (0, x_a]$, $0 > v_a(0) - v_a(x)$。令 $p := v_a(x) - v_a(0) - x < 0$，则有 $(p, 0) \in J^{2,+}_{[0,1]} v_a(0)$，从而 $\min\{F(0, v_a(0), 0), B(0, p)\} > 0$，这与 v_a 是下解相矛盾。同理，在 $[x_a, 1]$ 上，v_a 是凹函数，因此对于 $x, x' \in X$，有 $\min \partial v_a(x) \ge \max \partial v_a(x')$，所以只需证明 $0 \in \partial v_a(1)$。反之，若存在某个 $x \in [x_a, 1)$，使得 $1 \ge v_a(x) > v_a(1)$，则 $p := v_a(1) - v_a(x) - 1 - x < 0$，且 $(p, 0) \in J^{2,-}_{[0,1]} v_a(1)$，这意味着 $\max\{F_a(1, v_a(1), 0), B(1, p)\} < 0$，这又与 v_a 是上解相矛盾。□

B.2.2. 命题 12 的证明命题 12 （价值函数是 $\mathscr{C}^2$，但在某一点可能例外）

证明。 **v'' 几乎处处存在：** 由命题 11可知，$\exists x_a$，$x_a \in [0,1]$ 使得 $x_a \le x_a$，且 v_a 在 $[0, x_a]$ 上是凸函数，在 $[x_a, 1]$ 上是凹函数。根据 Alexandrov 定理，v_a 在 $[0,1]$ 上几乎处处二阶可微，因此处处都有左导数和右导数，分别记为 $v'_{a,-}$ 和 $v'_{a,+}$。

不存在凸折点：任取 $x' \in [0,1]$。反设存在矛盾，即 $v'_{a,-}(x') < v'_{a,+}(x')$，并固定 $p \in (v'_{a,-}(x'), v'_{a,+}(x'))$。对于任意固定的 $M > 0$，$(p, M) \in J^{2,-}_{[0,1]} v_a(x')$。[17] 然而，当 M 足够大时，$F_a(x', v_a(x'), M) = r(v_a(x') - x') - b(x')M + \frac{1}{2} rc M^2 < 0$，这与 v_a 是一个上解相矛盾。

在 x 处至多有一个凹折点：现在任取 $x' \in [0,1]$。再次反设 $v'_{a,-}(x') > v'_{a,+}(x')$，并固定 $p \in (v'_{a,+}(x'), v'_{a,-}(x'))$。通过与前面类似的论证，对任意固定的 $M > 0$，都有 $(p, -M) \in J^{2,+}_{[0,1]} v_a(x')$。当 $b(x') > 0$ 且 M 足够大时，$F_a(x', v_a(x'), -M) = r(v(x') - x') + b(x')M > 0$，这与 v_a 是下解相矛盾。当 $b(x') = 0$ 且 $x' \in (0, 1)$ 时，$F_a(x', v(x'), -M) = r(v_a(x') - x') \le 0$。由于 v_a 是玩家 A 的价值函数，只要 $b(x') = 0$，玩家就可以通过将控制设为零，至少取得 $v_a(x') \ge x'$。因此，必有 $v_a(x') = x'$。由于 $v_a(x') = x' \Leftrightarrow x' \in [x_a, x_a]$，我们得到，对任意 $x' \in (x_a, x_a)$，都有 $v'_a(x') = 1$。在 $[0, x_a)$ 上，v_a 是凸的，且 $v'_{a,-}(x') \ge v'_{a,+}(x')$。因此，除 x 处可能存在凹折点外，不存在其他凹折点；且只有当 $b(x_a) = 0$ 时才可能如此。

连续性 v'_a 在 $[0,1]\backslash\{x_a\}$ 上： 在 $[0, x_a)$ 上，v'_a 存在且单调，因为 v_a 是凸的（根据命题 11）。由于 v'_a 也几乎处处可微，因此它具有介值性质（根据达布定理）；这一性质结合单调性，意味着 v'_a 在 $[0, x_a)$ 上连续。对称的论证适用于 $(x_a, 1]$。

[17] 为说明这一点，令 $f(x) := v_a(x') + p(x - x') + \frac{1}{2}M(x - x')^2$，，并注意到在 x' 的某个邻域内，$v_a - f \ge 0$，因此 x' 是 $v_a - f$ 的一个局部极小值。

v_a'' 在 $[0,1]\setminus\{x_a\}$ 上的存在性与连续性：现在我们证明，除了可能在 x_a 处之外，v_a'' 处处存在且连续。取定 $x \in [0,x_a)$。由于 v_a'' 几乎处处存在，任取一个序列 $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq [0,x_a)$，使得 $x_n \to x$ 且对每个 n，$v_a''(x_n)$ 都存在。那么，$(v_a'(x_n), v_a''(x_n)) \in J^{2,+}_{[0,1]} v_a(x_n) \cap J^{2,-}_{[0,1]} v_a(x_n)$，因为这当且仅当 v_a 在 x_n 处二阶可微时成立（Crandall 等人，1992年，第 15 页）。因此，$(x_n, v_a(x_n), v_a'(x_n)) \to (x, v_a(x), v_a'(x))$。 $\forall y \in [0,x_a)$，对于所有 $M \geq M := \max_{x\in[0,x_a]} \sqrt{2cr}\sqrt{v_a(x)-x}$，都有 $F_a(x, v_a(x), M) \leq 0$。因此，$(v_a'(x), M) \in J^{2,+}_{[0,1]} v_a(x)$。结合 v_a 在 $[0,x_a)$ 上的凸性可知，对所有 n，$v_a''(x_n) \in [0,M]$，于是根据紧致性，$v_a''(x_n)$ 有一个收敛子序列。任取一个收敛子序列，并将其极限记为 v_∞''。由于 F_a 连续，$0 = F_a(x_n, v_a(x_n), v_a''(x_n)) \to F_a(x, v_a(x), v_\infty'') = 0 \Longrightarrow (v_a'(x), v_\infty'') \in J^{2,+}_{[0,1]} v_a(x) \cap J^{2,-}_{[0,1]} v_a(x)$，这确保了对于任意 $x \in [0,x)$，v_a 在 x 处也二阶可微，且 $v_a''(x) = v_\infty''$。这意味着 v_a'' 在 $[0,x_a)$ 上处处存在。此外，由于 $v_\infty'' \geq 0$，并且对于任意 $M' > M \geq 0$，$F_a(x, v_a(x), M') < F_a(x, v_a(x), M)$，因此 v_∞'' 必为 $(v_a''(x_n))_{n\geq 1}$ 的任意收敛子序列的极限，因而也是原序列的极限：$v_a''(x_n) \to v_\infty'' = v_a''(x)$，由此得到 $v_a'' \in \mathscr{C}^2$ 在 $[0,x_a)$ 上连续。对 $x \in (x_a,1]$，同样的对称论证也成立。

在 0 处导数为零：假设 $v_a'(0) > 0$。那么，$(v_a'(0)/2, 2v_a''(0)) \in J^{2,-}_{[0,1]} v_a(0)$[18]，且 $\max\{F_a(0, v_a(0), 2v_a''(0)), B(0, v_a'(0)/2)\} < 0$，这与 v_a 是上解相矛盾。

在 x_a 处不可微的必要条件：(a) 和 (b) 源于只有凹折点，且仅当 $b(x_a) = 0$ 时成立。若 $x_a < 1$ 且 $b(1) = 0$，则 v_a 必须在 $[0,1]$ 上为凸函数，并在 $[x_a,1]$ 上为线性函数。因此，$v_{a,-}'(x_a) \geq 1$（没有凸折点），且 $v_{a,-}' \leq 1$，这意味着 $v_{a,-}'(x_a) = 1 = v_{a,+}'(x_a)$，上述论证可推广以证明 $v_a \in \mathscr{C}^2([0,1])$。因此，通过逆否命题可得 (c)。□

B.3. 命题3（递减控制）

证明。由于 $a(x) = \frac{1}{rc} v_a''(x)_+$，其中 v_a 是由 b 给出的（RP）解，只需证明 v_a'' 在 v_a 的凸区域内单调不增，即在 $[0,x_a]$ 上，其中 x_a 的定义见命题 11。反设 $\exists x, y \in [0,x_a]$：$x > y$ 且 $v_a''(x) > v_a''(y)$。那么，利用 b 在该区域内单调不减这一事实，

$$
\begin{aligned}
0 < \frac{1}{2rc}\left(v_a''(x)^2 - v_a''(y)^2\right) &= r[v_a(x)-x] - r[v_a(y)-y] - b(x)v_a''(x) + b(y)v_a''(y) \\
&\leq r[v_a(x)-x] - r[v_a(y)-y] - \left(b(x)-b(y)\right)v_a''(x) \leq r[v_a(x)-x] - r[v_a(y)-y]
\end{aligned}
$$

[18] 要证明这一点，定义 $f(x) = v_a(0) + v_a'(0)2x + v_a''(0)x^2$，，注意到当 x 足够小时，$f(x) \leq v_a(x)$。

因此 $1 < \frac{v_a(x)-v_a(y)}{x-y} = v_a'(z)$ 对于某个 $z \in (y, x)$（中值定理），这与 $0 \le v_a' \le 1$(定理 2）矛盾。□

B.4. 命题 4 的证明（控制是 $\mathscr{C}^1$）

命题 4由定理 2及下一个引理可得。

引理 4. 若$b \equiv 0$且$x_a^0 < 1$则 (RP) 的最优控制为 $\mathscr{C}^1([0,1])$。若$x_a^0 = 1$则它是 $\mathscr{C}^1([0,1))$。

证明。设 v_a 是 (RP) 在 $\mathcal{O} = (0, 1)$ 上的粘性解，其中 $b \equiv 0$，a 为相应的最优控制。按命题 11 中的定义设 x_a。在 $[0, x)$ 上，$F(x, v_a, v_a'') = 0 \Leftrightarrow v_a''(x) = r\sqrt{2c}\sqrt{v_a(x) - x}$，且 a 在此 $[0,x)$ 上连续可微（事实上是无限次可微）。这就证明了 $x_a < 1$ 时的引理。若 $x_a < 1$，则在 $(x_a, 1]$ 上，$v_a(x) = x$，因此 a 在此区间上是 $\mathscr{C}^1$，且 $a'(x) = 0$，并且 $\lim_{x \downarrow x_a} a'(x) = 0$。对于左导数，注意到对任意 $x \in [0, x_a)$，$v_a''(x)^2 = 2r^2c(v_a(x) - x)$，且 $v_a''(x) > 0$，对两边求导，得到 $a'(x) = v_a'''(x)/rc = r(v_a'(x) - 1)/v_a''(x)$。由于给定 b 时，v 在 $[0,x_a)$ 上 $\mathscr{C}^2$（命题 12），故该式连续。由命题 11，$v_a'(x) - 1 < 0$，因此 $v_a'''(x) < 0$，且 v_a' 在此区间上严格递增且严格凹。因此，$v_a'(x_a) - v_a'(x) \le v_a''(x)(x_a - x)$，$\forall x < x_a$。因此，$0 \le (v_a'(x) - v_a'(x))/v_a''(x) \le x - x$。由于当 $x \uparrow x_a$ 时，$(1 - v_a'(x))/v_a''(x) \to 0$，且 $a'(x_a) = 0$，我们得到 a 在 $[0,1]$ 上是 $\mathscr{C}^1$。□

B.5. 命题 6(控制是凸-凹的证明)

证明。 设v_a是当$(0,1)$ $\mathcal{O} =$ 且$b \equiv 0$时（RP）上的粘性解，a 是相应的最优控制。回顾一下，$a \propto v_a''$。记f'为f的左导数，$f^{(n)}$为其n阶导数。根据命题 11，有$v_a', \le 1$。由解的正则性可得，在 $[0,x_a)$上：

$$v_a''(x) = r\sqrt{2c}\sqrt{v_a(x) - x} \ge 0, \qquad v_a^{(3)}(x) = r\sqrt{c/2}(v_a(x) - x)^{-1/2}(v_a'(x) - 1) = r^2 c\frac{v_a'(x) - 1}{v_a''(x)} \le 0,$$

$$v_a^{(4)}(x) = r^2 c - \frac{v_a^{(3)}(x)^2}{v_a''(x)}, \qquad v_a^{(5)}(x) = \frac{v_a^{(3)}(x)^3}{v_a''(x)^2} - 2\frac{v_a^{(3)}(x)}{v_a''(x)}v_a^{(4)}(x).$$

由于当 $x \in [0, x_a)$ 时 $v_a'(x) < 1$，因此 $v_a^{(3)}$在 $[0, x_a)$ 上严格为负。若对于 $x \in (0, x_a)$，$v_a^{(4)}(x) = 0$，则 $v_a^{(5)}(x) = v_a^{(3)}(x)^3 v_a''(x)^2 < 0$。这意味着，若对于 $\tilde{x} \in (0, x_a)$，$v_a^{(4)}(\tilde{x}) = 0$，则对于任意 $x \in (\tilde{x}, x_a)$，$v_a^{(4)}(x) \le 0$。也就是说，存在 $\exists \tilde{x} \in [0, x_a)$，使得$v_a''$在 $[0, \tilde{x}]$ 上为凸，在 $[\tilde{x}, x_a]$ 上为凹。

假设 $v_a'(x_a) = 1$。由于根据 命题 3，$\lim_{x\uparrow x_a} v_a^{(3)}(x) = 0$，我们有

$$\lim_{x\uparrow x_a} v_a^{(4)}(x) = r^2 c - \lim_{x\uparrow x_a} \frac{v_a^{(3)}(x)^2}{v_a''(x)} = r^2 c - r^2 c \lim_{x\uparrow x_a} \frac{(v_a'(x)-1)^2}{2r\sqrt{2c}(v_a(x)-x)^{3/2}}$$
$$= r^2 c - r^2 c \lim_{x\uparrow x_a} \frac{2}{3} \frac{(v_a'(x)-1)v_a''(x)}{r\sqrt{2c}(v_a(x)-x)^{1/2}(v_a'(x)-1)} = r^2 c - r^2 c \lim_{x\uparrow x_a} \frac{2}{3} = \frac{1}{3} r^2 c > 0,$$

其中，在倒数第二行我们使用了洛必达法则。因此，v_a'' 在 $[0, x_a]$ 上是凸的。

现在假设 $v_a'(x_a) < 1$。那么，对于任意 $x \in [0, x_a]$，$v_a^{(3)}(x) \le r^2 c\, v_a'(x_a) - 1 < v_a''(0) < 0$。由于 v_a'' 严格为正且递减，当 $x \to x_a$ 时，$v_a''(x) \to 0$；当 $x < x_a$ 充分接近 x_a 时，对所有这样的 x，$v_a^{(4)}(x) < 0$。因此，存在 $\exists \tilde{x} \in [0, x_a)$，使得 v_a'' 在 $[0, \tilde{x}]$ 上是凸的，在 $[\tilde{x}, x_a]$ 上是凹的。

当 $x_a < 1$ 时，a 为 $\mathscr{C}^1([0,1])$，因此 $v_a'(x_a) = 1$（引理 4）。最后，$a'(x_a) = -\infty$，这是因为 $v_a^{(3)}(x) = r^2 c\, v_a'(x) - 1 v_a''(x) \le r^2 c\, v_a'(x_a) - 1 v_a''(x) < 0$。当 x 接近 x_a 时，分母趋于零，因此结论成立。□

B.6. 命题 7 的证明命题7(均衡解耦不稳定性)

证明。注意，根据定理 1，$v_a(x) + v_b(x) \le \sup_{\alpha,\beta} r \int_0^\infty \exp(-rt)(X_t + (1 - X_t) - c_a \alpha (X_t)^2 - c_b \beta (X_t)^2) dt \le r \int_0^\infty \exp(-rt) dt = 1$。根据命题 11，由于当 $v_a(x) \ge (>)\, x \iff 0 \le x \le x_a (< x_a)$ 时，v_a 为（严格）凸函数，而在其他地方严格凹；且当 $v_b(x) \ge (>) 1 - x \iff 1 \ge x \ge x_b (> x_b)$ 时，v_b 为（严格）凸函数，而在其他地方严格凹，因此有 $x_a = x_a =: x > 0$ 且 $x_a = x_b =: x < 1$。这意味着 $a(x) = 0$ 在 $[x, 1]$ 上，$b(x) = 0$ 在 $[0, x]$ 上。由于根据命题 3，a 非递增而 b 非递减，并且对命题 4 的证明作直接修改可得，$v_a''' < 0$ 在 $[0, x_a)$ 上，且 $v_b'''(x) > 0$ 在 $(x_b, 1]$ 上，因此最优控制 a 和 b 分别严格递减和严格递增。□

B.7. 命题8（非活跃基准与均衡）

证明。根据命题 7，$a^*(x) > 0$ 当且仅当 $x \in [0, x)$，并且根据定理 2，v_a 在 $[x, 1]$ 上是凹函数。因此，在 $x \in [0, x)$ 上，$0 = r_a(v_a(x) - x) = \frac{1}{2} r_a c_a [v_a''(x)_+]^2$；而在 $x \in [x$ 上，$1]$ 除至多一个 v_a 不可二阶可微的点外，$0 = r_a(v_a(x) - x) - b(x) v_a''(x) \ge r_a(v_a(x) - x)$。由于在 v_a 至多一个不可微点处存在凹折点（定理 2），故可得 v_a 是非活跃基准问题中反射问题的粘性次解。由于 v_a^0 是同一问题的粘性解（因而也是上解），根据引理 1，$v_a^0 \ge v_a$。命题的第二部分立即成立。玩家 B 的情况也相同。□

B.8. 引理2（威慑均衡单点稳定区域）证明

证明。我们用反证法证明该引理。设 (a, b) 是在满足 $x_a^0 > x^0\, b$ 的参数下的一个均衡，并为导出矛盾，假设 $x < \underline{x}$。那么，$x < x_a^0$ 或者 $x^0\, b < \underline{x}$。这是因为，根据命题 8，$x \leq x_a^0$ 或者 $x^0\, b \leq x$，而根据假设，$x_a^0 > x^0\, b$。假设 $x < x_a^0$（当 $x^0\, b < \underline{x}$ 时，证明对称）。根据定理 2，只允许出现凹折点，因此 $v_a'(\underline{x}) \geq v_a'(x)$。此外，根据命题 8，玩家 A 的非活跃基准问题的解 v_a^0 弱于该玩家的均衡价值函数，即 $v_a \leq v_a^0$。根据命题 7，在均衡时，$b(x) = 0$ 在 $[0, x] \supseteq [0, \min\{x, \bar{x}_a^0\}]$ 上成立。由于在 $[0, \min\{x, \bar{x}_a^0\}]$ 上，$v_a^{0\prime\prime}(x) = r_a \sqrt{2c_a} \sqrt{v_a^0(x) - x} \geq r_a \sqrt{2c_a} \sqrt{v_a(x) - x} = v_a''(x)$，并且 $v_a'(0) = v_a^{0\prime}(0) = 0$（命题 12），因此 $v_a'(x) \leq v_a^{0\prime}(x) < v_a^{0\prime}(\underline{x}) \leq 1 = v_a'(x)$，这就导出了矛盾。□

B.9. 定理3（威慑均衡的刻画）证明

定理 3 第一部分（容纳均衡的刻画）的证明已在正文中详细给出；此处我们证明第二部分（威慑均衡的刻画）。

令 v_a^b 为在 $\mathcal{O} = (0, 1)$ 上满足 $b \in \mathscr{C}^0([0,1])$ 的 (RP) 的唯一粘性解，并令 $x_a^b := \sup\{x \in [0,1] \mid v_a^b(x) > x\}$；对于玩家 B，给定 $a \in \mathscr{C}^0([0,1])$，类似地定义 $v^a\, b$ 和 $x^a\, b$。容易验证，对于满足 $x^0\, b \leq x^{b^*}\, a = x^{a^*}\, b \leq x_a^0$ 的 (a^*, b^*)，均衡策略必定如定理 3 的陈述所述。接下来我们着重证明，对于任意 $x \in [x^0\, b, x_a^0]$，存在唯一的策略组合 (a^*, b^*)，使得 $x^{b^*}\, a = x^{a^*}\, b = x$。对于 $x \in (x^0\, b, x_a^0)$，定理 3 的证明可由以下两个引理推出：

引理 5. 对于 $x \in (0, x_a^0)$，当 $b \equiv 0$ 时，令 v_a 表示在 $\mathcal{O} = (0, x)$ 上满足（RP）的唯一粘性解。则，(i) $v_a \in \mathscr{C}^5([0, x))$，(ii) v_a 是凸的，(iii) v_a' 是凹的，(iv) 存在 $\exists\, \tilde{x} \in [0, x)$，使得 v_a'' 在 $[0, \tilde{x}]$ 上是凸的，并在 $[\tilde{x}, x)$ 上是凹的；(v) 当 $x \uparrow x$ 时，$v_a'''(x) \to -\infty$。

证明。当 $\mathcal{O} = (0, x)$ 上的（RP）存在唯一粘性解 $b \equiv 0$ 这一结论可由定理 1 稍作修改得到。(i)-(v) 的性质可通过调整命题 4 和 6 的证明得到。□

引理 6. 设 $x \in (0, 1)$，并固定 $b \in \mathscr{C}^0([0,1])$，使得 (i) 对 $x \leq x$，$b(x) = 0$；(ii) 在 $(x, 1]$ 上，$b'(x) > 0$；(iii) $\lim_{x \downarrow x} b'(x) = \infty$。那么，对 $x \geq x$，有 $v_a^b(x) \leq x$。

证明。反设不然。则 $v_a^b(x) > x \Longrightarrow v_a^{b\prime\prime}(x) > 0$，且由命题 4，$v_a^b$ 在 x 处局部 $\mathscr{C}^3$，并且在 x 的某个邻域内 $v_a^{\prime\prime\prime}(x) < 0$。于是，由于 $b(x) = 0$，当 $\epsilon > 0$ 足够小时，$F_a(x, v_a^b(x), v_a^{b\prime\prime}(x)) = F_a(x+\epsilon, v_a^b(x+\epsilon), v_a^{b\prime\prime}(x+\epsilon)) = 0 \Longleftrightarrow 0 = (F_a(x, v_a^b(x), v_a^{b\prime\prime}(x)) - F_a(x+\epsilon, v_a^b(x+\epsilon), v_a^{b\prime\prime}(x+\epsilon)))/\epsilon = r[(v_a^b(x+\epsilon) - v_a^b(x))/\epsilon - 1] - \frac{1}{2} rc\,(v_a^{b\prime\prime}(x+\epsilon)^2 - v_a^{b\prime\prime}(x)^2)/\epsilon - v_a^{b\prime\prime}(x+\epsilon)b(x+\epsilon)/\epsilon$。鉴于 $\lim_{\epsilon\downarrow 0} |r[(v_a^b(x+\epsilon) - v_a^b(x))/\epsilon - 1] - \frac{1}{2} rc\,(v_a^{b\prime\prime}(x+\epsilon)^2 - v_a^{b\prime\prime}(x)^2)/\epsilon| = |r(v_a^{b\prime}(x) - 1) - \frac{1}{2} rc\, v_a^{b\prime\prime}(x) v_a^{b\prime\prime\prime}(x)| < \infty$，这是由于 v_a^b 局部 $\mathscr{C}^3$；又由于当 $\epsilon \downarrow 0$ 时，$b(x+\epsilon)/\epsilon = (b(x+\epsilon) - b(x))/\epsilon \to \infty$，根据连续性，$\exists \bar{\epsilon}$：$\forall \epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$，使得 $v_a^{b\prime\prime}(x+\bar{\epsilon})b(x+\bar{\epsilon})/\epsilon > 2[r|v_a^{b\prime}(x) - 1| + \frac{1}{2} rc\, v_a^{b\prime\prime}(x)|v_a^{b\prime\prime\prime}(x)|] > r[(v_a^b(x+\epsilon) - v_a^b(x))/\epsilon - 1] - \frac{1}{2} rc\,(v_a^{b\prime\prime}(x+\epsilon)^2 - v_a^{b\prime\prime}(x)^2)/\epsilon$，这与 $0 = (F_a(x, v_a^b(x), v_a^{b\prime\prime}(x)) - F_a(x+\epsilon, v_a^b(x+\epsilon), v_a^{b\prime\prime}(x+\epsilon)))/\epsilon$ 矛盾。□

现在我们来证明，$x \in \{x_a^0, x^{0}{}_b\}$ 也能确定一个如上所述的均衡。

若 $a \equiv 0$ 在 $[x^{0}{}_b, 1]$ 上，则 $v^{a}{}_b = v^{0}{}_b$ 在 $[x^{0}{}_b, 1]$ 上，因此 b^0 是对 a 的最佳响应。接下来，我们需要证明：若 a 是对 b^0 的最佳响应，则 $x^{b^0}{}_a = x^{0}{}_b$。我们分两步证明这一点。

首先，我们证明 $x^{b^0}\,a \geq x^0\,b$。假设不然。则 $v^{b^0}\,a\,(x) = x$ 在 $[x^{b^0}\,a\,, x^0\,b]$ 上，并且根据定理 2，$v^{b^0}\,a \in \mathscr{C}^2([0,1])$。令 $w_a(x) := \mathbf{1}_{x<x^{b^0}}\,a\; v^{b^0}\,a\,(x) + \mathbf{1}_{x\geq x^{b^0}}\,a\; x$。由于 $v^{b^0}\,a \in \mathscr{C}^2([0,1])$ 是给定 $b = b^0$，时在 $\mathscr{O} = (0, 1)$ 上的粘性解，并且 $x^{b^0}\,a < x^0\,b$，因此很容易验证 w^a 是给定 $b \equiv 0$ 时在 $\mathscr{O} = (0, 1)$ 上的粘性解。然而，$x^{b^0}\,a < x^0\,b < x_a^0$，这与后一问题的粘性解的唯一性相矛盾（定理 1）。其次，我们证明 $x^{b^0}\,a \leq x^0\,b$。假设不然。任取 $x \in (x^0\,b, x^{b^0}\,a)$，并令 (a^*, b^*) 为满足 $a^*(x) = b^*(x) = 0$ 的唯一均衡（引理 5 和引理 6）。

断言 1：在 $[0, x^{b^0}\,a\,]$ 上，$v^{b^0}\,a \geq v^{b^*}\,a$；在 $(x, x^{b^0}\,a\,]$ 上，$v^{b^0}\,a > v^{b^*}\,a$。令 $w_a(x) := \mathbf{1}_{x\leq x} v^{b^*}\,a\,(x) + \mathbf{1}_{x>x} x$。由于 (i) $b^0 \geq b^*$（命题 8），且 $b^0 > 0 \equiv b^*$ 在 $(x^0\,b, x)$ 上；并且 (ii) $v^{b^0}\,a$ 和 $v^{b^*}\,a$ 在 $[0, x)$ 上严格凸，因此，给定 $b = b^0$，，w_a 在 $\mathscr{O} = (0, 1)$ 上是（RP）的下解，尤其是 $w_a \leq v^{b^0}\,a$（引理 1）。因此，在 $[0, x]$ 上，$v^{b^0}\,a \geq v^{b^*}\,a$。并且，根据这些阈值的定义，在 $(x, x^{b^0}\,a\,]$ 上，$v^{b^0}\,a\,(x) \geq x > v^{b^*}\,a$。断言 2：在 $[x^{b^0}\,a\,, 1]$ 上，$v^{b^0}\,a \leq v^{b^*}\,a$。令 $w_a(x) := \mathbf{1}_{x\geq x^{b^0}}\,a\; v^{b^0}\,a\,(x) + \mathbf{1}_{x<x^{b^0}\,a}\; x$。由于 (i) $b^0 \geq b^*$（命题 8），且 (ii) $v^{b^0}\,a$ 和 $v^{b^*}\,a$ 在 $(x^{b^0}\,a\,, 1]$ 上严格凹，因此，给定 $b = b^*$，w_a 在 $\mathscr{O} = (0, 1)$ 上是（RP）的下解，尤其是 $w_a \leq v^{b^*}\,a$。因此，在 $[x^{b^0}\,a\,, 1]$ 上，$v^{b^0}\,a \leq v^{b^*}\,a$。

然而，主张 1 和 2 显然会导致矛盾：$v^{b^*\,a}(x^{b^0\,a}) < v^{b^0\,a}(x^{b^0\,a}) \leq v^{b^*\,a}(x^{b^0\,a})$。