arXiv:2303.07331v1 [nlin.SI] 13 Mar 2023

关于完整 Kostant-Toda 层级及其针对 ℓ 带约化的 A、B 和 G 型李代数

YUJI KODAMA[1] 和谢元成[2]

Abstract. 本文研究 Hessenberg 形式下完整 Kostant-Toda（f-KT）层级的解，以及将其约化为 ℓ 带 Kostant-Toda（ℓ-KT）层级。我们还基于适当的 Chevalley 系统，通过根空间约化研究单李代数 A、B 和 G 型上的 f-KT 层级及相应的 ℓ-KT 层级。此外，还给出了关于 τ 函数的多项式解的显式公式，这些公式用 Schur 函数和 Schur 的 Q函数表示。

Contents

1. 引言 1
2. 全 Kostant–Toda 格 3. Δ_N(t) 的 Schur 展开 4
4. ℓ-KT 层级 5. 单李代数上的 f-KT 层级 6
5. A 型的 f-KT 层级 7
6. B 型的 f-KT 层级 8
7. G 型的 f-KT 层级 8
附录 A. 完整 Kostant-Toda 层级 11
附录 B. Q-Schur 函数 14
参考文献 17

1. Introduction

本文研究 Hessenberg 形式下全 Kostant-Toda（f-KT）层级的约化与有理解。在过去五十年里，已有多篇文献（参见 [KS18、Tom13]）研究了标准记号下半单李代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b}_+$ 上的经典三对角 Toda 格和全 Kostant–Toda 格（参见 [KS18]）。这些系统可分别视为对偶空间 $\mathfrak{b}_+^*$内最小和最大辛叶上的 Toda 流（参见 [GS99]）。研究其他所有辛叶上的 Toda 流是很自然的，不过，介于三对角 Toda 格与全 Kostant–Toda 格之间的中间 Toda 格在文献中鲜有提及（参见 [Nan82、DSV15]）。本文的主要目标之一，是基于根空间分解 [KY96]，对具有 Hessenberg 形式带状结构的特殊中间 Toda 格给出清晰的刻画。然而，Hessenberg 矩阵的几何性质自然引出了本项目的另一个动机，下面我们将对此作出说明。

设 X 是一个线性映射 X $: \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^M$和 $h : \{1, 2, \ldots, M\} \to \{1, 2, \ldots, M\}$ 一个非递减函数，满足 ng$h(i) \geq i$ 对 $1 \leq i \leq M$。该 与 X 和 h 相关的 Hessenberg 簇定义为

$$\mathrm{Hess}(\mathsf{X}, h) := \{V_\bullet \in Fl(\mathbb{C}^M) \mid \mathsf{X}V_i \subseteq V_{h(i)} \text{ for all } 1 \leq i \leq M\},$$

其中 $Fl(\mathbb{C}^M)$ 是 $\mathbb{C}^M$的完全旗簇，由 $\mathbb{C}^M$ 的线性子空间序列 $V_\bullet = (V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_M = \mathbb{C}^M)$ 组成，且对 $1 \leq i \leq M$，有 dim $V_i = i$ 。以下两个 Hessenberg簇的例子在此尤其相关。考虑与正则幂零矩阵相关联的 $\mathbb{C}^M$ 上的线性映射

$$\mathsf{N} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Date: 2023年3月14日。

对于 $h=(M,M,\dots,M)$，Hess(N h) 就是旗簇 $Fl(\mathbb{C}^M)$ 本身；而对于 $h=(2,3,4,\dots,M,M)$，Hess(N h) 就是所谓的 Peterson簇。这两个簇分别与最大和最小的 Hessenberg函数相关联（关于 Hessenberg簇的更多信息，参见 [AH20] 及其中的参考文献）。

将 f-KT 层级与 Hessenberg簇的故事并列来看，很难相信这些美妙的事物之间并不存在深刻而本质的联系。事实上，Peterson簇还可以用以下方式定义（参见 [Bal17]）。令 $SL_M(\mathbb{C})^{\mathrm{N}}$为 N 在 $SL_M(\mathbb{C})$ 中的中心化子，其中 N 是式（1.1）中定义的幂零矩阵，那么 Peterson簇就是旗簇的以下 $M-1$ 维子簇

$$\overline{SL_M(\mathbb{C})^{\mathrm{N}}\cdot\mathfrak{b}_-}\subset SL_M(\mathbb{C})/\mathcal{B}^-,$$

其中 B^- 是下三角矩阵构成的 Borel子群，且 $\mathfrak{b}_-$ =Lie(B^-)。从这个定义或许不难看出，Peterson簇恰由旗簇中那些以三对角Toda层级的有理解为参数的点组成（参见 [FH91] 及下文）。这种对应实际上可用于研究 Peterson簇的几何。举例来说，我们注意到，在 [FH91]（定理 2.5）中，Flaschka 和 Haine 在 Toda格的框架下实质上证明了 Peterson簇与 Bruhat 胞腔相交，其中这些胞腔对应于由关于垂直于某个单根子集的超平面的反射所生成的最长魏尔群元素；而这一事实直到后来才由 Harada 和 Tymoczko 在 Hessenberg簇的框架下证明，见 [HT17]（命题 5.8）。

正如我们在 [Xie22b] 中也证明的那样，f-KT 层级的有理解与相应旗簇中的点之间存在一一对应关系，因此我们自然会预期，f-KT 层级的子层级与旗簇的子Hessenberg簇之间也存在更精确的对应关系，并利用其中一方的结果来增进对另一方的认识。[AC19, AB21], 中已经进行过这方面的初步尝试，而本文的 modest 目标是通过研究带状 f-KT 层级的解，在 f-KT 层级这一方向上略微推进相关研究，同时将对这种精确对应关系的探究留待未来发表。

f-KT 层级可以定义在任意半单李代数上（参见 [GS99, KO23, Xie22b]），而我们将范围限制在 Hessenberg 形式 Lax 矩阵（其中包括类型为 A,B,C,G 等的李代数）上的一个直接原因是

$$L=\sum_{i=1}^{M-1}E_{i,i+1}+\sum_{1\le j\le i\le M}a_{i,j}(\mathbf{t})E_{i,j}$$

也就是说，所有矩阵元 $a_{i,\,j}$(t) 都可以简洁地表示为 τ-函数，其中 t $=(t_1,t_2,\dots)$。令 Δ_N(t) 表示矩阵 exp($\Theta_{L(\mathbf{0})}$(t)) 的第 N 个顺序主子式，

$$\Delta_N(\mathbf{t}):=[\exp(\Theta_{L(\mathbf{0})}(\mathbf{t}))]_N\qquad\text{for}\quad N=1,2,\dots,M, \tag{1.2}$$

∞其中 $\Theta_{L(\mathbf{0})}(\mathbf{t}):=\sum_{n=1}(L(0))^n t_n$。于是我们有如下命题（命题 4.1）：

定理1.1. f-KT 层级的元素 $a_{i,\,j}$(t) 可以表示为

$$a_{i,j}(\mathbf{t})=\frac{p_{i-j+1}(\tilde{D})\Delta_j(\mathbf{t})\circ\Delta_{i-1}(\mathbf{t})}{\Delta_j(\mathbf{t})\Delta_{i-1}(\mathbf{t})}\qquad for\quad 1\le j\le i\le M, \tag{1.3}$$

˜其中 D 定义为

$$\tilde{D}:=\left(D_1,\frac{1}{2}D_2,\frac{1}{3}D_3,\dots\right)\qquad with\qquad D_nf\circ g=\left(\frac{\partial}{\partial t_n}-\frac{\partial}{\partial t_n'}\right)f(\mathbf{t})g(\mathbf{t}')\Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{t}'}.$$

特别地，我们有

$$a_{N,N}(\mathbf{t})=\frac{\partial}{\partial t_1}\ln\frac{\Delta_N(\mathbf{t})}{\Delta_{N-1}(\mathbf{t})},\qquad 1\le N\le M. \tag{1.4}$$

对于定义在半单李代数上的 f-KT 层级，矩阵元实际上都可以表示为 $a_{N,\,N}$ 及其导数的多项式，因此也可以用 τ-函数表示（命题 5.3）；但一般而言，我们没有类似于 (1.3) 的简洁公式。公式 (1.3) 是 [AvM99] 针对离散 KP 层级，借助顶点算子形式体系推导得出的；我们则基于等谱变形法 [KY96]，在附录 A 中为 f-KT 层级给出一个初等证明。

ℓ带 Kostant-Toda（ℓ-KT）层级是受如下条件约束的 f-KT 层级：Lax 矩阵 L 中低于第 ℓ 条对角线的次对角线元素均为零。该条件与 Toda 流相容，即如果初始条件 $L(0)$ 是 ℓ 带的，那么在 Toda 流作用下，对所有 t $\neq\mathbf{0}$，它始终保持 ℓ 带。注意，对于 ℓ-KT 层级，第 ℓ 条对角线上的元素可以直接积分（命题 4.2）：

命题 1.2。$a_{i,j}$ ℓ-KT 层级第 ℓ 条对角线上的元素为

$$a_{k+\ell,k}(\mathbf{t}) = a^0_{k+\ell,k}\frac{\Delta_{k+\ell}(\mathbf{t})\Delta_{k-1}(\mathbf{t})}{\Delta_{k+\ell-1}(\mathbf{t})\Delta_k(\mathbf{t})} \qquad for \quad 1 \le k \le M-\ell, \tag{1.5}$$

其中 $a^0_{k+\ell,\ k}$ 是一个常数。

将 (1.3) 与 (1.5) 进行比较，我们得到关于双线性关系的 ℓ-KT 层级的第一个刻画，

$$p_{\ell+1}(\tilde{D})\Delta_k \circ \Delta_{k+\ell-1}(\mathbf{t}) = a^0_{k+\ell,k}\Delta_{k+\ell}(\mathbf{t})\Delta_{k-1}(\mathbf{t}) \qquad \text{for} \quad 1 \le k \le M-\ell. \tag{1.6}$$

当 $\ell = 1$ 时，我们得到原始三对角 Toda 格（1-KT 格）的双线性方程，

$$p_2(\tilde{D})\Delta_k \circ \Delta_k = \frac{1}{2}D_1^2\Delta_k \circ \Delta_k = \Delta_k\partial_1^2\Delta_k - (\partial_1\Delta_k)^2 = a^0_{k+1,k}\Delta_{k+1}\Delta_{k-1}.$$

对 ℓ-KT 层级的第二个刻画是基于其解的奇异结构，即复解可能到达哪些 Bruhat 胞腔。注意，当 Toda 流变得奇异并在时刻 $\mathbf{t}_*$ 到达舒伯特胞腔的边界时，我们有

$$\exp(\Theta_{L(0)}(\mathbf{t}_*)) = n_*\dot{w}_*b_* \qquad \text{for some} \quad w_* \in \mathfrak{S}_M, \tag{1.7}$$

其中 $n_* \in \mathbf{N}^-$, $b_* \in \mathbf{B}^+$，且 $\dot{w}_* \in GL_M$ 是 $w_* \in \mathfrak{S}_M$ 的一个代表元，$w_* \in \mathfrak{S}_M$ 是阶为 M 的对称群。令 $\mathbf{t} \to \mathbf{t} + \mathbf{t}_*$，则在 $\mathbf{t}_*$ 附近，τ-函数有如下展开（定理 3.1）：

定理 1.3。τ-函数 $\Delta_N(\mathbf{t}; w_*)$ 有如下舒尔展开，

$$\Delta_N(\mathbf{t}; w_*) = S_\lambda(\mathbf{t}) + \sum_{\mu \supset \lambda} c_\mu S_\mu(\mathbf{t}),$$

其中 $S_\lambda(t)$ 是与杨图 λ 相关联的舒尔多项式，而该杨图由 w_* 如下确定：设 $\{i_1, i_2, \dots, i_N\}$ 定义为

$$\{i_1, i_2, \dots, i_N\} = \{w_*(1), w_*(2), \dots, w_*(N)\},$$

其中 $i_1 < i_2 < \cdots < i_N$。则杨图 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ 定义为

$$\lambda_k = i_k - k \qquad for \qquad 1 \le k \le N.$$

我们的第二个刻画限制了 ℓ-KT 层级的解可能命中的 Bruhat 胞腔；等价地，下面的定理 1.4 展示了如何在旗簇中紧化对应于 ℓ-KT 层级的辛叶（命题 4.3）：

定理 1.4。设 w_* 是 $\mathfrak{S}_M$ 中满足以下条件的一个元素，

(a) 对任意 $k > \ell$，$w_*(i) \ne w_*(i+k) + 1$；且

(b) 对某个 $1 \le i \le M-\ell$，存在关系式，

$$w_*(i) = w_*(i+\ell) + 1.$$

于是，相应的 τ 函数给出了 ℓ-KT 层级的一个解；也就是说，对于每个满足 $\ell+1 \le m \le M-1$ 的 m，Lax 矩阵 L 中的元素 $a_{i,\ j}$ 满足

$$a_{m+k,k}(\mathbf{t}) = 0 \qquad for \qquad 1 \le k \le M-m,$$

并且 $a_{\ell+k,\ k}(\mathbf{t}) \ne 0$，其中某个 $1 \le k \le M-\ell$。

当 $\ell = 1$ 时，我们便得到 [FH91] 在 $\mathfrak{g}$ 李代数的 A 型中的经典结果；前文已针对三对角 KT 格提及这一结果。

接下来，我们将上述方法应用于定义在 A、B、G 型单李代数上的 f-KT 层级，并明确给出切瓦利基和根空间分解，从而将相应的 Lax 矩阵化为 Hessenberg 形式。我们还将它们的魏尔群嵌入对称群 $\mathfrak{S}_M$，以便应用 ℓ-KT 层级的第二种刻画。当 $L(0)$ 为幂零时，τ 函数成为 $\mathbf{t}$ 的多项式。我们构造了 A、B 和 G 型 f-KT 层级的所有多项式解。

值得一提的是，类型 B 中的最后一个 τ-函数具有 Pfaffian 结构（定理 7.4、命题 7.5、命题 7.8、命题 7.9）：

定理 1.5。与 w_* 相关的 τ-函数，记作 $\tau_n^B(\mathbf{t}_B; w_*)$，由下式给出

$$\tau_n^B(\mathbf{t}_B, w_*) = \sqrt{\Delta_n(\mathbf{t}_B)} = \sum_{r\in\mathfrak{N}_B} \phi_r(\mathbf{t}_B)\eta_r(\xi; w_*),$$

其中，$\mathfrak{N}_B \cong \mathbb{Z}_2^n$是 B 型魏尔群 $\mathfrak{W}_B = \mathfrak{S}_n \ltimes \mathbb{Z}_2^n$ 的正规子群。系数 $(\eta_r(\xi; w_*))_{r\in\mathfrak{N}_B}$构成一个旋量，而 $\phi_r(\mathbf{t}_B)$ 是指数函数。对于有理解，$\phi_r(\mathbf{t}_B)$ 由 Q-舒尔多项式给出。

由于 G_2 型李代数可嵌入 B_3 型李代数中，因此 Pfaffian 结构也存在于 G_2 的 τ-函数中。

本文其余部分安排如下。第 2 节中，我们以 Hessenberg 形式介绍主要研究对象 f-KT 层级及其 τ-函数。第 3 节中，我们给出 τ-函数 $\Delta_N(\mathbf{t})$ 的 Schur 展开。第 4 节中，我们给出 Hessenberg 形式下 ℓ-KT 层级的两种刻画。第 5 节中，我们在单李代数上定义 f-KT 层级及其 τ-函数，并介绍它们的一些基本性质。第 6、7 和 8 节中，我们选取合适的切瓦利基，将 A、B、G 型 f-KT 层级写成 Hessenberg 形式，并研究其解，尤其是有理解及其带状结构。

2. The full Kostant-Toda lattice

完整的 Kostant-Toda（f-KT）格最早由 [EFS93], 引入，其形式如下：

$$\frac{dL}{dt} = [(L)_{\geq 0}, L], \tag{2.1}$$

其中，Lax 矩阵 L 是 $M\times M$ Hessenberg 矩阵，

$$L = \sum_{i=1}^{M-1} E_{i,i+1} + \sum_{1\leq j\leq i\leq M} a_{i,j}E_{i,j} \tag{2.2}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{M-1,1} & a_{M-1,2} & \cdots & \cdots & 1 \\ a_{M,1} & a_{M,2} & \cdots & \cdots & a_{M,M} \end{pmatrix},$$

而 $(L)_{\geq 0}$ 表示 L 的弱上三角部分。$E_{i,\,j}$ 是由以下方式定义的矩阵集合的标准基：$M\times M$

$$E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{1\leq k,l\leq M}.$$

就元素 $a_{i,\,j} = a_{i,\,j}(t)$而言，f-KT 格由以下方程组定义：

$$\frac{da_{\ell+k,k}}{dt} = a_{\ell+k+1,k} - a_{\ell+k,k-1} + (a_{\ell+k,\ell+k} - a_{k,k})a_{\ell+k,k} \tag{2.3}$$

对于 $k = 1$, ..., $M-\ell$ 和 $\ell = 0$, 1, ..., $M-1$。这里我们约定，若 $j = 0$ 或 $i = M+1$，则 $a_{i,\,j} = 0$。注意，指标 ℓ 表示矩阵 L 的第 ℓ 条次对角线，即 $\ell = 0$ 对应对角元素 $a_{k,\,k}$，而 $\ell = 1$ 对应第一条次对角线上的元素 $a_{k+1,\,k}$，依此类推。

f-KT 层级由 Chevalley 不变量 $I_k = \frac{1}{k+1}\mathrm{tr}(L^{k+1})$（其中 $k = 1$, ..., $M-1$）生成的 f-KT 格的对称变换组成（参见 [KS18]）。每个对称变换由以下方程给出

$$\frac{\partial L}{\partial t_k} = [(L^k)_{\geq 0}, L], \qquad \text{for} \quad k = 1, 2, \ldots, M-1. \tag{2.4}$$

在本文中，我们形式化地使用一组无穷多个对称变换，其流参数记为 $\mathbf{t} := (t_1, t_2, \ldots)$。我们将所有形如 (2.4) 的对称变换组成的集合称为 f-KT 格层级，或简称 f-KT 层级。

2.1. 矩阵分解与 f-KT 格的 τ-函数。为求得 f-KT 格的解 $L(t)$ 关于初始矩阵 $L(0)$ 的表达式，通常考虑矩阵 $\exp(tL(0))$ 的 LU分解（高斯分解）：

$$\exp(tL(0)) = u(t)b(t) \qquad \text{with} \quad u(t)\in\mathcal{N}^-,\ b(t)\in\mathcal{B}^+. \tag{2.5}$$

其中，N^- 是对角线上元素均为 1 的下三角矩阵集合，B^+ 是可逆上三角矩阵集合。注意，$u(0) = b(0) = I$，即单位矩阵。众所周知且易于证明，当且仅当所有顺序主子式均非零时，这种分解才存在。在此假设下，令 $\Delta_N(t)$ 表示第 N 个顺序主子式，即矩阵 $\exp(tL(0))$ 的 $N\times N$ 左上角子矩阵的行列式，

$$\Delta_N(t) := [\exp(tL(0))]_N \qquad \text{for} \quad N = 1, 2, \ldots, M. \tag{2.6}$$

令 $b(t) = h(t)n(t)$ 表示该分解，其中 $h(t)$ 是对角矩阵，而 $n(t) \in \mathsf{N}^+$ 是一个幺正上三角M矩阵。于是，写作 $h(t) = \exp(\sum_{i=1} c_i(t)E_{i,\,i})$，我们有

$$\Delta_N(t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} c_i(t)\right), \quad \text{which gives} \quad c_N(t) = \ln \frac{\Delta_N(t)}{\Delta_{N-1}(t)}. \tag{2.7}$$

如下所述，该公式为表达 f-KT格的解提供了关键。

利用分解 (2.5)，我们首先得到以下结果（参见 [Sym82]，该文讨论了原始 Toda格）。

命题 2.1. 方程 (2.1) 的解 $L(t)$ 为

$$L(t) = u^{-1}(t)L(0)u(t) = b(t)L(0)b(t)^{-1}. \tag{2.8}$$

证明. 对 (2.5) 求导，得到

$$\frac{d}{dt}\exp(tL(0)) = L(0)ub = ubL(0) = \dot{u}b + u\dot{b},$$

其中，$\dot{x}$ 表示 $x(t)$的导数。该方程也可以写成

$$u^{-1}L(0)u = bL(0)b^{-1} = u^{-1}\dot{u} + \dot{b}b^{-1}.$$

~ ~ ~我们将其记为 L，并证明 $L = L$。利用 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b}_+$，我们将 L 分解为

$$u^{-1}\dot{u} = (\tilde{L})_{<0} \qquad \text{and} \qquad \dot{b}b^{-1} = (\tilde{L})_{\geq 0}. \tag{2.9}$$

为证明 $\tilde{L} = L$，我们首先证明 $\tilde{L}$ 也满足f-KT格。对 $\tilde{L} = bL(0)b^{-1}$求导，得到

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} = \dot{b}b^{-1}\tilde{L} - \tilde{L}\dot{b}b^{-1} = [\dot{b}b^{-1}, \tilde{L}] = [(\tilde{L})_{\geq 0}, \tilde{L}].$$

这里我们用到了$\frac{d}{dt}b^{-1} = -b^{-1}\dot{b}b^{-1}$。由于 $\tilde{L}(0) = L(0)$，也就是说初始数据相同，微分方程的唯一性定理~表明 $L(t) = L(t)$。证明完毕。 □

我们还得到了 $L(t)$的对角元素的显式公式。

命题2.2. 矩阵 $L = L(t)$的对角元素可表示为

$$a_{N,N}(t) = \frac{d}{dt}\ln\frac{\Delta_N(t)}{\Delta_{N-1}(t)}, \qquad 1 \leq N \leq M, \tag{2.10}$$

其中 $\Delta_N(t) = [\exp(tL(0))]_N$ 在(2.6)中定义。

证明。首先回顾命题 2.1 的证明可知，$\dot{b}b^{-1} = (L)_{\geq 0}$，即

$$(L)_{\geq 0} = \sum_{i=1}^{M} a_{i,i}E_{i,i} + \sum_{i=1}^{M-1} E_{i,i+1}.$$

分解 $b(t) = h(t)n(t)$ 和 $h(t) = \exp(\sum_{i=1} c_i(t)E_{i,i})$ 得到

$$\dot{b}b^{-1} = \dot{h}h^{-1} + h\dot{n}n^{-1}h^{-1}, \quad \text{where} \quad \dot{h}h^{-1} = \sum_{i=1}^{M} \dot{c}_i E_{i,i}.$$

证明至此完成。 □

对于层级，我们考虑采用多时间变量 $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots)$ 的记号

$$\Theta_A(\mathbf{t}) := \sum_{n=1}^{\infty} A^n t_n \qquad \text{for a matrix } A. \tag{2.11}$$

于是，命题 2.1 可以很容易地推广到 f-KT 层级。

命题 2.3。考虑 LU分解

$$\exp(\Theta_{L^0}(\mathbf{t})) = u(\mathbf{t})b(\mathbf{t}) \qquad \textit{with} \quad u(\mathbf{t}) \in \mathcal{N}^-,\ b(\mathbf{t}) \in \mathcal{B}^+. \tag{2.12}$$

f-KT 层级的解 $L(\mathbf{t})$ 可表示为

$$L(\mathbf{t}) = u(\mathbf{t})^{-1}L^0u(\mathbf{t}) = b(\mathbf{t})L^0b(\mathbf{t})^{-1},$$

其中 $L^0 = L(0)$ 是 $L(\mathbf{t})$ 的初始矩阵。

由此得到 f-KT 层级中子式 $\Delta_N, 1 \le N \le M$ 的如下定义,

$$\Delta_N(\mathbf{t}) = [\exp(\Theta_{L^0}(\mathbf{t}))]_N \qquad \text{with} \quad \mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots). \tag{2.13}$$

如前所述，当且仅当每个 Δ_k(t) 都非零时，LU分解 (2.12) 才存在。

本文研究部分子式 Δ_N(t) 消失的情形，并将满足 $\Delta_N(\mathbf{t}_*) = 0$ 的零点集合 $\mathbf{t}_*$ 称为 [FH91] 中的 Painlev´e 除子。

注 2.4. 若将 $t_1 = x$、 $t_2 = y$ 和 $t_3 = t$ 等同起来，则 (2.13) 中的行列式 Δ_N(t) 给出所谓的 τ-函数，它在 KP方程解的分类中起着关键作用（参见 [Kod17] 及下文）。其中， Δ_N 与格拉斯曼流形 Gr(N, M) 上的一点相关联，而 ($\Delta_1, \dots, \Delta_{M-1}$) 与 GL_M 的旗簇上的一点相关联。在这种情况下，f-KT 层级的解空间自然由 A 型完全旗簇给出（参见 [Xie22b]及下文）。

2.2. 舒尔函数与 τ-函数。本文的主要目标之一是讨论子式 Δ_N(t) 的 Schur 函数展开。Schur 函数由函数 p_n(t) 生成，这些函数有时称为初等舒尔多项式。这些 p_n(t) 定义为

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} k^i t_i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\mathbf{t}) k^n,$$

由此得到

$$p_n(\mathbf{t}) = \sum_{i_1+2i_2+\cdots+ni_n=n} \frac{t_1^{i_1} t_2^{i_2} \cdots t_n^{i_n}}{i_1!\, i_2! \cdots i_n!}.$$

函数 p_n(t) 满足

$$\partial_k p_n(\mathbf{t}) = \partial_1^k p_n(\mathbf{t}) = p_{n-k}(\mathbf{t}),$$

其中 $\partial_i^j = \frac{\partial^j}{\partial t^j}$ ，并且我们还有 p_i(t) $= 0$ 若 $i < 0$。

设 λ为一个杨图，其形状为 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$，其中 $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_N \ge 0$。与杨图 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ 对应的舒尔函数定义为

$$S_\lambda(\mathbf{t}) = \det\left(p_{\lambda_i - i + j}(\mathbf{t})\right)_{1 \le i, j \le N}.$$

注意到， S_λ(t)可以关于 t_1写成朗斯基形式,

$$S_\lambda(\mathbf{t}) = \mathrm{Wr}\left(p_{\lambda_N}, p_{\lambda_{N-1}+1}, \dots, p_{\lambda_1+N-1}\right) = \det\left(p_{\lambda_{N-j+1}-i+j}(\mathbf{t})\right)_{1 \le i, j \le N}. \tag{2.14}$$

式（2.13）中的子式 Δ_N(t)也可以写成朗斯基形式。首先回顾一下，存在唯一的$n_0 \in \mathrm{N}^-$ 使得

$$L^0 = n_0^{-1} C_K n_0, \tag{2.15}$$

其中， C_K 是与 L^0相关联的伴随矩阵，即

$$C_K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ (-1)^M \sigma_M & (-1)^{M-1}\sigma_{M-1} & \cdots & \sigma_2 & -\sigma_1 \end{pmatrix},$$

其中， σ_i由 $\det(\kappa I - L^0) = \sum_{i=1}^{M} (-1)^i \sigma_i \kappa^{n-i} = \prod_{i=1}^{M} (\kappa - \kappa_i)$ 定义，也就是说， σ_i 是$\{\kappa_1, \dots, \kappa_M\}$的 i次初等对称多项式。若 $K = \mathrm{diag}(\kappa_1, \dots, \kappa_M)$可逆，我们还有 $C_K = VKV^{-1}$，其中V是范德蒙矩阵 $V = (\kappa_j^{i-1})_{1 \le i,\ j \le M}$。接下来我们将 Δ_N(t)写成行列式形式,

$$\Delta_N(\mathbf{t}) = \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_N,\, n_0^{-1} e^{\Theta_{C_K}(\mathbf{t})} n_0 \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_N \rangle = \det\left(\langle e_i,\, e^{\Theta_{C_K}(\mathbf{t})} n_0 \cdot e_j \rangle\right)_{1 \le i, j \le M}.$$

接着令,

$$f_j(\mathbf{t}) := \langle e_1,\, e^{\Theta_{C_K}(\mathbf{t})} n_0 \cdot e_j \rangle = \langle e_1,\, V e^{\Theta_K(\mathbf{t})} V^{-1} n_0 \cdot e_j \rangle \qquad \text{for} \quad j = 1, \dots, N,$$

我们有

$$\langle e_i,\, V e^{\Theta_K(\mathbf{t})} V^{-1} n_0 \cdot e_j \rangle = \partial_1^{i-1} f_j(\mathbf{t}) \qquad \text{for} \quad i = 1, \dots, N.$$

因此，每个 Δ_N(t) 都可以表示为朗斯基形式,

$$\Delta_N(\mathbf{t}) = \mathrm{Wr}(f_1, f_2, \dots, f_N). \tag{2.16}$$

还应注意，每个 f_j(t) 都满足热层级,

$$\partial_n f_j(\mathbf{t}) = \partial_1^n f_j(\mathbf{t}) \qquad n = 1, 2, \dots.$$

注 2.5. 公式 (2.16) 是 KP 层级的 τ-函数（参见 [Kod17]）。此外，如下文所示，$1 \le N \le M-1$ 的子式 $\Delta_N(\mathbf{t})$ 给出了 A型 f-KT 层级的 τ-函数。

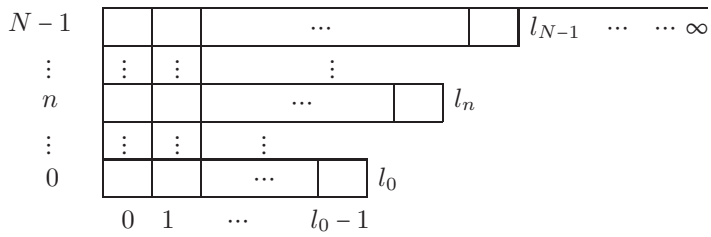
设 $\{l_0, l_1, \ldots, l_{N-1}\}$ 是一个满足 $0 \le l_0 < l_1 < \cdots < l_{N-1}$ 的整数集合。则定义

$$[l_0, l_1, \ldots, l_{N-1}] := \begin{vmatrix} f_1^{(l_0)} & f_1^{(l_1)} & \cdots & f_1^{(l_{N-1})} \\ f_2^{(l_0)} & f_2^{(l_1)} & \cdots & f_2^{(l_{N-1})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N^{(l_0)} & f_N^{(l_1)} & \cdots & f_N^{(l_{N-1})} \end{vmatrix}, \tag{2.17}$$

其中 $f_j^{(l)} = \partial_1^l f_j$。注意，此时 (2.16) 中的行列式 $\Delta_N(\mathbf{t})$ 给出为

$$\Delta_N(\mathbf{t}) = [0, 1, 2, \ldots, N-1].$$

我们将与集合 $\{l_0, l_1, \ldots, l_{N-1}\}$ 相关联的杨图 λ 定义如下：杨图的东南边界给出一条路径，其标签为从 0 开始依次递增的整数，使得指标 $\{l_0, l_1, \ldots, l_{N-1}\}$ 出现在边界路径的垂直边上，如下图所示。



杨图 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$ 表示为

$$\lambda_k = l_{N-k} - (N-k) \qquad \text{for} \quad 1 \le k \le N.$$

令 $\Delta_\lambda(\mathbf{t})$ 表示行列式 (2.17)。于是，(2.16) 中的 $\Delta_N(\mathbf{t})$ 记作 $\Delta_N(\mathbf{t}) = \Delta_\varnothing(\mathbf{t})$，因为 $(l_0, l_1, \ldots, l_{N-1}) = (1, 2, \ldots, N)$。因此我们有以下有用公式（参见 [Kod17]），

$$S_\lambda(\tilde{\partial})\Delta_\varnothing(\mathbf{t}) = \Delta_\lambda(\mathbf{t}), \tag{2.18}$$

其中 $\tilde{\partial}$ 由下式定义

$$\tilde{\partial} = \left(\partial_1, \frac{1}{2}\partial_2, \frac{1}{3}\partial_3, \ldots\right).$$

特别地，若我们取 $\Delta_\varnothing(\mathbf{t}) = S_\lambda(\mathbf{t})$ 如式 (2.14) 所示，则有

$$\begin{aligned} S_\mu(\tilde{\partial})\, S_\lambda(\mathbf{t}) &= \det\left(p_{\lambda_{N-i+1}-\mu_{N-j+1}+i-j}\right)_{1\le i,j\le N} \\ &= \det\left(p_{\lambda_i-\mu_j-i+j}\right)_{1\le i,j\le N} =: S_{\lambda/\mu}(\mathbf{t}), \end{aligned} \tag{2.19}$$

这就是斜 Schur 多项式。这里注意，$S_{\lambda/\mu} \ne 0$ 当且仅当 $\mu \subseteq \lambda$，特别地，当 $\lambda = \mu$时，$S_{\lambda/\mu} = 1$。由此定义正交性，

$$S_\mu(\tilde{\partial}) S_\lambda(\mathbf{t})\Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = \delta_{\lambda,\mu}.$$

于是，我们可以将 $\Delta_N(\mathbf{t})$ 作如下 Schur 函数展开（参见 [Kod17]）：

$$\Delta_\varnothing(\mathbf{t}+\mathbf{s}) = \sum_\lambda \Delta_\lambda(\mathbf{s}) S_\lambda(\mathbf{t}), \tag{2.20}$$

其中求和遍及所有可能的杨图。这里注意，系数 $\Delta_\lambda(\mathbf{s})$ 均为行列式，并满足所有 Pl¨ucker 关系（这是 KP 层级的佐藤理论中的一个重要结果，参见 [Kod17]）。

本文关注满足如下条件的点 $\mathbf{t}_*$：存在某个 λ_0，使得

$$\Delta_\mu(\mathbf{t}_*) = 0 \qquad \text{for} \qquad \mu < \lambda_0.$$

因此，$\Delta_\varnothing(\mathbf{t})$ 可展开为：

$$\Delta_\varnothing(\mathbf{t}+\mathbf{t}_*) = S_{\lambda_0}(\mathbf{t}) + \sum_{\lambda_0<\lambda} \Delta_\lambda(\mathbf{t}_*) S_\lambda(\mathbf{t}). \tag{2.21}$$

这里我们对 $\Delta_{\lambda_0}(\mathbf{t}_*) = 1$进行了归一化。

3. The Schur expansion of $\Delta_N(t)$

如果矩阵 $\exp(\Theta_{L^0}(t))$ 的一个顺序主子式在固定的多时间 $t = t_*$处消失，那么 $\exp(\Theta_{L^0}(t_*))$ 的 LU 分解失效，即对于某个 $w \in \mathfrak{S}_M$，有 $\exp(\Theta_{L^0}(t_*)) \in N^- \dot{w} B^+$，其中 $w \in \mathfrak{S}_M$ 是阶为 M 的对称群，且 $w \neq e$和 $\dot{w}$表示 SL_M 中的 w。这意味着 f-KT流变得奇异，并到达由 $w \in \mathfrak{S}_M$ 标记的舒伯特胞腔边界（参见 [CK02, FH91]）。时间 t_* 的集合称为 Painlev´e 除子。

现在我们来表达 Painlev´e 除子附近的 τ-函数。令 $t \to t+t_*$，其中 $\Delta_N(t_*) = 0$，对于某个 $1 \le N \le M-1$。于是我们有

$$\exp(\Theta_{L^0}(\mathbf{t}_*)) = n_* \dot{w}_* b_* \qquad \text{for some} \quad w_* \in \mathfrak{S}_M, \tag{3.1}$$

其中 $n_* \in N^-$ 和 $b_* \in B^+$。特别地，下面将显式构造每个 w_* 对应的幺幂矩阵 n_*。然后，利用 $L^0 = n_0^{-1} V K V^{-1} n_0$ （见 (2.15)），我们有

$$\Delta_N(\mathbf{t}) = d_N \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_N, V e^{\Theta_K(\mathbf{t})} V^{-1} n_0 n_* \dot{w}_* \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_N \rangle, \tag{3.2}$$

其中常数 d_N由 $b_* \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_N = d_N e_1 \wedge \cdots \wedge e_N$给出，但请注意，该层级的解不依赖于 d_N。

现在展开$(\mathbf{t})$，我们有

$$V e^{\Theta_K(\mathbf{t})} = \begin{pmatrix} 1 & p_1 & p_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & p_1 & p_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix} V_\infty =: \mathcal{P}(\mathbf{t}) V_\infty, \tag{3.3}$$

其中 V_∞ 是 $\infty \times M$ 范德蒙德矩阵 $V_\infty = (\lambda_j^{i-1})$，对应于 $1 \le i$ 和 $1 \le j \le M$。我们还注意到

$$(V_\infty V^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{M-1} c_{(0|M-1)} & (-1)^{M-1} c_{(1|M-1)} & (-1)^{M-1} c_{(2|M-1)} & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & (-1)^{M-2} c_{(0|M-2)} & (-1)^{M-2} c_{(1|M-2)} & (-1)^{M-2} c_{(2|M-2)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{(0|0)} & c_{(1|0)} & c_{(2|0)} & \cdots \end{pmatrix},$$

其中 $c_{(a|b)} = c_{(a|b)}(\lambda)$ 是与钩形杨图 λ相关联的 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 的舒尔多项式，属于 $(a|b)$ 型，即 $\lambda = (1+a, \underbrace{1, \dots, 1}_{1111111111}, \underbrace{\sim\sim}_{111111111})$，例如 (3|2)是，$\lambda = (4, 1, 1)$。这不过就是詹比利公式。

对于每个 $w_* \in \mathfrak{S}_M$，我们注意到

$$\dot{w}_* \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_N = e_{w_*(1)} \wedge e_{w_*(2)} \wedge \cdots \wedge e_{w_*(N)}.$$

那么每个 ∞-向量 $v_{w_*(j)} := V_\infty V^{-1} n_0 n_* \dot{w}_* e_j$ 具有如下结构

$$v_{w_*(j)} = (0, \dots, 0, 1, *, *, \cdots)^T, \tag{3.4}$$

其中首个非零项 （指标为 1）位于 $w_*(j)$。于是，子式 $\Delta_N(t)$ 有如下公式 ，

$$\Delta_N(\mathbf{t}; w_*) = \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_N, \mathcal{P}(\mathbf{t}) \cdot v_{w_*(1)} \wedge \cdots \wedge v_{w_*(N)} \rangle. \tag{3.5}$$

现在有如下定理。

定理 3.1. (3.5) 中的 τ-函数具有如下 Schur 展开，

$$\Delta_N(\mathbf{t}; w_*) = S_\lambda(\mathbf{t}) + \sum_{\mu \supset \lambda} c_\mu S_\mu(\mathbf{t}),$$

其中， $S_\lambda(t)$ 是与杨图 λ 对应的舒尔多项式，该杨图由 w_* 确定如下：令 $\{i_1, i_2, \dots, i_N\}$ 定义为

$$\{i_1, i_2, \dots, i_N\} = \{w_*(1), w_*(2), \dots, w_*(N)\},$$

其中 $i_1 < i_2 < \cdots < i_N$。那么杨图 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ 定义如下

$$\lambda_k = i_k - k \qquad for \qquad 1 \le k \le N.$$

证明。应用柯西-比内引理展开 $\tau_N(t)$。 □

τ函数中的自由参数个数由相应舒伯特胞腔的维数给出，其定义为

$$\dim(\mathcal{N}^- \dot{w}_* \mathcal{B}^+ / \mathcal{B}^+) = \ell(w_0) - \ell(w_*),$$

其中， w_0 是 $\mathfrak{S}_M$的最长元素。这里谱（特征值）是固定的。特别地，如果我们将所有特征值都固定为零，即在幂零极限下，便得到多项式解，

$$\Delta_N(\mathbf{t}; w_*) = \langle e_1, \wedge\cdots\wedge e_N, \mathcal{P}_M(\mathbf{t}) n_* \dot{w}_* \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_N \rangle, \tag{3.6}$$

其中 $\mathsf{P}_M(\mathbf{t})$ 是与 (1.1) 中的正则幂零矩阵 $L^0 = \mathsf{N}$ 相关联的 $M \times M$ 矩阵，

$$\mathcal{P}_M(\mathbf{t}) = e^{\Theta_{\mathsf{N}}(\mathbf{t})} = \sum_{k=0}^{M-1} p_k(\mathbf{t}) \mathsf{N}^k \qquad \text{with} \qquad \mathsf{N} = \sum_{i=1}^{M-1} E_{i,i+1}. \tag{3.7}$$

我们注意到 $\Delta_N(\mathbf{t}; w_*)$ 的 Schur 展开具有以下性质。令 $[N]$ 为由 $\{1, 2, \ldots, N\}$ 给出的数集。那么我们有如下引理。

引理 3.2. 若 $w_*[N] = [N]$，则 $\Delta_N(0; w_*) = \pm 1$。

证明。子式 $\Delta_N(\mathbf{t})$ 由下式给出

$$\begin{aligned} \Delta_N(\mathbf{t}; w_*) &= \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_N, \mathcal{P}(\mathbf{t}) \cdot v_{w_*(1)} \wedge \cdots \wedge v_{w_*(N)} \rangle \\ &= \pm \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_N, \mathcal{P}(\mathbf{t}) \cdot v_1 \wedge \cdots \wedge v_N \rangle = \pm 1 + \text{h.o.t.}, \end{aligned}$$

其中我们回忆 $v_j = (0, \cdots, 0, \overset{j}{1}, *\cdots)^T$。 □

注意，这个引理可改述为 $\Delta_N(0; w_*) \neq 0$ 当且仅当 $w_*[N] \neq [N]$。由此引理，以下结论显而易见。

推论 y 3.3. 若 w_0是 $\mathfrak{S}_M$中的最长元素，则对所有 $N = 1, \ldots, M-$，都有 $\Delta_N(0; w_0) = 0$ 1.

4. The ℓ-KT hierarchy

对于元素 $a_{i,j}$ 的显式表达式，我们有以下命题，该命题可见于 [AvM99, KY96]（另见附录 A）。

命题 4.1. f-KT 层级的元素 $a_{i,j}(\mathbf{t})$ 可表示为

$$a_{i,j}(\mathbf{t}) = \frac{p_{i-j+1}(\tilde{D})\Delta_j(\mathbf{t}) \circ \Delta_{i-1}(\mathbf{t})}{\Delta_j(\mathbf{t})\Delta_{i-1}(\mathbf{t})} \qquad \textit{for} \quad 1 \leq j \leq i \leq M, \tag{4.1}$$

˜其中 D 定义为

$$\tilde{D} := \left(D_1, \frac{1}{2} D_2, \frac{1}{3} D_3, \ldots \right) \qquad \textit{with} \qquad D_n f \circ g = \left(\frac{\partial}{\partial t_n} - \frac{\partial}{\partial t'_n} \right) f(\mathbf{t}) g(\mathbf{t}') \Big|_{\mathbf{t}=\mathbf{t}'}.$$

我们考虑 L 的特殊情形，其带状结构如下：对于每个 $\ell + 1 \leq m \leq M - 1$，下三角部分中的元素满足 $a_{k+m,\ k}(\mathbf{t}) = 0$ 当 $1 \leq k \leq M - m$ 时成立。也就是说，低于第 ℓ 条对角线的次对角线均为零。我们将具有这种带状 Lax 矩阵的 f-KT 层级称为 ℓ-KT 层级（详情见下文）。注意，1-带 KT 层级就是原始的三对角 Kostant-Toda（KT）格层级，而 $(M-1)$-带 KT 层级就是 f-KT 层级。

于是我们有以下命题：

命题 4.2. ℓ-KT 层级第 ℓ 条对角线上的元素 $a_{i,\ j}$ 由下式给出

$$a_{k+\ell,k}(\mathbf{t}) = a^0_{k+\ell,k} \frac{\Delta_{k+\ell}(\mathbf{t})\Delta_{k-1}(\mathbf{t})}{\Delta_{k+\ell-1}(\mathbf{t})\Delta_k(\mathbf{t})} \qquad \textit{for} \quad 1 \leq k \leq M - \ell,$$

其中 $a^0_{k+\ell,\ k}$ 是一个常数。

证明。由于对于所有 $1 \leq k \leq M - \ell$，均有 $a_{\ell+k+1,\ k} = a_{\ell+k,\ k-1} = 0$，方程 (2.3) 化为

$$\frac{da_{k+\ell,k}}{dt} = (a_{k+\ell,k+\ell} - a_{k,k}) a_{k+\ell,k}.$$

利用 $a_{i,i}$ 的表达式 (2.10)，我们可以对方程进行积分，得到命题中的公式。注意，如果常数 $a^0_{k+\ell,k}$ 不为零，则可将其归一化为 1。利用命题 4.1，我们得到 ℓ-KT 层级的双线性方程，

$$p_{\ell+1}(\tilde{D})\Delta_k \circ \Delta_{k+\ell-1}(\mathbf{t}) = a^0_{k+\ell,k}\Delta_{k+\ell}(\mathbf{t})\Delta_{k-1}(\mathbf{t}) \qquad \text{for} \quad 1 \leq k \leq M - \ell. \tag{4.2}$$

当 $\ell = 1$ 时，我们得到原始三对角 Toda 格的双线性方程，

$$p_2(\tilde{D})\Delta_k \circ \Delta_k = \frac{1}{2} D_1^2 \Delta_k \circ \Delta_k = \Delta_k \partial_1^2 \Delta_k - (\partial_1 \Delta_k)^2 = a^0_{k+1,k} \Delta_{k+1} \Delta_{k-1}.$$

4.1. ℓ-KT 层级的 τ 函数。我们先介绍下面这个命题，讨论 Lax 矩阵中第 ℓ 条对角元素的一些性质。

命题 4.3. 设 w_* 是 $\mathfrak{S}_M$ 中的一个元素，满足以下条件：

(a) 对任意$2 \le i+j \le M-\ell$， $w_*(i) \ne w_*(M-j+1)+1$，且 (b)

对某个 $1 \le i \le M-\ell$，存在如下关系：

$$w_*(i) = w_*(i+\ell)+1.$$

那么，相应的 τ-函数 $\Delta_N(\mathbf{t}; w_*)$ $1 \le N \le M-1$ 给出 ℓ-KT 层级的一个解；也就是说，对于每个满足 $\ell+1 \le m \le M-1$ 的 m，Lax 矩阵 L 中的元素 $a_{i,j}$ 满足

$$a_{m+k,k}(\mathbf{t}) = 0 \qquad for \qquad 1 \le k \le M-m,$$

并且，对某个 $1 \le k \le M-\ell$， $a_{\ell+k,\,k}(\mathbf{t}) \ne 0$。

证明. 首先注意到 $a_{M,\,1}(\mathbf{t})$ 满足

$$\frac{\partial a_{M,1}}{\partial t_1} = (a_{M,M} - a_{1,1})\, a_{M,1},$$

由此得到

$$a_{M,1}(\mathbf{t}) = a^0_{M,1} \frac{\Delta_M \Delta_0}{\Delta_{M-1}(\mathbf{t})\Delta_1(\mathbf{t})},$$

其中 $\Delta_0 = 1$ 和 Δ_M 是常数。由 (4.2) 可得

$$p_M(\tilde{D})\Delta_1 \circ \Delta_{M-1} = a^0_{M,1}\Delta_M\Delta_0 = \text{constant}. \tag{4.3}$$

Δ_1 和 Δ_{M-1} 由下式给出

$$\Delta_1(\mathbf{t}) = \langle e_1, \mathcal{P}(\mathbf{t}) \cdot v_{w_*(1)} \rangle = S_{\mu_1}(\mathbf{t}) + \text{h.o.t},$$

$$\Delta_{M-1}(\mathbf{t}) = \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_{M-1}, \mathcal{P}(\mathbf{t}) \cdot v_{w*(1)} \wedge \cdots \wedge v_{w_*(M-1)} \rangle = S_{\mu_{M-1}}(\mathbf{t}) + \text{h.o.t.},$$

其中杨图 μ_1 和 μ_{M-1} 由下式给出

$$S_{\mu_1}(\mathbf{t}) = p_{|\mu_1|}(\mathbf{t}) \qquad \text{with} \quad |\mu_1| = w_*(1) - 1,$$

$$S_{\mu_{M-1}}(\mathbf{t}) = (-1)^{|\mu_{M-1}|} p_{|\mu_{M-1}|}(-\mathbf{t}) \qquad \text{with} \quad |\mu_{M-1}| = M - w_*(M),$$

也就是说， μ_1 由 $|\mu_1|$ 个横向方格组成，而 μ_{M-1} 由 $|\mu_{M-1}|$ 个垂直方格组成。

(4.3) 左侧的次数为

$$\deg(\Delta_1) + \deg(\Delta_{M-1}) - M = (w_*(1)-1) + (M - w_*(M)) - M = w_*(1) - w_*(M) - 1.$$

由于 (4.3) 的右端次数为零，若 $w_*(1) \ne w_*(M)+1$，则 $a^0_{M,\,1}$必为零。这证实了情形 (a)，其中 $i = j = 1$ 和 $\ell = M-2$。

假设对于所有 $1 \le a \le m-1$ 和 $1 \le k \le a$，都有 $a_{M-a+k,\,k} = 0$。那么我们有

$$p_{M-m+1}(\tilde{D})\Delta_k \circ \Delta_{M-(m-k)-1} = a^0_{M-m+k,k}\Delta_{k-1}\Delta_{M-(m-k)}. \tag{4.4}$$

(4.4) 左端的阶为

$$\left(k_1 + \cdots + k_k - \frac{k(k+1)}{2}\right) + \left(M(m+1-k) - (l_1 + \cdots + l_{m+1-k}) - \frac{(m-k)(m-k+1)}{2}\right) - (M-m+1),$$

其中记 $w_*(i) = k_i$ 和 $w_*(M-j+1) = l_j$。 (4.4) 右端的阶为

$$\left(k_1 + \ldots + k_{k-1} - \frac{k(k-1)}{2}\right) + \left(M(m-k) - (l_1 + \cdots + l_{m-k}) - \frac{(m-k)(m-k-1)}{2}\right).$$

这些阶互不相同的条件为

$$k_k \ne l_{m+1-k} + 1, \qquad \text{which is} \qquad w_*(k) \ne w_*(M-m+k) + 1.$$

因此，若此条件成立，则有 $a^0_{M-m+k,\,k} = 0$。也就是说，$a_{M-m+k,\,k}(\mathbf{t}) = 0$。将这一论证继续到 $m = M-\ell-1$，即可得到证明。 □

注 4.4。 命题 4.3 中关于 w_* 的两个条件可以写成以下更加对称的形式

(a) 对任意 $k > \ell$， $w_*(i) \ne w_*(i+k)+1$；以及

(b) 对某个 $1 \le i \le M-\ell$，存在一个关系，

$$w_*(i) = w_*(i+\ell) + 1.$$

条件 (a) 表示对于 $k > \ell$，第 k 条非对角线上的元素均不允许是非平凡的；条件 (b) 表示第 ℓ 条非对角线上的某些元素是非平凡的。这两个条件可以独立使用。例如，如果 ℓ-KT 层级的定义是包含式的，也就是说，$\ell-1$-带状 KT 层级被视为 ℓ-KT 层级的子集，那么对于所有此类 w_*，只需满足条件 (a)。

推论4.5。设 $w_* = w_0$是 $\mathfrak{S}_M$中的最长元素。那么相应的 τ-函数给出经典三对角KT层级的一个解。

证明。显然，w_0 满足命题 4.3 中关于 $\ell = 1$的条件。 □

5. The f-KT hierarchy on simple Lie algebras

第 2 节中 Hessenberg 形式下 f-KT 格（层级）的定义，可以扩展为定义在某些单李代数上的系统。设 G 是一个连通单连通复半单李群，其李代数为 Lie(G) $= \mathfrak{g}$。设 $\{H_i, X_i, Y_i\}$ 是秩为 n 的李代数 $\mathfrak{g}$ 的切瓦利基，它们满足

$$[H_i, H_j] = 0, \qquad [H_i, X_j] = C_{j,i}X_j, \qquad [H_i, Y_j] = -C_{j,i}Y_j, \qquad [X_i, Y_j] = \delta_{i,j}H_i,$$

其中 $C_{i,\,j}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 矩阵。设 Σ^+ 表示正根集合，$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ 表示单根集合。注意，$X_i = X_{\alpha_i}$、$Y_i = Y_{\alpha_i} = X_{-\alpha_i}$ 和 $C_{i,\,j} = \alpha_i(H_j)$。负根向量 Y_α 由下式生成

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = N_{-\alpha,-\beta}Y_{\alpha+\beta}, \qquad \text{if} \quad \alpha + \beta \in \Sigma^+,$$

其中 $N_{-\alpha,\,-\beta}$ 为常数。

李代数 $\mathfrak{g}$ 具有如下分解:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{b}_+,$$

其中 $\mathfrak{h}$ 是 Cartan子代数，$\mathfrak{n}_\pm$ 是由 $\mathfrak{n}_\pm = \oplus_{\alpha\in\Sigma^+}\mathbb{C}X_{\pm\alpha}$定义的幂零子代数，$\mathfrak{b}_+ = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h}$ 是 Borel子代数。我们还固定一个分裂Cartan子群 H，其李代数 Lie(H) 为 $= \mathfrak{h}$，以及一个 Borel子群 B，其李代数 Lie(B) 为 $= \mathfrak{b}_+$，且 B $=$ HN，其中 N 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{n}_+$。我们还将李群 B^- 和 N^- 分别记为，其李代数 Lie(B^-) 为 $= \mathfrak{b}_-$，Lie(N^-) 为 $= \mathfrak{n}_-$。于是，李代数 $\mathfrak{g}$ 上的完整 Kostant-Toda（f-KT）层级定义如下。令 $L_\mathfrak{g}$ 为由下式定义的元素

$$\begin{aligned} L_\mathfrak{g} &= \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{t})H_i + \sum_{i=1}^n X_i + \sum_{\alpha\in\Sigma^+} b_\alpha(\mathbf{t})Y_\alpha, \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i(\mathbf{t})H_i + X_i + b_i(\mathbf{t})Y_i) + \sum_{\alpha\in\Sigma^+\setminus\Pi} b_\alpha(\mathbf{t})Y_\alpha, \end{aligned} \tag{5.1}$$

称其为 Lax 矩阵。这里 a_i(t) 和 b_α(t) 是多时间变量 t $=(t_{m_k} : k = 1, 2, \dots, n)$ 的函数，其中 m_k将在下文定义。对于每个时间变量，我们有如下广义户田层级:

$$\frac{\partial L_\mathfrak{g}}{\partial t_{m_k}} = [P_k, L_\mathfrak{g}], \qquad \text{with} \quad P_k = \Pi_{\mathfrak{b}_+}\nabla I_{k+1}, \tag{5.2}$$

其中，∇ 是相对于 Killing 型的梯度，即对于任意 $x \in \mathfrak{g}$，$dI_k(x) = K(\nabla I_k, x)$，而 $\Pi_{\mathfrak{b}_+}$ 表示 $\mathfrak{b}_+$-投影。这里，函数 $I_k = I_k(L_\mathfrak{g})$ 是 Chevalley 不变量，例如在 A 型中定义为

$$I_{k+1}(L_\mathfrak{g}) = \frac{1}{k+1}\mathrm{tr}(L_\mathfrak{g}^{k+1}), \quad \text{which gives} \quad \nabla I_{k+1} = L_\mathfrak{g}^k.$$

注 5.1. 对于 D 型的李代数 $\mathfrak{g}$，近期论文 [KO23] 表明，其中一个 Chevalley 不变量由多项式环 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ 的 Pfaffian 给出。

注意，此处 I_k 是关于 (a_i, b_α) 的加权齐次多项式，权重为 k，其中权重定义为

$$\mathrm{wt}(a_i) = 1, \qquad \mathrm{wt}(b_\alpha) = \mathrm{ht}(\alpha) + 1.$$

n n此处，ht(α) 表示 α 的高度，其定义为：对于 $\alpha = \sum c_i\alpha_i$，$\sum c_i$。式 (5.2) 中时间变量 $i=1$ $i=1$的指标 m_k 随后定义为 $m_k =$ wt(I_{k+1}) $- 1$。例如，在 $k = 1$ 的情形下，f-KT 格给出变量 $\{(a_i, b_\alpha) : 1 \le i \le n, \alpha \in \Sigma^+\}$ 的以下微分方程组，

$$\frac{\partial a_i}{\partial t_1} = b_i \quad (1 \le i \le n), \qquad \frac{\partial b_\alpha}{\partial t_1} = -\sum_{i=1}^n (\alpha(H_i)a_i)\, b_\alpha + \sum_{i=1}^n N_{\alpha_i,-\alpha-\alpha_i}b_{\alpha+\alpha_i}, \tag{5.3}$$

其中 $b_i = b_{\alpha_i}$，$[H_i, Y_\alpha] = -\alpha(H_i)Y_\alpha$和$[X_{\alpha_i}, Y_{\alpha+\alpha_i}] = N_{\alpha_i,\,-\alpha-\alpha_i}Y_\alpha$对 $\alpha + \alpha_i \in \Sigma^+$成立。注意，wt($\frac{\partial}{\partial t_1}$) $= 1$，而 f-KT格由加权齐次方程组成。因此可以看出，b_α(t) 的解为

权重 ht(α) $+1$ 由权重为 1 的函数 a_i(t) 决定。Kostant-Toda 格点层级是所有 b_α(t) $=0$ 对 $\alpha \in \Sigma^+ \setminus \Pi$成立时的特殊情形，也就是说，Lax 矩阵 $L_\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$的 Jacobi 元素。这类层级也称为三对角 KT 层级。在这种情况下，Flaschka 和 Heine 在 [FH91] 中引入了所谓的 τ-函数，用它们通过以下方式表示变量 a_i(t)

$$a_i(\mathbf{t}) = \frac{\partial}{\partial t_1} \ln \tau_i(\mathbf{t}), \qquad (1 \le i \le n), \tag{5.4}$$

（另见 [Kos79, GW84]）。那么 b_i(t) 可表示为

$$b_i(\mathbf{t}) = \frac{\partial}{\partial t_1} a_i(\mathbf{t}) = b_i^0 \prod_{j=1}^{n} (\tau_j(\mathbf{t}))^{-C_{i,j}},$$

其中 $C_{i,\,j}$ 是 Cartan 矩阵，b_i^0 为常数。

一般而言，τ-函数定义如下（参见 [KO23]）。设 $V(\lambda)$ 是群 G 的不可约最高权表示，其最高权为 λ，最高权向量为 v_λ。那么存在唯一的双线性形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle : V(\lambda) \times V(\lambda) \to \mathbb{C}$，其归一化条件为 $v_\lambda, v_{\lambda\lambda} = 1$；对于 $g \in \mathrm{G}$，最高权向量 $g \cdot v_\lambda$ 的 G-轨道对应的矩阵系数 $c_\lambda(g)$ 定义为

$$c_\lambda(g) = \langle v_\lambda, g \cdot v_\lambda \rangle_\lambda. \tag{5.5}$$

那么，τ-函数定义为 g(t) $=$ exp(Θ_{L^0}(t) 对应基本权 ϖ_i 的矩阵系数（参见 [Sym82, GW84, KO23]），

$$\tau_i(\mathbf{t}) := c_{\varpi_i}(\mathbf{t}) = \langle v_{\varpi_i}, g(\mathbf{t}) \cdot v_{\varpi_i} \rangle_{\varpi_i}. \tag{5.6}$$

下面这个关于矩阵系数的引理很有用（证明见 [KO23]）。

引理 5.2. (1) 若 $\{u_1, \ldots, u_r\}$ 是 $V(\lambda)$ 的标准正交基，则对于 $v, w \in V(\lambda)$，有

$$\langle v, gh \cdot w \rangle_\lambda = \sum_{i=1}^{r} \langle v, g \cdot u_i \rangle_\lambda \langle u_i, h \cdot w \rangle_\lambda. \tag{5.7}$$

(2) 若将 $g \in GL_{n+1}$ 写为 $g = n^- h n^+$，其中 $n^- \in \mathrm{N}^-$, $h \in \mathrm{H}$ 且 $n^+ \in \mathrm{N}^+$，则有

$$c_\lambda(n^- h n^+) = \chi^\lambda(h), \tag{5.8}$$

其中 $\chi^\lambda : \mathrm{H} \to \mathbb{C}^\times$ 是与 λ 对应的特征标。

(3) 对于支配权 λ 和 μ，有

$$c_\lambda(g) \cdot c_\mu(g) = c_{\lambda+\mu}(g) \qquad (g \in GL). \tag{5.9}$$

现在我们说明，f-KT 层级 (5.2) 的解可用由 (5.6) 给出的 τ-函数来描述。我们还对带状 f-KT 层级作一说明。首先注意到，(5.2) 的解的系数 b_α 由 $a_1, \ldots, a_n$ 唯一确定。

命题 5.3. 若 $L = L$(t) 是完整 Kostant–Toda 层级 (5.2) 的形如 (5.1) 的一个解，则 b_α 的 ($\alpha \in \Sigma^+$) 可表示为 a_i 的多项式及其导数。特别地，我们有

$$b_{\alpha_i} = \frac{\partial a_i}{\partial t_1} \qquad (1 \le i \le n). \tag{5.10}$$

n n证明。回顾一下，根 $\alpha = \sum c_i \alpha_i \in \Sigma$ 的高度 ht(α) 定义为 ht(α) $= \sum c_i$。对于非零整数 k,
$i=1$ $i=1$令 $\mathfrak{g}_k$ 为高度 ht(α) $= k$ 的根向量 X_α 所张成的空间。并令 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$。于是我们有

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_k, \quad [\mathfrak{g}_k, \mathfrak{g}_l] \subset \mathfrak{g}_{k+l}.$$

若令

$$L_1 = \sum_{i=1}^{n} X_{\alpha_i}, \quad L_0 = \sum_{i=1}^{n} a_i(t) H_i, \quad L_{-k} = \sum_{\mathrm{ht}(\alpha)=k} b_\alpha(t) X_{-\alpha} \qquad (k > 0),$$

则有

$$L = L_1 + L_0 + L_{-1} + L_{-2} + \cdots, \quad L^{\ge 0} = L_1 + L_0, \quad L_k \in \mathfrak{g}_k.$$

通过比较 (5.2) 的分次分量与 $m_k = 1$，我们得到

$$\frac{\partial L_0}{\partial t_1} = [L_1, L_{-1}], \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial L_{-k}}{\partial t_1} = [L_1, L_{-k+1}] + [L_0, L_{-k}] \quad (k > 0). \tag{5.12}$$

$_n$由于 $[L_1, L_{-1}] = \sum b_{\alpha_i} H_i$，通过比较 H_i 的系数，我们由 (5.11) 得到 (5.10)。$_{i=1}$

我们对 ht(β) 使用归纳法，证明 b_β 可以唯一表示为 $a_i b_\alpha$ 和 $\frac{\partial b_\alpha}{\partial t_1}$的线性组合，其中$1 \le i \le n$ 且 ht(α) = ht(β) -1。假设 $k > 0$。在 (5.12) 中令 ht(α) = k的 $X_{-\alpha}$的系数相等，得到

$$\frac{\partial b_\alpha}{\partial t_1} = -\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha(H_i) a_i\right) b_\alpha + \sum_{\mathrm{ht}(\beta)=k+1} N_{\beta-\alpha,-\beta} b_\beta \qquad (\mathrm{ht}(\alpha) = k), \tag{5.13}$$

其中 $N_{\beta-\alpha,\ -\beta} = 0$，除非 $\beta - \alpha$ 是单根。我们将 (5.13) 视为关于未知变量 b_β (ht(β) = $k+1$) 的线性方程组，并考虑其系数矩阵

$$M = (N_{\beta-\alpha,-\beta})_{\mathrm{ht}(\alpha)=k,\,\mathrm{ht}(\beta)=k+1}.$$

另一方面，可以证明 M 是线性映射 ad $L_1 : \mathfrak{g}_{-(k+1)} \to \mathfrak{g}_{-k}$.$_n$的表示矩阵。由于 $L_1 = \sum X_{\alpha_i}$，我们可以找到一个主 $\mathfrak{sl}_2$- 三元组 $\{h, e, f\}$，满足 $e = L_1$，使得 $[h, e] = 2e$、 $[h, f] = -2f$ 且 $_{i=1}[e, f] = h$，并且有 $\mathfrak{g}_k = \{$ $X \in \mathfrak{g} : [h, X] = 2kX\}$（参见 [Kos59，第 5] 节）。根据 $\mathfrak{sl}_2$的表示论可知，ad $L_1 : \mathfrak{g}_{-(k+1)} \to \mathfrak{g}_{-k}$ 是单射。因此，矩阵 M 满秩，线性方程组 (5.13) 在 $(b_\beta)_{\mathrm{ht}(\beta)=k+1}$ 中有唯一解。

□

然后，我们通过施加以下约束（或称约化，参见 [KY96，第 5] 节），定义 l-KT 层级于 $\mathfrak{g}$ 上。

$$b_\alpha = 0 \quad \text{with} \quad \mathrm{ht}\,(\alpha) \ge \ell + 1. \tag{5.14}$$

因此， ℓ-KT 层级是基于特定高度的根空间分解对 f-KT 层级进行的约化，我们称之为根空间约化。

5.1. 旗簇的坐标。Painlev´e 除子附近的 τ-函数可表示如下。假设 Painlev´e 除子 t = t$_*$ 处的矩阵 g(t) 具有 Bruhat 分解，

$$g(\mathbf{t}_*) = n_* \dot{w}_* b_* \qquad \text{for some} \qquad w_* \in \mathfrak{W}, \tag{5.15}$$

其中 $\mathfrak{W}$ 是 G 的魏尔群。令 $\{u_1, \dots, u_r\}$ 为 $V(\varpi_i)$ 的标准正交基，并设 t $\to$t $+$t$_*$，则由 (5.7) 可得

$$\begin{aligned} \tau_i(\mathbf{t}) &= \langle v_{\varpi_i}, g(\mathbf{t}) n_* \dot{w}_* b_* \cdot v_{\varpi_i} \rangle_{\varpi_i} \\ &= \sum_{i=1}^{r} \langle v_{\varpi_i}, g(\mathbf{t}) \cdot u_i \rangle_{\varpi_i} \langle u_i, n_* \dot{w}_* b_* \cdot v_{\varpi_i} \rangle_{\varpi_i} \\ &= d_i \sum_{i=1}^{r} \langle v_{\varpi_i}, g(\mathbf{t}) \cdot u_i \rangle_{\varpi_i} \langle u_i, n_* \dot{w}_* \cdot v_{\varpi_i} \rangle_{\varpi_i}, \end{aligned} \tag{5.16}$$

其中由 $b_* \cdot v_{\varpi_i} = d_i v_{\varpi}$ 定义的 d_i 是一个整体上无关紧要的常数，以下取其为 1。注意，$u_i, n_* \dot{w}_* \cdot v_{\varpi_i \varpi_i}$ 是旗簇 G/B 中某点的一个矩阵系数，下面回顾旗簇坐标的一些有用构造。

数据 {H, B, B$^-$, X_i, Y_i ($1 \le i \le n$)} 称为 [Lus94] 中的一个钉扎。已知钉扎在 G 的共轭作用下唯一，除共轭外不变。对于 $\alpha_i \in \Pi$，令 $x_i : \mathbb{C} \to$ G 和 $y_i : \mathbb{C} \to$ G 为由下式给出的单参数子群

$$x_i(\xi) = \exp(\xi X_i), \qquad y_i(\xi) = \exp(\xi Y_i), \quad \xi \in \mathbb{C}. \tag{5.17}$$

对于 $\alpha_i \in \Pi$，G 中 $s_i \in$W 的一个代表元可取为

$$\dot{s}_i = x_i(-1) y_i(1) x_i(-1).$$

对于 $w \in$W，G/B 中的 B-轨道 O$_w^+$ = BwB/B 和 B$^-$-轨道 O$_w^-$ = B^-wB/B 分别称为对应于 w 的 Bruhat胞腔和对向布鲁哈特胞腔。令

$$\mathcal{N}_w = \mathcal{N} \cap \dot{w} \mathcal{N}^- \dot{w}^{-1} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{N}_w^- = \mathcal{N}^- \cap \dot{w} \mathcal{N}^- \dot{w}^{-1},$$

于是我们得到以下同构

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_w &\to \mathcal{B} w \mathcal{B}/\mathcal{B}, \qquad a \mapsto a \dot{w} \mathcal{B}, \quad a \in \mathcal{N}_w, \\ \mathcal{N}_w^- &\to \mathcal{B}^- w \mathcal{B}/\mathcal{B}, \qquad b \mapsto b \dot{w} \mathcal{B}, \quad b \in \mathcal{N}_w. \end{aligned}$$

Let $\ell(w)$ 表示 $w \in$W 的长度。注意，若 $w = w_1 w_2$ 且 $\ell(w) = \ell(w_1) + \ell(w_2)$，则 n

$$\mathcal{N}_w \dot{w} = (\mathcal{N}_{w_1} \dot{w}_1)(\mathcal{N}_{w_2} \dot{w}_2)$$

是一个直积分解。设 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ 是 w 的一个约化表达式，则

$$\begin{array}{rccc} \phi_w : & \mathbb{C}^k & \longrightarrow & \mathcal{O}_w^+ \\ & (\xi_1, \dots, \xi_k) & \mapsto & x_{i_1}(\xi_1) \dot{s}_{i_1} \cdots x_{i_k}(\xi_k) \dot{s}_{i_k} \mathcal{B} \end{array}$$

是一个同构（参见 [MR04, LY20]），而 $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ 被称为由约化词 $w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k}$ 定义的 O_w^+ 上的 Bott-Samelson 坐标。

设 $w_0 \in W$ 为最长的魏尔群元素。对于 $w \in W$，令 $\hat{}w$ 定义为

$$\hat{w}\cdot w = w_0 \qquad \text{or} \qquad \hat{w} = w_0\cdot w^{-1}.$$

恒等式

$$\mathcal{N}_w^- = \dot{\hat{w}}^{-1}\mathcal{N}_{\hat{w}}\dot{\hat{w}}$$

给出同构

$$\begin{array}{rccc}\psi_w: & \mathcal{B}^-w\mathcal{B}/\mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\hat{w}}^+\\ & a\dot{w}\mathcal{B} & \mapsto & \dot{\hat{w}}a^{-1}\mathcal{B},\end{array}$$

其中 $a \in \mathrm{N}_{-w}$。因此，O_w^- 的参数化可写为 $\phi_{\hat{}w}\bigcirc\psi_w^{-1}:\mathbb{C}^k\to\mathrm{O}_w^-$，其中 $k = \ell(\hat{}w) = \ell(w_0)-\ell(w)$，并且按照 [LY20] 的说法，我们称其为与约化词 $\hat{}w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k}$ 相关的 O_w^- 的 Bott-Samelson 坐标。

另一种仅在 O_w^- 的开子集上定义的坐标可描述如下。回顾一下，Richardson 簇 $\mathrm{R}_{v,w}$ 定义为

$$\mathcal{R}_{v,w} := \mathcal{O}_w^+\cap\mathcal{O}_v^-,$$

当且仅当 $v \le w$ 属于 Bruhat序时，该集合才非空。令 $\hat{}w$ 如上所定义，并令 $\hat{}w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k}$ 为 $\hat{}w$ 的一个约化表达式。那么映射

$$\begin{array}{rccc}\varphi_{\hat{w}}: & \mathbb{C}^k & \longrightarrow & \mathcal{R}_{w,w_0}\\ & (\xi_1,\dots,\xi_k) & \mapsto & y_{i_1}(\xi_1)y_{i_2}(\xi_2)\cdots y_{i_k}(\xi_k)\dot{w}\mathcal{B}\end{array} \tag{5.18}$$

定义了一个同构（参见 [MR04, KW15]）。我们称 $\mathrm{R}_{w,w_0}\subset\mathrm{O}_w^-$ 上的坐标系为与约化词 $\hat{}w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_k}$ 相关联的 R_{w,w_0} 的 Lusztig坐标。注意，$\varphi_{\hat{}w}$ 的像不依赖于我们为 $\hat{}w$ 选择的约化词。还要注意，$\mathrm{R}_{w,w_0} = w_0\mathrm{B}^-\mathrm{B}\cap\mathrm{O}_w^-$ 是 O_w^- 与平移后的大胞腔 $w_0\mathrm{B}^-\mathrm{B}$ 的交集，因此 φ 仅在 O_w^- 的一个开稠密子空间上定义坐标。

为简便起见，在本文余下部分中，我们主要使用相应 Bruhat胞腔中一般元素的 Lusztig坐标。我们将给出一个具体例子，说明这两种坐标系之间的区别（参见下文 (7.16) 和 (7.15)，其中给出了 B_2 的旗簇中一般元素的参数化）。

本文将通过把这些方程嵌入 Hessenberg 形式 (2.1) 中的 f-KT 格，讨论 A-、B-和 G 型李代数上的 f-KT 层级。

6. The f-KT hierarchy of type A

现在，让我们从 A 型李代数的角度来考察前几节讨论的 f-KT 层级，

$$\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C}) := \{X\in\mathrm{End}(\mathbb{C}^{n+1}) : \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

回顾一下，$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ 有一个三角分解，$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_-$，其中 $\mathfrak{h}$（分别为 $\mathfrak{n}_+$、$\mathfrak{n}_-$）是 $\mathfrak{g}$ 的子群，由对角矩阵（分别为严格上三角矩阵、严格下三角矩阵）组成。于是，Cartan子代数 $\mathfrak{h}$ 定义为

$$\mathfrak{h} = \left\{\mathrm{diag}(h_1,\dots,h_{n+1}) : \sum_{i=1}^{n+1}h_i = 0,\ h_i\in\mathbb{C}\right\}.$$

令 ε_i 为由 $\varepsilon_i(\mathrm{diag}(h_1,\dots,h_{n+1})) = h_i$ 给出的线性映射 $\varepsilon_i:\mathfrak{h}\to\mathbb{C}$。那么，$\mathfrak{g}$ 关于 $\mathfrak{h}$ 的根系定义为

$$\Sigma_{A_n} = \{\pm(\varepsilon_i-\varepsilon_j) : 1\le i<j\le n+1\}.$$

特别地，正根系为

$$\Sigma_{A_n}^+ = \{\varepsilon_i-\varepsilon_j = \alpha_i+\alpha_{i+1}+\cdots+\alpha_{j-1} : 1\le i<j\le n+1\}.$$

注意，单根为 $\alpha_i = \varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}$ 和 $|\Sigma_{A_n}^+| = {}^{n}_{(n+1)\,2}$。

我们取切瓦利基的形式为，

$$H_i = E_{i,i}-E_{i+1,i+1},\qquad X_i = E_{i,i+1},\qquad Y_i = E_{i+1,i},\qquad (1\le i\le n).$$

根向量 $Y_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$、$(i<j)$ 定义为

$$Y_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} = E_{j,i} = (-1)^{j-i}[[\cdots[[Y_i,Y_{i+1}],Y_{i+2}]\cdots],Y_{j-1}].$$

那么， $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ 的 Lax 矩阵 $L_A \in \mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbb{C})$ 为

$$L_A = \sum_{i=1}^{n}(a_iH_i + X_i + b_iY_i) + \sum_{j=3}^{n+1}\sum_{i=1}^{j-1} b_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}Y_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2-a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ b_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} & b_2 & a_3-a_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ b_{\varepsilon_1-\varepsilon_n} & b_{\varepsilon_2-\varepsilon_n} & \cdots & \cdots & a_n-a_{n-1} & 1 \\ b_{\varepsilon_1-\varepsilon_{n+1}} & b_{\varepsilon_2-\varepsilon_{n+1}} & \cdots & \cdots & b_n & -a_n \end{pmatrix},$$

其中 $b_i = b_{\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}}$，以及 A 型的 f-KT 方程，

$$\frac{\partial L_A}{\partial t_1} = [P_A, L_A] \qquad \text{with} \qquad P_A = \sum_{i=1}^{n}(a_iH_i + X_i),$$

由此得到

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a_i}{\partial t_1} = b_i \qquad (1 \le i \le n), \\ \dfrac{\partial b_{\varepsilon_i-\varepsilon_j}}{\partial t_1} = -\left(\sum\limits_{k=1}^{n}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)(H_k)a_k\right) b_{\varepsilon_i-\varepsilon_j} + b_{\varepsilon_i-\varepsilon_{j+1}} - b_{\varepsilon_{i-1}-\varepsilon_j} \qquad (1 \le i < j \le n), \end{cases}$$

其中 $\varepsilon_i(H_k) = \delta_{i,\ k} - \delta_{i,\ k+1}$。将 Lax 矩阵 L_A 与 (2.2) 中的 L 比较，我们得到

$$a_{i,i} = a_i - a_{i-1} \qquad (1 \le i \le n+1),$$
$$a_{\ell+k,k} = b_{\varepsilon_k-\varepsilon_{\ell+k}} \qquad (1 \le k \le n-\ell+1,\ 1 \le \ell \le n).$$

L_A 的这些项可表示为

$$a_i = \frac{\partial}{\partial t_1}\ln \tau_i^A(\mathbf{t}), \qquad (1 \le i \le n),$$
$$b_{\varepsilon_k-\varepsilon_{\ell+k}} = \frac{p_{\ell+1}(\tilde{D})\tau_k^A(\mathbf{t}) \circ \tau_{\ell+k-1}^A(\mathbf{t})}{\tau_k^A(\mathbf{t})\tau_{\ell+k-1}^A(\mathbf{t})} \qquad (1 \le k \le n-\ell+1),$$

其中 τ^A-函数在 (5.6) 中定义。首先回忆一下，外积空间 $\wedge^i\mathbb{C}^{n+1}$ 给出 $SL_{n+1}(\mathbb{C})$ 的不可约最高权表示，其最高权为 $\varpi_i = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_i$，最高权向量为 $v_{\varpi_i} = e_1 \wedge \cdots \wedge e_i$。注意，此处 $\varpi_i(H_j) = \delta_{i,\ j}$。于是， τ-函数可表示为 $g(\mathbf{t}) = \exp(\Theta_{L^0}(\mathbf{t}))$ 的顺序主子式的行列式，即

$$\tau_i^A(\mathbf{t}) = \langle v_{\varpi_i}, g(\mathbf{t})\cdot v_{\varpi_i}\rangle_{\varpi_i} = \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_i,\ e^{\Theta_{L^0}(\mathbf{t})}\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_i\rangle = \Delta_i(\mathbf{t}) \qquad (1 \le i \le n), \tag{6.1}$$

其中，$\cdot,\cdot$不过是 $\wedge^i\mathbb{C}^{n+1}$上的通常内积（行列式），而 $\Delta_i(\mathbf{t})$是矩阵 $g(\mathbf{t})$的第 i个主子式。它们是众所周知的 A 型 f-KT 层级的 τ函数（参见 [KW15]）。值得注意的是，对于三对角 Toda 格的情形，这些公式已见于 [GW84, FH 91] 。这里我们断言，该公式对 f-KT 层级仍然成立。

这里我们还给出 -函数关于一个 Painlev´e 除子 $\mathbf{t}_*$ 的展开形式，其中 $e^{\Theta_{L^0}(\mathbf{t}_*)} = n_*w_*b_*$，

$$\begin{aligned} \tau_i^A(\mathbf{t}) = \Delta_i(\mathbf{t}) &= \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_i, e^{\Theta_{L^0}(\mathbf{t})}n_*w_*b_* \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_i\rangle \\ &= \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_i \le n+1} \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_i, e^{\Theta_{L^0}(\mathbf{t})}e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}\rangle \langle e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}, n_*w_*b_* \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_i\rangle. \end{aligned} \tag{6.2}$$

由引理 5.2 中的（5.7）可得此公式。这里注意，集合$\{e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i} : 1 \le j_1 < \cdots < j_i \le n+1\}$构成 $\wedge^i\mathbb{C}^{n+1}$的标准正交基。如果初始矩阵 L^0 是幂零的，那么 τ函数就成为关于 t 的多项式。我们将在下一节研究多项式解。

6.1. 多项式 τ-函数。在 (3.5) 中，若将所有特征值设为零，即 $\kappa_i = 0$ 对所有 i，则有

$$\tau_i^A(\mathbf{t}; w_*) = \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_i, \mathcal{P}_n^A(\mathbf{t})n_* \cdot e_{w_*(1)} \wedge \cdots \wedge e_{w_*(i)}\rangle, \qquad (1 \le i \le n), \tag{6.3}$$

其中 $\mathrm{P}_n^A(\mathbf{t})$ 是 (3.7) 中给出的 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵,

$$\mathcal{P}_n^A(\mathbf{t}) = \mathcal{P}_{n+1}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} 1 & p_1(\mathbf{t}) & p_2(\mathbf{t}) & p_3(\mathbf{t}) & \cdots & p_n(\mathbf{t}) \\ 0 & 1 & p_1(\mathbf{t}) & p_2(\mathbf{t}) & \cdots\cdots & p_{n-1}(\mathbf{t}) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & p_{n-i+1}(\mathbf{t}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.4}$$

我们注意到，通过列出所有置换$w_* \in \mathfrak{S}_{n+1}$，即可得到类型 A 的多项式解的分类。对于每个 w_*，我们还需要 (3.1) 中的一个元素 n_*，其构造如下（另见 [MR04, KW13]）。(5.17) 中定义的矩阵 $y_i^A(\xi) \in SL_{n+1}$ 为

$$y_i^A(\xi) := \exp(\xi Y_i) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \xi & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad (1 \le i \le n),$$

其中 ξ 是一个参数。对于每个 $w_* \in \mathfrak{S}_{n+1}$，令 $\hat{w}$ 定义为

$$\hat{w}\cdot w_* = w_0 \qquad \text{or} \qquad \hat{w} = w_0 \cdot w_*^{-1}, \tag{6.5}$$

其中 w_0 是 $\mathfrak{S}_{n+1}$ 中的最长元素。我们将 $\hat{w}$ 写成一个约化表达式:

$$\hat{w} = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_m} \quad \text{with} \quad m = \ell(\hat{w}) = \ell(w_0) - \ell(w_*),$$

其中 $\ell(w)$ 表示 w 的长度。那么，Lusztig 坐标 (5.18) 中与 w_* 相关联的 n_* 为

$$n_* = y_{i_1}^A(\xi_1)\, y_{i_2}^A(\xi_2)\cdots y_{i_m}^A(\xi_m), \tag{6.6}$$

其中 $\{\xi_1,\ldots,\xi_m\}$ 给出了自由参数集。也就是说，元素 $n_*\dot{w}_* \bmod \mathrm{B}^+$ 给出了旗 SL_{n+1}/B^+ 的相应 Bruhat胞腔中的一个一般元素，而该胞腔的维数为 $m = \ell(\hat{w})$。

例如，考虑 $w_* = s_1s_2s_3s_4s_1s_3s_2$ A_4-型的 f-KT 层级。于是我们有 $\hat{w} = s_2s_4s_3$，且$n_* = y_2(\xi_1)y_4(\xi_2)y_3(\xi_3)$由下式给出

$$n_*\dot{w}_* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \xi_1 & 0 & 0 \\ \xi_3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \xi_2\xi_3 & 1 & 0 & -\xi_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bruhat 胞腔 $X_{w_*} = \mathrm{N}^-\dot{w}_*\mathrm{B}^+/\mathrm{B}^+$ 有三个自由参数，即 $\dim(X_{w_*}) = 3$。注意到

$$w_*(1,2,3,4,5) = (3,5,2,4,1), \tag{6.7}$$

我们有 (6.3) 中 τ-函数在 $w_* = s_1s_2s_3s_4s_1s_3s_2$ 下的多项式解,

$$\begin{aligned} \tau_1^A(\mathbf{t}, w_*) &= S_{\ydiagram{2}}(\mathbf{t}) + \xi_3 S_{\ydiagram{3}}(\mathbf{t}) + \xi_2\xi_3 S_{\ydiagram{4}}(\mathbf{t}), \\ \tau_2^A(\mathbf{t}, w_*) &= S_{\ydiagram{3,1}}(\mathbf{t}), \\ \tau_3^A(\mathbf{t}, w_*) &= S_{\ydiagram{2,1}}(\mathbf{t}) + \xi_3 S_{\ydiagram{3,1}}(\mathbf{t}) + \xi_1\xi_3 S_{\ydiagram{2,2}}(\mathbf{t}), \\ \tau_4^A(\mathbf{t}, w_*) &= S_{\ydiagram{1,1,1}}(\mathbf{t}). \end{aligned}$$

现在可以求出矩阵 L_A 的元素。为计算 $p_{\ell+1}(D)\tau_k \bigcirc \tau_{k+\ell-1}$，以下公式很有用（参见 [Kod18]），

$$\begin{aligned} p_m(\tilde{D})\tau_\alpha \circ \tau_\beta &= \sum_{i+j=m} \big(p_i(\tilde{\partial})\tau_\alpha\big)\big(p_j(-\tilde{\partial})\tau_\beta\big) \\ &= \sum_{i+j=m} \big(S_{\mu_i}(\tilde{\partial})\tau_\alpha\big)\big((-1)^j S_{\nu_j}(\tilde{\partial})\tau_\beta\big), \end{aligned} \tag{6.8}$$

其中 μ_i 表示有 i 个横向方格的杨图，而 ν_j 表示 j 个垂直方格。

于是我们发现

$$p_5(\tilde{D})S_{\square\square}\circ S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}} = S_{\square} - S_{\square} = 0,$$

$$p_5(\tilde{D})S_{\square\square\square}\circ S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}} = S_{\square\square} - S_{\square}^2 + S_{\square} = 0,$$

$$p_5(\tilde{D})S_{\square\square\square\square}\circ S_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}} = S_{\square\square\square} - S_{\square\square}S_{\square} + S_{\square}S_{\square} - S_{\square} = 0.$$

注意，它们是一些 Pl¨ucker 关系。这意味着我们有

$$b_{\alpha[1,4]}(\mathbf{t}) = a_{5,1}(\mathbf{t}) = \frac{p_5(\tilde{D})\tau_1\circ\tau_4}{\tau_1\tau_4} = 0.$$

这给出 $b_{\alpha[1,3]} = a_{4,1}$ 和 $b_{\alpha[2,4]} = a_{5,2}$ 满足

$$a_{4,1}(\mathbf{t}) = a_{4,1}^0\frac{\tau_4\tau_0}{\tau_3\tau_1} = \frac{p_4(\tilde{D})\tau_1\circ\tau_3}{\tau_1\tau_3} \qquad \text{and} \qquad a_{5,2}(\mathbf{t}) = a_{5,2}^0\frac{\tau_5\tau_1}{\tau_4\tau_2} = \frac{p_4(\tilde{D})\tau_2\circ\tau_4}{\tau_2\tau_4},$$

其中 $\tau_0 = 1$ 和 $\tau_5 = -1$。还可以发现

$$p_4(\tilde{D})\tau_1\circ\tau_3 = -\xi_3(\xi_1+\xi_2+\xi_3)\tau_4, \qquad p_4(\tilde{D})\tau_2\circ\tau_4 = 0,$$

也就是说，我们有

$$a_{4,1}^0 = -\xi_3(\xi_1+\xi_2+\xi_3) \qquad \text{and} \qquad a_{5,2}^0 = 0.$$

这个例子表明，(6.7) 中对应于 w_* 的 τ-函数给出了一个 A_4 型 f-KT 层级的有理解，其元素为 $b_{\alpha[1,5]} = b_{\alpha[2,5]} = 0$；这是一个 3 带 KT 层级。

应当注意，若 $a_{4,1}^0 = 0$，则我们得到一个 2 带 KT 层级的解，即 $a_{5,1} = a_{4,1} = a_{5,2} = 0$。于是我们可以发现

$$p_3(\tilde{D})\tau_1\circ\tau_2 = \tau_3, \qquad p_3(\tilde{D})\tau_2\circ\tau_3 = \tau_1\tau_4, \qquad p_3(\tilde{D})\tau_3\circ\tau_4 = \tau_2\tau_5,$$

and

$$a_{3,1}(\mathbf{t}) = \frac{\tau_3(\mathbf{t})}{\tau_1(\mathbf{t})\tau_2(\mathbf{t})}, \qquad a_{4,2}(\mathbf{t}) = \frac{\tau_1(\mathbf{t})\tau_4(\mathbf{t})}{\tau_2(\mathbf{t})\tau_3(\mathbf{t})}, \qquad a_{5,3} = -\frac{\tau_2(\mathbf{t})}{\tau_3(\mathbf{t})\tau_4(\mathbf{t})}.$$

7. The f-KT hierarchy of type B

我们将 B 型李代数写成以下形式，

$$\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{C}) = \{\, X\in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{2n+1}) : X^TF + FX = 0\,\}, \tag{7.1}$$

其中矩阵 F 由下式给出

$$F = \sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^{n-i+1}E_{i,2n+2-i} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & (-1)^n\\ \vdots & \iddots & & \vdots & & \iddots & \vdots\\ 0 & & 0 & 0 & -1 & & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & & -1 & 0 & 0 & & 0\\ \vdots & \iddots & & \vdots & & \iddots & \vdots\\ (-1)^n & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Chevalley 向量 $\{H_i, X_i, Y_i\}$ 满足以下条件，

$$[H_i, X_j] = C_{j,i}X_j, \qquad [H_i, Y_j] = -C_{j,i}Y_j, \qquad [X_i, Y_j] = \delta_{i,j}H_i,$$

其中 $C_B = (C_{i,j})$ 是 B 型 Cartan 矩阵，

$$C_B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots\\ 0 & \cdots & -1 & 2 & -2\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

我们采用以下 Chevalley 生成元的表示（参见 [KY96]），

$$H_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1} + E_{2n+1-i,2n+1-i} - E_{2n+2-i,2n+2-i}, \qquad (1\le i\le n-1),$$
$$H_n = 2(E_{n,n} - E_{n+2,n+2}),$$

单根向量,

$$X_i = E_{i,i+1} + E_{2n+1-i,2n+2-i} \qquad (1 \le i \le n),$$

以及负生成元,

$$\text{(7.3)} \qquad \begin{cases} Y_i = E_{i+1,i} + E_{2n+2-i,2n+1-i} & (1 \le i \le n-1), \\ Y_n = 2(E_{n+1,n} + E_{n+2,n+1}). \end{cases}$$

然后，通过取交换子生成负根向量 Y_α

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = N_{-\alpha,-\beta}\, Y_{\alpha+\beta},$$

其中 $N_{-\alpha,\,-\beta} \ne 0$ 若 $\alpha+\beta \in \Sigma^+$。令 ε_i 为 $\mathfrak{h}^*$ 中与 $\hat{}E_i = E_{i,\,i} - E_{2n+2-i,\,2n+2-i}$对偶的基向量，即 $\varepsilon_i(\hat{}E_j) = \delta_{i,\,j}$，则正根集合为

$$\Sigma^+ = \left\{\ \varepsilon_i\ (1 \le i \le n),\quad \varepsilon_i \pm \varepsilon_j\ (1 \le i < j \le n)\ \right\},$$

其中 $\varepsilon_i = \alpha_i + \cdots + \alpha_n$。注意到 $|\Sigma^+| = n^2$。

7.1. $\mathfrak{so}_{2n+1}$上的 f-KT 层级。 $\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{C})$上的 f-KT 层级的 Lax 矩阵 L_B 定义为

$$L_B = \sum_{i=1}^{n} a_i H_i + \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{\alpha\in\Sigma^+} b_\alpha Y_\alpha.$$

因变量 $\{a_i, b_\alpha\}$ 的总数为 n^2+n。 L_B 的特征值集合为

$$\{0,\ \pm\kappa_i\ (1 \le i \le n)\},$$

其中假设 $\kappa_i \ne 0$ 和 $\kappa_i \ne \kappa_j$ $(i \ne j)$。注意，当 $m=$ 为奇数时，不变量 $I_m = \frac{1}{m}\mathrm{tr}(L_B^m)$ 消失。因此， B 型的 f-KT 层级仅针对奇数时刻 $\mathrm{t}_B = (t_1, t_3, t_5, \ldots)$ 定义，并且每个不变量 I_{2k+2} 都定义了如下 Lax 方程,

$$\frac{\partial L_B}{\partial t_{2k+1}} = [P_{2k+1}, L_B], \qquad P_{2k+1} := \Pi_{\mathfrak{b}^+}\nabla(I_{2k+2}) = (L_B^{2k+1})_{\ge 0}.$$

例如， B_3 型的 f-KT 格可表述如下。正根系 $\Sigma^+_{B_3}$ 由 3^2 个元素组成，相应的根向量为

$$\begin{aligned} &Y_{\varepsilon_1-\varepsilon_2} = Y_1 = E_{2,1} + E_{7,6}, \quad Y_{\varepsilon_2-\varepsilon_3} = Y_2 = E_{3,2} + E_{6,5}, \quad Y_{\varepsilon_3} = Y_3 = 2(E_{4,3} + E_{5,4}), \\ &Y_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} = E_{3,1} - E_{7,5}, \quad Y_{\varepsilon_2} = E_{4,2} - E_{4,2}, \quad Y_{\varepsilon_2+\varepsilon_3} = E_{5,2} + E_{6,3}, \\ &Y_{\varepsilon_1} = E_{4,1} + E_{7,4}, \quad Y_{\varepsilon_1+\varepsilon_3} = E_{5,1} - E_{7,3}, \quad Y_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = E_{6,1} + E_{7,2}. \end{aligned}$$

Lax 矩阵于是给出为

$$\begin{aligned} L_{B_3} &= \sum_{i=1}^{3}(a_i H_i + X_i + b_i Y_i) + \sum_{\alpha\in\Sigma^+_{B_3}\setminus\Pi} b_\alpha Y_\alpha \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & 1 & & & & & \\ b_1 & a_2-a_1 & 1 & & & & \\ b_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} & b_2 & 2a_3-a_2 & 1 & & & \\ b_{\varepsilon_1} & b_{\varepsilon_2} & b_3 & 0 & 1 & & \\ b_{\varepsilon_1+\varepsilon_3} & b_{\varepsilon_2+\varepsilon_3} & 0 & b_3 & -2a_3+a_2 & 1 & \\ b_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} & 0 & b_{\varepsilon_2+\varepsilon_3} & -b_{\varepsilon_2} & b_2 & -a_2+a_1 & 1 \\ 0 & b_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} & -b_{\varepsilon_1+\varepsilon_3} & b_{\varepsilon_1} & -b_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} & b_1 & -a_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

那么，秩为 3 的 B 型 f-KT 层级的首个成员为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial a_i}{\partial t_1} = b_i, \quad (i=1,2,3), \qquad \frac{\partial b_1}{\partial t_1} = -\sum_{j=1}^{3}(C_{1,j}a_j)\,b_1 + b_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}, \\ &\frac{\partial b_2}{\partial t_1} = -\sum_{j=1}^{3}(C_{2,j}a_j)\,b_2 - b_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} + b_{\varepsilon_2}, \quad \frac{\partial b_3}{\partial t_1} = -\sum_{j=1}^{3}(C_{3,j}a_j)\,b_3 - b_{\varepsilon_2}, \\ &\frac{\partial b_{\varepsilon_1-\varepsilon_3}}{\partial t_1} = -(a_1+a_2-2a_3)b_{\varepsilon_1-\varepsilon_3} + b_{\varepsilon_1}, \quad \frac{\partial b_{\varepsilon_2}}{\partial t_1} = (a_1-a_2)b_{\varepsilon_2} - b_{\varepsilon_1} + b_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}, \\ &\frac{\partial b_{\varepsilon_1}}{\partial t_1} = -a_1 b_{\varepsilon_1} + b_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}, \quad \frac{\partial b_{\varepsilon_2+\varepsilon_3}}{\partial t_1} = (a_1-2a_3)b_{\varepsilon_2+\varepsilon_3} - b_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}, \\ &\frac{\partial b_{\varepsilon_1+\varepsilon_3}}{\partial t_1} = -(a_1-a_2+2a_3)b_{\varepsilon_1+\varepsilon_3} + b_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}, \quad \frac{\partial b_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}}{\partial t_1} = -a_2 b_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}, \end{aligned}$$

其中 $C_{i,j}=\alpha_i(H_j)$ 是 B_3 的 Cartan 矩阵。

7.2. B 型 f-KT 层级的 τ-函数。将 Lax 矩阵 L_B 嵌入 Hessenberg 形式（$(2n+1)\times(2n+1)$ 矩阵）后，对角元素表示为

$$\begin{cases} a_{i,i}=a_i-a_{i-1} \quad (1\le i\le n-1), \qquad a_{n,n}=2a_n-a_{n-1},\\ a_{n+1,n+1}=0, \qquad a_{n+1+k,n+1+k}=-a_{n+1-k,n+1-k} \quad (1\le k\le n), \end{cases} \tag{7.4}$$

其中我们假设 设 $a_0=0$。下三角部分的元素满足以下对称性

$$a_{\ell+k,k}=-(-1)^{\ell}a_{2n+2-k,2n+2-\ell-k} \qquad \text{for} \quad \begin{cases} 1\le k\le \left\lfloor \dfrac{2n-\ell+1}{2}\right\rfloor,\\ 1\le \ell\le 2n-1. \end{cases} \tag{7.5}$$

注意，如果 ℓ 是偶数， 设 $\ell=2m$，则有 $a_{n+m+1,n-m+1}=0$，它是 L_B 中的一个反对角元素。

回顾一下，$a_{i,\ j}(t)$ 已在命题 4.1 中给出，其行列式为 $\Delta_i(t)$。那么，(7.4) 中的元素 $a_i(t)$'s 可表示为

$$\begin{cases} a_i(\mathbf{t}_B)=\dfrac{\partial}{\partial t_1}\ln\Delta_i(\mathbf{t}_B), \qquad (1\le i\le n-1),\\ a_n(\mathbf{t}_B)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t_1}\ln\Delta_n(\mathbf{t}_B), \end{cases} \tag{7.6}$$

其中， $\Delta_i(\mathbf{t}_B)$（$1\le i\le n$）定义为

$$\Delta_i(\mathbf{t}_B):=\langle e_1\wedge\cdots\wedge e_i, e^{\Theta_{L_B^0}(\mathbf{t}_B)}\cdot e_1\wedge\cdots\wedge e_i\rangle \qquad \text{with} \qquad \Theta_{L_B^0}(\mathbf{t}_B):=\sum_{k=0}^{\infty}(L_B^0)^{2k+1}t_{2k+1}.$$

这里， L_B^0 是初始 Lax 矩阵。注意到 $\Theta_{L_B^0}\in\mathfrak{o}_{2n+1}(\mathbb{C})$，因此 $g(\mathbf{t}_B):=e^{\Theta_{L_B^0}(\mathbf{t}_B)}$ 是群$O_{2n+1}(\mathbb{C})$ 中的一个元素，其 Lie(O_{2n+1}) 为 $=\mathfrak{o}_{2n+1}$，即（见 (7.1)）

$$g(\mathbf{t}_B)^TFg(\mathbf{t}_B)=F \qquad \text{where} \qquad F=\sum_{i=1}^{2n+1}(-1)^{n-i+1}E_{i,2n+2-i}.$$

群 $O_{2n+1}(\mathbb{C})$ 定义如下

$$O_{2n+1}(\mathbb{C}):=\left\{X\in\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{2n+1}):X^TFX=F\right\}.$$

我们据此定义 τ-函数，用于 B 型的 f-KT 层级：

$$\begin{cases} \tau_i^B(\mathbf{t}_B)=\Delta_i(\mathbf{t}_B) \qquad (1\le i\le n-1),\\ \tau_n^B(\mathbf{t}_B)=\sqrt{\Delta_n(\mathbf{t}_B)}, \end{cases} \tag{7.7}$$

因此，变量 $a_i(\mathbf{t}_B)$ 可写成 (5.4) 的形式，

$$a_i(\mathbf{t}_B)=\frac{\partial}{\partial t_1}\ln\tau_i^B(\mathbf{t}_B) \qquad (1\le i\le n),$$

这是由 [FH91, GW84] 为三对角情形引入的。

注 7.1. τ-函数 $\tau_n^B(\mathbf{t}_B)$ 的表达式 (7.7) 与 $SO_{2n+1}(\mathbb{C})$ 的旋量表示有关，具体如下。回顾一下， $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$ 的基本权为

$$\varpi_i=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_i \quad (1\le i\le n-1), \qquad \varpi_n=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_n),$$

其中， ε_i 是 $\mathfrak{h}^*$ 中与 $\hat{}e_i=E_{i,i}-E_{2n+2-i,2n+2-i}$对偶的基向量，即 $\varepsilon_i(\hat{e}_j)=\delta_{i,j}$。这意味着，标准表示的外积 $\wedge^i\mathbb{C}^{2n+1}$ 给出 $\mathfrak{so}_{2n+1}(\mathbb{C})$的一个最高权为$\varpi_i=\varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_i$ 的不可约表示（对应于 $1\le i\le n$），并且我们有

$$\wedge^i\mathbb{C}^{2n+1}\cong V(\varpi_i) \quad (1\le i\le n-1), \qquad \wedge^n\mathbb{C}^{2n+1}\cong V(2\varpi_n).$$

接下来，我们将 $c_\lambda^{Spin_{2n+1}}(\tilde{g})$和 $c_\lambda^{SO_{2n+1}}(g)$分别记为旋量群 Spin$_{2n+1}(\mathbb{C})$和正交群 $SO_{2n+1}(\mathbb{C})$上的矩阵系数，其中 $g=\pi(\tilde{g})\in SO_{2n+1}(\mathbb{C})$，且覆盖映射为 $\pi:\mathrm{Spin}_{2n+1}(\mathbb{C})\to SO_{2n+1}(\mathbb{C})$。于是，由引理5.2中的(5.9)，我们有

$$\left(c_{\varpi_n}^{Spin_{2n+1}}(\tilde{g})\right)^2=c_{2\varpi_n}^{Spin_{2n+1}}(\tilde{g})=c_{2\varpi_n}^{SO_{2n+1}}(g)=\langle v_{2\varpi_n},g\cdot v_{2\varpi_n}\rangle_{2\varpi_n}. \tag{7.8}$$

取 $g=g(\mathbf{t}_B):=\exp(\Theta_{L^0}(\mathbf{t}_B))$，我们有

$$\tau_n^B(\mathbf{t}_B)=c_{\varpi_n}^{Spin_{2n+1}}(\tilde{g}(\mathbf{t}_B)) \quad \textit{with} \quad g(\mathbf{t}_B)=\pi(\tilde{g}(\mathbf{t}_B)).$$

特别地，表示 $V(\varpi_n)$ 是一种旋量表示，而 $\tau_n^B(\mathbf{t}_B)$ 可以用 Pfaffian 表示。看来， $c_{\varpi_i}^{Spin_{2n+1}}(\tilde{g})$ 关于 Pfaffian 的显式公式可能并不那么简单。不过， τ-函数的多项式 Pfaffian 公式已在 [Xie22a] 中得到。

还应注意，(7.4) 中的对称性由此意味着行列式 $\Delta_i(\mathbf{t}_B)$ 满足以下关系，

$$\Delta_i(\mathbf{t}_B) = \pm\Delta_{2n+1-i}(\mathbf{t}_B) \qquad (1 \le i \le n). \tag{7.9}$$

（可以证明，与这些子式对应的杨图互为共轭，见命题 7.5。）也就是说，对于 (3.2) 中的 $1 \le i \le n$，解仅由 $\Delta_i(\mathbf{t})$ 确定，

$$\Delta_i(\mathbf{t}_B) = d_i\langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_i, Ve^{\Theta_K(\mathbf{t}_B)}V^{-1}n_0n_*\dot{w}_* \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_i\rangle.$$

这里，幺幂矩阵 $n_* \in \mathrm{N}^-$ 如下给出。我们先给出与 B_n 型代数对应的魏尔群 $\mathfrak{W}_{B_n}$。魏尔群 $\mathfrak{W}_{B_n}$ 的每个生成元都可以通过 Bruhat 嵌入 [BL00]，用 A 型的简单反射表示

$$s_i^B = \begin{cases} s_i^A s_{2n+1-i}^A, & 1 \le i \le n-1, \\ s_n^A s_{n+1}^A s_n^A, & i = n, \end{cases} \tag{7.10}$$

其中，s_i^A 是对称群 $\mathfrak{S}_{2n+1}$ 的一个简单反射。我们有

$$\mathfrak{W}_{B_n} = \left\langle s_i^B \;\middle|\; (s_i^B)^2 = (s_i^Bs_j^B)^2 = e\ (|i-j| \ge 2),\ (s_{i-1}^Bs_i^B)^3 = e\ (2 \le i \le n-1),\ (s_{n-1}^Bs_n^B)^4 = e \right\rangle,$$

且 $\mathfrak{W}_{B_n} \cong \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n$, $|\mathfrak{W}_{B_n}| = 2^n n!$ 最长元素 w_0 可以表示为

$$w_0 = (s_1^Bs_2^B\cdots s_n^B)\cdot(s_1^Bs_2^B\cdots s_n^B)\cdots(s_1^Bs_2^B\cdots s_n^B), \qquad \text{with} \qquad \ell(w_0) = n^2,$$

其中括号中的元素重复 n 次。例如， $\mathfrak{W}_{B_2}$ 由下式给出

$$\mathfrak{W}_{B_2} = \left\{e,\ s_1^B,\ s_2^B,\ s_1^Bs_2^B,\ s_2^Bs_1^B,\ s_1^Bs_2^Bs_1^B,\ s_2^Bs_1^Bs_2^B, s_1^Bs_2^Bs_1^Bs_2^B = w_0\right\}.$$

为了计算 $n_*\dot{w}_*$，我们首先定义 $y_i^B(\xi) \in O_{2n+1}(\mathbb{C})$ 如下

$$y_i^B(\xi) = \exp(\xi Y_i), \qquad (1 \le i \le n), \tag{7.11}$$

其中 Y_i 在式 (7.3) 中定义。此外，表示 $\dot{s}_i^B \in O_{2n+1}(\mathbb{C})$ 定义为 y

$$\begin{cases} \dot{s}_i^B = \dot{s}_i^A\dot{s}_{2n+1-i}^A, & (1 \le i \le n-1), \\ \dot{s}_n^B = \dot{s}_n^A\dot{s}_{n+1}^A\dot{s}_n^A, \end{cases} \tag{7.12}$$

其中 $s_i^A \in \mathfrak{S}_{2n+1}$。

Now，根据式 (5.18)，令 $\hat{w}$ 由以下带有一个约化表达式的形式定义 ，

$$\hat{w} = w_0 \cdot w_*^{-1} = s_{i_1}^Bs_{i_2}^B\cdots s_{i_m}^B.$$

然后我们将幺幂矩阵 n_* 定义为

$$n_* = y_{i_1}^B(\xi_1)\, y_{i_2}^B(\xi_2)\cdots y_{i_m}^B(\xi_m),$$

且 $n_*\dot{w}_*$ 模(B^+) 给出了旗簇 $O_{2n+1}(\mathbb{C})/\mathrm{B}^+$中 Bruhat胞腔 $\mathrm{N}^-\dot{w}_*\mathrm{B}^+$ 的泛点。

现在我们计算 $w_* \in \mathfrak{W}_B$的子式 $\Delta_n(\mathbf{t}_B)$。为此，我们考虑如下展开式（见（6.2），另见引理 5.2）：

$$\begin{aligned} \Delta_n(\mathbf{t}_B) &= \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,\ g(\mathbf{t}_B)n_*\dot{w}_* \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\rangle \\ &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_n \le 2n+1} \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,\ g(\mathbf{t}_B)\cdot e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}\rangle \cdot \langle e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n},\ n_*\dot{w}_* \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n\rangle, \end{aligned} \tag{7.13}$$

其中， $g(\mathbf{t}_B) = e^{\Theta_{L_B^0}(\mathbf{t}_B)}$ 且 $g(\mathbf{t}_B^*) = n_*w_*b_*$ （注意，此处我们在（3.2）中令 $d_n = 1$）。在展开式中，我们首先注意到，对每个 $w \in \mathfrak{W}_B = \mathfrak{S}_n \ltimes \mathbb{Z}_2^n$，都存在子群 $\mathfrak{N}_B \cong \mathbb{Z}_2^n$ 中的 r，使得

$$\dot{w} \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \pm\dot{r} \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, \tag{7.14}$$

其中 $\mathfrak{N}_B$ 是表示 $\mathbb{Z}_2^n$的正规子群，可定义为

$$\mathfrak{N}_B = \left\langle r_i \in \mathfrak{W}_B\ (1 \le i \le n) : r_i(j) = \begin{cases} 2n+2-j, & \text{if } j = i, \\ j, & \text{if } j \ne i. \end{cases} \right\rangle.$$

注意， $\mathfrak{N}_B$ 是一个阿贝尔群，且 $|\mathfrak{N}_B| = 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ 。每个元素均可表示为

$$r_k = s_k^B s_{k+1}^B \cdots s_{n-1}^B s_n^B s_{n-1}^B \cdots s_{k+1}^B s_k^B \qquad \text{for} \quad k = 1, \ldots, n.$$

例如，在 B_2 且 $w_* = e$ 的情形下，矩阵 n_* 在 Lusztig坐标中由 $n_* = y_1^B(\xi_1) y_2^B(\xi_2) y_1^B(\xi_3) y_2^B(\xi_4)$ 给出，

$$n_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_1+\xi_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\xi_2\xi_3 & 2(\xi_2+\xi_4) & 1 & 0 & 0 \\ 2\xi_2^2\xi_3 & 2(\xi_2+\xi_4)^2 & 2(\xi_2+\xi_4) & 1 & 0 \\ 2\xi_1\xi_2^2\xi_3 & 2(\xi_3\xi_4^2+\xi_1(\xi_2+\xi_4)^2) & 2(\xi_3\xi_4+\xi_1\xi_2+\xi_1\xi_4) & \xi_1+\xi_3 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.15}$$

于是有

$$\begin{aligned} &\langle e_1 \wedge e_2,\, n_* \cdot e_1 \wedge e_2 \rangle = \langle e_1 \wedge e_2,\, \dot{s}_1^B n_* \cdot e_1 \wedge e_2 \rangle = 1, \\ &\langle \dot{r}_2 \cdot e_1 \wedge e_2,\, n_* \cdot e_1 \wedge e_2 \rangle = \langle e_1 \wedge e_2,\, \dot{s}_2^B n_* \cdot e_1 \wedge e_2 \rangle = 2(\xi_2+\xi_4)^2, \\ &\langle \dot{r}_1 \cdot e_1 \wedge e_2,\, n_* \cdot e_1 \wedge e_2 \rangle = \langle e_1 \wedge e_2,\, \dot{s}_2^B \dot{s}_1^B n_* \cdot e_1 \wedge e_2 \rangle = 2(\xi_3\xi_4+\xi_1(\xi_2+\xi_4))^2, \\ &\langle \dot{r}_1 \dot{r}_2 \cdot e_1 \wedge e_2,\, n_* \cdot e_1 \wedge e_2 \rangle = \langle e_1 \wedge e_2,\, \dot{s}_2^B \dot{s}_1^B \dot{s}_2^B n_* \cdot e_1 \wedge e_2 \rangle = 4(\xi_2\xi_3\xi_4)^2. \end{aligned}$$

注 7.2. 这些多项式 $\{1, \xi_2+\xi_4, \xi_3\xi_4+\xi_1(\xi_2+\xi_4)\ \ \xi_2\xi_3\xi_4\}$ 是n_*的旋量表示中的旋量。注意，这些坐标对于 B 型旗簇的全正性很有用。

注 7.3. 在 Bott-Samelson 坐标中，同一 w_* 对应的矩阵 n_* 为

$$n_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2\xi_2+2\xi_1\xi_4 & 2\xi_4 & 1 & 0 & 0 \\ 2(\xi_3-2\xi_2\xi_4+\xi_1\xi_4^2) & 2\xi_4^2 & 2\xi_4 & 1 & 0 \\ -2\xi_2^2+2\xi_1\xi_3 & 2\xi_3 & 2\xi_2 & \xi_1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.16}$$

这在我们讨论若干极限 $\xi_i \to 0$ 时可能会有用。

方程 (7.8) 表明，与 $r \in \mathfrak{N}_B$ 相关的项是完全平方，

$$\begin{aligned} \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,\ g(\mathbf{t}_B)\dot{r} \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle &= (\phi_r(\mathbf{t}_B))^2, \\ \langle \dot{r} e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,\ n_* \dot{w}_* \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle &= (\eta_r(\xi; w_*))^2, \end{aligned}$$

其中 $\phi_r(\mathbf{t}_B)$ 是一个指数多项式，而 $\eta_r(\xi, w_*)$ 是关于 ξ_i 的齐次多项式。现在我们给出本节的主要定理。

定理 7.4. 与 w_* 相关的 τ-函数记作 $\tau_n^B(\mathbf{t}_B;\, w_*)$，其表达式为 b y

$$\tau_n^B(\mathbf{t}_B, w_*) = \sqrt{\Delta_n(\mathbf{t}_B)} = \sum_{r \in \mathfrak{N}_B} \phi_r(\mathbf{t}_B) \eta_r(\xi; w_*).$$

证明. 根据引理 5.2 中的 (5.9)，我们首先注意到

$$\langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n, g(\mathbf{t}_B) h \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle = \left(\langle v_{\varpi_n}, \tilde{g}(\mathbf{t}_B) \tilde{h} \cdot v_{\varpi_n} \rangle_{\varpi_n} \right)^2,$$

其中 $\pi(\tilde{g}(\mathbf{t}_B)) = g(\mathbf{t}_B)$，且 $\pi(h) = n_* \dot{w}_*$ ，其覆盖映射为 $\pi : \mathrm{Spin}_{2n+1} \to SO_{2n+1}$。另请注意， $\phi_r(\mathbf{t}_B)$ 和 $\eta_r(\xi; w_*)$ 可以表示为

$$\phi_r(\mathbf{t}_B) = \langle v_{\varpi_n}, \tilde{g}(\mathbf{t}_B) \cdot u_r \rangle_{\varpi_n} \quad \text{and} \quad \eta_r(\xi; w_*) = \langle u_r, \tilde{h} \cdot v_{\varpi_n} \rangle_{\varpi_n},$$

其中 $\{u_r : r \in \mathfrak{N}_B\}$ 是表示 $V(\varpi_n)$ 的标准正交基集合。然后根据引理 5.2 中的 (5.7)，我们得到

$$\langle v_{\varpi_n}, \tilde{g}(\mathbf{t}_B) \tilde{h} \cdot v_{\varpi_n} \rangle_{\varpi_n} = \sum_{r \in \mathfrak{N}_B} \langle v_{\varpi_n}, \tilde{g}(\mathbf{t}_B) \cdot u_r \rangle_{\varpi_n} \langle u_r, \tilde{h} \cdot v_{\varpi_n} \rangle_{\varpi_n},$$

由此得到所需的公式。 □

7.3. B 型的多项式解。对于每个 $w_* \in \mathfrak{W}_B$，令 $g(\mathbf{t}_B) = \mathrm{P}_n^B(\mathbf{t}_B)$，即可得到 $\tau_k^B(\mathbf{t}_B)$ 的多项式解，即

$$\tau_k^B(\mathbf{t}_B) = \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_k,\ \mathcal{P}_n^B(\mathbf{t}_B) n_* \dot{w}_* \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \rangle, \qquad (1 \le k \le n-1),$$
$$\tau_n^B(\mathbf{t}_B) = \sqrt{\langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,\ \mathcal{P}_n^B(\mathbf{t}_B) n_* \dot{w}_* \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle},$$

其中，$\mathrm{P}_n^B(\mathbf{t}_B)$ 由 (3.7) 中的 $\mathrm{P}_{2n+1}(t_1, 0, t_3, 0, \ldots)$ 定义。

为了计算这些 τ-函数，我们先回顾一下：对于指标集 $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$，对应于该指标集的舒尔多项式定义为

$$S_\lambda(\mathbf{t}_B) = \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_k, \mathcal{P}_n^B(\mathbf{t}_B) \cdot e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \rangle \quad \text{with} \quad \lambda = (i_k - k, i_{k-1} - (k-1), \cdots, i_1 - 1). \tag{7.17}$$

于是得到以下命题。

命题 7.5. 设 λ' 是 λ 的转置杨图。则舒尔多项式 $S_\lambda(\mathbf{t}_B)$ 和 $S_{\lambda'}(\mathbf{t}_B)$ 相同，即

$$S_\lambda(\mathbf{t}_B) = S_{\lambda'}(\mathbf{t}_B).$$

为证明这一点，我们先给出以下引理，它是命题 7.5 的一个特例 .

引理 7.6. 对于 $\lambda = (k)$，具有 k 个横向方格的杨图，我们有

$$S_{(k)}(\mathbf{t}_B) = S_{(1^k)}(\mathbf{t}_B),$$

其中 (k) 的转置图为 (1^k)，这是具有 k 个垂直方格的图。

证明。回顾

$$\exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} \kappa^{2i+1} t_{2i+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \kappa^k S_{(k)}(\mathbf{t}_B).$$

代入 $\kappa \to -\kappa$ 和 $\mathbf{t}_B \to -\mathbf{t}_B$，我们有

$$\exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} \kappa^{2i+1} t_{2i+1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \kappa^k (-1)^k S_{(k)}(-\mathbf{t}_B) = \sum_{k=0}^{\infty} \kappa^k S_{(1^k)}(\mathbf{t}_B),$$

其中我们用到了 $(-1)^k S_{(k)}(-\mathbf{t}_B) = S_{(1^k)}(\mathbf{t}_B)$。这就证明了该引理。 □

现在我们证明该命题。

命题 7.5 的证明。令 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$，并将其转置图记为 $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_s)$。回忆舒尔多项式的 Jacobi-Trudi 恒等式，

$$S_\lambda(\mathbf{t}) = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_2+1} & \cdots & h_{\lambda_r+r-1} \\ h_{\lambda_1-1} & h_{\lambda_2} & \cdots & h_{\lambda_r+r-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_1-r+1} & h_{\lambda_2-r+2} & \cdots & h_{\lambda_r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{\lambda'_1} & e_{\lambda'_2+1} & \cdots & e_{\lambda'_s+s-1} \\ e_{\lambda'_1-1} & e_{\lambda'_2} & \cdots & e_{\lambda'_s+s-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{\lambda'_1-s+1} & e_{\lambda'_2-s+2} & \cdots & e_{\lambda'_s} \end{vmatrix},$$

其中 $h_k = S_{(k)}$ 和 $e_k = S_{(1^k)}$。那么引理 7.6，即 $h_k = e_k$，证明了该命题。 □

现在我们考虑与 $w \in \mathfrak{W}_B$ 相关联的舒尔多项式，

$$S_{\lambda(w)}(\mathbf{t}_B) = \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n,\ \mathcal{P}_n^B(\mathbf{t}_B) \dot{w} \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle,$$

其中 $\lambda(w) = (i_n - n, \ldots, i_2 - 2, i_1 - 1)$，且 $\{w(1) \ldots, w(n)\} = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_n\}$。为了求出 $\lambda(w)$，我们先注意以下引理。

引理 7.7。对于一个元素 $r_k \in \mathfrak{N}_B$，相应的杨图 $\lambda(r_k)$ 可用以下 Frobenius 记号表示，

$$\lambda(r_k) = (n - k + 1 | n - k),$$

即钩图 $(n-k+2, 1^{n-k})$。

证明。由于我们有

$$r_k \cdot (1, 2, \ldots, n) = (1, \ldots, k-1, \bar{k}, k+1, \ldots, n) \qquad \text{with} \qquad \bar{k} = 2n + 2 - k.$$

对应的杨图为 $\lambda = (n+2-k, 1^{n-k})$，在 Frobenius 记号中表示为 $(n-k+1|n-k)$。于是我们得到关于 $\lambda(w)$ 的以下命题。 □

命题 7.8。在 Frobenius 记号中，杨图 $\lambda(w)$ 可表示为以下形式，

$$\lambda(w) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \,|\, \alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \ldots, \alpha_m - 1),$$

其中 $\alpha_m \ge 1$，其中某个常数为 m。

证明。让我们来看下面这个含有 $n = 7$ 的例子。我们考虑

$$w \cdot (1,2,3,4,5,6,7) = \dot{r}_2\dot{r}_4\dot{r}_7(1,2,3,4,5,6,7) = (1,\bar{2},3,\bar{4},5,6,\bar{7}) = (1,14,3,12,5,6,9).$$

于是，由引理 7.7 可得

$$\lambda(r_2) = (6|5), \qquad \lambda(r_4) = (4|3), \qquad \lambda(r_7) = (1|0).$$

也就是说，这个命题表明

$$\lambda(w) = \lambda(r_2r_4r_7) = (6,4,1|5,3,0).$$

这可以如下理解。首先，将 w 表示在下图中（Sato 的 Maya 图）：



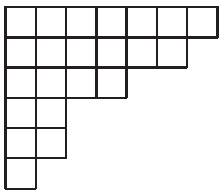
也可以写成

$$w \cdot (1,2,\dots,15) = (1,\overline{2},3,\overline{4},5,6,\overline{7},\overline{8},9,\overline{10},\overline{11},12,\overline{13},14,\overline{15}),$$

其中，对于指标 k，若 k，则在 Maya 图中第 k 个方格处标记一颗白石；其他不带“横线”的指标则标记黑石。特别地，从左数第 8 个（第 $n+1$ 个）方格总是标记一颗白石。注意，通常 $\overline{k} = 16 - k$、$\overline{k} = 2n + 2 - k$，且 $\overline{n+1} = n+1$。于是，对应的杨图为 $\lambda_{n-j+1} = i_j - j$，即在本例中，我们有

$$\lambda(w) = (7,6,4,2,2,1,0),$$

即



众所周知，Maya 图与杨图之间存在直接联系。从左下角开始，我们可以沿着杨图的边界逆时针描绘格路，并为每条边标上从 1 到 $2n+1$ 的数字，使每条水平边标记为带有“bar”的指标，每条垂直边标记为不带“bar”的指标。每个钩图中的水平边和垂直边分别标记为 k 和 $\overline{k} = 2n + 2 - k$，其中某个数为 k。于是很容易看出，钩图中的垂直方格数为 $n-k+1$，而横向方格数为 $\overline{k}-(n+1)+1 = n+2-k$。也就是说，在 Frobenius 记号中，这个钩图表示为 $(n-k+1, n-k)$，从而证明了该引理。注意，公式中的数 m 等于 $w(1,\dots,n)$ 中带有“bar”的指标总数，也就是 w 中 r 的长度。在这个例子中，我们有 $m = 3$，其 (2, 4, 7) ($r = r_2r_4r_7$)，于是得到

$$\lambda(w) = (6,4,1|5,3,0).$$

□

现在，对于每个 $w \in \mathfrak{W}_B$[JP91, You89]，我们都有舒尔多项式 $S_{\lambda(w)}(\mathbf{t}_B)$ 的 Jozefiak-Pragacz 型恒等式。

命题 7.9. 设 $\lambda(w)$ 由以下 Frobenius 公式给出，

$$\lambda(w) = (\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \dots, \alpha_s - 1 \,|\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s).$$

那么舒尔多项式可以表示为

$$S_{\lambda(w)}(\mathbf{t}_B) = \frac{1}{2^s} Q_\alpha(\mathbf{t}_B)^2,$$

其中 $Q_\alpha(\mathbf{t}_B)$ 是杨图为 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$ 的 Q-舒尔多项式。注意，如果 s 为奇数，则在末尾补上 0，使其成为 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s, 0)$。

证明。利用 Frobenius 记号，詹比利公式给出

$$S_{\lambda(w)} = \begin{vmatrix} S_{(\alpha_1-1|\alpha_1)} & S_{(\alpha_1-1|\alpha_2)} & \cdots & S_{(\alpha_1-1|\alpha_s)} \\ S_{(\alpha_2-1|\alpha_1)} & S_{(\alpha_2-1|\alpha_2)} & \cdots & S_{(\alpha_2-1|\alpha_s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{(\alpha_s-1|\alpha_1)} & S_{(\alpha_s-1|\alpha_2)} & \cdots & S_{(\alpha_s-1|\alpha_s)} \end{vmatrix},$$

其中 $(\alpha|\beta)$ 是钩形杨图（$\alpha+1,1^{\beta}$）。接着注意到，舒尔多项式 $S_{(\alpha-1|\beta)}(t)$ 可表示为

$$S_{(\alpha-1|\beta)}=\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_{\beta} & p_{\alpha+\beta} \\ 1 & p_1 & \cdots & p_{\beta-1} & p_{\alpha+\beta-1} \\ 0 & 1 & \ddots & p_{\beta-2} & p_{\alpha+\beta-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & p_{\alpha} \end{vmatrix}.$$

沿最后一列展开，得

$$S_{(\alpha-1|\beta)}=(-1)^{\beta+1}\left(h_{\alpha+\beta}-h_{\alpha+\beta-1}e_1+h_{\alpha+\beta-2}e_2+\cdots+(-1)^{\beta+1}h_{\alpha}e_{\beta}\right),$$

其中 $h_k=p_k=S_{(k)}$ 和 $e_k=S_{(1^k)}$。根据引理 7.6，$h_k=e_k$，并注意到 $S_{(k)}=Q_k$（见附录 B），可得

$$S_{(\alpha-1|\beta)}=\sum_{i=0}^{\beta}(-1)^i Q_{\alpha+i}Q_{\beta-i}=\frac{1}{2}\left(Q_{\alpha}Q_{\beta}+Q_{\alpha,\beta}\right),$$

其中用到了 $Q_{\alpha,\beta}$ 的定义（见附录 B）。于是有

$$S_{\lambda(w)}=\frac{1}{2^s}\begin{vmatrix} Q_{\alpha_1}Q_{\alpha_1} & Q_{\alpha_1,\alpha_2}+Q_{\alpha_1}Q_{\alpha_2} & \cdots & Q_{\alpha_1,\alpha_s}+Q_{\alpha_1}Q_{\alpha_s} \\ Q_{\alpha_2,\alpha_1}+Q_{\alpha_2}Q_{\alpha_1} & Q_{\alpha_2}Q_{\alpha_2} & \cdots & Q_{\alpha_2,\alpha_s}+Q_{\alpha_2}Q_{\alpha_s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{\alpha_s,\alpha_1}+Q_{\alpha_s}Q_{\alpha_1} & Q_{\alpha_s,\alpha_2}+Q_{\alpha_s}Q_{\alpha_2} & \cdots & Q_{\alpha_s}Q_{\alpha_s} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2^s}\begin{vmatrix} 0 & Q_{\alpha_1,\alpha_2} & \cdots & Q_{\alpha_1,\alpha_s} & Q_{\alpha_1} \\ Q_{\alpha_2,\alpha_1} & 0 & \cdots & Q_{\alpha_2,\alpha_s} & Q_{\alpha_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Q_{\alpha_s,\alpha_1} & Q_{\alpha_s,\alpha_2} & \cdots & 0 & Q_{\alpha_s} \\ -Q_{\alpha_1} & -Q_{\alpha_2} & \cdots & -Q_{\alpha_s} & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2^s}\left[|Q_{\alpha_i,\alpha_j}|+\sum_{1\le i,j\le s}\Delta_{i,j}Q_{\alpha_i}Q_{\alpha_j}\right],$$

其中 $\Delta_{i,j}$ 是斜对称矩阵（Q_{α_i,α_j}）的余子式。现在需要考虑两种情况：

(a) 若 $s=$ 为偶数，则余子式 $\Delta_{i,j}$ 是斜对称的，$\Delta_{i,j}=-\Delta_{j,i}$。在这种情况下，第三行中的求和项消失，因此有

$$S_{\lambda(w)}=\frac{1}{2^s}|Q_{\alpha_i,\alpha_j}|=\frac{1}{2^s}(Q_{\alpha})^2,$$

也就是说，斜对称矩阵 (Q_{α_i,α_j}) 的行列式等于 Pfaffian 的平方，记作Q_{α}。

(b) 若 $s=$ 为奇数，则第二行可写为

$$S_{\lambda(w)}=\frac{1}{2^s}\begin{vmatrix} 0 & Q_{\alpha_1,\alpha_2} & \cdots & Q_{\alpha_1,\alpha_s} & Q_{\alpha_1} \\ Q_{\alpha_2,\alpha_1} & 0 & \cdots & Q_{\alpha_2,\alpha_s} & Q_{\alpha_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ Q_{\alpha_s,\alpha_1} & Q_{\alpha_s,\alpha_2} & \cdots & 0 & Q_{\alpha_s} \\ -Q_{\alpha_1} & -Q_{\alpha_2} & \cdots & -Q_{\alpha_s} & 0 \end{vmatrix},$$

也就是说，右下角的元素 1 可以替换为 0（当$s=$ 为奇数时，首个 $s\times s$ 子式为 0）。于是我们有

$$S_{\lambda(w)}=\frac{1}{2^s}(Q_{\tilde{\alpha}})^2,$$

其中杨图 $\tilde{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,0)$，即将 $Q_{\alpha_k}=Q_{\alpha_k,0}$ 与 $-Q_{\alpha_k}=Q_{0,\alpha_k}$ 视为相同。

证明至此完成。 □

7.4. 示例：B_2 型的多项式解。这里给出当 $w_*=e$、s_1^B、$s_1^Bs_2^B$、$s_1^Bs_2^Bs_1^B$ 和 $w_0=s_1^Bs_2^Bs_1^Bs_2^B$ 时，$(\tau_1^B(\mathbf{t}_B,w_*)\ \tau_2^B(\mathbf{t}_B,w_*))$ 的多项式解。$\tau_1^B(\mathbf{t}_B)$ 由下式给出

$$\tau_1^B(\mathbf{t}_B,w_*)=\Delta_1(\mathbf{t}_B)=\langle e_1,\mathcal{P}_2^B(\mathbf{t}_B)n_*\dot{w}_*e_1\rangle,$$

对于 $\tau_2^B(\mathbf{t}_B)$，我们使用定理 7.4 中的公式，即

$$\tau_2^B(\mathbf{t}_B,w_*)=\sum_{r\in\mathfrak{N}_B}\eta_r(\xi;w_*)\phi_r(\mathbf{t}_B).$$

首先，我们对每个 $r \in \mathfrak{N}_B$ 计算多项式 $\phi_r(\mathbf{t}_B) = \overline{\sqrt{e_1 \wedge e_2, \mathrm{P}_2^B(\mathbf{t}_B)\, \dot{r} \cdot e_1 \wedge e_2}}$。

(a) 对于 $r = e$，我们有

$$(\phi_e(\mathbf{t}_B))^2 = \langle e_1 \wedge e_2, \mathcal{P}_2^B(\mathbf{t}_B) \cdot e_1 \wedge e_2 \rangle = 1.$$

(b) 对于 $r = r_1$，我们有

$$(\phi_{r_1}(\mathbf{t}_B))^2 = \langle e_1 \wedge e_2, \mathcal{P}_2^B(\mathbf{t}_B) \dot{r}_1 \cdot e_1 \wedge e_2 \rangle = S_{\ydiagram{3,1}}(\mathbf{t}_B) = \frac{1}{2}\left(Q_{\ydiagram{2}}(\mathbf{t}_B)\right)^2.$$

(c) 对于 $r = r_2$，我们有

$$(\phi_{r_2}(\mathbf{t}_B))^2 = \langle e_1 \wedge e_2, \mathcal{P}_2^B(\mathbf{t}_B) \dot{r}_1 \cdot e_1 \wedge e_2 \rangle = S_{\ydiagram{2}}(\mathbf{t}_B) = \frac{1}{2}\left(Q_{\ydiagram{1}}(\mathbf{t}_B)\right)^2.$$

(d) 对于 $r = r_1 r_2$，我们有

$$(\phi_{r_1 r_2}(\mathbf{t}_B))^2 = \langle e_1 \wedge e_2, \mathcal{P}_2^B(\mathbf{t}_B) \dot{r}_1 \dot{r}_2 \cdot e_1 \wedge e_2 \rangle = S_{\ydiagram{2,2}}(\mathbf{t}_B) = \frac{1}{4}\left(Q_{\ydiagram{2,1}}(\mathbf{t}_B)\right)^2.$$

现在我们计算 n_* 和 $\eta_r(\xi;\, w_*)$，然后给出 $(\tau_1(\mathbf{t}_B, w_*)\ \tau_2^B(\mathbf{t}_B, w_*))$。

(1) $w_* = e$：在此情形下，我们有 $n_* = y_1^B(\xi_1) y_2^B(\xi_2) y_1^B(\xi_3) y_2^B(\xi_4)$[1]，，从而得到

$$n_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \xi_1+\xi_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2\xi_2\xi_3 & 2(\xi_2+\xi_4) & 1 & 0 & 0 \\ 2\xi_2^2\xi_3 & 2(\xi_2+\xi_4)^2 & 2(\xi_2+\xi_4) & 1 & 0 \\ 2\xi_1\xi_2^2\xi_3 & 2(\xi_3\xi_4^2+\xi_1(\xi_2+\xi_4)^2) & 2(\xi_3\xi_4+\xi_1(\xi_2+\xi_4)) & \xi_1+\xi_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$r \in \mathfrak{N}_B$ 的系数 $\eta_r(\xi; e) = \overline{\sqrt{\dot{r} \cdot e_1 \wedge e_2,\, n_* \cdot e_1 \wedge e_2}}$ 为

$$\eta_e = 1, \quad \eta_{r_1} = \sqrt{2}(\xi_3\xi_4 + \xi_1(\xi_2+\xi_4)), \quad \eta_{r_2} = \sqrt{2}(\xi_2+\xi_4), \quad \eta_{r_1 r_2} = 2\xi_2\xi_3\xi_4.$$

于是，τ-函数为

$$\begin{cases} \tau_1^B(\mathbf{t}_B, e) = 1 + (\xi_1+\xi_3) S_{\ydiagram{1}}(\mathbf{t}_B) + 2\xi_2\xi_3 S_{\ydiagram{2}}(\mathbf{t}_B) + 2\xi_2^2\xi_3 S_{\ydiagram{3}}(\mathbf{t}_B) + 2\xi_1\xi_2^2\xi_3 S_{\ydiagram{4}}(\mathbf{t}_B), \\ \tau_2^B(\mathbf{t}_B, e) = 1 + (\xi_2+\xi_4) Q_{\ydiagram{1}}(\mathbf{t}_B) + (\xi_3\xi_4 + \xi_1(\xi_2+\xi_4)) Q_{\ydiagram{2}}(\mathbf{t}_B) + \xi_2\xi_3\xi_4 Q_{\ydiagram{2,1}}(\mathbf{t}_B). \end{cases}$$

(2) $w_* = s_1^B$：在此情形下，我们有 $n_* = y_2^B(\xi_1) y_1^B(\xi_2) y_2^B(\xi_3)$，从而得到

$$n_* \dot{s}_1^B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\xi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2(\xi_1+\xi_3) & -2\xi_1\xi_3 & 1 & 0 & 0 \\ 2(\xi_1+\xi_3)^2 & -2\xi_1^2\xi_2 & 2(\xi_1+\xi_3) & 0 & -1 \\ 2\xi_2\xi_3^2 & 0 & 2\xi_2\xi_3 & 1 & -\xi_2 \end{pmatrix}.$$

$r \in \mathfrak{N}_B$ 的系数 $\eta_r(\xi; s_1^B) = \overline{\sqrt{\dot{r} \cdot e_1 \wedge e_2,\, n_* \dot{s}_1^B \cdot e_1 \wedge e_2}}$ 为

$$\eta_e = 1, \quad \eta_{r_1} = \sqrt{2}\xi_2\xi_3, \quad \eta_{r_2} = \sqrt{2}(\xi_1+\xi_3), \quad \eta_{r_1 r_2} = 2\xi_1\xi_2\xi_3.$$

那么，τ-函数由下式给出

$$\begin{cases} \tau_1^B(\mathbf{t}_B, s_1^B) = S_{\ydiagram{1}}(\mathbf{t}_B) + 2(\xi_1+\xi_3) S_{\ydiagram{2}}(\mathbf{t}_B) + 2(\xi_1+\xi_3)^2 S_{\ydiagram{3}}(\mathbf{t}_B) + 2\xi_1\xi_2^2 S_{\ydiagram{4}}(\mathbf{t}_B), \\ \tau_2^B(\mathbf{t}_B, s_1^B) = 1 + (\xi_1+\xi_3) Q_{\ydiagram{1}}(\mathbf{t}_B) + \xi_2\xi_3 Q_{\ydiagram{2}}(\mathbf{t}_B) + \xi_1\xi_2\xi_3 Q_{\ydiagram{2,1}}(\mathbf{t}_B). \end{cases}$$

(3) $w_* = s_1^B s_2^B$：在这种情况下，我们有 $n_* = y_1^B(\xi_1) y_2^B(\xi_2)$，由此得到

$$n_* \dot{s}_1^B \dot{s}_2^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\xi_1 & 0 \\ 2\xi_2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2\xi_2^2 & 0 & -2\xi_2 & 0 & -1 \\ 2\xi_1\xi_2^2 & 1 & -2\xi\xi_2 & 0 & -\xi_1 \end{pmatrix}.$$

$\eta_r(\xi; s_1^B s_2^B) = \overline{\sqrt{\dot{r} \cdot e_1 \wedge e_2,\, n_* \dot{s}_1^B \dot{s}_2^B \cdot e_1 \wedge e_2}}$ 的系数 $r \in \mathfrak{N}_B$ 为

$$\eta_e = 0, \quad \eta_{r_1} = 1, \quad \eta_{r_2} = 0, \quad \eta_{r_1 r_2} = \sqrt{2}\xi_2.$$

[1]令 $w_*(1, 2, \ldots, 2n+1) = (i_1, i_2, \ldots, i_{2n+1})$，则 n_* 第 k 列的符号由满足 $i_j > i_k$ 的 $i_j (j < k)$ 的个数决定

那么， τ-函数为

$$\begin{cases} \tau_1^B(\mathbf{t}_B, s_1^B s_2^B) = S_{\square}(\mathbf{t}_B) + 2\xi_2 S_{\square\square}(\mathbf{t}_B) + 2\xi_2^2 S_{\square\square\square}(\mathbf{t}_B) + 2\xi_1\xi_2^2 S_{\square\square\square\square}(\mathbf{t}_B), \\ \tau_2^B(\mathbf{t}_B, s_1^B s_2^B) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_{\square\square}(\mathbf{t}_B) + \xi_2 Q_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}(\mathbf{t}_B)\right). \end{cases}$$

(4) $w_* = s_1^B s_2^B s_1^B$：在此情况下，我们有 $n_* = y_2^B(\xi)$，由此得到

$$n_* \dot{s}_1^B \dot{s}_2^B \dot{s}_1^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\xi & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\xi^2 & -2\xi & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r \in \mathfrak{N}_B$的系数 $\eta_r(\xi; s_1^B s_2^B s_1^B) = \sqrt{\dot{r}\cdot e_1 \wedge e_2, n_* \dot{s}_1^B \dot{s}_2^B \dot{s}_1^B \cdot e_1 \wedge e_2}$由下式给出

$$\eta_e = 0, \quad \eta_{r_1} = 1, \quad \eta_{r_2} = 0, \quad \eta_{r_1 r_2} = \sqrt{2}\xi.$$

那么， τ-函数由下式给出

$$\begin{cases} \tau_1^B(\mathbf{t}_B, s_1^B s_2^B s_1^B) = S_{\square\square\square\square}(\mathbf{t}_B), \\ \tau_2^B(\mathbf{t}_B, s_1^B s_2^B s_1^B) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Q_{\square\square}(\mathbf{t}_B) + \xi Q_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}(\mathbf{t}_B)\right). \end{cases}$$

(5) $w_* = w_0 = s_1^B s_2^B s_1^B s_2^B$(最长元素)：在此情况下，我们有 $n_* = Id$，由此得到

$$n_* \dot{s}_1^B \dot{s}_2^B \dot{s}_1^B \dot{s}_2^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$r \in \mathfrak{N}_B$的系数 $\eta_r(\xi; s_1^B s_2^B s_1^B s_2^B) = \sqrt{\dot{r}\cdot e_1 \wedge e_2, n_* \dot{s}_1^B \dot{s}_2^B \dot{s}_1^B \dot{s}_2^B \cdot e_1 \wedge e_2}$由下式给出

$$\eta_e = 0, \quad \eta_{r_1} = 0, \quad \eta_{r_2} = 0, \quad \eta_{r_1 r_2} = 1.$$

那么， τ-函数由下式给出

$$\tau_1^B(\mathbf{t}_B, w_0) = S_{\square\square\square\square}(\mathbf{t}_B), \qquad \tau_2^B(\mathbf{t}_B, w_0) = Q_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}(\mathbf{t}_B).$$

~ ~我们还计算了 $p_4(D)\Delta_1 \bigcirc \Delta_3$ 和 $p_3(D)\Delta_1 \bigcirc \Delta_2$，它们给出了条目 $a_{4,1} = a_{5,2}$ 和 $a_{3,1} = -a_{5,3}$。特别地， $a_{4,1}$ 由下式给出

$$a_{4,1} = a_{4,1}^0 \frac{\Delta_4 \Delta_0}{\Delta_3 \Delta_1} = \frac{p_4(\tilde{D})\Delta_1 \circ \Delta_3}{\Delta_1 \Delta_3}.$$

由此得到

$$p_4(\tilde{D})\Delta_1 \circ \Delta_3 = a_{4,1}^0 \Delta_1.$$

如果 $a_{4,1} = a_{3,1} = 0$ 均成立，那么这些 τ-函数给出了 B 型三对角 KT 层级的一个解。

w_*	$\tau_1 = \Delta_1$	$\tau_2 = \sqrt{\Delta_2}$	$\Delta_2 = \pm\Delta_3'$	$p_4(\tilde{D})\Delta_1 \bigcirc \Delta_3$	$p_3(\tilde{D})\Delta_1 \bigcirc \Delta_2$
e	1	1	1	0	0
s_1^B	$S_{\square}$	1	1	0	0
s_2^B	1	$Q_{\square}$	$S_{\square\square}$	0	0
$s_1^B s_2^B$	$S_{\square}$	$Q_{\square\square}$	$S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}$	$S_{\square}$	$S_{\square\square}$
$s_2^B s_1^B$	$S_{\square\square\square}$	$Q_{\square}$	$S_{\square\square}$	0	$S_{\square\square}$
$s_1^B s_2^B s_1^B$	$S_{\square\square\square\square}$	$Q_{\square\square}$	$S_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}$	$S_{\square\square\square\square}$	$Q_{\square\square}Q_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}$
$s_2^B s_1^B s_2^B$	$S_{\square\square\square}$	$Q_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}$	$S_{\begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\square\square\end{smallmatrix}}$	0	$S_{\begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\square\square\end{smallmatrix}}$
$s_1^B s_2^B s_1^B s_2^B$	$S_{\square\square\square\square}$	$Q_{\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}}$	$S_{\begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\square\square\end{smallmatrix}}$	0	0

在表中， Δ_3' 意味着如果 $\Delta_2 = S_\mu$，那么 $\Delta_3 = S_{\mu'}$ 与 μ的共轭杨图相对应。注意，如果w_* 是由s_1^B或s_2^B生成的子群（或由两者共同生成的子群）的最长元素，那么这些 τ函数给出了三对角 KT 层级 [FH91]的一个解。也就是说，我们有以下四种情形：$\{e\}$、$\{s_1^B\}$、$\{s_2^B\}$和$\{s_1^B, s_2^B\}$。此外

注意， $s_2^B s_1^B$和 $s_2^B s_1^B s_2^B$的情形给出$a_{4,\ 1}=0$。也就是说，它们是 2 带 KT 层级的解，并且我们有

$$p_3(\tilde{D})\Delta_1\circ\Delta_2=a_{3,1}^0\Delta_2,\qquad\text{and}\qquad a_{3,1}(t)=a_{3,1}^0\frac{1}{\tau_1^B(t)}.$$

8. The f-KT hierarchy of G-type

通过取以下 Chevalley 生成元，我们将 G_2 型李代数嵌入到 B_3 型李代数中，即 $\mathfrak{sl}_7(\mathbb{C})$,

$$H_1=E_{1,1}-E_{2,2}+2E_{3,3}-2E_{5,5}+E_{6,6}-E_{7,7},\qquad H_2=E_{2,2}-E_{3,3}+E_{5,5}-E_{6,6},$$

单根向量,

$$X_1=E_{1,2}+E_{3,4}+E_{4,5}+E_{6,7},\qquad X_2=E_{2,3}+E_{5,6},$$

以及负根向量,

$$Y_1=E_{2,1}+2E_{4,3}+2E_{5,4}+E_{7,6},\qquad Y_2=E_{3,2}+E_{6,5}.$$

正根集合由下式给出

$$\Sigma_G^+=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2,\ 2\alpha_1+\alpha_2,\ 3\alpha_1+\alpha_2,\ 3\alpha_1+2\alpha_2\}.$$

负根向量由下式生成

$$[Y_\alpha,Y_\beta]=N_{\alpha,\beta}Y_{\alpha+\beta}\qquad\text{if}\qquad\alpha+\beta\in\Sigma_G^+.$$

这里取以下向量,

$$\begin{aligned}Y_{\alpha\{1,1\}}&=E_{3,1}-2E_{4,2}+2E_{6,4}-E_{7,5},\\ Y_{\alpha\{2,1\}}&=E_{4,1}-E_{5,2}-E_{6,3}+E_{7,4},\\ Y_{\alpha\{3,1\}}&=E_{5,1}-E_{7,3},\\ Y_{\alpha\{3,2\}}&=E_{6,1}+E_{7,2},\end{aligned}$$

其中 $\alpha\{i,j\}:=i\alpha_1+j\alpha_2$。于是， G 型 f-KT 层级的 Lax 矩阵定义为

$$\begin{aligned}L_G&=\sum_{i=1}^{2}(a_iH_i+X_i+b_iY_i)+\sum_{i=1}^{3}b_{i,1}Y_{\alpha\{i,1\}}+b_{3,2}Y_{\alpha\{3,2\}}\\&=\begin{pmatrix}a_1&1&0&0&0&0&0\\ b_1&a_2-a_1&1&0&0&0&0\\ b_{1,1}&b_2&2a_1-a_2&1&0&0&0\\ b_{2,1}&-2b_{1,1}&2b_1&0&1&0&0\\ b_{3,1}&-b_{2,1}&0&2b_1&a_2-2a_1&1&0\\ b_{3,2}&0&-b_{2,1}&2b_{1,1}&b_2&a_1-a_2&1\\ 0&b_{3,2}&-b_{3,1}&b_{2,1}&-b_{1,1}&b_1&-a_1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

L_G 的特征值集合为

$$\{0,\ \pm(\kappa_1-\kappa_2),\ \pm\kappa_i\ (1\le i\le 2)\}.$$

于是我们发现，不变量 $I_m=\frac{1}{m}\mathrm{tr}(L_G^m)$ 在 $m=$为奇数时给出 $I_m=0$，与 B 型的情形相同；而

$$\begin{aligned}I_2&=\kappa_1^2+\kappa_2^2+(\kappa_1-\kappa_2)^2=2(3a_1^2-3a_1a_2+a_2^2+3b_1+b_2),\\ I_4&=\frac{1}{2}(\kappa_1^4+\kappa_2^4+(\kappa_1-\kappa_2)^4)=\frac{1}{4}I_2^2,\\ I_6&=\frac{1}{3}(\kappa_1^6+\kappa_2^6+(\kappa_1-\kappa_2)^6)=\frac{1}{3}(66a_1^6+2a_2^6+66b_1^3+\cdots+6b_{3,2}).\end{aligned}$$

这里省略 I_6 的完整表达式，但请注意， I_6 与 I_2 无关。由于 $I_4=\frac{1}{4}I_2^2$，由 I_4 生成的 t_3 流为

$$\frac{\partial L_G}{\partial t_3}=\frac{1}{2}I_2[\pi_{\mathfrak{b}^+}(\nabla I_2),L_G]=\frac{1}{2}I_2\frac{\partial L_G}{\partial t_1},\qquad\text{which gives}\quad\left(\frac{\partial}{\partial t_3}-\frac{I_2}{2}\frac{\partial}{\partial t_1}\right)L_G=0.$$

然后，使用平移坐标（t_1+ct_3,t_3）以及常数 $c=I_2/2$， L_G 在 t_3-流下保持不变。接着，我们考虑仅依赖于 $\mathfrak{t}_G=(t_1,t_5)$ 的 L_G。

f-KT 层级的 t_1-流由下式给出

$$\frac{\partial a_i}{\partial t_1} = b_i, \qquad (i = 1, 2),$$
$$\frac{\partial b_1}{\partial t_1} = -\sum_{j=1}^{2}(C_{1,j}a_j)b_i + b_{1,1}, \qquad \frac{\partial b_2}{\partial t_1} = -\sum_{j=1}^{2}(C_{2,j}a_j)b_2 - 3b_{1,1},$$
$$\frac{\partial b_{1,1}}{\partial t_1} = (a_1 - a_2)b_{1,1} + b_{2,1}, \qquad \frac{\partial b_{2,1}}{\partial t_1} = -a_1 b_{2,1} + b_{3,1},$$
$$\frac{\partial b_{3,1}}{\partial t_1} = (-3a_1 + a_2)b_{3,1} + b_{3,2}, \qquad \frac{\partial b_{3,2}}{\partial t_1} = -a_2 b_{3,2},$$

其中 Cartan 矩阵（$C_{i,j}$）为

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

与 A 型的情形相同，由 $a_{1,1} = a_1$ 和 $a_{2,2} = a_2 - a_1$，我们将 τ 函数定义为

$$a_i = \frac{\partial}{\partial t_1}\ln\Delta_i = \frac{\partial}{\partial t_1}\ln\tau_i^G \qquad (i = 1, 2),$$

that 是，我们有 $\tau_1 = c_1\Delta_1$ 和 $\tau_2 = c_2\Delta_2$，其中 c_1、c_2 为某些常数。于是由 $a_{3,3}$，我们有 e

$$a_{3,3} = \frac{p_1(\tilde{D})\Delta_3 \circ \Delta_2}{\Delta_3\Delta_2} = \frac{\partial}{\partial t_1}\ln\frac{\Delta_3}{\Delta_2} = 2a_1 - a_2,$$

由此可得

$$\Delta_3 = c_3'(\Delta_1)^2 = c_3(\tau_1^G)^2,$$

其中 $c_3 = c_3'c_1^2$ 是一个常数。回想一下，在 B_3 型的情形中，Δ_3 是一个完全平方。于是，τ_1^G 函数在 G_2 情形下是一个 Pfaffian。这意味着，G_2 型的解可以通过在 B_3 型的解中令 $t_3 = 0$ 而得到。

现在，由 $a_{4,\ 4} = 0$，可得

$$a_{4,4} = \frac{p_1(\tilde{D})\Delta_4 \circ \Delta_3}{\Delta_4\Delta_3} = \frac{\partial}{\partial t_1}\ln\frac{\Delta_4}{\Delta_3} = 0,$$

由此得到

$$\Delta_4 = c_4'\Delta_3 = c_4(\tau_1^G)^2.$$

类似地，由 $a_{5,\ 5} = a_2 - 2a_1$ 和 $a_{6,\ 6} = a_1 - a_2$，可得

$$\Delta_5 = c_5\tau_2^G, \qquad \Delta_6 = c_6\tau_1^G,$$

其中 c_5、c_6 为某些常数。

需要注意的是，元素 $a_{6,\ 1} = b_{3,\ 2}$ 可表示为

$$a_{6,1} = a_{6,1}^0\frac{1}{\Delta_2} = \frac{p_6(\tilde{D})\Delta_1 \circ \Delta_5}{\Delta_1\Delta_5}.$$

由于 $\Delta_5 = c_5\Delta_2$，可得

$$p_6(\tilde{D})\Delta_1 \circ \Delta_5 = a_{6,1}^0 c_5\Delta_1, \quad \text{which gives} \quad p_6(\tilde{D})\tau_1^G \circ \tau_2^G = c_6'\tau_1^G,$$

其中c_6'为某个常数。

8.1. ℓ 带状 GKT 层级。我们有如下带状结构：

(a) 若$b_{3,\ 2} = 0$ （即 4 带状 GKT），则有

$$b_{3,1} = b_{3,1}^0\frac{\Delta_2}{\Delta_1^3} = \frac{p_5(\tilde{D})\Delta_1 \circ \Delta_4}{\Delta_1\Delta_4}.$$

由于 $\Delta_4 \propto(\Delta_1)^2$, ，我们有

$$p_5(\tilde{D})\Delta_1 \circ \Delta_4 \propto \Delta_2.$$

(b) 若 $b_{3,2} = b_{3,1} = 0$ （3 带状 GKT），则有

$$b_{2,1} = b_{2,1}^0\frac{1}{\Delta_1} = \frac{p_4(\tilde{D})\Delta_1 \circ \Delta_3}{\Delta_1\Delta_3}.$$

(c) 若 $b_{3,2} = b_{3,1} = b_{2,1} = 0$ （2 带状 GKT），则有

$$b_{1,1} = b_{1,1}^0 \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{p_3(\tilde{D})\Delta_1 \circ \Delta_2}{\Delta_1 \Delta_2}.$$

(d) 若 $b_{3,2} = b_{3,1} = b_{2,1} = b_{1,1} = 0$ （三对角 GKT），则有

$$b_1 = b_1^0 \frac{\Delta_2}{\Delta_1^2} = \frac{p_2(\tilde{D})\Delta_1 \circ \Delta_1}{\Delta_1^2}, \qquad b_2 = b_2^0 \frac{\Delta_1^3}{\Delta_2^2} = \frac{p_2(\tilde{D})\Delta_2 \circ \Delta_2}{\Delta_2^2}.$$

注意，在这种情况下， b_i 可以写成如下形式，

$$b_i = b_i^0 \prod_{j=1}^{2} \left(\tau_j^G\right)^{-C_{i,j}},$$

其中 $C_{i,j}$ 是 Cartan 矩阵。 τ-函数满足

$$p_2(\tilde{D})\tau_1^G \circ \tau_1^G = b_1^0 \tau_2^G, \qquad p_2(\tilde{D})\tau_2^G \circ \tau_2^G = b_2^0 \left(\tau_1^G\right)^3.$$

8.2. G 型的多项式解。魏尔群 $\mathfrak{W}_G$ 由 $\{s_1^G, s_2^G\}$ 生成。这些元素通过 Bruhat 嵌入映入 $\mathfrak{S}_7$,

$$s_1^G = s_1^A s_6^A s_3^A s_4^A s_3^A \qquad \text{and} \qquad s_2^G = s_2^A s_5^A.$$

那么 $\mathfrak{W}_G$ 由下式给出

$$\mathfrak{W}_G = \left\langle\, s_1^G, s_2^G \;\middle|\; (s_1^G)^2 = (s_2^G)^2 = (s_1^G s_2^G)^6 = e \,\right\rangle,$$

其中有 12 个元素。我们还定义

$$y_i^G(\xi) = \exp\left(\xi Y_i\right) \qquad (i = 1, 2).$$

现在，根据 (5.18)，对于每个 $w_*^G \in \mathfrak{W}_G$，我们定义具有约化表达式的 $\hat{w}$ ，

$$\hat{w} = w_* w_0^{-1} = s_{i_1}^G s_{i_2}^G \cdots s_{i_k}^G,$$

其中 $w_0 \in \mathfrak{W}_G$ 是最长元素。相应的幺幂矩阵 $n_* \in \mathrm{N}^-$ 随后定义为 $\mathfrak{b}$

$$n_*(\xi) = Y_{i_1}(\xi_1) Y_{i_2}(\xi_2) \cdots Y_{i_k}(\xi_k).$$

然后，计算当 $\mathfrak{t}_G = (t_1, t_5)$ 时的子式 $\Delta_i(\mathfrak{t}_G)$，结果为

$$\begin{aligned} \Delta_1(\mathbf{t}_G) &= \langle e_1,\, \mathcal{P}(\mathbf{t}_G) n_*(\xi) w_* \cdot e_1 \rangle, \\ \Delta_2(\mathbf{t}_G) &= \langle e_1 \wedge e_2,\, \mathcal{P}(\mathbf{t}_G) n_*(\xi) w_* \cdot e_1 \wedge e_2 \rangle, \end{aligned}$$

其中 $\mathrm{P}(\mathfrak{t}_G)$ 定义为

$$\mathcal{P}(\mathbf{t}_G) = \exp\left(t_1 X + t_5 X^5\right) \qquad \text{with} \quad X := X_1 + X_2.$$

现在我们列出 $w_* \in \mathfrak{W}_G$ 的多项式解，每个解均由以下公式计算得出，

$$\Delta_i(\mathbf{t}_G) = \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_i,\, \mathcal{P}_7(\mathbf{t}_G) w_* \cdot e_1 \wedge \cdots \wedge e_i \rangle \qquad \text{with} \qquad \mathbf{t}_G = (t_1, t_5).$$

我们在下表中列出这些 Δ_i 函数。表中的每个杨图 λ 都表示 $S_\lambda(\mathfrak{t}_G)$。

w_*	$\tau_1 = \Delta_1$	$\tau_2 = \Delta_2$	$\Delta_3 \propto (\tau_1)^2$	$\Delta_4 = \Delta_3'$
e	1	1	1	1
s_1^G		1		
s_2^G	1		1	1
$s_2^G s_1^G$				
$s_1^G s_2^G$				
$s_1^G s_2^G s_1^G$				
$s_2^G s_1^G s_2^G$				
$s_2^G s_1^G s_2^G s_1^G$				
$s_1^G s_2^G s_1^G s_2^G$				
$s_1^G s_2^G s_1^G s_2^G s_1^G$				
$s_2^G s_1^G s_2^G s_1^G s_2^G$				
$s_1^G s_2^G s_1^G s_2^G s_1^G s_2^G$				

这里注意， τ_1 也是 Q-舒尔多项式，即 $S_{(k)} = p_k = Q_k$，且 $\Delta_3, \Delta_4 \propto (\tau_1)^2$。还要回忆一下，$\Delta_5 \propto \Delta_2'$ 和 $\Delta_6 \propto \Delta_1'$，其中 Δ_k' 表示与 Δ_k对应杨图的共轭图形的舒尔多项式。由于 G型的坐标仅为 $t = (t_1, t_5)$，我们得到以下关系，

$$S_{\square\square} = Q_{\square\!\square}, \qquad S_{\square\square\square} = \frac{1}{2} Q_{\square\!\square\square}, \qquad S_{\square\square\square\square} = \frac{1}{2} Q_{\square\!\square\square\square}, \qquad S_{\square\square\square\square\square\square} = \frac{1}{2} Q_{\square\!\square\square\square\square\square}.$$

我们还计算了 $p_6(\tilde{D})\Delta_1 \bigcirc \Delta_5$, $p_5(\tilde{D})\Delta_1 \bigcirc \Delta_4$, $p_4(\tilde{D})\Delta_1 \bigcirc \Delta_3$ 以及 $p_3(\tilde{D})\Delta_1 \bigcirc \Delta_2$。

w_*	$p_6(\tilde{D})\Delta_1 \bigcirc \Delta_5$	$p_5(\tilde{D})\Delta_1 \bigcirc \Delta_4$	$p_4(\tilde{D})\Delta_1 \bigcirc \Delta_3$	$p_3(\tilde{D})\Delta_1 \bigcirc \Delta_2$
e	0	0	0	0
s_1^G	0	0	0	0
s_2^G	0	0	0	0
$s_1^G s_2^G$	0			1
$s_2^G s_1^G$	0	0	0	
$s_1^G s_2^G s_1^G$	0	0		
$s_2^G s_1^G s_2^G$				
$s_1^G s_2^G s_1^G s_2^G$				
$s_2^G s_1^G s_2^G s_1^G$	0	0		
$s_1^G s_2^G s_1^G s_2^G s_1^G$	0	0	0	
$s_2^G s_1^G s_2^G s_1^G s_2^G$	0	0		
$s_1^G s_2^G s_1^G s_2^G s_1^G s_2^G$	0	0	0	0

注意，我们有以下关系：

$$S_{\square\square} = \frac{1}{2}(Q_{\square})^2, \qquad S_{\square\square\square\square} = \frac{1}{2}(Q_{\square\!\square})^2 = \frac{1}{2}(Q_{\square\square\square\square\square\square})^2.$$

注意，如果 w_* 是由 s_1^G 或 s_2^G 或二者共同生成的子群的最长元素，那么这些 τ-函数便给出了三对角 KT 层级 [FH91] 的一个解。也就是说，我们有以下四种情况：$\{e\}$、$\{s_1^G\}$、$\{s_2^G\}$ 和 $\{s_1^G, s_2^G\}$。

对于含有 $w_* = s_1^G s_2^G$ 的情形，这些 τ-函数给出了 4 带 KT 层级（$b_{3,\,2} = 0$）的一个解，并且我们有

$$p_5(\tilde{D})\Delta_1 \circ \Delta_4 = b_{3,1}^0 \Delta_2.$$

对于 $w_* = s_1^G s_2^G s_1^G$、$s_2^G s_1^G s_2^G s_1^G$ 和 $s_2^G s_1^G s_2^G s_1^G s_2^G$ 的情形，我们得到了 3 带 KT 层级的一个解（$b_{3,\,2} = b_{3,\,1} = 0$），并且

$$p_4(\tilde{D})\Delta_1 \circ \Delta_3 = b_{2,1}^0 \Delta_3.$$

对于 $w_* = s_2^G s_1^G$ 和 $s_1^G s_2^G s_1^G s_2^G s_1^G$ 的情形，我们得到了 2 带 KT 层级的一个解（$b_{3,\,2} = b_{3,\,1} = b_{2,\,1} = 0$），并且

$$p_3(\tilde{D})\Delta_1 \circ \Delta_2 = b_{1,1}^0 (\Delta_1)^2.$$

Appendix A. The full Kostant-Toda hierarchy

这里我们推导命题 4.1 中的公式（4.1）。文献 [KY96] 表明，f-KT 方程可以作为一般矩阵 L 的 Lax 方程的根约化得到~，

$$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial t} = [\tilde{P}, \tilde{L}], \qquad \text{with} \quad \tilde{P} = \frac{1}{2}\left((\tilde{L})_{>0} - (\tilde{L})_{<0}\right),$$

~ ~ ~ ~ ~其中 $(L)_{>0}$ 和 $(L)_{<0}$ 分别表示 L的上三角部分和下三角部分。定义满足以下条件的特征矩阵 Φ 和 Ψ

$$\tilde{L}\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}\Lambda, \qquad \tilde{\Psi}\tilde{L} = \Lambda\tilde{\Psi} \quad \text{with} \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\kappa_1, \ldots, \kappa_M),$$

其正交关系为，

$$\tilde{\Phi}\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}\tilde{\Phi} = I = \text{identity matrix}.$$

~ ~将 Φ 和 Ψ 写成如下形式，

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \tilde{\phi}_1(\kappa_1) & \cdots & \tilde{\phi}_1(\kappa_M) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\phi}_M(\kappa_1) & \cdots & \tilde{\phi}_M(\kappa_M) \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1(\kappa_1) & \cdots & \tilde{\psi}_M(\kappa_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\psi}_1(\kappa_M) & \cdots & \tilde{\psi}_M(\kappa_M) \end{pmatrix}.$$

~则 L 中的元素 $\tilde{a}_{i,\,j}$ 可表示为

$$\tilde{a}_{i,j} = \langle \kappa \tilde{\phi}_i \tilde{\psi}_j \rangle := \sum_{k=1}^{n} \kappa_k \tilde{\phi}_i(\kappa_k)\tilde{\psi}_j(\kappa_k). \tag{A.1}$$

特征矩阵中的元素由下式给出

$$\tilde{\phi}_k(t,\kappa) = \frac{e^{\frac{1}{2}\theta(t,\kappa)}}{\sqrt{D_k(t)D_{k-1}(t)}} \begin{vmatrix} c_{1,1}(t) & \cdots & c_{1,k-1}(t) & \tilde{\phi}_1^0(\kappa) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{k,1}(t) & \cdots & c_{k,k-1}(t) & \tilde{\phi}_k^0(\kappa) \end{vmatrix},$$

$$\tilde{\psi}_k(t,\kappa) = \frac{e^{\frac{1}{2}\theta(t,\kappa)}}{\sqrt{D_k(t)D_{k-1}(t)}} \begin{vmatrix} c_{1,1}(t) & \cdots & c_{1,k-1}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k,1}(t) & \cdots & c_{k,k-1}(t) \\ \tilde{\psi}_1^0(\kappa) & \cdots & \tilde{\psi}_k^0(\kappa) \end{vmatrix},$$

where $\tilde{\phi}_k^0(\kappa) = \tilde{\phi}_k(0,\kappa)$ $\tilde{\psi}_k^0(\kappa) = \tilde{\psi}(0,\kappa)$，且 $D_k(t) = \det(c_{a,\,b})_{1\le a,\,b\le k}$其中 $c_{a,\,b}(t)$由下式给出

$$c_{a,b}(t) = \langle \tilde{\phi}_a^0 \tilde{\psi}_b^0 \cdot e^{\theta} \rangle.$$

∞这里的 $\theta(t,\kappa) = \kappa t$ 可以扩展为 $\theta(\mathrm{t}\ \kappa) = \sum_{m=1} \kappa^m t_m$，用于该层级。

对于 f-KT 方程（非归一化形式），特征矩阵 Φ 可写为如下形式，

$$\tilde{\phi}_k(t,\kappa) = \frac{\tilde{\phi}_1^0(\kappa)e^{\frac{1}{2}\theta(t,\kappa)}}{\sqrt{D_k(t)D_{k-1}(t)}} \begin{vmatrix} \hat{c}_{1,1}(t) & \cdots & \hat{c}_{1,k-1}(t) & 1 \\ \hat{c}_{2,1}(t) & \cdots & \hat{c}_{2,k-1}(t) & \kappa \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hat{c}_{k,1}(t) & \cdots & \hat{c}_{k,k-1}(t) & \kappa^{k-1} \end{vmatrix} \qquad \text{with} \quad \hat{c}_{i,j} = \langle \kappa^{i-1} \tilde{\phi}_1^0 \tilde{\psi}_j^0 e^{\theta} \rangle.$$

这里我们假设初始矩阵 L^0 为

$$L^0 = \begin{pmatrix} \tilde{a}^0_{1,1} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \tilde{a}^0_{2,1} & \tilde{a}^0_{2,2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}^0_{M-1,1} & \tilde{a}^0_{M-1,2} & \cdots & \ddots & 1 \\ \tilde{a}^0_{M,1} & \tilde{a}^0_{M,2} & \cdots & \cdots & \tilde{a}^0_{M,M} \end{pmatrix},$$

that 是，$a^0_{i,\ i+1} = 1$ 对所有的 $i = 1, .. . , M-1$。那么，行列式 $D_k(t)$ 可表示为

$$D_k(t) = \det\left(\langle \kappa^{a-1}\tilde{\phi}^0_a \tilde{\psi}_b e^{\theta}\rangle\right)_{1\le a,b\le k}.$$

由于 $\theta = \kappa t$，我们注意到 $D_k(t)$ 可由朗斯基行列式给出，

$$D_k(t) = \mathrm{Wr}(f_1(t), f_2(t), \ldots, f_k(t)) \qquad \text{with} \quad f_j(t) = \langle \tilde{\phi}^0_1 \tilde{\psi}^0_j e^{\theta}\rangle.$$

也就是说，$D_k(t)$ 正是 (2.6) 中的 τ_k-函数，现在我们使用多重時間 t = (t_1, t_2,...) 来研究 f-KT 层级。

现在我们注意到 $\tilde{\phi}_k$(t κ) 可表示为

$$\tilde{\phi}_k(\mathbf{t},\kappa) = \frac{\kappa^{k-1}\tilde{\phi}^0_1(\kappa)e^{\frac{1}{2}\theta(\mathbf{t},\kappa)}}{\tau_k(\mathbf{t})\tau_{k-1}(\mathbf{t})} \begin{vmatrix} f_1(\mathbf{t}) & \cdots & f_{k-1}(\mathbf{t}) & \frac{1}{\kappa^{k-1}} \\ \partial f_1(\mathbf{t}) & \cdots & \partial f_{k-1}(\mathbf{t}) & \frac{1}{\kappa^{k-2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \partial^{k-1} f_1(\mathbf{t}) & \cdots & \partial^{k-1} f_{k-1}(\mathbf{t}) & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\kappa^{k-1}\tilde{\phi}^0_1(\kappa)e^{\frac{1}{2}\theta(\mathbf{t},\kappa)}}{\tau_k(\mathbf{t})\tau_{k-1}(\mathbf{t})} \begin{vmatrix} f_1(\mathbf{t}) - \frac{1}{\kappa}\partial f_1(\mathbf{t}) & \cdots & f_{k-1}(\mathbf{t}) - \frac{1}{\kappa}\partial f_{k-1}(\mathbf{t}) \\ \partial f_1(\mathbf{t}) - \frac{1}{\kappa}\partial^2 f_1(\mathbf{t}) & \cdots & \partial f_{k-1}(\mathbf{t}) - \frac{1}{\kappa}\partial^2 f_{k-1}(\mathbf{t}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^{k-2} f_1(\mathbf{t}) - \frac{1}{\kappa}\partial^{k-1} f_1(\mathbf{t}) & \cdots & \partial^{k-2} f_{k-1}(\mathbf{t}) - \frac{1}{\kappa}\partial^{k-1} f_{k-1}(\mathbf{t}) \end{vmatrix},$$

其中 $\partial^j f_i$(t) $= \frac{\partial^j}{\partial t_1^j} f_i$(t)。注意到 exp($-\sum_i \frac{k^i}{i\kappa^i}$) $= 1 - \frac{k}{\kappa}$，可得

$$f_i(\mathbf{t}) - \frac{1}{\kappa}\partial f_i(\mathbf{t}) = f\left(\mathbf{t} - \left[\frac{1}{\kappa}\right]\right),$$

其中

$$\mathbf{t} - \left[\frac{1}{\kappa}\right] = \left(t_1 - \frac{1}{\kappa},\ t_2 - \frac{1}{2\kappa^2},\ t_3 - \frac{1}{3\kappa^3},\ \ldots,\right).$$

于是我们有

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_k(\mathbf{t},\kappa) &= \frac{\kappa^{k-1}\tilde{\phi}^0_1(\kappa)e^{\frac{1}{2}\theta(\mathbf{t},\kappa)}}{\tau_k(\mathbf{t})\tau_{k-1}(\mathbf{t})}\tau_{k-1}\left(\mathbf{t} - \left[\frac{1}{\kappa}\right]\right) \\ &= \frac{\kappa^{k-1}\tilde{\phi}^0_1(\kappa)e^{\frac{1}{2}\theta(\mathbf{t},\kappa)}}{\tau_k(\mathbf{t})\tau_{k-1}(\mathbf{t})} e^{-\sum \frac{1}{n\kappa^n}\partial_n}\tau_{k-1}(\mathbf{t}) \\ &= \frac{\kappa^{k-1}\tilde{\phi}^0_1(\kappa)e^{\frac{1}{2}\theta(\mathbf{t},\kappa)}}{\tau_k(\mathbf{t})\tau_{k-1}(\mathbf{t})} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{\kappa^n} p_j(-\tilde{\partial})\tau_{k-1}(\mathbf{t}). \end{aligned}$$

˜这里我们用到了关系式 $p_j(-\partial)\tau_{k-1}(\mathbf{t}) = 0$，其中 $j \ge k$。

我们还将特徵函數写成 $\tilde{\psi}_k$ 如下形式，

$$\tilde{\psi}_j(\mathbf{t},\kappa) = \frac{e^{\frac{1}{2}\theta(\mathbf{t},\kappa)}}{\sqrt{\tau_j(\mathbf{t})\tau_{j-1}(\mathbf{t})}} \begin{vmatrix} f_1(\mathbf{t}) & \cdots & f_j(\mathbf{t}) \\ \partial_1 f_1(\mathbf{t}) & \cdots & \partial_1 f_j(\mathbf{t}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1^{j-2} f_1(\mathbf{t}) & \cdots & \partial_1^{j-2} f_j(\mathbf{t}) \\ \tilde{\psi}^0_1(\kappa) & \cdots & \tilde{\psi}^0_j(\kappa) \end{vmatrix}.$$

˜ ˜在计算 $\kappa\phi_i\psi_j$ 时，我们有

$$\langle \kappa\tilde{\phi}_i\tilde{\psi}^0_k e^{\frac{1}{2}\theta}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\tau_i(\mathbf{t})\tau_{i-1}(\mathbf{t})}} \sum_{n=0} p_n(-\tilde{\partial})\tau_{i-1}(\mathbf{t})\langle \kappa^{i-n}\tilde{\phi}^0_i\tilde{\psi}^0_k e^{\theta}\rangle,$$

其中 $\kappa^{i-n}\tilde{\phi}_i^0\tilde{\psi}_k^0 e^{\theta} = \partial_1^{i-n} f_k(\mathbf{t})$。我们还注意到

$$\begin{vmatrix} f_1(\mathbf{t}) & \cdots & f_j(\mathbf{t}) \\ \partial_1 f_1(\mathbf{t}) & \cdots & \partial_1 f_j(\mathbf{t}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1^{j-2} f_1(\mathbf{t}) & \cdots & \partial_1^{j-2} f_j(\mathbf{t}) \\ \partial_1^{i-n} f_1(\mathbf{t}) & \cdots & \partial_1^{i-n} f_j(\mathbf{t}) \end{vmatrix} = p_{i-M-j+1}(\tilde{\partial})\tau_j(\mathbf{t}).$$

因此，我们有

$$\tilde{a}_{i,j} = \langle \kappa\tilde{\phi}_i\tilde{\psi}_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{\tau_i(\mathbf{t})\tau_j(\mathbf{t})\tau_{i-1}(\mathbf{t})\tau_{j-1}(\mathbf{t})}} \sum_{n=0}^{i-1} p_n(-\tilde{\partial})\tau_{i-1}(\mathbf{t}) \times p_{i-M-j+1}(\tilde{\partial})\tau_j(\mathbf{t}).$$

利用恒等式,

$$p_n(\tilde{D})\tau_\alpha \circ \tau_\beta = \sum_{i+j=n} p_i(\tilde{\partial})\tau_\alpha \times p_j(-\tilde{\partial})\tau_\beta,$$

Lax 矩阵的元素 $\tilde{a}_{i,j}$ 可表示为

$$\tilde{a}_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{\tau_i(\mathbf{t})\tau_j(\mathbf{t})\tau_{i-1}(\mathbf{t})\tau_{j-1}(\mathbf{t})}} p_{i-j+1}(\tilde{D})\tau_j \circ \tau_{i-1}. \tag{A.2}$$

f-KT 方程的 Lax 矩阵 L 为

$$L = H\tilde{L}H^{-1} \qquad \text{with} \qquad H = \operatorname{diag}(1, \tilde{a}_{1,2}, \tilde{a}_{1,2}a_{2,3}, \ldots, a_{1,2}\cdots a_{M-1,M}).$$

因此，每个元素 $a_{i,j}$ 可表示为

$$a_{i,j} = \tilde{a}_{i,j}\tilde{a}_{j,j+1}\cdots\tilde{a}_{i-1,i} \qquad \text{for} \quad i > j.$$

利用（A.2），我们首先注意到

$$\tilde{a}_{i,i+1} = \frac{\sqrt{\tau_{i+1}(\mathbf{t})\tau_{i-1}(\mathbf{t})}}{\tau_i(\mathbf{t})}.$$

于是得到

$$a_{i,j}(\mathbf{t}) = \frac{p_{i-j+1}(\tilde{D})\tau_j \circ \tau_{i-1}}{\tau_j\tau_{i-1}} \qquad \text{for} \quad 1 \le j \le i \le M. \tag{A.3}$$

Appendix B. The Q-Schur functions

Q-Schur 函数定义如下。首先定义奇数时刻上的初等 Schur 函数，$\mathbf{t}_B = (t_1, t_3, t_5, \ldots)$，如下：

$$e^{\hat{\theta}(\mathbf{t}_B,k)} = \sum_{r=0}^{\infty} q_r(\mathbf{t}_B)k^r \qquad \text{with} \quad \hat{\theta}(\mathbf{t}_B,k) = \sum_{n=\text{odd}} t_n k^n.$$

˄注意，这里我们在指数 $\theta(\mathbf{t}_B,k)$ 中取 t_n，而不是通常在 [You89、JP91]，中使用的 $2t_n$，于是函数 $q_r(\mathbf{t}_B)$ 定义为

$$q_r(\mathbf{t}_B) = p_r(t_1, 0, t_3, 0, t_5, 0, \ldots).$$

利用这些 $q_r(\mathbf{t}_B)$ 函数，定义

$$Q_{j,i}(\mathbf{t}_B) = q_j(\mathbf{t}_B)q_i(\mathbf{t}_B) + 2\sum_{l=1}^{i}(-1)^l q_{j+l}(\mathbf{t}_B)q_{i-l}(\mathbf{t}_B), \quad \text{with} \quad Q_{k,0} = q_k.$$

注意，该函数是斜对称的$Q_{i,\,j} = -Q_{j,\,i}$（参见 [JP91]）。于是，严格分拆 $\lambda = (\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{2n} \ge 0)$ 的 Q-Schur 函数定义为 Pfaffian:

$$\begin{aligned} Q_\lambda(\mathbf{t}_B) &:= \operatorname{Pf}(Q_{\lambda_j,\lambda_i}(\mathbf{t}_B))_{1\le i<j\le 2n} \\ &= \sum \operatorname{sgn}(i_1, i_2, \ldots, i_{2n})\, Q_{\lambda_{i_1},\lambda_{i_2}}(\mathbf{t}_B)\, Q_{\lambda_{i_3},\lambda_{i_4}}(\mathbf{t}_B)\cdots Q_{\lambda_{i_{2n-1}},\lambda_{i_{2n}}}(\mathbf{t}_B). \end{aligned}$$

例如，如果 $\lambda = (3, 2, 1, 0)$，那么

$$Q_{3,2,1,0} = Q_{3,2}Q_{1,0} - Q_{3,1}Q_{2,0} + Q_{3,0}Q_{2,1}.$$

用杨图表示时，也可写成

$$Q_{\ydiagram{3,2,1}} = Q_{\ydiagram{3,2}}\,Q_{\ydiagram{1}} - Q_{\ydiagram{3,1}}\,Q_{\ydiagram{2}} + Q_{\ydiagram{3}}\,Q_{\ydiagram{2,1}}.$$

References

[AB21] A. Ayzenberg 和 V. Buchstaber, *Manifolds of isospectral matrices and Hessenberg varieties*, 第 21 期, 16671–16692。[AC19] H. Abe 和 P. Crooks, *Hessenberg varieties Slowdowy slices and integrable systems* **291** 2019 3 4, , , , 《数学杂志》 (), 第 - 期 – 。[AH20] H. Abe 和 T. Horiguchi, *A survey of recent developments on Hessenberg varieties*, 《舒伯特演算及其在组合学与表示论中的应用》, Springer 数学与统计学论文集, 第 332 卷, Springer, 新加坡, 2020 年, 第 251–279 页。[AvM99] M. Adler 和 P. van Moerbeke, *Vertex operator solutions to the discrete KP-hierarchy*, 《数学物理通讯》203（1999）, 第 1 期, 185–210。MR 1695172（2000d:37097）[Bal17] A. Balibanu, *The Peterson variety and the wonderful compactification*, 《表示论》21（2017）, 132–150。[BL00] S. Billy 和 V. Lakshmibai, *Singular Loci of Schubert Varieties*, 《数学进展》第 182 卷, Birkh¨auser, 波士顿, 2000 年。[CK02] L. Casian 和 Y. Kodama, *Blow-ups of the Toda lattices and their intersections with the Bruhat cells*, 《逆散射变换在应用数学中的遗产》（南哈德利, 马萨诸塞州, 2001 年）, 《当代数学》第 301 卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛州, 2002 年, 第 283–310 页。MR 1947372（2004j:37107）[DSV15] P. A. Damianou、H. Sabourin 和 P. Vanhaecke, *Intermediate Toda systems*, 《规则与混沌动力学》20（2015）, 第 3 期, 277–292。[EFS93] N. M. Ercolani、H. Flaschka 和 S. Singer, *The geometry of the full Kostant-Toda lattice*, 《可积系统》（吕米尼, 1991）, 《数学进展》第 115 卷, Birkh¨auser Boston, 波士顿, 马萨诸塞州, 1993 年, 第 181–225 页。MR 1279823（95g:58103）[FH91] H. Flaschka 和 L. Haine, *Variétés de drapeaux et réseaux de Toda*, 《数学杂志》208（1991）, 第 4 期, 545–556。MR 1136474（93e:58080）[GS99] M. I. Gekhtman 和 M. Z. Shapiro., *Noncommutative and commutative integrability of generic Toda flows in simple Lie algebras* **52** 1999 1, 53 84 , 《纯粹与应用数学通讯》 (), 第 – 期。[GW84] R. Goodman 和 N. Wallach, *Classical and quantum mechanical systems of Toda-lattice type II. Solutions of the classical* , 《数学物理通讯》*flows* **94** 1984 177 217 (), –。[HT17] M. Harada 和 J. Tymoczko, *Poset pinball, GKM-compatible subspaces, and Hessenberg varieties*, 《日本数学会杂志》69（2017）, 第 3 期, 945–994。[JP91] T. Jozefiak 和 Pragacz P., *A determinantal formula for skew Schur Q-functions* **43** 1991 2, , 《伦敦数学会杂志》 (), 第 – 期。[KO23] Y. Kodama 和 S. Okada, *Extended Schur's Q-functions and the full Kostant-Toda hierarchy on the Lie algebra of type D*, 《物理学 D》443（2023）, 133589。[Kod17] Y Kodama, *KP solitons and the Grassmannians*, Springer 数学物理简编, 第 22 卷, Springer, 新加坡, 2017 年。[Kod18] , *Solitons in two-dimensional shallow water*, CBMS-NSF 应用数学区域会议丛书, 第 92 卷, 工业与应用数学学会, 费城, 2018 年。[Kos59] B. Kostant, *The principal three-dimensional subgroup and the Betti numbers of a complex simple Lie group*, 《美国数学杂志》81（1959）, 973–1032。[Kos79] , *The solution to a generalized Toda lattice and representation theory*, 《数学进展》34（1979）, 195–338。[KS18] Y. Kodama 和 B. A. Shipman, *Fifty years of the finite nonperiodic Toda lattice: a geometric and topological viewpoint*, 《物理学杂志 A》51（2018）, 第 35 期, 39 页。[KW13] Y. Kodama 和 L. K. Williams, *The Deodhar decomposition of the Grassmannian and the regularity of KP solitons*, 《数学进展》244（2013）, 979–1032。[KW15] , *The full Kostant-Toda hierarchy on the positive flag variety*, 《数学物理通讯》335（2015）, 247–283。[KY96] Y. Kodama 和 J. Ye, *Iso-spectral deformations of general matrix and their reductions on Lie algebras*, 《数学物理通讯》178（1996）, 第 3 期, 765–788。MR 1395214（97d:58097）[Lus94] G. Lusztig, *Total positivity in reductive groups*, 《李理论与几何》, 《数学进展》第 123 卷, Birkh¨auser Boston, 波士顿, 马萨诸塞州, 1994 年, 第 531–568 页。MR 1327548（96m:20071）[LY20] J.-H. Lu 和 S. Z. Yu, *Bott-Samelson atlases, total positivity, and Poisson structures on some homogeneous spaces*, 《精选数学》（新系列）26（2020）, 61 页。[MR04] R. J. Marsh 和 K. C. Rietsch, *Parametrizations of flag varieties*, 《表示论》8（2004）, 212–242（电子版）。MR 2058727（2005c:14061）[Nan82] T. R. Nanda, *Isospectral flows on band matrices*, 博士论文, 纽约大学, 1982 年, 75 页。[Sym82] W. W. Symes, *The QR algorithm and scattering for the finite nonperiodic Toda lattice* **4** 1981 82 2, , 《物理学 D》 (), 第 – 期。MR（h:） [Tom13] C. Tomei, *The Toda lattice, old and new*, 《几何与力学杂志》5（2013）, 第 4 期, 511。[Xie22a] Y. Xie, *From the B-Toda to the BKP hierarchy*, arXiv 预印本 arXiv:2210.03307（2022）。[Xie22b] , *On the full Kostant-Toda lattice and the flag varieties. I. The singular solutions*, arXiv 预印本 arXiv:2212.03679（2022）。[You89] Y. You, *Polynomial solutions of the BKP hierarchy and projective representations of symmetric groups*, 《无限维李代数与群》, 数学物理高级丛书, 第 7 卷, 世界科学出版社, 新加坡, 1989 年, 第 449–464 页。

1. College of Mathematics and Systems Sciences, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590,China, and, Department of Mathematics, Ohio State University, Columbus, OH 43210, USA*Email address*: kodama@math.ohio-state.edu

2. Beijing International Center for Mathematical Research, Peking University, Beijing 100871, China
Email address: xieyuancheng@bicmr.pku.edu.cn