arXiv:2303.07309v1 [cs.CE] 13 Mar 2023

采用偏应力分解的剪切断裂高效相场模型

Ehsan Haghighat[1] 和 David Santill´an[2]

[1]土木与环境工程系，麻省理工学院，美国马萨诸塞州剑桥市马萨诸塞大道 77 号，邮编 02139。[2]马德里理工大学水力、能源与环境工程系，C/Profesor Aranguren 3，马德里，28040，西班牙。

通讯作者：david.santillan@upm.es；

摘要

我们提出了一种采用偏应力分解（DSD）的剪切断裂相场模型。该方法使我们能够采用通用的三维莫尔-库仑（MC）破坏函数来建立关系并评估峰值应力和残余应力。我们将该模型应用于若干剪切断裂和应变局部化基准问题，结果表现出色。该模型能够捕捉双轴压缩试验和边坡稳定性问题中的 *con-jugate* 破坏模式；对于大多数岩土力学模型而言，这是一项颇具挑战性的任务。

关键词：相场、剪切断裂、应变局部化、边坡稳定性

1 引言

脆性材料在压缩作用下发生的剪切失效，也称为剪切带或局部化应变，是地质结构中主要的破坏模式之一。由于其在构造地质学和工程领域的重要性，近年来这一主题已成为活跃的研究方向。人们日益关注这一主题，源于其在地下能源技术中的工程应用，包括增强型地热系统；在这类系统中，水力剪切技术旨在重新激活既有裂缝网络并使其滑动，从而提高岩体渗透率

[1–4], 深层咸水含水层中的大规模 CO_2 封存 [5–7], 水电站人工水库的蓄水与水位变化 [8–11] 以及地下天然气储存设施 [13], 。在这些应用中，相关力学机制对于理解断层的稳定性，进而理解地震机制至关重要[12, 14–16]。其他工程应用还包括断层和边坡稳定性评估 [17, 18]，以及地下水注入和开采作业期间断层的稳定性评估 [19, 20]。

剪切断裂过程的模拟是一项具有挑战性的任务。有限元法（FEM）一直是模拟固体和连续体的主要数值方法。传统上，人们提出了两种根本不同的视角，利用有限元法研究压缩断裂：

- 离散裂缝模型（DFM）基于格里菲斯 [21], 欧文[22]创立的经典线弹性断裂力学（LEFM）理论。- 弥散裂缝模型（SFM）基于卡恰诺夫[23]最初提出的经典连续损伤力学（CDM）理论。

每一类方法都有大量可追溯至 20 世纪 60 年代的文献，全面综述这些文献超出了本文的范围。因此，我们仅向感兴趣的读者介绍每一类方法的几项代表性研究。

在离散裂缝模型的范畴内，常见方法包括在裂缝界面处进行节点复制 [24–26],强间断方法 [27–38],以及扩展有限元法（XFEM） [36, 39–47]。这些方法需要使用几何算法来追踪断裂扩展，而对于一般的三维问题，这已被证明极具挑战性。这类方法适用于模拟单条裂缝。然而，在处理复杂的裂缝萌生与扩展模式时，它们很快就会变得不切实际。

按照弥散裂缝模型，我们可以将连续损伤模型（CDM）[23, 26, 48–52],、近场动力学模型 [53–62], 和相场模型（PFM）[63–68], 列为接下来将详细讨论的模型。尽管早期模型表现出明显的网格依赖性，但这些模型已被用于在现实条件下模拟非常复杂的断裂模式。在这类模型中，近年来相场模型最受青睐，因为它们具有符合热力学原理的坚实基础，并且能够模拟复杂的断裂模式。

相场模型已被广泛用于模拟弹性或孔弹性材料以及均质或非均质域中的脆性、黏聚性和延性 I型断裂模式 [63–78] [参见 79，其中有详细综述]。尽管兰乔尼和罗耶-卡尔法尼 提出了针对剪切断裂的简单扩展，但直到最近，相场在剪切失效建模中的适用性几乎仍未得到探索 [81–83]。在一项详细研究中，Fei 和 Choo 提出了一种基于Palmer 和 Rice 理论的摩擦断裂相场公式，并采用了与.....类似的应力分解方法

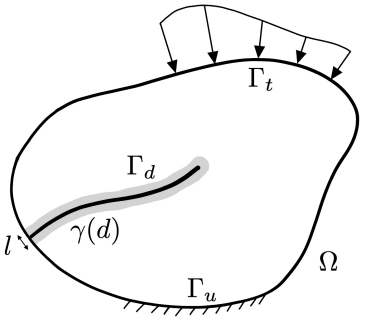


图1 计算域 Ω，其边界为 Γ，狄利克雷边界为 Γ_u，诺伊曼边界为 Γ_t。不连续面表示为 Γ_d，其相场弥散表示为 γ（d）。

由 Hu 等人 针对拉伸裂纹提出的方法。作者通过一系列经典问题以及各种实验装置验证了他们的模型 [86]。

在本研究中，我们提出了一种剪切失效相场模型，该模型将 Fei 和 Choo 提出的剪切断裂内聚模型应用于偏应力分解（DSD），而非采用其提出的接触应力分解（CSD）。因此，我们得到了剪切断裂方向的一种替代描述（即 $\boldsymbol{\alpha}$ 张量），该描述仅基于偏应变。我们调整了裂纹驱动力，使其与 DSD 分解保持一致。所得公式化简化了损伤准则，因为它会导致剪切模量受损。最后，所提出的模型使我们能够采用经典塑性理论中失效函数的一般形式，因此不局限于莫尔-库仑失效模型。

接下来，我们先简要介绍基于 CSD 的原始框架，再讨论我们的推广方案。最后，我们使用这两种框架对一组基准问题进行建模。

2 相场方法

本节首先介绍用于模拟材料中裂纹扩展的一般相场框架，然后概述最新的 CSD 剪切模型 [83]。最后，我们讨论为提高稳定性而提出的调整方案。

2.1 相场控制方程

考虑图 1 所示的 $\in \mathbb{R}^D$ 维空间中的连续体 Ω D，其边界表示为 1，记作 Γ。边界 Γ 在 Γ_t 上满足诺伊曼边界条件，在 Γ_u上满足狄利克雷边界条件，其中$\Gamma_u \cup \Gamma_t = \Gamma$ 且 $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \varnothing$。计算域中的间断集合以离散面表示 Γ_d。

根据相场公式，断裂的离散面 Γ_d通过宽度为 l 的连续函数隐式近似，使用

Allen-Cahn 断裂表面密度函数 $\gamma(d)$，其表达式为

$$\gamma(d)=\frac{1}{c_0 l}\left(w(d)+l^2\|\nabla d\|^2\right),\quad \text{with}\quad c_0=4\int_0^1\sqrt{w(l)}dl \tag{1}$$

其中，d 为相场变量，其中 $d=0$ 表示计算域的完整部分，而 $d=1$ 表示 Γ_d 上的一点。$w(d)$ 为过渡函数，也称为耗散函数，针对黏聚裂纹定义为 $w(d)=d$[87, 88], 因此 $c_0=\frac{8}{3}$。相应地，面积分 $\int ds$ 可通过体积分近似为 $\int ds\approx\int\gamma(d)\ dv$。

给定位移场 $\boldsymbol{u}$、小变形应变度量 $\boldsymbol{\varepsilon}=(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}^T)/2$和裂纹表面密度函数 $\gamma(d)$，占据计算域 Ω 且边界为 Γ 的断裂连续体总能量（如图 1 所示）表示为

$$\Psi=-\Psi^{external}+\Psi^{internal}+\Psi^{fracture}, \tag{2}$$

其中，$\Psi^{external}$ 是外部牵引应力 $\boldsymbol{\tau}$ 和体力 $\boldsymbol{b}$所做的功，表示为

$$\Psi^{external}=\int_{\Gamma_t}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\tau}\ ds+\int_{\Omega}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{b}\ dv. \tag{3}$$

断裂能，即 $\Psi^{fracture}$，是系统为形成断裂面 Γ_d而耗散的能量。给定能量释放率 $\mathcal{G}_c$（单位断裂长度对应的能量），$\Psi^{fracture}$ 表示为

$$\Psi^{fracture}=\int_{\Gamma_d}\mathcal{G}_c\ ds\approx\int_{\Omega}\mathcal{G}_c\gamma(d)\ dv. \tag{4}$$

系统的储存内能 $\Psi^{internal}$ 由计算域未损伤部分的弹性储存能和计算域损伤部分的储存能组成，表示为

$$\Psi^{internal}=\int_{\Omega}\psi(\boldsymbol{\varepsilon},d)\ dv. \tag{5}$$

内能密度函数 $\psi(\boldsymbol{\varepsilon},\ d)$ 定义为 $\psi(\boldsymbol{\varepsilon},\ d)=\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}:\ \boldsymbol{\varepsilon}$，由未损伤和损伤两部分组成。对于连续体的未损伤部分，即 $d=0$，柯西应力张量 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon},\ d=0)$ 根据胡克定律表示为

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon},d=0)=(\kappa-\frac{2}{3}\mu)\varepsilon_v\mathbf{1}+2\mu\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{6}$$

其中，κ 和 μ 分别为完整材料的体积模量和剪切模量，ε_v 为体积应变，表示为 $\varepsilon_v=\mathrm{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$。对于

计算域中满足 $d > 0$的部分，柯西应力张量分解为非活性部分 $\boldsymbol{\sigma}^I$ 和活性部分 $\boldsymbol{\sigma}^A$ ，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, d) &= \boldsymbol{\sigma}^I(\boldsymbol{\varepsilon}) + \boldsymbol{\sigma}^A(\boldsymbol{\varepsilon}, d) \\ &= \boldsymbol{\sigma}^I(\boldsymbol{\varepsilon}) + g(d)\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}) + (1 - g(d))\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}).\end{aligned} \tag{7}$$

应力张量的活性部分会经历损伤过程，而 $g(d)$ 是一个退化函数，用于描述应力从体相（$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$）向断裂（$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$）的转变。我们将在接下来的章节中对此进行更详细的讨论。

因此，相场公式化中包含两个求解变量：标准位移场 $\boldsymbol{u}$ 以及额外的相场变量 d。对 Ψ 分别关于 $\boldsymbol{u}$ 和 d求变分，并按照有限元法从弱式到强式的公式推导步骤 [89, 90] 以及相场[73, 83, 85], ，即可得到以下控制关系：

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, d) + \boldsymbol{b} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{3\mathcal{G}_c}{8l}\left(2l^2\nabla^2 d - 1\right) - g'(d)\mathcal{H}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0. \tag{9}$$

借助最大储存剪切能的局部历史场 $\mathcal{H}^+(\boldsymbol{\varepsilon})$，断裂过程的不可逆性得以保证，从而可以直接求解式（9）中的约束极小化 [67] ，并避免不符合物理规律的自愈现象。 $\mathcal{H}^+(\boldsymbol{\varepsilon})$定义如下：

$$\mathcal{H}^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = \max_{s\in[0,t]}\left(\mathcal{H}(\boldsymbol{\varepsilon})\right), \tag{10}$$

其中 t 表示时间。随后，方程（9）可改写如下：

$$\frac{3\mathcal{G}_c}{8l}\left(2l^2\nabla^2 d - 1\right) - g'(d)\mathcal{H}^+(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0. \tag{11}$$

由于 $\mathcal{H} \geq 0$，因此可以保证 d 非负，进而确保断裂扩展的不可逆性。在介绍应力分解方法后，我们定义 $\mathcal{H}(\boldsymbol{\varepsilon})$。

本文采用洛伦兹退化函数 $g(d)$，其定义为 [91,92]:

$$g(d, p) = \frac{(1-d)^2}{(1-d)^2 + \frac{M}{\psi_c}d(1+pd)} \tag{12}$$

其中， $M = G_c/(c_0 l)$ 和 ψ_c 是材料达到峰值强度时的临界裂纹驱动力，计算为 $\psi_c = -Mw'(0)/g'(0)$。弹性储能一旦超过这一临界阈值，损伤便开始累积。这里，我们取 $p = 1$。

2.2 应力分解：引言

将应变能密度分解为裂纹驱动部分和完好部分，可确定损伤模式和断裂模式。目前已有两种基本方法。第一类方法不考虑局部断裂方向，而第二类方法则考虑局部裂纹方向。

第一类模型包括各向同性模型、体积与偏量分解模型、谱分解模型或各向异性模型。由 Bourdin 等人提出的各向同性模型会退化整个应变能密度。由 Amor 等人 提出的体积与偏量分解模型将应变张量分解为体积部分和偏量部分。该方法可避免复合材料和砌体结构中的裂纹相互贯穿。此时，断裂被认为由体积膨胀和偏应变驱动。由 Miehe 等人 提出的谱分解模型将应变张量分解为主分量，只有拉伸分量才会驱动断裂扩展。各向异性模型则基于应变张量的谱分解，并采用其他投影方式，例如根据有效应力张量的特征值和特征向量进行分解 [94]。

第二类方法考虑了局部裂纹方向。由Steinke 和 Kaliske 提出的方向性模型根据断裂方向将应力张量分解为裂纹驱动分量和持续分量。对于每个点，定义一个断裂坐标系，并根据最大主应力方向确定断裂方向。Strobl 和 Seelig以及Strobl 和 Seelig 根据相场梯度计算断裂方向。沿用这种断裂方向计算方法，Liu 等人基于微观力学建模开发了一种相场模型，即将宏观断裂建模为微观断裂的集合。

在以下小节中，我们将介绍接触应力分解（CSD），该方法已成功用于模拟围压下的剪切断裂；最后，我们将提出基于偏应力分解（DSD）的方法。这两种模型都未考虑局部断裂方向。

2.2.1 接触应力分解（CSD）

由于压缩断裂的行为类似于接触问题，Fei 和 Choo提出了一种与接触公式密切相关的应力分解方法，本文称之为 CSD。该方法首先在断裂面上建立一个共转坐标系，其中 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{n}$ 分别为裂纹面的切向量和法向量， $\boldsymbol{m}$ 则沿滑动方向。此外，定义 $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{mn} + \boldsymbol{nm})/2$。

根据这一方法，并假设断裂始终闭合，即不存在张拉断裂，唯一应发生损伤的应力分量是

剪应力，其他应力分量则保持不活跃。体剪应力可表示为

$$\hat{\tau} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\alpha} = \mu \varepsilon_\gamma, \tag{13}$$

其中， $\varepsilon_\gamma = 2\,\boldsymbol{\varepsilon} :\ \boldsymbol{\alpha} = 2\,\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{n}$。将接触剪应力视为 $\tilde{\tau}$。则非活跃应力张量表示为

$$\boldsymbol{\sigma}^I = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, d=0) - \mu\varepsilon_\gamma\ \boldsymbol{\alpha}, \tag{14}$$

活跃应力张量则表示为

$$\boldsymbol{\sigma}^A = \tau^A \boldsymbol{\alpha}, \quad \text{where} \quad \tau^A = \mu\varepsilon_\gamma\ g(d) + \tilde{\tau}\ (1 - g(d)). \tag{15}$$

此处， $\tilde{\tau}$ 为断裂完全扩展时的残余接触应力，即 d=1。

Remark 1 给定莫尔-库仑破坏函数如下:

$$\mathcal{F} = |\tau| - \sigma_n \tan\phi - c = 0 \tag{16}$$

其中， $\sigma_n = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n}$ 为断裂面上的法向应力， c 和 ϕ 分别为完整材料的黏聚力和摩擦角，峰值剪应力和残余剪应力表示为

$$\tilde{\tau}_p = c + \sigma_n \tan(\phi), \quad \tilde{\tau}_r = c_r + \sigma_n \tan(\phi_r), \tag{17}$$

其中， c_r 和 ϕ_r 分别为完全发展的破坏状态下的残余摩擦力和黏聚力。

Remark 2 根据莫尔-库仑破坏准则，破坏临界面与最大主应力方向之间存在两个共轭角 $\theta = \pm(45^\circ - \phi_r/2)$ [27]。然而，作者仅考虑$\theta = +(45^\circ - \phi_r/2)$ [，见83，式56]。这一限制是必要的，否则 $\boldsymbol{m}$， $\boldsymbol{n}$ 将无法唯一确定。

2.2.2 我们的方案：偏应力分解（DSD）

总应变张量可分解为体积部分和偏量部分，如 $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_v \mathbf{1} + \boldsymbol{e}$所示。我们也可以用平均围压 p 和偏应力张量 $\boldsymbol{s}$ 表示柯西张量，如 $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \boldsymbol{s}$所示。因此，对于完整部分，胡克定律可改写为 [80, 99]

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, d=0) = -p\mathbf{1} + \boldsymbol{s} = \kappa\ \varepsilon_v \mathbf{1} + 2\mu\boldsymbol{e}. \tag{18}$$

给定等效偏（Mises）应力 $q = (\frac{3}{2}\boldsymbol{s} :\ \boldsymbol{s})^{1/2}$和等效偏应变 $\varepsilon_q = (\frac{2}{3}\boldsymbol{e} :\ \boldsymbol{e})^{1/2}$，经过一些代数运算可得 –

$$q = 3\mu\varepsilon_q. \tag{19}$$

现在定义单位偏张量 $\boldsymbol{\alpha}_q$ 如下

$$\boldsymbol{\alpha}_q = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\boldsymbol{e}}{\varepsilon_q}, \quad \text{where} \quad \|\boldsymbol{\alpha}_q\| = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}_q : \boldsymbol{\alpha}_q} = 1, \tag{20}$$

因此，胡克定律可表示为

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \sqrt{\frac{2}{3}}q\boldsymbol{\alpha}_q, \quad \text{where} \quad p = \kappa\varepsilon_v, \quad q = 3\mu\varepsilon_q. \tag{21}$$

与 CSD 等效，我们可以将材料中的压缩破坏描述为偏应力分量中的损伤。因此，压缩压力成为应力张量的非活性部分，即

$$\boldsymbol{\sigma}^I = -p\mathbf{1} = \kappa\varepsilon_v\mathbf{1}, \tag{22}$$

而有效应力可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}^A = q(\boldsymbol{\varepsilon}, d)\boldsymbol{\alpha}_q, \quad \text{where} \quad q(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = g(d)\hat{q} + (1 - g(d))\tilde{q}_r, \tag{23}$$

其中，体积偏应力为 $\hat{}q = 3\mu\varepsilon_q$。

Remark 3 这种偏应力分解使我们能够利用经典塑性理论所描述的几乎任何破坏面的通用形式，包括莫尔-库仑破坏函数。给定摩擦角 ϕ 和黏聚系数 c，莫尔-库仑破坏准则的一般形式表示为

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}_{MC}q - p\tan\phi - c = 0. \tag{24}$$

此处，$\mathcal{R}_{MC}$ 定义了莫尔-库仑破坏面的形状，其表达式为

$$\mathcal{R}_{MC} = \frac{1}{\sqrt{3}\cos\phi}\sin(\Theta + \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{3}\cos(\Theta + \frac{\pi}{3})\tan\phi, \tag{25}$$

其中，Θ 为洛德角，其计算式为 $\cos(3\Theta) = (r/q)^3$。不变量 r 是偏应力张量的第三不变量，定义为 $r = (\frac{9}{2}tr(\boldsymbol{s}^3))^{1/3}$。根据这一准则，我们可以求得峰值和残余米塞斯应力：

$$\tilde{q}_p = \frac{p\tan\phi + c}{\mathcal{R}_{MC}}, \quad \tilde{q}_r = \frac{p\tan\phi_r + c_r}{\mathcal{R}_{MC}}, \tag{26}$$

其中，ϕ_r 和 c_r 分别为完全损伤状态下摩擦角和黏聚力的残余值。

Remark 4 我们可以轻松地用一些替代方案 $\mathcal{R}_{MC}$ 替换非光滑的莫尔-库仑屈服面 [100, 101]。事实上，我们可以选择适用于不同材料的任何替代破坏函数。

2.3 裂纹驱动力

给定 $\tau = \mu\varepsilon_\gamma$和 $\tau_p = p\tan\phi + c = \mu\varepsilon_\gamma^p$，CSD 的裂纹驱动力关系推导如下: [83]

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_t + \mathcal{H}_{slip} \tag{27}$$

其中

$$\mathcal{H}_t = \frac{\tilde{\tau}_p - \tilde{\tau}_r}{2\mu}, \tag{28}$$

$$\mathcal{H}_{slip} = \frac{1}{2\mu}\left[(\hat{\tau} - \tilde{\tau}_r)^2 - (\tilde{\tau}_p - \tilde{\tau}_r)^2\right] \tag{29}$$

他们还表明，该模型与 Palmer 和 Rice模型一致。现在，对于上文讨论的偏应力分解，我们可以修正裂纹驱动力，给定 $\hat{q} = 3\mu\varepsilon_q$和 $\tilde{q}_p = (p\tan\phi + c)/\mathcal{R}_{MC} = 3\mu\varepsilon_q^p$，则有

$$\mathcal{H}_t = \frac{(\tilde{q}_p - \tilde{q}_r)^2}{6\mu}, \tag{30}$$

$$\mathcal{H}_{slip} = \frac{1}{6\mu}\left[(\hat{q} - \tilde{q}_r)^2 - (\tilde{q}_p - \tilde{q}_r)^2\right]. \tag{31}$$

关于 CSD 方法中 $\mathcal{H}_t$ 和 $\mathcal{H}_{slip}$ 的推导详情见附录 A。

2.4 边界条件

为了完整地对问题进行数学描述，最后还需要说明边界条件。参见图 1，边界条件描述如下

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}, \quad \text{on} \quad \Gamma_u, \tag{32}$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{n} = \bar{\boldsymbol{\tau}}, \quad \text{on} \quad \Gamma_t, \tag{33}$$

$$\nabla d \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \text{on} \quad \Gamma, \tag{34}$$

其中，$\bar{\boldsymbol{u}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ 分别表示规定的位移和表面力。求解该问题的步骤详见算法1。

3 压缩应变局部化的应用

这里，我们考虑三个剪切断裂基准问题，包括直剪试验、双轴压缩试验和边坡破坏分析。我们展示了该模型能够同时有效捕捉多种破坏模式。

算法1 剪切断裂偏应力分解相场模型的伪代码

$\boldsymbol{u}^0, d^0 \leftarrow 0$
$\boldsymbol{\sigma}^0 \leftarrow$ 使用静力步施加初始应力
$t = 0$
对于时间步 **执行**
  $t \leftarrow t + \Delta t$
    $\bar{\boldsymbol{u}}^{t+\Delta t}$, $\bar{\boldsymbol{\tau}}^{t+\Delta t} \leftarrow$ 在 $t + \Delta t$ 处更新位移/牵引边界条件
  $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{d}_0 \leftarrow \boldsymbol{u}_0^t, \boldsymbol{\varepsilon}_0^t, \boldsymbol{\sigma}_0^t, \boldsymbol{d}_0^t$
  当 err $>$ TOL **时执行**
    $\delta\boldsymbol{u} \leftarrow$ 求解方程 (8) 以获得位移增量
    $\boldsymbol{u} \leftarrow \boldsymbol{u} + \delta\boldsymbol{u}$
    $\boldsymbol{\varepsilon}, \varepsilon_v, \varepsilon_q \leftarrow \boldsymbol{\varepsilon} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}$
    $\boldsymbol{\alpha}_q \leftarrow \sqrt{2/3}\ \boldsymbol{e}/\varepsilon$
      $\hat{}q \leftarrow 3\mu\varepsilon_q$
      $\tilde{q} \leftarrow (p\tan\ \phi_r + c_r)/\mathcal{R}_{MC}$
    $\boldsymbol{\sigma} \leftarrow -\kappa\varepsilon_v\mathbf{1} + [g(d)\hat{}q + (1 - g(d))\tilde{q}_r]\ \sqrt{2/3}\boldsymbol{\alpha}_q$
    $\mathcal{H}_t \leftarrow (\tilde{q}_p - \tilde{q}_r)^2/6\mu$
    $\mathcal{H}_{slip} \leftarrow$ 最大值$(\mathcal{H}_{slip}^t,\ [\hat{}q - \tilde{q}_r)^2 - (\tilde{q}_p - \tilde{q}_r)^2]/6\mu)$
    $\mathcal{H}^+ \leftarrow \mathcal{H}_t + \mathcal{H}_{slip}$
    $\delta d \leftarrow$ 求解方程（9）以求 d
  结束 while 循环
结束 for 循环

3.1 直剪试验

第一个示例是直剪试验。我们模拟一条裂缝在长剪切装置中的扩展，并将结果与解析解以及 Fei 和 Choo 的数值模拟进行比较 [83]。实验设置如图 2所示。计算域长 500 毫米、高 100 毫米，左侧边界中部预先刻有一条长 10 毫米的水平裂缝。边界条件如下：底部边界固定，顶部边界沿水平方向位移，两个侧边界在竖直方向固定。我们忽略重力。

材料属性如下：剪切模量 $G = 10$ MPa，泊松比$\nu = 0.3$，黏聚强度 $c = 40$ kPa，峰值和残余摩擦角 $\phi = \phi_r = 15°$，剪切断裂能 $\mathcal{G}_c = 30$ J/m^2，，断裂长度尺度$l = 2$ mm。与Palmer 和 Rice 以及Fei 和 Choo此前的研究一样，我们将断裂扩展设定为水平方向。按照 Fei 和 Choo 的模拟结果 [83]，，我们将初始竖向压缩法向应力设为 149 kPa，由此得到 $\tau_p = 80$ kPa 和 $\tau_r = 40$ kPa。我们采用尺寸为 $l/4 = 0.5$ mm 的映射正方形网格对断裂路径附近的计算域进行网格划分，其余计算域则采用 1-mm 的自由三角形网格。

水平力-位移曲线如图所示 3。我们的数值模拟给出的峰值力和残余力与理论值吻合得非常理想。从理论上讲，峰值荷载，即峰值剪应力乘以

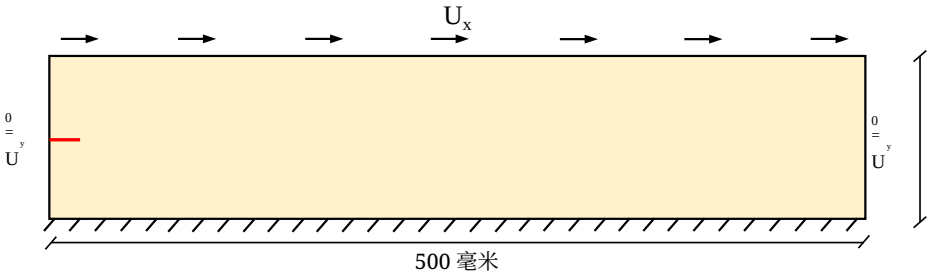


图 2 直剪试验设置。计算域长 500 毫米、高 100 毫米，左侧边界中部开有一条初始水平裂缝，长 10 毫米（红色裂缝）。边界条件如下：底部边界固定，顶部边界沿水平方向位移，两个侧边界在竖直方向固定。

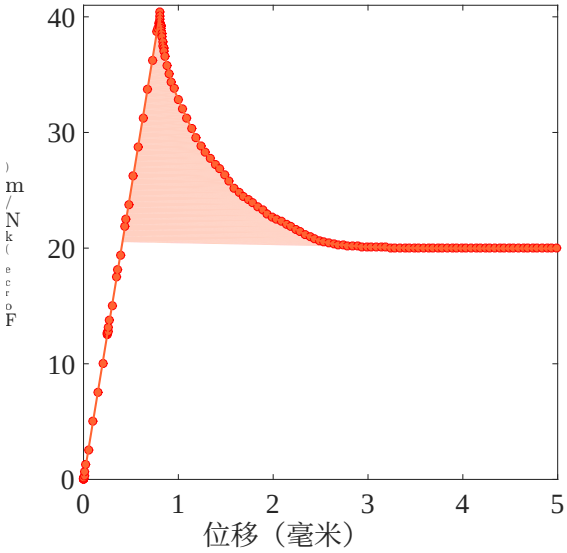


图 3 直剪试验的水平力-位移曲线。数据点为数值模拟的输出结果。

试件宽度，为 40 kN，而我们的模拟结果为 40。387 kN。同理，理论残余荷载为 20 kN，而我们的模拟结果为 19。978 kN。我们根据力-位移曲线估算断裂能，即图 3 中的阴影面积。模型的输出结果给出的断裂能为 14。6914 J，而理论值为 15 J。因此，我们的模拟结果与预期理论值高度吻合。

我们分析了模型对相场长度参数 l的敏感性。我们针对直剪试验问题进行了若干次模拟，考察多个

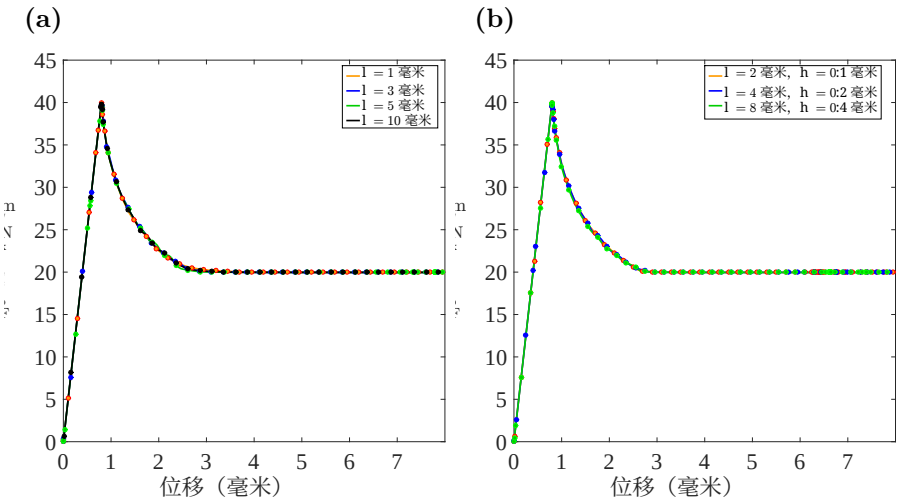


图4 采用多个相场长度参数 l 和网格尺寸 h 的直剪试验力-位移曲线。**(a)** 此处相场长度参数范围为 1 毫米至 10 毫米，网格尺寸设为 $h = 0.2$ 毫米。**(b)** 此处相场长度参数与网格尺寸之比设为 20。

取值 l，范围为 1 毫米至 10 毫米。结果如图4(a)所示。四种 l 取值下的力-位移曲线表明，该模型实际上对相场长度参数不敏感。我们通过对长剪切装置问题进行三组模拟，检验模型的网格依赖性。固定长度尺度参数与网格尺寸之比 l/h为 20，并针对三种 l值和 h值分别进行模拟。结果绘于图 4(b)中。曲线表明，该模型对网格尺寸不敏感。

图中绘出了三个时间步的相场分布：5。对于 $U_x = 0.8083$ 毫米，给出了峰值荷载；达到该值后，相场已经出现并沿整条裂缝扩展，见图5 (a)。随后，在软化阶段，相场值逐渐增强，见图 5(b)，直至裂缝完全形成，见图 5(c)。此时，计算域分为两部分。上部沿下部滑动，两部分之间的剪应力保持恒定，等于残余剪应力 $\tau_r = 40$ kPa，因此理论水平力为 20 kN。

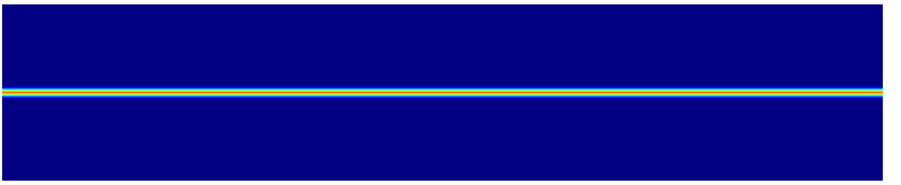
3.2 双轴压缩试验

下一个示例是双轴压缩试验。我们模拟一个处于平面应变状态、承受不同围压且具有不同残余摩擦角的实验室尺寸试样。此示例展示了该模型模拟峰值强度和残余强度压力依赖性的能力。我们将数值结果与破裂前后通过力学平衡模型计算得到的峰值强度和残余强度进行比较。

(a) $U_x = 1$ 毫米



(b) $U_x = 2$ 毫米



(c) $U_x = 3$ 毫米

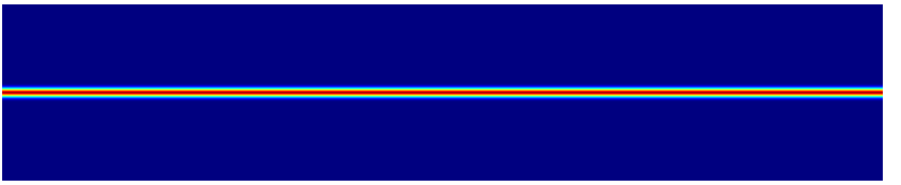


图5 直剪试验中三个时间步的相场变量演化。施加的水平位移 U_x 分别为：**(a)** 1 毫米、**(b)** 2 毫米和 **(c)** 3 毫米。

模型设置如图 6(a)所示。计算域为宽80毫米、高170毫米的矩形。底部边界由滚轴支座支撑，顶部边界施加规定的竖向位移，并在顶部中点施加零水平位移。两个侧边界承受围压 p_c，该围压在试验过程中保持恒定。

材料属性为：剪切模量 $G = 10$ MPa，泊松比$\nu = 0.3$，黏聚强度 $c = 40$ kPa，峰值摩擦角 $\phi = 15°$，剪切断裂能 $\mathcal{G}_c = 30\,\mathrm{J/m^2},$，断裂长度尺度为 $l = 2$ 毫米。忽略重力。我们模拟三种围压情况： p_c、50 kPa、100 kPa 和 200 kPa，并对每种情况分别采用三个残余摩擦角值 $\phi_r = 20°$、 $15°$ 和 $0°$ 进行重复模拟。这些模拟可用于检验模型能否捕捉峰值强度和残余强度的压力依赖性。我们采用自由三角形网格对计算域进行离散，网格尺寸为 $h = 0.2$ 毫米，并满足 $l/h = 10$。

图中给出了两条典型的竖向力-位移曲线6(b)。围压为 $p_c = 200$ kPa，峰值摩擦角为 $\phi = 20°$，我们考虑两个残余摩擦角，分别为 $\phi_r = 20°$ 和 $0°$。起初，随着施加的竖向位移增加，两种情况下的垂直力均呈线性变化，直至达到峰值

(a) 双轴模型 **(b)** 竖向力-位移曲线

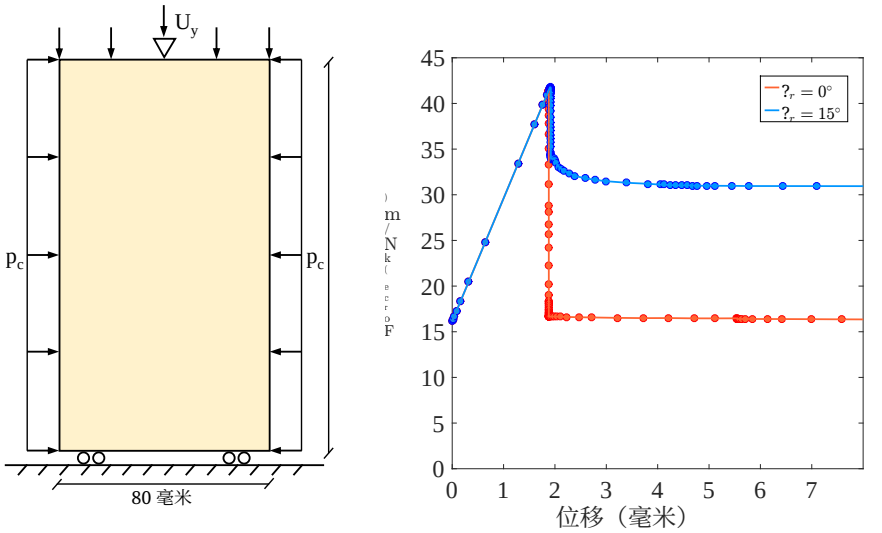


图6 双轴压缩试验。**(a)** 模型设置。**(b)** 两个工况下的竖向力-位移曲线，其中 $p_c = 200$ kPa、$\phi = 20°$ 以及 $\phi_r = 20°$ 和 $0°$

强度。由于两个模型具有相同的 p_c、 c和 ϕ，因此其峰值强度相同。随后，断裂突然扩展至整个计算域，并到达两个侧边界，垂直力随即骤降。得益于自适应时间步长，我们的数值模型能够捕捉从峰值强度向残余强度过渡期间的断裂扩展。此外，曲线表明，相场模型能够模拟残余强度，其大小取决于围压、残余摩擦角和断裂路径。

我们针对若干不同 l值（范围为 1 毫米至 10 毫米）进行了双轴压缩问题的多次模拟。四个 l 值对应的力-位移曲线见图7。与前一个问题一样， l 值对应的曲线证实，该模型实际上对相场长度参数不敏感。

图 $p_c = 200$ kPa、 $\phi = 20°$和$\phi_r = 20°$条件下，三个时间步的相场变量演化如图8所示。达到峰值强度时，相场几乎为零，见图8(a)。事实上，由于双轴试验采用各向同性材料模型且处于均匀应力条件下，会萌生两条可能性相同的断裂路径。这与莫尔-库仑模型一致。然而，在峰值强度骤降期间，只有一条轨迹继续发展，最终形成断裂模式，见图8(b)。随后，沿断裂路径的相场变量逐渐增大，直至达到残余峰值强度，见图8(c)。

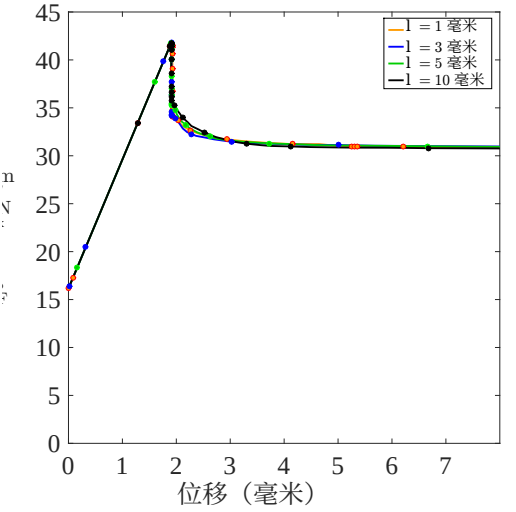


图7 采用多个相场长度参数时的力-位移曲线，l。

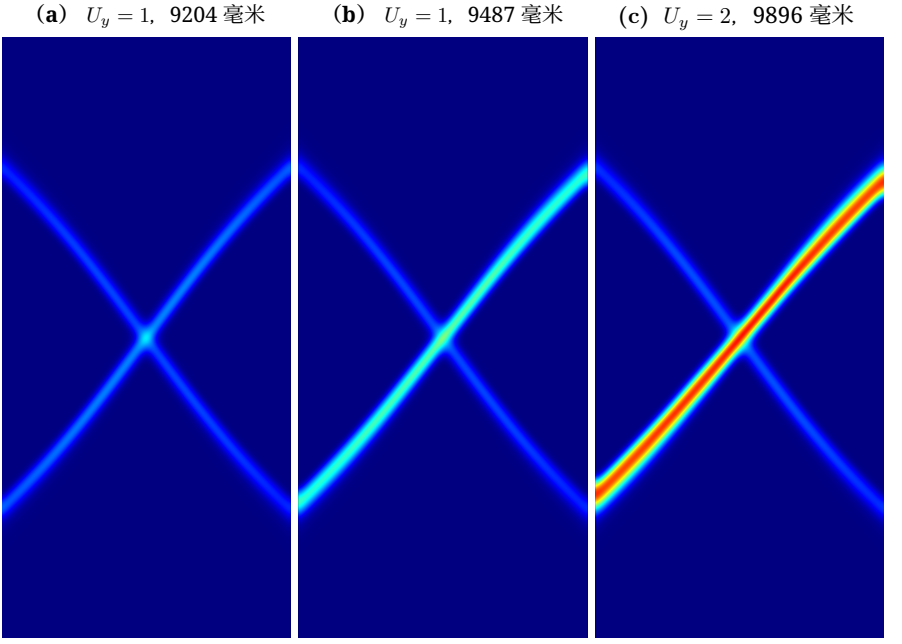


图8 双轴压缩试验。在三个时间步绘制了相场变量的演化。围压为 $p_c = 200\,\text{kPa}$，峰值摩擦角为 $\phi = 20°$，残余摩擦角为 $\phi_r = 20°$。施加的竖向位移 U_y为：**(a)** 1，9204 毫米，**(b)** 1，9487 毫米，以及**(c)** 2，9896 毫米。

我们模拟了九种情况，分别采用 p_c、 ϕ 和 ϕ_r 值的不同组合。我们还通过计算断裂扩展前后的力学平衡，求得峰值强度和残余强度。给定断裂路径，图 9 展示了力学平衡。作用于顶部边界的垂直力总和为 F_V，作用于左侧边界的水平力总和为 F_H，断裂路径上的切向力和法向力分别为 T 和 N。我们假设成核和断裂扩展瞬间完成，且断裂路径为直线。断裂路径与垂直轴之间的夹角为 θ。那么，在断裂扩展起始时，断裂面上的切向力为:

$$T = \frac{L}{\sin\theta}c + N\tan\phi, \tag{35}$$

and 断裂完全扩展后，断裂面上的切向力 is:

$$T = N\tan\phi_r. \tag{36}$$

垂直方向的力学平衡表示为:

$$V - T\cos\theta - N\sin\theta = 0, \tag{37}$$

水平方向的力学平衡为:

$$H + T\sin\theta - N\cos\theta = 0, \tag{38}$$

其中 H 为:

$$H = p_c\frac{L}{\tan\theta}. \tag{39}$$

由 V 式（37）求解，代入 V 式（38）并进行运算，可得断裂扩展起始时的垂直力 V_p ——峰值强度——为:

$$V_p = \frac{1}{\cos\theta - \sin\theta\tan\phi}\left(\frac{L\cdot c}{\sin\theta} + p_c\frac{L}{\tan\theta}\left(\cos\theta tan\phi + \sin\theta\right)\right), \tag{40}$$

断裂完全扩展后的垂直力 V_r ——残余强度——为:

$$V_r = \frac{1}{\cos\theta - \sin\theta\tan\phi_r}\left(p_c\frac{L}{\tan\theta}\left(\cos\theta tan\phi_r + \sin\theta\right)\right). \tag{41}$$

我们计算了 V_p 和 V_r 这九种模拟工况。结果列于表1中。两种模型的结果高度吻合。

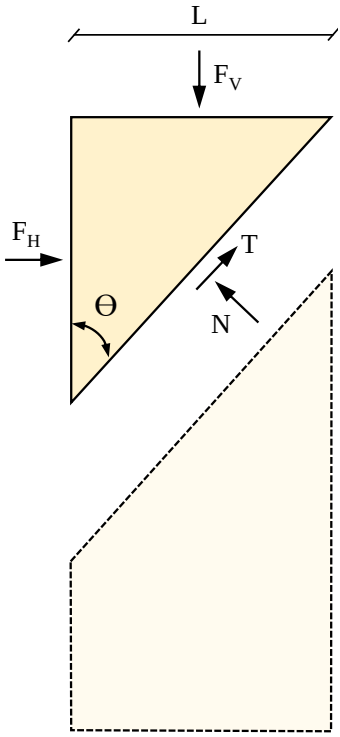


图9 三轴试验。力学平衡。

	$\phi = 15^\circ$ $\phi_r = 15^\circ$				$\phi = 20^\circ$ $\phi_r = 20^\circ$				$\phi = 15^\circ$ $\phi_r = 0^\circ$			
	Peak stre.		Residual stren.		Peak stren.		Residual stren.		Peak stren.		Residual stren.	
	M. Eq.	Sim.	M. Eq.	Sim.	M. Eq.	Sim.	M. Eq.	Sim.	M. Eq.	Sim.	M. Eq.	Sim.
$p_c = 50$ kPa	15.19	15.15	6.81	7.12	17.30	17.30	8.16	8.24	15.67	15.12	4.00	4.17
$p_c = 100$ kPa	22.00	21.94	13.62	14.27	25.46	25.56	16.32	17.04	22.59	21.93	8.00	8.23
$p_c = 200$ kPa	35.62	34.67	27.23	27.80	41.77	41.48	32.63	33.17	36.45	35.48	16.00	16.30

Table 1 Triaxial experiment. We list the peak and residual strengths for nine cases in kN. Both strengths are computed with our phase-field model –denoted as Sim.– and using a mechanical equilibrium –denoted as M. Eq.– prior and after the fracture propagation.

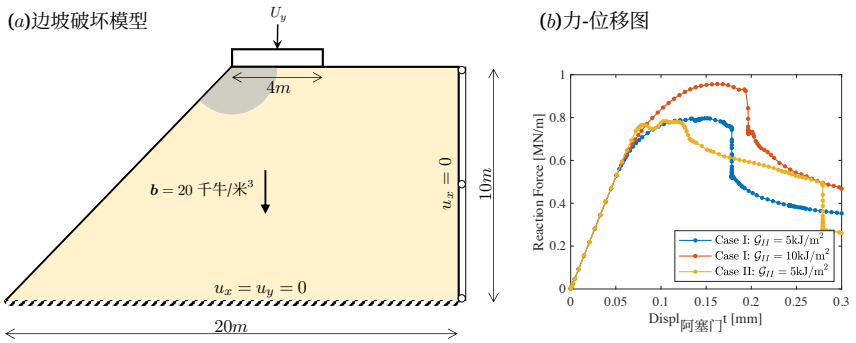


图 10 边坡破坏分析。(a) 边坡破坏分析的模型设置。计算域宽 20 m、高 10 m，边坡坡度为 1:1。边坡顶部设有一个宽 4 m 的刚性基础，并施加竖向位移 U_y。边界条件为：底边两个方向均固定，右边水平固定，其他边界面为无牵引边界。灰色区域标示损伤非激活（情形I）和损伤激活（情形II）问题。(b) 在基础中部的加载点测得的力-位移结果。图中显示的是绝对值。

3.3 边坡破坏分析

作为最后一个示例，我们考虑文献 [33]中报告的边坡破坏分析问题。考虑图 10所示的土坡。计算域宽 20 m、高 10 m，左侧边坡坡度为 1:1。坡顶放置了一个宽 4 m 的刚性基础。首先对土坡施加体力 $b = 20\ \mathrm{kN/m}^3$, ，然后将由此产生的体力应力用作基础加载步骤的初始状态。底边的位移在两个方向上均固定，而右边仅固定水平位移。作为主要加载步骤，在刚性基础中部施加位移 $U_y = 0.3$ m，以模拟建筑物对土坡施加应力的作用。

土体的弹性参数包括 $E = 10$ MPa 和 $\nu = 0.4$。初始摩擦角和黏聚力分别为 $\phi = 16.7°$ 和 $c = 40$ kPa，其对应的残余值分别为 $\phi_r = 10°$ 和 $c_r = 0$ kPa。相场长度尺度参数设为 $l = 200$ 毫米，计算域采用网格尺寸为 20 毫米的自由三角形网格进行离散。生成的网格约包含 1M 个三角形单元和 500K 个顶点。在配备 i9-10900处理器、10 个核心和 20 个线程的台式计算机上，计算时间约为 12 小时。

由于黏聚力较高、摩擦角较小，该问题中的剪切带形成过程尤其值得关注。如图 11-(a) 所示，如果绘制裂缝起始前的莫尔-库仑破坏包络线演化过程，我们会发现破坏应从基础的两端起始。Haghighat 和 Pietruszczak[38], 也报告了这一现象。不过，由于预先只指定了一个取向角（θ），Fei 和 Choo 未能捕捉到左侧的裂纹形成 [83]。因此，为了进行比较，我们考虑两种情况：

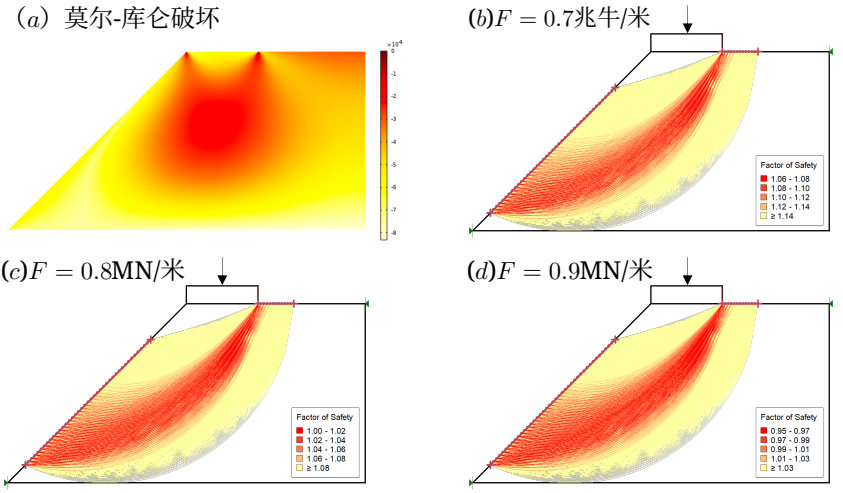


图11 (a) 局部化起始前绘制的莫尔-库仑破坏函数。基础两个角部周围的应力均接近破坏临界状态。(b-d) 不同荷载下采用极限平衡法得到的莫尔-库仑临界面。临界荷载为 $F \approx 0.8$MN/m，此时边坡安全系数达到1。

I. 通过将灰色区域内的相场变量设为零（$d = 0$）（见图 10），仅允许剪切带从基础右角形成。II. 自由形成剪切带，结果是两侧分别形成两种断裂模式，随后彼此合并。此外，我们考虑两种临界断裂能： $\mathcal{G}_c = 10\text{kJ/m}^2$ 和 $\mathcal{G}_c = 5\text{kJ/m}^2$。这两种情况下的最终断裂模式如图 12所示。

图中绘出了算例I的相场变量演化过程， $\mathcal{G}_c = 5\text{kJ/m}^2$, 对应不同加载步，见图13。力-位移响应绘于图10-(b)。读者可以看到，所提出的公式化准确捕捉了峰值荷载和残余荷载，以及裂纹模式；结果与Fei 和 Choo报告的结果一致。采用相场方法评估的破坏面与峰值荷载，与潜在破坏面和临界荷载 $F = 0.8$MN/m 吻合；后者是使用 GeoStudio 软件对边坡进行极限平衡分析所得（见图11-b-d）。

最后，我们针对情形II进行了一组新的模拟。结果绘于图 14中。可以看到，该模型首先捕捉到从基础左角处形成的剪切带。事实上，这一结果是预期之中的，因为边坡的无应力表面使左角处的破坏条件更为严苛。剪切带的扩展随后停止，因为其方向指向计算域中的莫尔-库仑稳定区域。之后，主要破坏模式从右角处萌生并扩展，在基础下方某处与第一种模式相交，这也与极限状态理论的结果一致。随后形成最后一条分支，并导致

边坡最终破坏。然而，如图 10-(b) 所示，峰值应力似乎与情形I的差异不大。

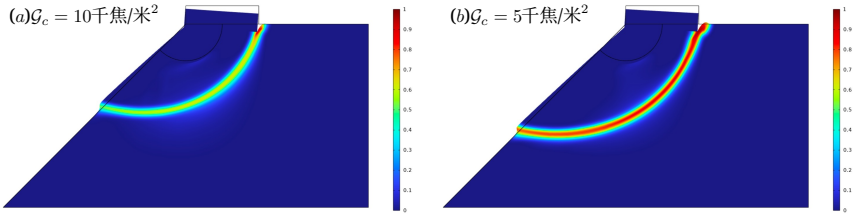


图 12 情形I边坡稳定性分析中的损伤演化，其中左侧受到抑制，无法发生损伤发展。图中显示了在 U_y 300 毫米时的损伤演化，(a) 为 $\mathcal{G}_c = 10$ kJ/m^2，(b) 为 $\mathcal{G}_c = 5$ kJ/m^2。

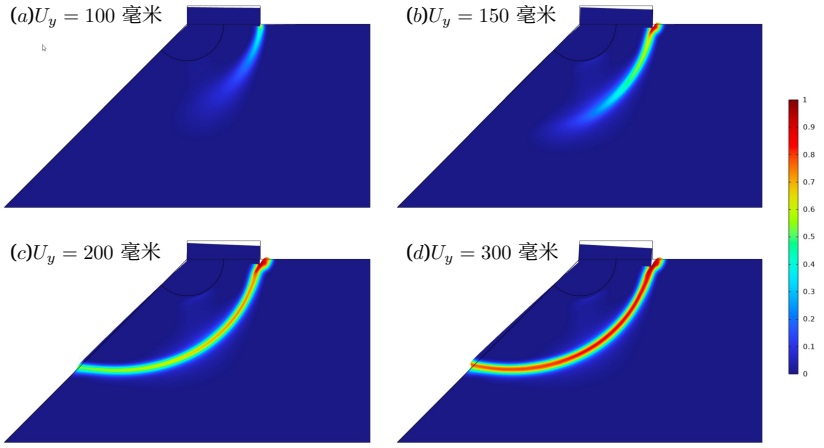


图 13 情形I边坡稳定性分析中的损伤演化（$\mathcal{G}_c = 5\text{kJ/m}^2$）。在此情形下，左侧受到抑制以促使损伤发展，因此裂纹仅从基础右角处形成一条。子图 a–d 展示了不同加载步下损伤参数的演化。

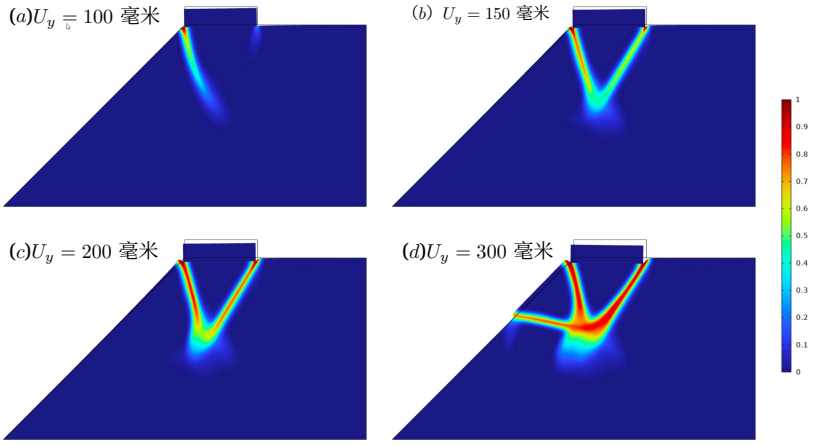


图14 情形II边坡稳定性分析中的损伤演化（$\mathcal{G}_c = 5\text{kJ/m}^2$）。在此情形下，损伤可从任一侧萌生，且主要由裂纹能驱动。子图a–d展示了不同加载步下损伤参数的演化。

4 结论

我们提出了一种采用偏应力分解（DSD）的剪切断裂相场模型。通过求解岩土工程中的剪切断裂基准问题，我们验证了该模型。模型表现出色。我们采用的相场方法主要具有以下优势：（1）模型无需重新网格划分；（2）无需追踪裂缝或预先指定方向，即可自动计算成核、扩展和断裂路径；（3）断裂连接和分支无需额外算法。

对于均匀荷载作用下的各向同性莫尔-库仑材料，已有研究表明，存在两个发生剪切带形成概率相同的共轭面。事实上，在双轴压缩问题中，我们的模型无需任何干预便能捕捉到这一现象。边坡稳定性问题也有相同表现：我们的模型能够捕捉到从基础两个角部萌生的裂纹。尽管该模型在峰值力和残余力计算方面准确，我们发现，剪切断裂CSD模型在捕捉这种转变方面更为准确。

本研究仅对压缩断裂的二维问题进行建模。不过，所提出的公式化并不受维度限制。因此，我们计划在后续研究中探索三维模型。此外，考虑孔隙流体对于地质材料失效建模至关重要，这也是下一步将考虑的研究方向。其他研究方向包括引入最适用于地质系统建模的速率-状态摩擦模型，以及对地热系统建模至关重要的热耦合。

偏应力分解的裂纹驱动力

需要指出的是，$\hat{q}$，$\tilde{q}_p$，$\tilde{q}_r$ 分别表示峰值阶段和残余阶段的体相偏应力与断裂偏应力，而$\hat{q} = 3\mu\varepsilon_q$、$\varepsilon_q$ 和偏应变表示由摩擦滑移导致的塑性耗散过程中，裂纹驱动力可表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{slip} &= \int_{\varepsilon_\gamma^p}^{\varepsilon_\gamma} (\hat{q} - \tilde{q}_r) d\varepsilon_\gamma \\ &= \int_{\varepsilon_\gamma^p}^{\varepsilon_\gamma} (3\mu\varepsilon_q - \tilde{q}_r) d\varepsilon_\gamma \\ &= \frac{1}{6\mu}\left(\hat{q}^2 - \tilde{q}_p^2\right) - \frac{\tilde{q}_r}{3\mu}\left(\hat{q} - \tilde{q}_p\right) \\ &= \frac{1}{6\mu}\left\{(\hat{q} - \tilde{q}_r)^2 - (\tilde{q}_p - \tilde{q}_r)^2\right\}.\end{aligned} \tag{42}$$

由于 $q = g(d)\hat{q} + (1 - g(d))\tilde{q}_r$，因此有，

$$\mathcal{H}_{slip} = \frac{1}{6\mu}\left\{\left(\frac{q - \tilde{q}_r}{g(d)}\right)^2 - (\tilde{q}_p - \tilde{q}_r)^2\right\}. \tag{43}$$

我们观察到，这些关系与 Fei 和 Choo 采用剪应力分解得到的关系非常相似，不同之处在于，此处以偏应力和偏应变取代了剪应力和剪应变，因此除以 3μ 而非 μ。

注意到总驱动能表示为 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_t + \mathcal{H}_{slip}$，重新整理式（43），可得

$$\mathcal{H} = \left\{\mathcal{H}_t - \frac{1}{6\mu}(\tilde{q}_p - \tilde{q}_r)^2\right\} + \frac{1}{6\mu}\left(\frac{q - \tilde{q}_r}{g(d)}\right)^2. \tag{44}$$

现在，可以将这一关系代入相场偏微分方程（9），并通过一维简化对相场关系进行积分，详见 [83]，从而得到偏应力演化 q 关于损伤的近似关系。同样，由于相场偏微分方程（9）和驱动力公式（44）与 [83], 中的公式非常相似，所有推导对于偏应力分解同样成立。最后，通过对偏应力演化施加长度尺度无关性，可得

$$\mathcal{H}_t = \frac{1}{6\mu}(\tilde{q}_p - \tilde{q}_r)^2. \tag{45}$$

至此，完成了式（30）和（31）中所引入的裂纹驱动力关系的推导。

数据可用性声明

研究期间生成或使用的所有数据、模型或代码将在论文发表后于以下网址在线公开：https://github.com/ehsanhaghighat/PhaseField-DSD 。

致谢

本研究项目由马德里自治区通过马德里理工大学青年研究人员科研资助计划资助，资助编号为 APOYO-JOVENES-21-6YB2DD-127-N6ZTY3，RSIEIH 项目，PRICIT 第五期研究计划。作者感谢 Aida Rezapour 女士（理学硕士、注册专业工程师）使用极限平衡法编制边坡稳定性结果时提供的帮助。

参考文献

[1] A. P. Rinaldi、J. Rutqvist、E. L. Sonnenthal、T. T. Cladouhos，致密裂隙火山岩水力剪切增渗的热-水-力耦合建模，《多孔介质中的传输》108（2015）：131–150。

[2] A. P. Rinaldi, J. Rutqvist，裂隙张开还是水力剪切？对芬顿山断裂带增渗的分析，《地热学》77（2019年）83–98。

[3] S. Andr´es, D. Santill´an, J. C. Mosquera, L. Cueto-Felgueroso，巴塞尔增强型地热系统诱发地震活动的热孔弹性分析，《可持续性》11（2019年）6904。

[4] S. Andr´es, D. Santill´an, J. C. Mosquera, L. Cueto-Felgueroso，地热储层的水力增渗：诱发地震活动与热衰减的数值模拟，《水》14（2022年）3697。

[5]V. Vilarrasa, J. Carrera，地质碳封存不太可能触发大型地震，也不太可能重新激活可能导致 CO2 泄漏的断层，《美国国家科学院院刊》112（2015年）5938–5943。

[6] R. Juanes、B. H. Hager、H. J. Herzog，暂无地质证据表明地震活动会导致断层泄漏，从而使大规模碳捕集与封存无法成功，《美国国家科学院院刊》109（2012年）E3623–E3623。

[7] J. A. White、W. Foxall，评估二氧化碳封存项目的诱发地震风险：近期进展与仍存挑战，《国际温室气体控制期刊》49（2016年）413–424。

[8] H. K. Gupta，回顾人工水库触发地震的近期研究，特别关注印度科伊纳发生的地震，

《地球科学评论》58（2002）279–310。

[9] A. McGarr, D. Simpson, L. Seeber, W. Lee，诱发和触发地震活动案例研究，载于：《国际地震与工程地震学手册》，第81A卷，Academic Press LTD，2002年，第647–664页。[10] A. P. Rinaldi, L. Improta, S. Hainzl, F. Catalli, L. Urpi, S. Wiemer，结合孔弹性与地震成核方法研究意大利瓦尔达格里地区的水库诱发地震活动，《岩石力学与岩土工程学报》12（2020年）802–810。[11] P. Pampill´on, D. Santill´an, J. C. Mosquera, L. Cueto-Felgueroso，水文地震活动的地质力学约束：潮汐强迫与水库运行，《水》12（2020年）2724。[12] P. Pampill´on, D. Santill´an, J. C. Mosquera, L. Cueto-Felgueroso，孔隙流体在超剪切地震破裂中的作用，Scientific Reports 13（2023年）398。[13] V. Vilarrasa, S. De Simone, J. Carrera, A. Villase˜nor，揭示西班牙卡斯托尔地下储气诱发地震活动的原因，《地球物理研究快报》48（2021年）e2020GL092038。[14] L. Cueto-Felgueroso, D. Santill´an, J. C. Mosquera, L. Cueto-Felgueroso，速率-状态断层上流动诱发地震活动的粘滑动力学，《地球物理研究快报》44（2017年）4098–4106。[15] L. Cueto-Felgueroso, C. Vila, D. Santill´an, J. C. Mosquera，采用实验室测定的摩擦定律对注入诱发地震进行数值模拟，《水资源研究》54（2018年）9833–9859。[16]S. Andr´es, D. Santill´an, J. C. Mosquera, L. Cueto-Felgueroso，流体注入引起的压力变化驱动速率-状态断层延迟弱化与再活化，《地球物理研究杂志：固体地球》124（2019年）11917–11937。[17] E. Veveakis, I. Vardoulakis, G. Di Toro，蠕滑滑坡的热孔弹性力学：意大利北部1963年瓦伊昂滑坡，《地球物理研究杂志：地表》112（2007年）。[18] R. I. Borja, J. Choo, J. A. White，岩石含水动态、优势流与山坡稳定性，载于：《土木基础设施工程的多灾害方法》，施普林格，2016年，第443–464页。[19] P. J. Gonz´alez, K. F. Tiampo, M. Palano, F. Cannav´o, J. Fern´andez，受地下水和地壳控制的2011年洛尔卡地震滑移分布

卸载，《自然地球科学》5（2012）821–825。[20] D. K. Tiwari、B. Jha、B. Kundu、V. K. Gahalaut、N. K. Vissa，印度德里地区地下水开采诱发的地震活动，《Scientific Reports》11（2021）1–14。[21] A. A. Griffith，Vi. 固体破裂与流动现象，《伦敦皇家学会哲学汇刊 A 辑》221（1921）163–198。[22] G. R. Irwin，高强度钢和铝合金中快速裂纹扩展的起始，技术报告，华盛顿特区海军研究实验室，1956。[23] L. Kachanov，蠕变条件下的破裂时间，《苏联科学院学报》8（1958）26–31。[24] S. Chan、I. Tuba、W. Wilson，关于线性断裂力学中的有限元法，《工程断裂力学》2（1970）1–17。[25] E. F. Rybicki、M. F. Kanninen，利用修正裂纹闭合积分计算应力强度因子的有限元计算，《工程断裂力学》9（1977）931–938。[26] Z. P. Baˇzant、L. Cedolin，有限元分析中的钝裂纹带扩展，《工程力学分部期刊》105（1979）297–315。[27]S. Pietruszczak、Z. Mroz，应变软化材料变形的有限元分析，《International Journal for Numerical Methods in Engineering》17（1981）327–334。[28] J. C. Simo、J. Ju，基于应变和应力的连续损伤模型——I. 公式化，《International Journal of Solids and Structures》23（1987）821–840。[29] T. Belytschko、J. Fish、B. E. Engelmann，具有嵌入式局部化区的有限元，《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》70（1988）59–89。[30]J. C. Simo、J. Oliver、F. Armero，率无关非弹性固体中应变软化诱发的强间断分析，《计算力学》12（1993）277–296。[31] J. Simo、J. Oliver，固体应变软化分析与模拟的新方法，《Fracture and Damage in Quasibrittle Structures》（1994）25–39。

[32] J. Oliver，强间断运动学和连续体本构方程所诱导的离散本构模型，《International Journal of Solids and Structures》37（2000年）7207–7229。[33] R. A. Regueiro、R. I. Borja，具有强间断的压力敏感塑性平面应变有限元分析，《International Journal of Solids and Structures》38（2001）3647–3672。[34] G. Wells、L. Sluys，脆性断裂的三维嵌入式间断模型，《International Journal of Solids and Structures》38（2001）897–913。[35] C. Foster、R. Borja、R. Regueiro，具有可变摩擦的断裂地质材料嵌入式强间断有限元，《International Journal for Numerical Methods in Engineering》72（2007）549–581。[36] F. Liu、R. I. Borja，采用扩展有限元法模拟摩擦裂纹扩展的接触算法，《International Jo urnal for Numerical Methods in Engineering》76（2008年）1489–1512。[37] D. Dias-da Costa、J. Alfaiate、L. Sluys、E. J´ulio，一种离散强间断方法，《工程断裂力学》76（2009）1176–1201。[38] E. Haghighat、S. Pietruszczak，黏聚摩擦材料中局部化损伤离散扩展的建模，《International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics》39（2015）1774–1790。[39] N. Mo¨es、J. Dolbow、T. Belytschko，一种无需重新划分网格的裂纹扩展有限元法，《International Journal for Numerical Methods in Engineering》46（1999）131–150。[40] J. Dolbow、N. Mo¨es、T. Belytschko，一种用于模拟摩擦接触裂纹扩展的扩展有限元法，《Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering》190（2001）6825–6846。[41] N. Mo¨es、T. Belytschko，黏聚裂纹扩展的扩展有限元法，《工程断裂力学》69（2002）813–833。[42] P. M. Areias、T. Belytschko，采用扩展有限元法分析三维裂纹萌生与扩展，《International Journal for Numerical Methods in Engineering》63（2005）760–788。[43] J.-H. Song、P. M. Areias、T. Belytschko，一种利用幻影节点模拟动态裂纹与剪切带扩展的方法，《International Journal for Numerical Methods in Engineering》67（2006）868–893。

[44]R. I. Borja，假定增强应变与扩展有限元法：概念的统一，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 197 (2008) 2789–2803。[45] S. E. Sanborn，J. H. Pr´evost，通过局部化检测与扩展有限元法（XFEM）实现摩擦滑移面扩展，International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 35 (2011) 1278–1298。[46] E. Mikaeili，B. Schrefler，饱和多孔介质剪切带建模中的扩展有限元法、强不连续与二阶功，《岩土工程学报》13 (2018) 1249–1264。[47] M. Hirmand，M. Vahab，A. Khoei，采用扩展有限元法处理摩擦间断的增广拉格朗日接触公式，《有限元分析与设计》107 (2015) 28–43。[48] L. Kachanov，《连续损伤力学导论》，第10卷，Springer Science & Business Media，1986。[49] Z. P. Ba˘zant，F.-B. Lin，混凝土断裂的非局部弥散裂纹模型，《结构工程学报》114 (1988) 2493–2510。[50]Y. Leroy，M. Ortiz，摩擦材料应变局部化的有限元分析，International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 13 (1989) 53–74。[51] J. O˘zbolt，Z. P. BA˘ZANT，数值弥散断裂分析：非局部微裂纹相互作用方法，International Journal for Numerical Methods in Engineering 39 (1996) 635–661。[52] Z. P. Ba˘zant，M. Jir´asek，塑性与损伤的非局部积分形式：进展综述，《工程力学杂志》128 (2002) 1119–1149。[53] S. A. Silling，针对间断与长程力重新表述弹性理论，《固体力学与物理学杂志》48 (2000) 175–209。[54] B. Kilic，E. Madenci，基于近场动力学理论的结构稳定性与失效分析，《国际非线性力学杂志》44 (2009) 845–854。[55] S. A. Silling，R. B. Lehoucq，固体力学近场动力学理论，《应用力学进展》44 (2010) 73–168。

[56] A. Agwai，I. Guven，E. Madenci，采用近场动力学预测裂纹扩展：一项比较研究，International Journal of Fracture 171 (2011) 65–78。[57] E. Madenci，E. Oterkus，近场动力学理论，载于：近场动力学理论及其应用，施普林格，2014，第19–43页。[58] H. Ren，X. Zhuang，T. Rabczuk，一种适用于弹性固体、包含剪切变形的新型近场动力学公式，Journal of Micromechanics and Molecular Physics 1 (2016) 1650009。[59] E. Madenci，A. Barut，M. Futch，近场动力学微分算子及其应用，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 304 (2016) 408–451。[60]D. Kamensky，M. Behzadinasab，J. T. Foster，Y. Bazilevs，摩擦接触的近场动力学建模，Journal of Peridynamics and Nonlocal Modeling 1 (2019) 107–121。[61] X. Song，N. Khalili，一种用于地质材料应变局部化分析的近场动力学模型，International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics 43 (2019) 77–96。[62] H. Zhang，X. Zhang，Y. Liu，一种用于涉及断裂的接触问题的近场动力学模型，《工程断裂力学》267 (2022) 108436。[63] G. A. Francfort，J.-J. Marigo，重新审视作为能量最小化问题的脆性断裂，《固体力学与物理学杂志》46 (1998) 1319–1342。[64] B. Bourdin，G. A. Francfort，J.-J. Marigo，重新审视脆性断裂的数值试验，《固体力学与物理学杂志》48 (2000) 797–826。[65] B. Bourdin，G. A. Francfort，J.-J. Marigo，断裂变分法，Journal of Elasticity 91 (2008) 5–148。[66] C. Miehe，F. Welschinger，M. Hofacker，断裂的热力学一致相场模型：变分原理与多场有限元实现，International Journal for Numerical Methods in Engineering 83 (2010) 1273–1311。[67]C. Miehe，M. Hofacker，F. Welschinger，一种用于率无关裂纹扩展的相场模型：基于算子分裂的稳健算法实现，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 199 (2010) 2765–2778。

[68]C. Kuhn, R. M¨uller, 《断裂的连续体相场模型》, 《工程断裂力学》77（2010年）3625–3634。[69] M. J. Borden, C. V. Verhoosel, M. A. Sc ott, T. J. Hughes, C. M. Landis, 《动态脆性断裂的相场描述》, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 217（2012）77–95。[70] C. V. Verhoosel, R. de Borst, 《黏聚断裂的相场模型》, International Journal for Numerical Methods in Engineering 96（2013）43–62。[71] M. J. Borden, T. J. Hughes, C. M. Landis, C. V. Verhoosel, 《脆性断裂的高阶相场模型：等几何分析框架下的公式化与分析》, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 273（2014）100–118。[72] M. Ambati, T. Gerasimov, L. De Lorenzis, 《延性断裂的相场建模》, 《计算力学》55（2015）1017–1040。[73] D. Santill´an, J. C. Mosquera, L. Cueto-Felgueroso, 《脆性断裂的相场模型：通过实验结果验证并拓展至大坝工程问题》, 《工程断裂力学》178（2017）109–125。[74] D. Santill´an, R. Juanes, L. Cueto-Felgueroso, 《弹性介质中流体驱动断裂的相场模型：浸入式断裂公式及解析解验证》, 《地球物理研究杂志：固体地球》122（2017）2565–2589。[75] D. Santill´an, R. Juanes, L. Cueto-Felgueroso, 《孔弹性介质中水力压裂的相场模型：流体注入与采出条件下的断裂扩展、止裂及分支》, 《地球物理研究杂志：固体地球》123（2018）2127–2155。[76] D. Santill´an, J.-C. Mosquera, L. Cueto-Felgueroso, 《非均质介质中的流体驱动断裂扩展：断裂轨迹的概率分布》, 《物理评论E》96（2017）053002。[77] F. Aldakheel, N. Noii, T. Wick, P. Wriggers, 《孔弹性介质中水力相场断裂的全局-局部方法》, 《计算机与数学及其应用》91（2021）99–121。[78] A.K. Seles, F. Aldakheel, Z. Tonkovic, J. Soric, P. Wriggers, 《一种适用于脆性与延性固体疲劳失效的通用相场模型》, 《计算力学》67（2021）1431–1452。[79] J.-Y. Wu, V. P. Nguyen, C. T. Nguyen, D. Sutula, S. Sinaie, S. P. Bordas, 《断裂的相场建模》, 《应用力学进展》53（2020）

1–183。[80] G. Lancioni, G. Royer-Carfagni, 《断裂力学的变分方法：在巴黎法国先贤祠中的实际应用》, Journal of Elasticity 95（2009）1–30。[81]E. C. Bryant, W. Sun, 《各向异性岩石中具有一致运动学的混合模式相场断裂模型》, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 342（2018）561–584。[82]S. Zhou, X. Zhuang, T. Rabczuk, 《类岩材料中脆性压剪断裂的相场建模：一种新的驱动力与混合形式》, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 355（2019）729–752。[83] F. Fei, J. Choo, 《地质材料中摩擦剪切断裂的相场模型》, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 369（2020）113265。[84] A. C. Palmer, J. R. Rice, 《超固结黏土渐进破坏过程中滑移面的扩展》, 《伦敦皇家学会会刊A辑》332（1973）527–548。[85] T. Hu, J. Guilleminot, J. E. Dolbow, 《具有无摩擦接触和随机断裂特性的断裂相场模型：在薄膜断裂和土壤干燥中的应用》, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 368（2020）113106。[86] F. Fei, J. Choo, 《岩石混合模式断裂的双相场形式》, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 376（2021）113655。[87] C. Kuhn, A. Schl¨uter, R. M¨uller, 《相场断裂模型中的退化函数》, 《计算材料科学》108（2015）374–384。[88] R. J. Geelen, Y. Liu, T. Hu, M. R. Tupek, J. E. Dolbow, 《动态黏聚断裂的相场公式》, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 348（2019）680–711。[89] T. J. Hughes, 《有限元法：线性静力与动力有限元分析》, Courier Corporation, 2012年。[90]T. Belytschko, W. K. Liu, B. Moran, K. Elkhodary, 《连续体与结构非线性有限元》, John Wiley & sons, 2014年。[91] E. Lorentz, S. Cuvilliez, K. Kazymyrenko, 《梯度损伤模型向黏聚区模型的收敛》, Comptes Rendus M´ecanique 339（2011）20–26。

[92] E. Lorentz，与黏聚断裂一致的普通混凝土非局部损伤模型，《International Journal of Fracture》207（2017年）123–159。[93]H. Amor、J.-J. Marigo、C. Maurini，带单边接触的变分脆性断裂正则化公式：数值试验，《固体力学与物理学杂志》57（2009）1209–1229。[94] J.-Y. Wu、V. P. Nguyen、H. Zhou、Y. Huang，用于断裂的变分一致相场各向异性损伤模型，Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 358（2020）112629。[95] C. Steinke、M. Kaliske，基于方向应力分解的相场裂纹模型，《计算力学》63（2019）1019–1046。[96] M. Strobl、T. Seelig，关于脆性断裂相场方法中的本构假设，《结构完整性学报》2（2016年）3705–3712。[97] M. Strobl、T. Seelig，相场断裂模型中裂纹边界条件的新处理方法，Pamm 15（2015）155–156。[98] Y. Liu、C. Cheng、V. Ziaei-Rad、Y. Shen，考虑单边约束的微观力学指导的脆性断裂相场模型，《工程断裂力学》241（2021）107358。[99] S. Zhang、W. Jiang、M. R. Tonks，采用准静态和动态基准算例评估相场断裂模型的四种应变能分解方法，《材料理论》6（2022年）1–24。[100] S. Pietruszczak，岩土力学中的塑性基础，CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2010年。

[101] R. I. Borja，《塑性》，第 2 卷，施普林格，2013 年。