arXiv:2303.07315v1 [math.CA] 13 Mar 2023

重排不变空间上的傅里叶变换

RON KERMAN、RAMA RAWAT 和 RAJESH K. SINGH

Abstract. 我们研究如下形式的不等式:

$$\rho(|\hat{f}|) \le C\sigma(f) < \infty,$$

其中， $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$是 $\mathbb{R}^n$ 上的勒贝格可积函数，且

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i \xi\cdot x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

泛函 ρ 和 σ 是 $M_+(\mathbb{R}^n)$上的所谓重排不变（r.i.）范数，其中的元素是 $\mathbb{R}^n$上的非负可测函数。

首先在重排不变空间这一一般背景下证明的结果，随后既被具体化，也被
e在 Orlicz 空间和洛伦兹伽马空间这两个特殊情形中已有论述。

1. Introduction

ˆ 函数 f 的傅里叶变换 $\mathscr{F}(f)$，或 f，对于在 $\mathbb{R}^n$ 上可积的函数类 $L_1(\mathbb{R}^n)$ 中的函数，定义为

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-2\pi i \xi\cdot x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

关于其基本性质的简要介绍，参见 [P02，第 91–94]。

我们关注以下形式的不等式

$$\rho(|\hat{f}|) \le C\sigma(f) < \infty, \quad f \in L_1(\mathbb{R}^n), \tag{1.2}$$

其中， ρ 和 σ 是 $M_+(\mathbb{R}^n)$ 上所谓的重排不变（r.i.）范数； $M_+(\mathbb{R}^n)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数类 $M(\mathbb{R}^n)$ 中的非负函数所构成的空间。重排不变范数 ρ 的显著特征是

$$\rho(f) = \rho(g), \quad f, g \in M(\mathbb{R}^n),$$

当 f 和 g 等测时，即，

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \lambda\}| = |\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \lambda\}|, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty).$$

ˆ 就我们的目的而言，涉及 f的基本不等式，证明见 [JT71，定理 4。6], 为

$$\int_0^t (\hat{f})^*(s)^2 ds \le C \int_0^t (Uf^*)(s)^2 ds, \tag{1.3}$$

其中 $(Uf^*)(s)$: $= \int_0^{s^{-1}} f^*$, $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}_+$。

在（1.3）中， g^* 是 g 在 $\mathbb{R}_+$ 上的非增重排，定义为

$$g^*(s) = \mu_g^{-1}(s), \quad s \in \mathbb{R}_+,$$

其中

$$\mu_g(\lambda) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > \lambda\}|, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 42B10；次要分类 46M35、46E30、46B70

Key words and phrases. 傅里叶变换、加权不等式、洛伦兹伽马空间、Orlicz 空间、插值空间。第三作者获得印度国家高等数学委员会和印度政府的资助。

W我们注意到，当且仅当 $f^* = g^*$ 在 $\mathbb{R}$ 上时， f、$g \in M_+(\mathbb{R})$ 等测 $_+$.

根据 Luxemberg 的一个结果，参见 [BS88，定理 4.10，第 62], 个定义在 ρ上的重排不变范数$M_+(\mathbb{R}^n)$，可以用定义在 $\bar{\rho}$ 上的重排不变范数 $M_+(\mathbb{R}_+$表示为

$$\rho(f) = \bar{\rho}(f^*), \quad f \in M_+(\mathbb{R}^n).$$

正如我们将看到的，定理 1.1 中的不等式 (1.3) 和 (1.6) 确保 (1.2) 等价于

$$\bar{\rho}(Uh) \le C\bar{\sigma}(h), \quad h \in M_+(\mathbb{R}_+), \tag{1.4}$$

当重排不变空间

$$L_{\bar{\rho}}(\mathbb{R}_+) := \{h \in M_+(\mathbb{R}_+) : \bar{\rho}(h) < \infty\},$$

是空间 $L_2(\mathbb{R}_+$中函数的插值空间，其中函数在 $\mathbb{R}_+$ 上平方可积；以及空间 $L_\infty(\mathbb{R}_+)$ 中函数的插值空间，其中函数在 $\mathbb{R}_+$. 上本质有界。插值空间的定义见下文第 2 节。

考虑到上述因素，我们现在可以说明研究 (1.4) 的方法。给定一类特定的重排不变空间，我们从该类中选取一个满足相关插值性质的重排不变范数 $\bar{\rho}$ 。然后构造满足 (1.4) 以及 $\bar{\sigma}_{\bar{\rho}}$ 的最小重排不变范数 $\bar{\rho}$，即，

$$\bar{\sigma}_{\bar{\rho}}(h) = \bar{\rho}(Uh^*), \quad h \in M_+(\mathbb{R}_+).$$

接下来，我们确定同属 $\bar{\rho}$ 所在类别的重排不变范数 $\bar{\sigma}$ 的条件，使得

$$\bar{\sigma}_{\bar{\rho}}(h) \le \bar{\sigma}(h), \quad h \in M_+(\mathbb{R}_+).$$

以下结果表明，只需对 $\bar{\rho}$. 施加一个轻微限制，(1.2) 就能推出 (1.4)

定理 1.1. 设 ρ 和 σ 是定义在 $M_+(\mathbb{R}^n)$ 上的重排不变范数，它们由定义在 $M_+(\mathbb{R}_+)$ 上的重排不变范数 $\bar{\rho}$ 和 $\bar{\sigma}$ 给出:

$$\rho(f) = \bar{\rho}(f^*) \quad and \quad \sigma(f) = \bar{\sigma}(f^*), \quad f \in M_+(\mathbb{R}^n). \tag{1.5}$$

假设

$$\bar{\rho}(g^{**}) \le C\bar{\rho}(g^*), \tag{1.6}$$

其中

$$g^{**}(t) = t^{-1}\int_0^t g^*, \quad g \in M_+(\mathbb{R}_+), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.7}$$

那么，

$$\rho(\hat{f}) \le C\sigma(f), \tag{1.8}$$

$f \in (L_1 \cap L_\sigma)(\mathbb{R}^n)$, $f(x) = g(|x|)$ $x \in \mathbb{R}^n$，其中 $g\downarrow$ 在 $\mathbb{R}_+$上，意味着

$$\bar{\rho}(Uh^*) \le C\,\bar{\sigma}(h^*), \quad h \in L_{\bar{\sigma}}(\mathbb{R}_+). \tag{1.9}$$

下一节将介绍重排不变范数的背景知识。如上所述，我们将考虑某些所谓的插值空间。

第 3 节和第 4 节分别用于证明定理 1.1 和定理 4.1；后者给出了一个关于 $\mathscr{F}$ 在重排不变空间之间的通用映射定理。第 5 节讨论 Orlicz 空间背景下的 $\mathscr{F}$，第 6 节讨论 $\mathscr{F}$ 在 Lorentz 伽马空间之间的情形。最后，第 7 节简要讨论了关于 $\mathscr{F}(f)$ 的加权范数不等式的近期研究。

在本文中，我们用 $A \simeq B$ 简写 $C_1A \le B \le C_2A$，其中常数C_1、$C_2 > 0$ 与 A 和 B 无关。

2. Rearrangement invariant spaces

哈代和利特尔伍德的一个定理断言：

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \le \int_{\mathbb{R}_+} f^*(t)g^*(t)dt, \quad f,g \in M_+(\mathbb{R}^n). \tag{2.1}$$

尽管重排运算本身并非次线性，但它在平均意义下是次线性的，即

$$(f+g)^{**}(t) \le f^{**}(t) + g^{**}(t), \quad f,g \in M_+(\mathbb{R}^n), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{2.2}$$

定义 2.1. 重排不变（r.i.）巴拿赫函数范数 ρ 在 $M_+(\Omega)$上，$\Omega = \mathbb{R}^n$或 $\mathbb{R}_+$，满足

(1) $\rho(f) \ge 0$，且 $\rho(f) = 0$当且仅当 $f = 0$几乎处处成立；(2) $\rho(cf) = c\,\rho(f)$，$c > 0$；(3) $\rho(f+g) \le \rho(f) + \rho(g)$；(4) $0 \le f_n \uparrow f$ 蕴含 $\rho(f_n) \uparrow \rho(f)$；(5) $\rho(\chi_E) < \infty$ 对所有满足 $|E| < \infty$的Ω上可测 $E \subset$ 成立；(6) $\int_E f \le C_E\,\rho(f)$，其中 $E \subset \Omega$，$|E| < \infty$ 和 $C_E > 0$ 独立于 $f \in M_+(\Omega)$；(7) 当$\mu_f = \mu_g$时，$\rho(f) = \rho(g)$。

根据 Luxemberg 的一项基本结果 [BS88，第 2 章，定理 4。10], 对于每个定义在 ρ 上的重排不变范数 $M_+(\mathbb{R}^n)$，都存在一个定义在 $\bar{\rho}$ 上的重排不变范数 $M_+(\mathbb{R}_+)$，使得

$$\rho(f) = \bar{\rho}(f^*), \quad f \in M_+(\mathbb{R}^n). \tag{2.3}$$

处理重排不变范数的一项基本技巧涉及 Hardy–Littlewood–Pólya（HLP）对偶原理，其断言

$$f^{**} \le g^{**} \quad \text{implies} \quad \rho(f) \le \rho(g);$$

参见 [BS88，第 3 章，命题 4。6]。该原理基于哈代的一项结果，其广义形式如下

$$\int_0^t f \le \int_0^t g \tag{2.4}$$

推出

$$\int_0^t fh^* \le \int_0^t gh^*, \quad f,g,h \in M_+(\mathbb{R}_+), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

重排不变范数 ρ 在 $M_+(\Omega)$ 上的 K¨othe 对偶也是一个这样的范数，ρ'，且

$$\rho'(g) := \sup_{\rho(f)\le 1} \int_\Omega f(x)g(x), \quad f,g \in M_+(\Omega).$$

它满足对偶原理

$$\rho'' = (\rho')' = \rho. \tag{2.5}$$

此外，还有 H¨older 不等式

$$\int_\Omega fg \le \rho(f)\rho'(g), \quad f,g \in M_+(\Omega).$$

最后，

$$\bar{\rho'} = (\bar{\rho})'.$$

与 ρ on $M_+(\Omega)$ 上的重排不变范数相对应的是以下类

$$L_\rho(X) := \{f \in M(\Omega) : \rho(|f|) < \infty\},$$

在范数 $\|f\|_\rho = \rho(|f|)$，$f \in L_\rho(\Omega)$ 下，它成为一个巴拿赫空间。空间 $L_\rho(\Omega)$ 因而是一个重排不变空间。

第 5 节和第 6 节分别研究的 Orlicz 空间和洛伦兹伽马空间，都是这类重排不变空间的例子。

伸缩算子 E_s, $s \in \mathbb{R}_+$ 在 $f \in M_+(\mathbb{R}_+)$, $t \in \mathbb{R}_+$ 上定义如下:

$$(E_s f)(t) = f(st), \quad s, t \in \mathbb{R}_+.$$

算子 E_s 在任意重排不变空间 $L_\rho(\mathbb{R}_+)$ 上有界。我们用 $h_\rho(s)$ 表示其范数。利用 h_ρ，我们将 $L_\rho(\mathbb{R}_+)$ 的下指标和上指标定义为

$$i_\rho = \sup_{s>1} \frac{-\log h_\rho(s)}{\log s} \quad \text{and} \quad I_\rho = \inf_{0<s<1} \frac{-\log h_\rho(s)}{\log s}, \tag{2.6}$$

分别。可得

$$i_\rho = \lim_{s\to\infty} \frac{-\log h_\rho(s)}{\log s} \quad \text{and} \quad I_\rho = \lim_{s\to 0^+} \frac{-\log h_\rho(s)}{\log s}.$$

此外，$0 \le i_\rho \le I_\rho \le 1$，而且

$$i_{\rho'} = 1 - I_\rho \quad \text{and} \quad I_{\rho'} = 1 - i_\rho.$$

关于这些内容，参见 [Bo69，第 1250-1252]。

若记 $k_\rho(s)$ 为 E_s 在示性函数 χ_F 上的范数，$F \subset \mathbb{R}_+$，$|F| < \infty$，并定义 j_ρ 和 J_ρ，将（$h_\rho(s)$ 中的 2.6 替换为 $k_\rho(s)$），便得到$L_\rho(\mathbb{R}_+)$ 的基本指标。结果表明，当 $L_\rho(\mathbb{R}_+)$ 是 Orlicz 空间或洛伦兹伽马空间时 $i_\rho = j_\rho$ 且$I_\rho = J_\rho$。

最后，我们介绍插值理论中与本文相关的部分。

设 X_1 和 X_2 是相容的巴拿赫空间，即二者都连续嵌入同一个 Hausdorff拓扑空间 H中，记作

$$X_i \hookrightarrow H, \quad i = 1, 2.$$

空间 $X_1 \cap X_2$ 和 $X_1 + X_2$ 是集合

$$X_1 \cap X_2 := \{x : x \in X_1 \ \text{ and } \ x \in X_2\}$$

and

$$X_1 + X_2 := \{x : x = x_1 + x_2, \ \text{ for some } x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_2\},$$

其范数为

$$\|x\|_{X_1 \cap X_2} = \max\left[\|x\|_{X_1}, \|x\|_{X_2}\right]$$

and

$$\|x\|_{X_1+X_2} = \inf\left\{\|x_1\|_{X_1} + \|x_2\|_{X_2} : x = x_1 + x_2, \, x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_2\right\}.$$

回顾一下，给定嵌入同一个豪斯多夫拓扑向量空间的巴拿赫空间 X_1 和 X_2，其 Peetre K-泛函定义为：对 $x \in X_1 + X_2$, $t > 0$,

$$K(t, x; X_1, X_2) = \inf_{x = x_1 + x_2} \left[\|x_1\|_{X_1} + t\,\|x_2\|_{X_2}\right].$$

我们注意到，对于 $\Omega = \mathbb{R}^n$ 或 $\mathbb{R}_+$, $p \in [1, \infty)$，$L_p(\Omega)$ 和 $L_\infty(\Omega)$ 是相容的，且都连续嵌入到赋予依测度收敛拓扑的 Hausdorff拓扑空间 $M(\Omega)$ 中。于是有

$$K(t, f; L_p(\Omega), L_\infty(\Omega)) \simeq \left[\int_0^{t^p} f^*(s)^p ds\right]^{1/p}, \ t > 0,$$

$f \in (L_p + L_\infty)(\Omega)$。

按照上述记号，1.3中的不等式 [JT71] 可写为

$$K\left(t, (\hat{f})^*; L_2(\mathbb{R}_+), L_\infty(\mathbb{R}_+)\right) \le K\left(t, C^{\frac{1}{2}} U f^*; L_2(\mathbb{R}_+), L_\infty(\mathbb{R}_+)\right). \tag{2.7}$$

定义 2.2. 若巴拿赫空间 Y 介于 X_1 和 X_2 之间，则

$$X_1 \cap X_2 \hookrightarrow Y \hookrightarrow X_1 + X_2.$$

定义 2.3. 设巴拿赫空间 Y 介于相容空间 X_1 和 X_2 之间。若对于给定的 x、$y \in X_1 + X_2$，满足

$$K(t, x; X_1, X_2) \leq K(t, y; X_1, X_2), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2.8}$$

若有 $y \in Y$，则推出 $x \in Y$和 $\|x\|_Y \leq \|y\|_Y$。

Lorentz-Shimogaki 在 [LS71 中的结果（定理 2 和引理 3] ）断言， $L_p(\Omega)$ 与 $L_\infty(\Omega)$ 之间的重排不变插值空间，恰好是该情形下的单调空间。此外，不等式（2.7）是（2.8）的特例。因此，对于介于 $L_\rho(\mathbb{R}^n)$ 与 $L_2(\mathbb{R}^n)$ 之间的 $L_\infty(\mathbb{R}^n)$，有

$$\begin{aligned}\rho(|\hat{f}|) = \bar{\rho}\left((\hat{f})^*\right) &\leq C^{\frac{1}{2}}\bar{\rho}(Uf^*)\\ &\leq MC^{\frac{1}{2}}\bar{\sigma}(f^*)\\ &= MC^{\frac{1}{2}}\sigma(f),\end{aligned}$$

只要 $M_+(\mathbb{R}^n)$ 上的重排不变范数 ρ 和 σ 满足

$$\bar{\rho}(Uf^*) \leq M\,\bar{\sigma}(f^*), \quad f \in M_+(\mathbb{R}^n). \tag{2.9}$$

3. Proof of Theorem 1.1

令 $f \in (L_1 \cap L_\sigma)(\mathbb{R}^n)$ 满足 $f(x) = g(|x|)$，$x \in \mathbb{R}^n$，其中 $g \downarrow$ 定义在 $\mathbb{R}_+$ 上。记 B_r 为 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为中心、半径为 $r > 0$ 的球。设 $r_n = r_n(t) = (\nu_n t)^{-1/n}$，$t \in \mathbb{R}_+$,$\nu_n = |B_1| = \pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma(\frac{n}{2}+1)$。

Now,

$$\widehat{\chi_{B_r}}(\xi) = r^n \frac{J_{\frac{n}{2}}(2\pi r|\xi|)}{(r|\xi|)^{\frac{n}{2}}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $J_{\frac{n}{2}}$ 是阶数为 $\frac{n}{2}$ 的第一类贝塞尔函数。

因此，取上述的 f、t 和 r_n，我们有

$$\begin{aligned}(Uf^*)(t) = \int_0^{1/t} f^* = \int_{B_{r_n}} f &= (4r_n)^n \int_{B_{1/4}} f(4r_n y)dy\\ &\leq (4r_n)^n C_n \int_{B_{1/4}} \widetilde{J_{\frac{n}{2}}}(2\pi|y|)^2 f(4r_n y)dy\\ &\leq (4r_n)^n C_n \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{J_{\frac{n}{2}}}(2\pi|y|)^2 f(4r_n y)dy,\end{aligned}$$

这里，$\widetilde{J_{\frac{n}{2}}}(s) = \underline{\quad}^{J_{\frac{n}{2}}}(s)\, s^{\frac{n}{2}}$、$s \in \mathbb{R}_+$。最后一项等于

$$\begin{aligned}
&4^n C_n \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\left(\widetilde{J_{\frac{n}{2}}}(2\pi\cdot)\right)^2}(\xi)\hat{f}(\tfrac{\xi}{4r_n})\,d\xi \\
&= 4^n(2\pi)^{-n} C_n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\chi_{B_1} * \chi_{B_1}\right)(\xi)\hat{f}(\tfrac{\xi}{4r_n})\,d\xi \\
&\le (\tfrac{\pi}{2})^{-n} C_n \int_{2B_1} \left|\hat{f}(\tfrac{\xi}{4r_n})\right| d\xi \\
&= (\tfrac{8}{\pi})^n C_n\, r_n^n \int_{|\xi|\le (2\,r_n)^{-1}} \left|\hat{f}(\xi)\right| d\xi, \\
&\le (\tfrac{8}{\pi})^n C_n\, r_n^n \int_0^{2^{-n}\nu_n^2 t} (\hat{f})^* \\
&= (\tfrac{8}{\pi})^n \frac{C_n}{\nu_n}\frac{1}{t}\int_0^{2^{-n}\nu_n^2 t} (\hat{f})^* \\
&\le C_n' \frac{1}{t}\int_0^t (\hat{f})^*,
\end{aligned}$$

即，

$$\int_0^{t^{-1}} f^* \le C_n' \frac{1}{t}\int_0^t (\hat{f})^*,$$

其中 $C_n' = (\frac{8}{\pi})^n \frac{C_n}{\nu_n}$最大。

因此，

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}(Uf^*) &\le C_n'\,\bar{\rho}\left(\frac{1}{t}\int_0^t (\hat{f})^*\right) \\
&\le C_n'\,\bar{\rho}\left((\hat{f})^*\right), \quad \text{by (1.6)}, \\
&= C_n'\,\rho(\hat{f}) \\
&\le C\,C_n'\,\sigma(f), \quad \text{by assumption}, \\
&= C\,C_n'\,\bar{\sigma}(f^*).
\end{aligned}$$

由于，对于 $g \in M_+(\mathbb{R}_+)$，

$$Ug \le U\left(g^*\right),$$

我们得到

$$\bar{\rho}(Ug) \le \bar{\rho}\left(Ug^*\right) \le C\bar{\sigma}(g). \quad \square$$

4. $\mathscr{F}$ BETWEEN R.I. SPACES

定理 4.1. 设 ρ 和 σ 是定义在 $M_+(\mathbb{R}^n)$ 上的重排不变范数$\bar{\rho}$ 和 $\bar{\sigma}$，它们分别由重排不变范数 $M_+(\mathbb{R}_+)$确定。假设 $L_{\bar{\rho}}(\mathbb{R}_+)$是 $L_2(\mathbb{R}_+)$ 与 $L_\infty(\mathbb{R}_+)$之间的插值空间1.6式成立。于是，

$$\rho(|\hat{f}|) \le C\sigma(f), \quad f \in (L_\sigma \cap L_1)(\mathbb{R}^n),$$

当且仅当

$$\bar{\rho}(Ug) \le C\bar{\sigma}(g), \quad g \in L_{\bar{\sigma}}(\mathbb{R}_+).$$

证明。只有当的部分是定理 1.1的内容。另一方面，当的部分已在第 2 节末尾证明。$\square$

Boyd 在 [Bo67，第 92-98] 将每个重排不变范数 ρ 定义在 $M_+(\Omega)$ 上，并为每个 $p>1$ 定义泛函

$$\rho^{(p)}(f)=\rho(f^p)^{\frac{1}{p}},\quad f\in M_+(\Omega). \tag{4.1}$$

他证明了 $\rho^{(p)}$ 是 $M_+(\Omega)$ 上的重排不变范数，并且（1.6）在 $\rho=\rho^{(p)}$下成立。

定理 4.2。设 ρ 是 $M_+(\Omega)$上的重排不变范数。对于固定的 $p>1$，定义 $\rho^{(p)}$ 如下（*4.1*）。那么，$L_{\rho^{(p)}}(\Omega)$是 $L_p(\Omega)$ 与 $L_\infty(\Omega)$之间的插值空间。

证明。设线性算子 T 满足

$$T:L_p(\Omega)\to L_p(\Omega)\quad\text{and}\quad T:L_\infty(\Omega)\to L_\infty(\Omega).$$

于是，根据 [BS88，定理 1.11，第 301–304], 页，存在 $C>0$，使得

$$\int_0^t(Tf)^*(s)^pds\le C\int_0^t f^*(s)^pds,\quad f\in(L_p+L_\infty)(\Omega),\ t\in\mathbb{R}_+. \tag{4.2}$$

利用 $\bar\rho$ 的 HLP 原理可得

$$\begin{aligned}\rho\left((Tf)^p\right)&=\bar\rho\left([(Tf)^*]^p\right)\\&\le C\bar\rho\left([f^*]^p\right)\\&=C\rho\left(|f|^p\right),\quad f\in L_{\rho^{(p)}}(\Omega),\end{aligned}$$

因此

$$\rho^{(p)}(Tf)\le C\rho^{(p)}(f),\quad f\in L_{\rho^{(p)}}(\Omega).$$

□

定理 4.3. 设 ρ 和 σ 是 $M_+(\mathbb{R}^n)$上的重排不变范数，分别由 $M_+(\mathbb{R}_+)$上的重排不变范数$\bar\rho$和 $\bar\sigma$通过 $\rho(f)=\bar\rho(f^*)$ 以及 $\sigma(f)=\bar\sigma(f^*)$，$f\in M_+(\mathbb{R}^n)$确定。那么，

$$\rho^{(2)}(\hat f)\le C\sigma(f),\quad f\in(L_\sigma\cap L_1)(\mathbb{R}^n),$$

当且仅当

$$\overline{\rho^{(2)}}(Ug)\le C\bar\sigma(g),\quad g\in M_+(\mathbb{R}_+).$$

证明。该结论是定理 4.1 和定理 4.2的推论。□

现在设 μ是 $M_+(\mathbb{R}_+)$上的一个重排不变范数，满足 $\mu\left(\frac{1}{1+t}\right)<\infty$。记 X_μ为所有满足以下条件的 $x\in X_1+X_2$ 的集合

$$\rho_\mu(x)=\mu\left(\frac{K(t,x;X_1,X_2)}{t}\right)<\infty.$$

那么，带有范数 ρ_μ 的 X_μ 是 X_1 与 X_2之间的一个插值空间。

众所周知，对于 $f\in(L_p+L_\infty)(\Omega)$，$p\ge1$ 有

$$K(t,f;L_p(\Omega),L_\infty(\Omega))\simeq\left[\int_0^{t^p}f^*(s)^pds\right]^{1/p},t>0,$$

因此，空间 $X_{\rho_{\mu,p}}$配备范数

$$\rho_{\mu,p}(f)=\overline{\rho_{\mu,p}}(f^*)=\bar\mu\left(t^{-1}\left[\int_0^{t^p}f^*(s)^pds\right]^{1/p}\right),\quad f\in M_+(\Omega),$$

是 $L_p(\Omega)$ 与 $L_\infty(\Omega)$ 之间的插值空间。鉴于此，定理 4.1 保证

定理 4.4. 设 μ 和 σ 是 $M_+(\mathbb{R}^n)$ 上的重排不变范数，分别由 $M_+(\mathbb{R}_+)$ 上的重排不变范数 $\bar{\mu}$ 和 $\bar{\sigma}$ 确定。假设 $\mu\left(\frac{1}{1+t}\right) < \infty$。令

$$\rho_{\mu,2}(f) = \overline{\rho_{\mu,2}}(f^*) = \bar{\mu}\left(t^{-1}\left[\int_0^{t^2} f^*(s)^2 ds\right]^{1/2}\right).$$

那么，

$$\rho_{\mu,2}(\hat{f}) \le C\sigma(f), \quad f \in (L_\sigma \cap L_1)(\mathbb{R}^n),$$

当且仅当

$$\overline{\rho_{\mu,2}}(Ug) \le C\bar{\sigma}(g), \quad g \in M_+(\mathbb{R}_+).$$

最后，考虑由 $\bar{\rho}$ 在 $M_+(\mathbb{R}_+)$ 上的重排不变范数所确定的 ρ 在 $M_+(\mathbb{R}^n)$ 上的重排不变范数，并令

$$\rho_U(f) := (\bar{\rho}\circ U)(f^*) = \bar{\rho}(Uf^*), \quad f \in M_+(\mathbb{R}^n).$$

对于所有 $t > 0$，ρ_U 是 ρ 在 $\chi_{(0,t)}$ 上的一个重排不变范数，当且仅当 $< \infty$，或者等价地，$\bar{\rho}\left(\frac{1}{1+t}\right) < \infty$。在这种情况下，$L_{\bar{\rho}\circ U}(\mathbb{R}_+)$ 是在映射 $L_{\bar{\rho}}(\mathbb{R}_+)$ 的所有重排不变空间中最大的一个。

基于以上背景，我们现在有

定理 4.5. 设 ρ 是定义在 $M_+(\mathbb{R}^n)$ 上的重排不变范数，该范数由定义在 $M_+(\mathbb{R}_+)$ 上的重排不变范数 $\bar{\rho}$ 给出，且

$$\bar{\rho}\left(\frac{1}{1+t}\right) < \infty.$$

假设 $L_{\bar{\rho}}(\mathbb{R}_+)$ 是介于 $L_2(\mathbb{R}_+)$ 与 $L_\infty(\mathbb{R}_+)$ 之间的插值空间，则 $L_{\rho_U}(\mathbb{R}^n)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上、可通过 $\mathscr{F}$ 映射到 $L_\rho(\mathbb{R}^n)$ 的函数所构成的最大重排不变空间。

5. $\mathscr{F}$ in the context of Orlicz spaces

Orlicz 仪范数可用一个 N-函数表示

$$\Phi(x) = \int_0^x \phi, \quad x \in \mathbb{R}_+;$$

其中，ϕ 是将 $\mathbb{R}_+$ 映射到自身的一个非递减函数。具体而言，仪范数 ρ_Φ 在 $f \in M_+(\Omega)$ 上定义为

$$\rho_\Phi(f) = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{f(x)}{\lambda}\right) \le 1\right\},$$

可以证明 $\rho_\Phi(f) = \bar{\rho}_\Phi(f^*)$，因此 Orlicz 空间

$$L_\Phi(\Omega) = \{f \in M(\Omega) : \rho_\Phi(|f|) < \infty\}$$

是一个重排不变空间。

关于 Orlicz 空间之间 $\mathscr{F}$ 的经典著作出自 Jodiet 和 Torchinsky。特别参见 [JT71，定理 2.16]。该定理断言，若 A 和 B 是 N-函数，满足$L_A(\mathbb{R}^n) \subset (L_1 + L_2)(\mathbb{R}^n)$、$L_B(\mathbb{R}^n) \subset (L_2 + L_\infty)(\mathbb{R}^n)$，且 $\mathscr{F}\colon L_A(\mathbb{R}^n) \to L_B(\mathbb{R}^n)$，则存在 N-函数 A_1 和 B_1，满足 $L_{A_1}(\mathbb{R}^n) \supset L_A(\mathbb{R}^n)$ 以及 $L_{B_1}(\mathbb{R}^n) \subset L_B(\mathbb{R}^n)$，并且有 $\mathscr{F}\colon L_{A_1}(\mathbb{R}^n) \to L_{B_1}(\mathbb{R}^n)$。此外，$B_1(t) = 1/\tilde{A}_1(t^{-1})$，$A_1(t)/t^2 \downarrow$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上，因此 $B_1(t)/t^2 \uparrow$ 在 $\mathbb{R}_+$ 上。（函数 $\tilde{A}_1$ 可通过方程 $\tilde{A}_1^{-1}(t) = A_1^{-1}(t)\,t \in \mathbb{R}_+$ 来定义。）

利用前几节的结果，我们现在证明 $L_{A_1}(\mathbb{R}_+)$ 是 $L_1(\mathbb{R}_+)$ 与 $L_2(\mathbb{R}_+)$ 之间的插值空间，而 $L_{B_1}(\mathbb{R}_+)$ 是 $L_2(\mathbb{R}_+)$ 与$L_\infty(\mathbb{R}_+)$ 之间的插值空间。

首先，我们注意到 $B_1(t)/t^2 \uparrow$ 等价于 $B_1(t) = \Phi(t^2)$，其中某个函数 N-Φ。事实上，给定后者，有 $B_1(t)/t^2 = \Phi(t^2)/t^2 \uparrow$ 于 $\mathbb{R}_+$。同样，$B_1(t)/t^2 \uparrow$ 意味着

$B_1(t^{1/2})/t\uparrow$，因此 $\Phi(t) = B_1(t^{1/2})$——这等价于一个导数为$B_1(t^{1/2})/t$ 的函数 N——满足 $B_1(t) = \Phi(t^2)$。接下来，

$$\rho_\Phi^{(2)}(f) = \rho_\Phi(f^2)^{\frac{1}{2}} = \rho_{B_1}(f).$$

根据定理4.2，于是，

$$\rho_{B_1}(|Tf|) = \rho_2(|Tf|) \le C\rho_2(f) = C\rho_{B_1}(f),$$

也就是说，

$$\rho_{B_1}(|Tf|) \le C\rho_{B_1}(f), \quad f \in L_{B_1}(\mathbb{R}^n),$$

只要 T 是满足 $T\colon L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ 和 $T\colon L_\infty(\mathbb{R}^n) \to L_\infty(\mathbb{R}^n)$ 的线性算子。因此，$L_{B_1}(\mathbb{R}^n)$ 是 $L_2(\mathbb{R}^n)$ 与 $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ 之间的插值空间。

现在，$B_1(t) = 1/\tilde{A}_1(t^{-1})$ 等价于 $\tilde{A}_1(t) = 1/B_1(t^{-1})$，由此 $\tilde{A}_1(t)/t^2 = (t^{-1})^2/B_1(t^{-1})$，因此 $B_1(t)/t^2\uparrow$ 相当于 $\tilde{A}_1(t)/t^2\uparrow$，也就是说，$L_{\tilde{A}_1}(\mathbb{R}^n)$ 是 $L_2(\mathbb{R}^n)$ 与 $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ 之间的插值空间。由于 $L_{\tilde{A}_1}(\mathbb{R}^n)$ 是 $L_{A_1}(\mathbb{R}^n)$ 的柯特对偶，我们得出 $L_{A_1}(\mathbb{R}^n)$ 是 $L_1(\mathbb{R}^n)$ 与 $L_2(\mathbb{R}^n)$ 之间的插值空间。

A_1 和 B_1 的单调性条件可转化为它们相应基本函数的条件。例如，$L_{B_1}(\mathbb{R}^n)$的基本函数为 $\phi_{B_1}(t) = \rho_{B_1}\left(\chi_{(0,t)}\right) = 1/B_1^{-1}(t^{-1})$，$t \in \mathbb{R}_+$。因此，在 $\phi_{B_1}(t)\,t^{1/2} = B_1^{-1}(t^{-1})t^{1/2}$ 中令 $t = 1/B_1(y)$，可得 $\left(\frac{B_1(y)}{y^2}\right)^{1/2}$；它随 y 增大而~~增大，因此随 t减小，~~从而 $\phi_{B_1}(t)\,t^{1/2}$ ~~$\downarrow$~~。

最后，我们指出，$L_{A_1}(\mathbb{R}^n)$并不是 $\mathscr{F}$ 映入 $L_{B_1}(\mathbb{R}^n)$的最大重排不变空间；该空间的范数为 $\rho_{B_1}(Uf^*)$。在Lebesgue 背景下，例如，若 $B_1(t) = t^{p'}$，则 $1 < p < 2$，

$$\rho_{p'}(Uf^*) = \left[\int_{\mathbb{R}_+} (Uf^*)(t)^{p'}\,dt\right]^{1/p'} \simeq \left[\int_{\mathbb{R}_+} \left[t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right]^{p'} \frac{dt}{t}\right]^{1/p'},$$

这就是所谓的 Lorentz 范数 $\rho_{p,p'}$。该范数小于 $\rho_{A_1} = \rho_{p_\circ}$。更多详情请参见下一节。

6. $\mathscr{F}$ between Lorentz Gamma spaces

本节中，我们使用由以下方式定义的算子 P 和 Q

$$(Pf)(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f \quad \text{and} \quad (Qg)(t) = \int_t^\infty g(s)\frac{ds}{s}, \quad f, g \in M_+(\mathbb{R}_+),\ t \in \mathbb{R}_+.$$

这些算子满足以下等式

$$\int_{\mathbb{R}_+} g\,Pf = \int_{\mathbb{R}_+} f\,Qg, \quad f, g \in M_+(\mathbb{R}_+),$$

and

$$PQ = QP = P + Q.$$

固定 $p, q \in (1, \infty)$ 以及 $u, v \in M_+(\mathbb{R}_+)$。洛伦兹伽马空间 $\Gamma_{p,u}(\Omega)$ 定义为

$$\Gamma_{p,u}(\Omega) = \left\{ f \in M(\Omega) : \rho_{p,u}(f) = \left(\int_{\mathbb{R}_+} f^{**}(t)^p\,u(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

以类似方式定义$\Gamma_{q,v}(\Omega)$。

为了保证对所有 $E \subset \Omega$ $|E| < \infty$ 均有 $\rho_{p,u}(\chi_E)$ $\rho_{q,v}(\chi_E) < \infty$

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{u(t)}{(1+t)^p}dt, \quad \int_{\mathbb{R}_+} \frac{v(t)}{(1+t)^q}dt < \infty. \tag{6.1}$$

本节研究这个不等式

$$\rho_{p,u}(\hat{f}) \le C\,\rho_{q,v}(f), \quad f \in (L_1 \cap \Gamma_{q,v})(\mathbb{R}^n). \tag{6.2}$$

我们先假设$\Gamma_{p,\ u}(\mathbb{R}_+)$是 $L_2(\mathbb{R}_+)$与 $L_\infty(\mathbb{R}_+)$之间的插值空间，随后在本节中讨论何时满足这一条件。

回顾一下，定理 1.1 保证 (6.2.) 成立当且仅当

$$\bar{\rho}_{p,u}(Uf^*) \le C\bar{\rho}_{q,v}(f^*), \quad f \in M_+(\mathbb{R}_+). \tag{6.3}$$

定理 6.1. 设指标 p, q以及权函数 u, v如上所述。则在$\Gamma_{p,\ u}(\mathbb{R}_+)$是 $L_2(\mathbb{R}_+)$与 $L_\infty(\mathbb{R}_+)$之间的插值空间这一条件下，(6.2) 成立当且仅当

$$\bar{\rho}_{q',v'}(g^{**}) \le C\bar{\rho}_{p',u_{p'}}(g^*), \quad g \in M_+(\mathbb{R}_+). \tag{6.4}$$

其中，照例，$p' = \frac{p}{p-1}$, $q' = \frac{q}{q-1}$, $\int_{\mathbb{R}_+} v = \infty$,

$$v'(t) = \frac{t^{q'+q-1}\int_0^t v \int_t^\infty v(s)s^{-q}ds}{\left[\int_0^t v + t^q \int_t^\infty v(s)s^{-q}ds\right]^{q'+1}}$$

$$u_p(t) = u(t^{-1})t^{p-2}, \quad \int_{\mathbb{R}_+} u_p = \infty,$$

and

$$u_p{}'(t) = \frac{t^{p'+p-1}\int_0^t u_p \int_t^\infty u_p(s)s^{-p}ds}{\left[\int_0^t u_p + t^p \int_t^\infty u_p(s)s^{-p}ds\right]^{p'+1}}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

证明。不等式 (6.3) 表明，由重排不变范数 $\bar{\rho}_{p,\ u}(Uf^*)$ 确定的空间，是经由 $U.$ 映入 $\Gamma_{p,\ u}(\mathbb{R}_+)$ 的最大空间。现在，

$$\bar{\rho}_{p,u}(Uf^*) = \left[\int_{\mathbb{R}_+} P(Uf^*)(t)^p u(t)\,dt\right]^{\frac{1}{p}},$$

$$\begin{aligned}
P\left(Uf^*\right)(t) &= t^{-1}\int_0^t \int_0^{s^{-1}} f^*(y)dy\,ds \\
&= t^{-1}\int_{t^{-1}}^\infty \int_0^s f^*(y)dy\,\frac{ds}{s^2} \\
&= t^{-1}\int_{t^{-1}}^\infty \frac{1}{s}\int_0^s f^*(y)\,dy\frac{ds}{s} \\
&= t^{-1}\left[t\int_0^{t^{-1}} f^* + \int_{t^{-1}}^\infty f^*(y)\frac{dy}{y}\right] \\
&= \int_0^{t^{-1}} f^* + t^{-1}\int_{t^{-1}}^\infty f^*(y)\frac{dy}{y} \\
&= t^{-1}(Pf^*)(t^{-1}) + t^{-1}(Qf^*)(t^{-1}) \\
&= t^{-1}\left[(P+Q)f^*\right](t^{-1}) \\
&= t^{-1}\left(P(Qf^*)\right)(t^{-1})
\end{aligned}$$

此外，

$$\int_{\mathbb{R}_+}\left[t^{-1}\left(P(Qf^*)\right)(t^{-1})\right]^p u(t)dt = \int_{\mathbb{R}_+}\left[t\left(P(Qf^*)\right)(t)\right]^p u(t^{-1})t^{-2}dt.$$

我们已经证明，

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_{p,u}(Uf^*) &= \left[\int_{\mathbb{R}_+} \left(P(Qf^*)\right)(t)^p u_p(t)dt\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \bar{\rho}_{p,u_p}(Qf^*).\end{aligned}$$

因此，任何由 U 映射到 $\Gamma_{p,\ u}(\mathbb{R}_+)$ 的 $\Gamma_{q,\ v}(\mathbb{R}_+)$ 都必须嵌入这个最大的定义域；也就是说，

$$\bar{\rho}_{p,u_p}(Qf^*) \le C\bar{\rho}_{q,v}(f^*), \quad f \in M_+(\mathbb{R}_+). \tag{6.5}$$

但是（6.5）与（6.4）等价，后者是其对偶不等式，因此（6.5）可以在任意 $f \in M_+$（$\mathbb{R}_+$），上检验，正如

$$\int_{\mathbb{R}_+} g^*Qf = \int_{\mathbb{R}_+} fPg^* \le \int_{\mathbb{R}_+} f^*Pg^* = \int_{\mathbb{R}_+} g^*Qf^*.$$

□

不等式（6.4），因而（6.2），等价于

$$\left[\int_{\mathbb{R}_+} (Ph)^{q'} v'\right]^{\frac{1}{q'}} \le C\left[\int_{\mathbb{R}_+} h^{p'} {u_p}'\right]^{\frac{1}{p'}}, \tag{6.6}$$

其中 $h = g^{**}$ 属于

$$\Omega_{0,1}(\mathbb{R}_+) = \{h \in M_+(\mathbb{R}_+) : h(t)\downarrow \text{ and } t\,h(t)\uparrow \text{on } \mathbb{R}_+\}.$$

GK[GK14] 证明，这类不等式等价于一对涉及一般非负可测函数的加权范数不等式。对于（6.6），这将得到

定理 6.2。 设指标 p， q和权函数 u， v如定理 *6.1*所述。那么，(6.6) 成立当且仅当

$$\left[\int_{\mathbb{R}_+} [(P+Q)g]^{q'} v'\right]^{\frac{1}{q'}} \le C\left[\int_{\mathbb{R}_+} g^{p'} {u_p}^{1-p'}\right]^{\frac{1}{p'}} \tag{6.7}$$

and

$$\left[\int_{\mathbb{R}_+} (P^2g)^{q'} v'\right]^{\frac{1}{q'}} \le C\left[\int_{\mathbb{R}_+} g^{p'} {u_p}^{1-p'}\right]^{\frac{1}{p'}}$$

$g \in M_+(\mathbb{R}_+)$。

证明。 根据 [GK14], 中的定理 4.4，(6.6) 成立当且仅当

$$\left[\int_{\mathbb{R}_+} [(P+Q)Qg]^p u_p\right]^{\frac{1}{p}} \le C\left[\int_{\mathbb{R}_+} g^q {v'}^{1-q}\right]^{\frac{1}{q}}$$

and

$$\left[\int_{\mathbb{R}_+} [P(P+Q)g]^{q'} v'\right]^{\frac{1}{q'}} \le C\left[\int_{\mathbb{R}_+} g^{p'} {u_p}^{1-p'}\right]^{\frac{1}{p'}}$$

$g \in M_+(\mathbb{R}_+)$。

这就是一对对偶不等式。我们选择第二个，它很容易化简为 (6.7)。

□

为了处理这种情况 $q \le p$，我们将使用以下由定理 1.7 和 4.1 组合而成的结果的特殊情形，出自 [BK94]。

定理 6.3。考虑 $K(x,y) \in M_+(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+)$，对于固定的 $y \in \mathbb{R}_+$，它关于 x 递增；对于固定的 $x \in \mathbb{R}_+$，它关于 y 递减；此外，它还满足增长条件

$$K(x,y) \le K(x,z) + K(z,y), \quad 0 < y < z < x.$$

设 t、u、v 和 w 是定义在 $\mathbb{R}_+$ 上的非负可测（权）函数，并假设 $\Phi_1(x) = \int_0^x \phi_1$ 和 $\Phi_2(x) = \int_0^x \phi_2$ 是 N-函数，其互补函数分别为 $\Psi_1(x) = \int_0^x {\phi_1}^{-1}$ 和 $\Psi_2(x) = \int_0^x {\phi_2}^{-1}$，且 $\Phi_1 \circ {\Phi_2}^{-1}$ 是凸的。那么存在 $c > 0$，使得

$$\Phi_1^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \Phi_1\left(cw(x)\int_0^x K(x,y)f(y)dy\right)t(x)dx\right) \le \Phi_2^{-1}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \Phi_2\left(u(y)f(y)\right)v(y)dy\right),$$

$f \in M_+(\mathbb{R}_+)$，当且仅当

$$\int_0^x \frac{K(x,y)}{u(y)} {\phi_2}^{-1}\left(\frac{c\alpha(\lambda,x)K(x,y)}{\lambda u(y)v(y)}\right)dy \le c^{-1}\lambda$$

and

$$\int_0^x \frac{1}{u(y)} \phi_2^{-1}\left(\frac{c\beta(\lambda,x)}{\lambda u(y)v(y)}\right)dy \le c^{-1}\lambda,$$

其中

$$\alpha(\lambda,x) = \Phi_2 \circ {\Phi_1}^{-1}\left(\int_x^\infty \Phi_1\left(\lambda w(y)\right)t(y)dy\right)$$

and

$$\beta(\lambda,x) = \Phi_2 \circ {\Phi_1}^{-1}\left(\int_x^\infty \Phi_1\left(\lambda w(y)K(y,x)\right)t(y)dy\right).$$

定理 6.4。设 p，q，u，u'，u_p，v，v' 均如定理 *6.1*中所述，且 $1 < q \le p < \infty$。那么，已知 $\Gamma_{p,\ u}(\mathbb{R}_+)$ 是 $L_2(\mathbb{R}_+)$ 与 $L_\infty(\mathbb{R}_+)$之间的插值空间，则 (6.2)成立当且仅当

(1)

$$\left(\int_0^x u_p(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^\infty v'(y)y^{-q'}dy\right)^{\frac{1}{q'}} \le C$$

(2)

$$\left(\int_0^x v'(y)dy\right)^{\frac{1}{q'}}\left(\int_x^\infty u_p(y)y^{-p}dy\right)^{\frac{1}{p}} \le C$$

(3)

$$\left(\int_0^x \left(\log\frac{x}{y}\right)^p u_p(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^\infty v'(y)y^{-q'}dy\right)^{\frac{1}{q'}} \le C$$

(4)

$$\left(\int_0^x u_p(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^\infty v'(y)\left(\frac{1}{y}\log\frac{y}{x}\right)^{q'}dy\right)^{\frac{1}{q'}} \le C$$

事实上，(*1*) 和 (*3*) 可以合并为

$$\left(\int_0^\infty \left(\log\left(1+\frac{x}{y}\right)\right)^p u_p(y)dy\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_x^\infty v'(y)y^{-q'}dy\right)^{\frac{1}{q'}} \le C$$

证明。 (6.7) 中的第一个不等式等价于

$$\left[\int_{\mathbb{R}_+}(Pg)^{q'}v'\right]^{\frac{1}{q'}}\leq C\left[\int_{\mathbb{R}_+}g^{p'}u_p^{1-p'}\right]^{\frac{1}{p'}}$$

and

$$\left[\int_{\mathbb{R}_+}(Qg)^{q'}v'\right]^{\frac{1}{q'}}\leq C\left[\int_{\mathbb{R}_+}g^{p'}u_p^{1-p'}\right]^{\frac{1}{p'}},g\in M_+(\mathbb{R}_+),$$

后一个不等式由对偶性可知等价于

$$\left[\int_{\mathbb{R}_+}(Pf)^{p}u_p\right]^{\frac{1}{p}}\leq C\left[\int_{\mathbb{R}_+}f^{q}v'^{1-q}\right]^{\frac{1}{q}},f\in M_+(\mathbb{R}_+).$$

我们用涉及.....的（6.7）中的第二个不等式来说明证明方法

$$(P^2g)(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\log\left(\frac{x}{y}\right)g(y)dy.$$

因此，在定理 6.3 中取 $K(x,y)=\log_+\frac{x}{y}$, $\Phi_1(x)=x^{q'}$, $\Phi_2(x)=x^{p'}$(注意，$(\Phi_1\circ{\Phi_2}^{-1})(x)=x^{\frac{q'}{p'}}$, 当 $q\leq p$ 时它是凸的)，$w(y)=y^{-1}$, $t(y)=v'(y)$，$u(y)=u_p(y)^{-1}$,$v(y)=u_p(y)$，即可得到

$$\alpha(\lambda,x)=\lambda^{p'}\left(\int_x^\infty v'(y)y^{-q'}dy\right)^{\frac{p'}{q'}}$$

and

$$\beta(\lambda,x)=\lambda^{p'}\left(\int_x^\infty v'(y)\left(y^{-1}\log\frac{y}{x}\right)^{q'}dy\right)^{\frac{p'}{q'}}$$

由此可得定理 6.3 中的条件3）和（4）。我们指出， λ 会抵消。

□

当.....时，不等式（6.2）更容易处理

$$\rho_{p,u}(f)\simeq\lambda_{p,u}(f)=\left(\int_{\mathbb{R}_+}f^*(t)^p\,u(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}},\tag{6.8}$$

这种等价关系并不少见，正如我们将在本节后文看到的。事实上，给定 (6.8),

$$\begin{aligned}\rho_{p,u}(Uf^*)&=\left(\int_{\mathbb{R}_+}\left(Uf^*\right)(t)^p\,u(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\left(\int_{\mathbb{R}_+}f^{**}(t)^p\,u_p(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\rho_{p,u_p}(f).\end{aligned}$$

因此我们有

定理 6.5。 设 p, q, u, u_p 和 v 如定理 *6.1*中所述。于是，在 Γ_p 的条件下，$u(\mathbb{R}_+)$是 $L_2(\mathbb{R}_+)$ 与 $L_\infty(\mathbb{R}_+)$之间的插值空间，其中ρ_p, u 满足 (*6.8*)，则有

$$\rho_{p,u_p}(\hat{f})\leq C\rho_{p,v}(f).\tag{6.9}$$

此外，没有本质上更大的重排不变范数可以替代 ρ_p, u_p 在（*6.9*）中。

最后，有一个相对简单的条件足以保证（6.2）。它源自对不等式（6.5）的研究，涉及伸缩算子 E_s 作为从$\Gamma_{q,\ v}(\mathbb{R}_+)$ 到 $\Gamma_{p,\ u_p}(\mathbb{R}_+)$ 的映射的范数，即，

$$h(\Gamma_{q,v},\Gamma_{p,u_p})(t)=\inf\left\{M>0:\bar{\rho}_{p,u_p}(f(ts))=\bar{\rho}_{p,u_p}\left((E_tf)(s)\right)\leq M\bar{\rho}_{q,v}(f)<\infty\right\}.$$

定理 4.1 的证明中的论证 [KS21] 保证了（6.5），条件是

$$\int_1^\infty h(\Gamma_{q,v},\Gamma_{p,u_p})(t)\,\frac{dt}{t}<\infty.$$

同样， [GK14] 中定理 5.2 的证明中的论证得出

$$h(\Gamma_{q,v},\Gamma_{p,u_p})(t)=\sup_{s>0}\frac{\left[\int_0^{s/t}u_p+(s/t)^p\int_{s/t}^\infty u_p(y)y^{-p}dy\right]^{\frac{1}{p}}}{\left[\int_0^s v+s^q\int_s^\infty v(y)y^{-q}dy\right]^{\frac{1}{q}}},$$

当 $1<q\leq p<\infty$.

总之，我们有

定理 6.6。 设 p， q， u， u_p 和 v 如定理 *6.1*中所述，且 $1<q\leq p<\infty$。那么，给定 $\Gamma_{p,\ u}$（$\mathbb{R}_+$）是介于 L_2（$\mathbb{R}_+$）和 L_∞（$\mathbb{R}_+$），则有（*6.9*），条件是

$$\int_1^\infty\sup_{s>0}\frac{\left[\int_0^{s/t}u_p+(s/t)^p\int_{s/t}^\infty u_p(y)y^{-p}dy\right]^{\frac{1}{p}}}{\left[\int_0^s v+s^q\int_s^\infty v(y)y^{-q}dy\right]^{\frac{1}{q}}}\frac{dt}{t}<\infty.$$

证明。根据前面的讨论可知，结果成立，因为当$\Gamma_{p,\ u}(\mathbb{R}_+)$ 是 $L_2(\mathbb{R}_+)$ 与 $L_\infty(\mathbb{R}_+)$ 之间的插值空间时，(6.9) 和 (6.5) 等价。

□

现在我们来考察何时$X=\Gamma_{p,\ u}(\mathbb{R}_+)$ 是 $L_2(\mathbb{R}_+)$ 与 $L_\infty(\mathbb{R}_+)$ 之间的插值空间。

对于 $p\in[2,\infty)$，一个简单的充要条件见

定理 6.7。 固定 $p\in[2,\infty)$，并假设 $u\in M_+(\mathbb{R}_+)$ 满足 $\int_{\mathbb{R}_+}\frac{u}{(t)\,(1+t)^{p/2}}dt<\infty$。那么，$\Gamma_{p,\ u}(\mathbb{R}_+)$ 与 $L^{(2)}_{\rho_{p/2}\ ,\ u}(\mathbb{R}_+)$ 作为集合相等（因此前者是 $L_2(\mathbb{R}_+)$ 与 $L_\infty(\mathbb{R}_+)$ 之间的插值空间），当且仅当

$$t^{p/2}\int_t^\infty u(s)\frac{ds}{s^{p/2}}\leq C\int_0^t u,\quad t\in\mathbb{R}_+. \tag{6.10}$$

证明。 条件（6.10）是

$$\rho_{p/2,u}(f^*)\simeq\lambda_{p/2,u}(f^*)=\left[\int_{\mathbb{R}_+}f^*(t)^{\frac{p}{2}}u(t)dt\right]^{\frac{2}{p}},\quad f\in M_+(\mathbb{R}_+).$$

将 $f^*(t)$ 替换为 $f^*(t)^2$,，这一等价关系便得出

$$\begin{aligned}\rho^{(2)}_{p/2,u}(f^*) &= \left[\int_{\mathbb{R}_+}\left(t^{-1}\int_0^t f^*(s)^2 ds\right)^{\frac{p}{2}} u(t)\,dt\right]^{\frac{2}{p}\cdot\frac{1}{2}}\\ &\simeq \left[\int_{\mathbb{R}_+}(f^*(t)^2)^{\frac{p}{2}}\,u(t)\,dt\right]^{\frac{1}{p}}\\ &= \left[\int_{\mathbb{R}_+} f^*(t)^p\,u(t)\,dt\right]^{\frac{1}{p}}\\ &= \lambda_{p,u}(f^*).\end{aligned}$$

但是，（6.10）意味着

$$t^p\int_t^\infty u(s)\frac{ds}{s^p} = \int_t^\infty u(s)\left(\frac{t}{s}\right)^p ds \le \int_t^\infty u(s)\left(\frac{t}{s}\right)^{\frac{p}{2}} ds \le C\int_0^t u, \quad t\in\mathbb{R}_+,$$

因此

$$\lambda_{p,u}(f^*)\simeq\rho_{p,u}(f^*), \quad f\in M_+(\mathbb{R}_+).$$

我们得出 $\Gamma_{p,\,u}(\mathbb{R}_+) = L_{\rho^{(2)}_{p/2,\,u}}(\mathbb{R}_+)$ 作为集合相等。 □

在下文定理 6.9 的证明中，我们需要 R. Sharpley 在 [S72，引理 3.1，推论 32] 中以下结果的一个推论

定理 6.8. 设 ρ 是 $M_+(\mathbb{R}^n)$ 上的重排不变范数。假设 $L_{\bar\rho}(\mathbb{R}_+)$ 的基本指标位于 (0,1) 内。给定 $p\in(1,\infty)$，令 $u_p(t) = \bar\rho(\chi_{(0,t)})_t^{\,p}$，$t\in\mathbb{R}_+$。那么，$\bar\rho_{p,\,u_p}\left(\chi_{(0,t)}\right) = \bar\rho\left(\chi_{(0,t)}\right), t\in\mathbb{R}_+$。此外，

$$\bar\rho_{p,u_p}(f^*)\simeq\lambda_{p,u_p}(f^*), \quad f\in M_+(\mathbb{R}_+).$$

推论 6.8.1. 设 $\rho=\rho_{p,u}$ 如定理 *6.8* 中所述。则，$\rho=\rho_{p,u_p}$，其中 $u_p(t) = \bar\rho(\chi_{(0,t)})_t^{\,p}, t\in\mathbb{R}_+$。

证明。空间 $\Gamma_{p,u}(\mathbb{R}^n)$ 和 $\Gamma_{p,u_p}(\mathbb{R}^n)$ 具有 $\bar\rho_{p,u_p}\left(\chi_{(0,t)}\right) = \bar\rho_{p,u}\left(\chi_{(0,t)}\right)$, $t\in\mathbb{R}_+$。因此，根据 [GK14，定理 51]，这些空间相同。 □

定理 6.9. 固定 $p\in[2,\infty)$ 和 $u\in M_+(\mathbb{R}_+)$，其中 $\int_{R_+} {}^{u}(t)\,(1+t)^p\,dt<\infty$。假设 $\Gamma_{p,u}(\mathbb{R}^n)$ 的基本指标属于 (0,1)。那么，$\Gamma_{p,u}(\mathbb{R}^n)$ 是 $L_p(\mathbb{R}^n)$ 和 $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ 之间的插值空间（因而也是 $L_2(\mathbb{R}^n)$ 和 $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ 之间的插值空间），当且仅当

$$\sup_{s\ge t}\frac{\bar\rho_{p,u}\left(\chi_{(0,s)}\right)^p}{s} \le C\,\frac{\bar\rho_{p,u}\left(\chi_{(0,t)}\right)^p}{t}, \tag{6.11}$$

其中某个 $C>0$ 与 $t\in\mathbb{R}_+$ 无关。

证明。首先假设 $p=2$。给定 $T:\ L_2(\mathbb{R}^n)+L_\infty(\mathbb{R}^n)\to L_2(\mathbb{R}^n)+L_\infty(\mathbb{R}^n)$，根据 [BS88，定理 1.11，第 301] 页，以及 [H70]，

$$\int_0^t (Tf)^*(s)^2 ds \le C'M_2^2\int_0^{Mt} f^*(s)^2 ds = C'M_2M_\infty\int_0^t f^*(Ms)^2 ds,$$

$f \in (L_2 + L_\infty)(\mathbb{R}_+)$，其中 $M = M_\infty/M_2$，M_k 是 T 在 $L_k(\mathbb{R}_+)$ 上的范数，$k = 2,\ \infty$。由（6.11），HLP 得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+} (Tf)^*(t)^2 \frac{\bar\rho_{2,u}\left(\chi_{(0,t)}\right)^2}{t} dt &\le \int_{\mathbb{R}_+} (Tf)^*(t)^2 \sup_{s\ge t} \frac{\bar\rho_{2,u}\left(\chi_{(0,s)}\right)^2}{s} dt \\ &\le C' M_2 M_\infty \int_{\mathbb{R}_+} f^*(Mt)^2 \sup_{s\ge t} \frac{\bar\rho_{2,u}\left(\chi_{(0,s)}\right)^2}{s} dt \\ &\le CC' M_2 M_\infty \int_{\mathbb{R}_+} f^*(Mt)^2 \frac{\bar\rho_{2,u}\left(\chi_{(0,t)}\right)^2}{t} dt,\end{aligned}$$

$f \in (L_2 + L_\infty)(\mathbb{R}_+)$。定理 6.8 现在保证后者等价于

$$\int_{\mathbb{R}_+} (Tf)^{**}(t)^2 \frac{\bar\rho_{2,u}\left(\chi_{(0,t)}\right)^2}{t} dt \le CC' M_2 M_\infty h(M)^2 \int_{\mathbb{R}_+} f^{**}(t)^2 \frac{\bar\rho_{2,u}\left(\chi_{(0,t)}\right)^2}{t} dt,$$

其中 $h(t)$ 是伸缩算子 E_t 在 $\Gamma_{2,\ u_2}(\mathbb{R}_+) = \Gamma_{2,\ u}(\mathbb{R}_+)$、$u_2(s) = \bar\rho_{2,\ u}(\chi_{(0,s)}{}^2)$ 的范数；根据推论 6.8.1，即 $T : \Gamma_{2,\ u}(\mathbb{R}^n) \to \Gamma_{2,\ u}(\mathbb{R}^n)$。因此，$\Gamma_{2,\ u}(\mathbb{R}^n)$ 介于 $L_2(\mathbb{R}^n)$ 和 $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ 之间。

接下来，假设 $p > 2$。在这种情况下，如果我们能够证明（6.11）蕴含（6.10），那么定理的“若”部分便得证，其中 $u(t) = \frac{\bar\rho_{p,\ u}(\chi_{(0,t)}{}^p)}{t}$。但是，

$$\begin{aligned}t^{p/2} \int_t^\infty \frac{\bar\rho_{p,u}\left(\chi_{(0,s)}\right)^p}{s} \frac{ds}{s^{p/2}} &\le t^{p/2} \int_t^\infty \sup_{y\ge s} \frac{\bar\rho_{p,u}\left(\chi_{(0,y)}\right)^p}{y} \frac{ds}{s^{p/2}} \\ &\le t^{p/2} \sup_{y\ge t} \frac{\bar\rho_{p,u}\left(\chi_{(0,y)}\right)^p}{y} \int_t^\infty \frac{ds}{s^{p/2}} \\ &\le C\, t \frac{\bar\rho_{p,u}\left(\chi_{(0,t)}\right)^p}{t} \\ &\le C^2 \int_0^t \frac{\bar\rho_{p,u}\left(\chi_{(0,s)}\right)^p}{s} ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.\end{aligned}$$

“若”部分的证明至此完成。

至于“仅若”部分，我们将借助 L. Maligranda 的一个结果 [M85]，该结果断言，若 $L_\rho(\mathbb{R}^n)$ 是 $L_p(\mathbb{R}^n)$ 与 $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ 之间的一个插值空间，则

$$\frac{\bar\rho(\chi_{(0,s)})}{\bar\rho(\chi_{(0,t)})} \le C \max\left[\left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{p}}, 1\right]. \tag{6.12}$$

事实上，对于 $t \le s$，式(6.12) 给出

$$\frac{\bar\rho(\chi_{(0,s)})}{\bar\rho(\chi_{(0,t)})} \le C \left(\frac{s}{t}\right)^{\frac{1}{p}}$$

or

$$\frac{\bar\rho(\chi_{(0,s)})^p}{s} \le C \frac{\bar\rho(\chi_{(0,t)})^p}{t},$$

由此可得式(6.11)。 □

到目前为止，洛伦兹伽马值域范数一直等价于如下形式的泛函

$$\lambda_{p,u}(f) = \left[\int_{\mathbb{R}_+} f^*(s)^p u(t) dt\right]^{\frac{1}{p}}.$$

对于下面定理 ρ_{2p}中，u 的情形则未必如此。6.11

引理 6.10。取 $p \in (1,\infty)$ 和 $u \in M_+(\mathbb{R}_+)$，其中

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{u(t)}{(1+t)^p} dt < \infty.$$

那么，

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} f^{**}(t)^p\, u(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{\mathbb{R}_+} f^{*}(t)^p\, u^{(p)}(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in M_+(\mathbb{R}_+), \tag{6.13}$$

其中

$$u^{(p)}(t) = pt^{p-1}\int_t^\infty u(s)s^{-p}ds, \quad t \in \mathbb{R}_+;$$

此外，$u^{(p)}$ 是使（*6.13*）成立的本质上最小的权函数。

证明。文献 [N91] 中证明了

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} f^{**}(t)^p\, u(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{\mathbb{R}_+} f^{*}(t)^p\, v(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in M_+(\mathbb{R}_+),$$

当且仅当

$$\int_0^t u(s)ds + t^p\int_t^\infty u(s)s^{-p}ds \le C\int_0^t v, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

But,

$$\begin{aligned}
\int_0^t u^{(p)}(s)ds &= \int_0^t p\, s^{p-1}\int_s^\infty u(y)y^{-p}dy\, ds \\
&= \int_0^t p\, s^{p-1}\int_s^t u(y)y^{-p}dy\, ds + \left[\int_0^t p\, s^{p-1}ds\right]\left[\int_t^\infty u(s)s^{-p}ds\right] \\
&= \int_0^t \left(\int_0^y p\, s^{p-1}ds\right) u(y)y^{-p}dy + t^p\int_t^\infty u(s)s^{-p}ds \\
&= \int_0^t u + t^p\int_t^\infty u(s)s^{-p}ds.
\end{aligned}$$

我们得出

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} f^{**}(t)^p\, u(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_{\mathbb{R}_+} f^{*}(t)^p\, u^{(p)}(t)\, dt\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in M_+(\mathbb{R}_+).$$

□

定理 6.11。设 p 和 u 如引理 *6.10*中所述。那么，

$$\rho_{2p,u}(\widehat{f}) = \bar{\rho}_{2p,u}((\widehat{f})^*) \le C\bar{\rho}_{2p,u_{2p}^{(p)}}(f^*) = \rho_{2p,u_{2p}^{(p)}}(f),$$

其中

$$u_{2p}^{(p)}(t) = u^{(p)}(t^{-1})\, t^{2p-2} = p(t^{-1})^{p-1}\int_{t^{-1}}^\infty u(s)s^{-p}ds\, t^{2p-2} = pt^{p-1}\int_{t^{-1}}^\infty u(s)s^{-p}ds.$$

证明。将（4.1）中的构造应用于（6.13）中的泛函，得到

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+}\left(t^{-1}\int_0^t f^*(s)^2ds\right)^p u(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2p}} \le \left(\int_{\mathbb{R}_+} f^*(t)^{2p}\, u^{(p)}(t)\, dt\right)^{\frac{1}{2p}} = \lambda_{2p,u^{(p)}}(f)$$

再次，

$$\left(t^{-1}\int_0^t f^*(s)ds\right)^{2p} \le \left(t^{-1}\int_0^t f^*(s)^2ds\right)^p$$

由 H¨older 不等式得出。

因此，

$$\begin{aligned}\rho_{2p,u}(\widehat{f}) &\le \rho_{p,u}(\widehat{f}^{\,2})^{1/2}\\ &\le C\rho_{p,u}((Uf^*)^2)^{1/2}\\ &\le C\lambda_{2p,u^{(p)}}(Uf^*)\\ &= C\left(\int_{\mathbb{R}_+}(Uf^*)(t)^{2p}\,u^{(p)}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2p}}\\ &= C\left(\int_{\mathbb{R}_+}f^{**}(t)^{2p}\,u_{2p}^{(p)}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2p}}\\ &= C\rho_{2p,u_{2p}^{(p)}}(f).\end{aligned}$$

□

例 6.1。固定 p, $1<p<\infty$，并令

$$u(t)=\begin{cases}t^{2p-1}\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-\alpha}, & 0<t<1,\\ t^{p-1-\alpha}, & t>1,\end{cases}$$

当……时 我 $0<\alpha<1$。于是， p 和 u 满足引理 6.10 的条件。此外，

$$\rho_{2p,u}(f)\not\simeq\lambda_{2p,u}(f),\quad f\in M_+(\mathbb{R}_+),$$

或者，等价地，

$$t^{2p}\int_t^\infty u(s)s^{-2p}ds\le C\int_0^t u,\quad t\in\mathbb{R}_+, \tag{6.14}$$

并不成立。事实上，(6.14) 的左端等于 Ct^{2p} (对数 $\frac{1}{t}$)$^{-\alpha+1}$，而右端为

$$\int_0^t u=\int_0^t s^{2p-1}\left(\log\tfrac{1}{s}\right)^{-\alpha}\simeq t^{2p}\left(\log\tfrac{1}{t}\right)^{-\alpha},\quad 0<t<1,$$

鉴于洛必达法则。(6.14)中左侧与右侧之比本质上是 $\log\frac{1}{t}$ 其中 $\to\infty$ 当 $t\to 0^+$。

7. Other work

本文所讨论以外的傅里叶变换相关不等式包括加权勒贝格不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}(x)\,u(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)\,v(x)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

和加权洛伦兹不等式

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+}(\hat{f}\,)^*(t)^q\,u(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\int_{\mathbb{R}_+}\left(\int_0^{1/t}f^*\right)^p v(t)\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

关于这些不等式的论文简要综述，从Benedetto-Heinig的开创性工作[BH03] 到G. Sinnamon [S03] 以及Rastegari-Sinnamon [RS18], 的研究，见Nursultanov-Tikhonov的论文[NT20] 。

References

[BH03] Benedetto, J.J., Heinig, H.P.：加权傅里叶不等式：新证明与推广。J. Fourier Anal. Appl. 9 (1), 1-37 (2003) [BK94] Bloom, S., Kerman, R.：哈代型算子的加权 L_Φ 积分不等式。Studia Math. 110 (1), 381-394 (1994) [Bo67] Boyd, D.W.：重排不变巴拿赫空间上的希尔伯特变换。学位论文。92-98 (1967) [Bo69] Boyd, D.W.：函数空间的指标及其与插值的关系。Canad. J. Math. 21 (121), 1245-1251 (1969) [BS88] Bennett C., Sharpley, R.：算子插值。纯数学与应用数学，Academic Press Inc., Boston, MA (1988)。[GK14] Gogatishvili, A., Kerman, R.：重排不变空间$\Gamma_{p,\phi}$。Positivity. 43 (2), 93-123 (2014) [H70] Holmstedt, T.：拟范数空间的插值。Mathematica Scandinavica. 26 (1), 177-199 (1970) [JT71] Jodeit, M., Torchinsky, A.：傅里叶变换不等式。Studia Math. 37 (3), 245-276 (1971) [KS21] Kerman, R., Spektor, S.：正积分算子的Orlicz-Lorentz规范泛函不等式。Bull. Sci. Math. 173, 103056 (2021) [LS71] Lorentz, G. G., Shimogaki, T.：空间对(L^p, L^∞)和(L^1, L^q)的插值定理。Trans. Amer. Math. Soc. 159, 207-221 (1971) [M85] Maligranda, L.，指标与插值。Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 234 (1985) [N91] Neugebauer, C. J.：单调函数平均算子的加权范数不等式。Publi. Mat. 35 (2), 429-447 (1991) [NT20] Nursultanov, E., Tikhonov, S.：Lebesgue空间和Lorentz空间中的加权傅里叶不等式。J. Fourier Anal. Appl. 26 (4), 57 (2020) [P02] Pinsky, M.A.：傅里叶分析与小波导论。Books / Cole, Pacific Grove, CA (2002)。[RS18] Rastegari, J., Sinnamon, G.：通过重排得到的加权傅里叶不等式。J. Fourier Anal. Appl. 24 (5), 1225-1248-29 (2018) [S72] Sharpley, R.：空间 $\Lambda_\alpha(X)$与插值。J. Funct. Anal. 11 (4), 479-513 (1972) [S03] Sinnamon, G.：加权Lorentz空间中的傅里叶变换。Publ. Mat. 47 (1), 3-29 (2003)

Ron Kerman: Department of Mathematics, Brock University, St. Catharines, Ontario, L2S 3A1, Canada*Email address*: rkerman@brocku.caRama Rawat: Department of Mathematics and Statistics, Indian Institute of Technology, Kanpur

-

208016*Email address*: rrawat@iitk.ac.inRajesh K. Singh : Department of Mathematics, Indian Institute of Science, Bangalore-560012,

Karnataka

,

India.*Email address*: rajeshsingh@iisc.ac.in