arXiv:2303.07384v2 [math.MG] 1 Oct 2024

离散分析，2024:7，共6页。
*www.discreteanalysisjournal.com*

# 闵可夫斯基第二定理离散类比的新界

Matthew Tointon

收稿日期：*2023*年*3*月*23*日；发表日期：*2024*年*10*月*1*日

**摘要：**我们改进陶和 Vu 的一个论证，证明：若 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_d$ 是关于原点对称的凸体 $K$ 相对于某个格$\Lambda < \mathbb{R}^d$的连续极小值，并且令 $k = \max\{j: \ \lambda_j \leq 1\}$，则 $K$至多包含 $2^k(1+\frac{\lambda_k}{2})^k/\lambda_1 \cdots \lambda_k$ 个格点。这改进了 Betke、Henk 和 Wills（1993）猜想中的界，并证明当 $\lambda_k \to 0$ 时该猜想渐近成立。我们还在没有对称性假设的情况下得到了类似结果。

## 1 引言

数论几何中的一项重要且基础性的结果，是 Minkowski 于 1896 年提出的著名第二定理。该定理根据一个凸体相对于给定格的连续极小值，对欧几里得空间中凸体的体积给出了界。1993 年，Betke、Henk 和 Wills 猜想了这一结论的某种离散类比，其中凸体的体积由其所含格点的数量取代。本文旨在给出一些沿着这一猜想方向的新界。

我们先回顾必要的定义。凸体 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 是具有非空内部的有界凸集。若$K = -K$，则称$K$关于原点对称。给定一个格 $\Lambda < \mathbb{R}^d$，我们通过下式定义$K$相对于 $\Lambda$的连续极小值 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_d$：

$$\lambda_i = \inf\{\lambda > 0 : \dim \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\tfrac{\lambda}{2}(K-K) \cap \Lambda) \geq i\}.$$

注意，如果$K$关于原点对称，那么$K = \frac{1}{2}(K-K)$，因此

$$\lambda_i = \inf\{\lambda > 0 : \dim \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(\lambda K \cap \Lambda) \geq i\}.$$

©2024Matthew Tointon知识共享署名 采用知识共享署名许可协议 (CC-BY) 授权

数字对象标识符：
10.19086/da.122972

**闵可夫斯基第二定理**。 假设 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个凸体， $\Lambda < \mathbb{R}^d$ 是一个格，且 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda d$ 是 $K$ 相对于 $\Lambda$ 的连续极小值。那么

$$\mathrm{vol}(K) \leq \frac{2^d \det \Lambda}{\lambda_1 \cdots \lambda_d}.$$

闵可夫斯基最初证明其定理时额外假设$K$关于原点对称，但一般情形可借助布伦-明可夫斯基不等式轻易归约到该情形。该不等式尤其意味着，体积$(K)$ $\leq$体积$(\frac{1}{2}(K-K)$。

闵可夫斯基第二定理非常有用——例如，我自己最初就是因为它在证明关于和集较小的整数集合的弗雷曼定理时的应用而接触到它的（参见例如 [6, 定理 3。1]）——并且引起了极大关注，例如已有多种不同的证明（参见例如 [4]及其中的参考文献）。

Betke、Henk 和 Wills [1,猜想 2.1]猜想了闵可夫斯基第二定理的一种类似形式，其中用 $K$ 所含格点的数量取代其体积。他们最初只针对关于原点对称的凸体提出这一猜想，但 Malikiosis [5] 后来猜想，即使不作对称性假设，该猜想也应成立。

**猜想 1.1** (Betke、Henk 和 Wills；Malikiosis)。 设 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个凸体， $\Lambda < \mathbb{R}^d$ 是一个格，$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_d$是 $K$ 相对于 $\Lambda$的连续极小值。那么

$$\#(K \cap \Lambda) \leq \prod_{i=1}^{d} \left\lfloor \frac{2}{\lambda_i} + 1 \right\rfloor.$$

注意，当 $K = [0, a_1] \times \cdots \times [0, a_d]$ 且 $a_i > 0$时，等号成立。

事实上，猜想 1.1 不仅仅是闵可夫斯基第二定理的一个类比：正如 Betke、Henk 和 Wills 在 [1, 命题 2.2], 中所指出的，可以很容易地通过取极限从中推出闵可夫斯基第二定理

$$\frac{\mathrm{vol}(K)}{\det \Lambda} = \lim_{r \to 0} r^d \#(K \cap r\Lambda) \leq \lim_{r \to 0} r^d \prod_{i=1}^{d} \left\lfloor \frac{2}{r\lambda_i} + 1 \right\rfloor = \frac{2^d}{\lambda_1 \cdots \lambda_d}. \tag{1}$$

猜想 1.1 在 1 维情形下显然成立。Betke、Henk 和 Wills 证明了它对 2 维的关于原点对称的凸体成立；对于一般的 $d$ 维情形，他们证明其成立时相差的因子约为$d!$。Henk[4] 后来将这一因子改进为 $2^{d-1}$。随后，Malikiosis [5] 证明了该猜想对至多 3 维的任意凸体成立；对于一般的 $d$ 维情形，他证明了

$$\#(K \cap \Lambda) \leq \frac{4}{e} \left(\sqrt{3}\right)^{d-1} \prod_{i=1}^{d} \left\lfloor \frac{2}{\lambda_i} + 1 \right\rfloor, \tag{2}$$

甚至

$$\#(K \cap \Lambda) \leq \frac{4}{e} \left(\sqrt[3]{\frac{40}{9}}\right)^{d-1} \prod_{i=1}^{d} \left\lfloor \frac{2}{\lambda_i} + 1 \right\rfloor \tag{3}$$

如果假设$K$　　关于原点对称 [5, 定理 3.1。2]最近，Freyer 和 Lucas [2] 证明了

$$\#(K\cap\Lambda)\le\prod_{i=1}^{d}\left(\frac{2}{\lambda_i}+d\right), \tag{4}$$

这改进了固定维数下（2），且适用于连续极小值足够小的情形；这是猜想 1.1 中的第一个足以通过（1）中的论证推出闵可夫斯基第二定理的界。另一方面，例如当维数趋于无穷而连续极小值有正下界时，（2）仍强于（4）。

本文改编了陶和 Vu 关于闵可夫斯基第二定理的一种证明 [7, 定理 3。30] 从而在所有情形下改进（2）和（3），并在某些情形下改进（4），例如那些小于 2 的连续极小值彼此相差不超过$d$ 倍的情形。此外，与 Freyer 和 Lucas 的界（4）一样，这些改进足以通过（1）中的论证推出闵可夫斯基第二定理。

在关于原点对称的情形下，我们有如下结果。

**定理 1.2.** 设 $K\subseteq\mathbb{R}^d$ 是一个关于原点对称的凸体，且 $\Lambda<\mathbb{R}^d$ 是一个格。设$\lambda_1\le\cdots\le\lambda_d$为 $K$ 关于 $\Lambda$的连续极小值。若 $\lambda_1>1$，则 $\#(K\cap\Lambda)=1$。否则，令 $k=$最大$\{j:\lambda_j\le1\}$，则对于任意满足 $0<\mu_i\le\lambda_i$的实数 $\mu_1\le\cdots\le\mu_k s$，有

$$\#(K\cap\Lambda)\le\frac{2^k(1+\frac{\mu_k}{2})^k}{\mu_1\cdots\mu_k}.$$

摘要中的陈述是由此结果令每个 $\mu_i=\lambda_i$取值为 3得到的。该结果已优于（3），但根据连续极小值的取值，灵活选择 $\mu_i$ 还能进一步改善界，尤其是在高维情形下，若某个连续极小值大于其他许多个连续极小值。例如，若 $\lambda_d=1$ 且所有其他 $\lambda_i$ 均不超过 $1\,2$，则取 $\mu_d=\lambda_d=1$ 可得到界 $3^d/\lambda_1\cdots\lambda_{d-1}$；而若对 $\mu_i=\lambda_i$取 $i<d$且 $\mu_d=\frac{1}{2}$，则得到界 $2(\frac{5}{2})^d/\lambda_1\cdots\lambda_{d-1}$。正如我们将在下文的推论 1.4中看到的，在非对称情形下，这种灵活性对于改进（2）至关重要。

$\#(K\cap\Lambda)=1$ 若 $\lambda_1>1$，显然该断言成立；但将这种情况单独列出，可以使$k$ 的定义不那么繁琐。

在一般情形下，我们有以下结果。

**定理 1.3.** 设 $K\subseteq\mathbb{R}^d$是一个凸体，$\Lambda<\mathbb{R}^d$是一个格。令 $\lambda_1\le\cdots\le\lambda_d$为 $K$ 关于 $\Lambda$的连续极小值。若 $\lambda_1>2$，则$\#(K\cap\Lambda)\le1$。否则，令 $k=\max\{j:\lambda_j\le2\}$，则对于任意满足 $0<\mu_i\le\lambda_i$的实数 $\mu_1\le\cdots\le\mu_k$，有

$$\#(K\cap\Lambda)\le\frac{2^k(1+\frac{\mu_k}{2})^k}{\mu_1\cdots\mu_k}.$$

与对称情形不同，非对称凸体即使其连续极小值全都大于 1，也可能包含多个格点，例如 $[0,1]^d\subseteq\mathbb{R}^d$ 与格 $\mathbb{Z}^d$便是如此。尽管如此，若 $\lambda_1>2$则 $(K-K)\cap\Lambda=\{0\}$，因此 $\#(K\cap\Lambda)\le1$，正如所声称的那样。这也基本上解释了为何在定理 *1.3*中，定理 1.2 中定义k 时的 1 被替换成了 2。

在定理 $\mu_i = \lambda_i$ 中取 1.3，若不存在满足 $1 < \lambda_i \leq 2$ 的$i$（以及其他一些情形），便可立即改进不等式（2）。不过，若存在这样的$i$，不等式（2）仍可能更强。例如，若 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{d-1} = 1/M$，其中某个 $M > 1$，且 $\lambda_d = 2$，那么取 $\mu_i = \lambda_i$ 可得界 $\frac{1}{2}4^d M^{d-1}$；而不等式（2）给出的界约为 $^8{}_e(2\sqrt{3}M)^{d-1}$。尽管如此，只要在 $1 \leq \lambda_i \leq 2$ 时取 $\mu_i = 1$，便可得到以下推论。

**推论 1.4.** 设 $K \subseteq \mathbb{R}^d$是一个凸体，$\Lambda < \mathbb{R}^d$是一个格。令 $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_d$为 $K$ 关于 $\Lambda$的连续极小值，并假设存在 $\lambda_i \in (1,2]$。那么，令 $k = \max\{j : \lambda_j \leq 1\}$ 且 $m = \max\{j : \lambda_j \leq 2\}$，我们有

$$\#(K \cap \Lambda) \leq \frac{3^m}{\lambda_1 \cdots \lambda_k}.$$

为了说明只要适用，推论 1.4 在 2 维或更高维时都改进了 (2)，将 (2) 的界写为 $A_1 \cdots A_d$，其中 $A_1 = {}^4e\lfloor \frac{2}{\lambda_1} + 1 \rfloor$且对于 $i > 1$有 $A_i = \sqrt{3}\lfloor \frac{2}{\lambda_i} + 1 \rfloor$；再将推论 1.4 的界写为 $B_1 \cdots B_m$，其中对于 $i \leq k$ 有 $B_i = 3/\lambda_i$，并且有 $B_{k+1}, \ldots, B_m = 3$。显然，对于 $i > m$，有 $A_i > 1$。此外，$B_m = 3$ 且 $B_1 = 3\max\{1, \frac{1}{\lambda_1}\}$，而 $A_m = 2\sqrt{3}$ 且 $A_1 \geq {}^8e\max\{1, \frac{1}{\lambda_1}\}$，因此 $B_1 B_m < A_1 A_m$。最后，对于所有其他$i$，我们有 $B_i = 3\max\{1, \frac{1}{\lambda_i}\}$ 且 $A_i \geq 2\sqrt{3}\max\{1, \frac{1}{\lambda_i}\}$，从而 $B_i < A_i$。

一般而言，定理 $\mu_i$ 1.2 和1.3 中取值的最佳选择取决于连续极小值的具体数值。尤其是，推论 1.4 并非旨在给出定理 $\mu_i$ 1.3 中的最优选择，而只是给出一个选择，以说明定理 1.3 总能改进（2）。

最后，在开始证明之前，或许值得一提的是，猜想 1.1可以被视为凸几何中将不等式离散化这一更广泛运动的一部分；例如参见 [3], 。

## 2 定理的证明

陶和武证明闵可夫斯基第二定理时的主要技术要素，也是定理 1.2 和 1.3 的证明中的核心，是他们称为挤压引理的一个引理。

**引理 2.1** （挤压引理 [7, 引理 3。31]）。 设 $K \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个开凸体，$V \leq \mathbb{R}^d$ 是一个 $j$ 维子空间，且 $A \subseteq K$ 是一个开集。那么存在一个开子集 $A' \subseteq K$，使得体积$(A') = \mu j$ 体积$(A)$ 且 $(A' - A') \cap V \subseteq (\mu(A - A)) \cap V$。

引理 3.31] 的表述 [7, 实际上包含一个假设，即 $K$ 关于原点对称，但在证明中并未用到这一点。读者若想确认这一点，也可以参阅[8, 引理 3.5.2], ，其中引理的表述与上文完全相同，证明则遵循 Tao 和 Vu 的方法。

在以下证明中，我们用$K^\circ$ 表示$K$ 的内部，用$K$ 表示$K$的闭包 .

定理 *1.2* 和 *1.3* 的证明。 由于定理 1.2 和 1.3 的证明有很大重叠，我们同时证明这两个定理。因此，在整个证明过程中，$K$ 是一个凸体，除证明中专门适用于定理 1.2的部分外，不要求其关于原点对称。

我们可以假设 $\#(K \cap \Lambda) \geq 2$。将 $\Lambda$ 中的一个元素平移后，我们还可以假设 $0 \in K$，并且 $K \cap \Lambda$生成了 $\mathbb{R}^d$ 的一个非零子空间 $V$，设其维数为 $m$。令 $\lambda'_1 \leq \cdots \leq \lambda'_m$ 为凸体 $K' = K \cap V$相对于格 $\Lambda' = \Lambda \cap V$（位于 $V$ 中）的连续极小值，注意

对 i = 1, . . . , m， λ′i ≥ λi。由 0 ∈ K 可知，(K′ − K′) ∩ Λ′ ⊇ K′ ∩ Λ，因此 (K′ − K′) ∩ Λ张成空间 V，且 λ′m ≤ 2。此外，若 K 关于原点对称，则 K′也关于原点对称，因此 1 2 (K′ − K′) ∩ Λ′ = K′ ∩ Λ′张成空间 V，且 λm ≤ 1。因此，用 K′ 和 Λ′ 替代 K 和 Λ，我们可以假设 k = d。

归纳地选取一列线性无关向量 v1, . . . , vd ∈ Λ，使得对于每个 i，v1, . . . , vi ∈ λi/2(K −K)。对于每个 i = 0, 1, . . . , d，令 Vi = spanR(v1, . . . , vi)，并令 Λi = Λ ∩ (Vi \ Vi−1)，注意到对于每个 μj ∈ (0, λj]，μj/2(K° − K°) ∩ Λj = {0}。

沿用 Tao 和 Vu [7, §3.5]（但用 μi 代替 λi），令 $K_0 = \frac{\mu_d}{2} K^\circ$，然后从 $A_0 = K_0$, 开始，迭代应用引理2.1，得到开凸体 $K_0$ 的开子集序列 $A_0, A_1, \ldots, A_{d-1}$，使得

$$\mathrm{vol}(A_i) = \left(\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}}\right)^i \mathrm{vol}(A_{i-1})$$

and

$$(A_i - A_i) \cap V_i \subseteq \left(\frac{\mu_i}{\mu_{i+1}}(A_{i-1} - A_{i-1})\right) \cap V_i$$

对于每个 $i$。注意

$$\mathrm{vol}(A_{d-1}) = \frac{\mu_1 \ldots \mu_d}{2^d} \mathrm{vol}(K).$$

此外，对于每个 $j$，我们有

$$\begin{aligned}(A_{d-1} - A_{d-1}) \cap V_j &\subseteq \tfrac{\mu_j}{\mu_d}(A_{j-1} - A_{j-1}) \cap V_j \\ &\subseteq \tfrac{\mu_j}{\mu_d}(K_0 - K_0) \cap V_j \\ &= \tfrac{\mu_j}{2}(K^\circ - K^\circ) \cap V_j,\end{aligned}$$

因此 $(A_{d-1} - A_{d-1}) \cap \Lambda_j \subseteq \frac{\mu_j}{2}(K^\circ - K^\circ) \cap \Lambda_j = \{0\}$。由于这对所有 $j$ 都成立，我们得出 $(A_{d-1} - A_{d-1}) \cap \Lambda = \{0\}$。

现在不再沿用 Tao 和 Vu 的论证，注意到这一性质意味着，对于任意有限子集 $X \subseteq \Lambda$，都有 $\mathrm{vol}(X + A_{d-1}) = \mathrm{vol}(A_{d-1}) \#X$，特别是

$$\mathrm{vol}((K \cap \Lambda) + A_{d-1}) = \mathrm{vol}(A_{d-1}) \#(K \cap \Lambda) = \frac{\mu_1 \cdots \mu_d}{2^d} \mathrm{vol}(K) \#(K \cap \Lambda).$$

由于

$$(K \cap \Lambda) + A_{d-1} \subseteq K + K_0 \subseteq \left(1 + \frac{\mu_d}{2}\right) K,$$

由此可得

$$\#(K \cap \Lambda) \leq \frac{2^d (1 + \frac{\mu_d}{2})^d}{\mu_1 \cdots \mu_d},$$

如所需。 □

注记2.2。在上述证明第二段中所作的同样化简表明，在每个（2）、（3）和（4）中，都可以用k替换d。

注。 尽管闵可夫斯基第二定理可以通过1.2 中的论证（1）从定理推出，但更直接的方法是像陶和武那样，将布利希费尔特引理应用于集合 $A_{d-1}$，其中 $\mu_i = \lambda_i$。请注意，在非对称情形下，这种方法也可称为“直接”，因为它无需借助布伦-明可夫斯基不等式经由对称情形来推导。

## 致谢

我感谢 Martin Henk 建议考虑非对称凸体，这大大完善了本文，也感谢他在参考文献方面给予的帮助。我还要感谢他和一位匿名审稿人对稿件早期版本提出的意见。

## 参考文献

[1] U. Betke、M. Henk 和 J. M. Wills，《连续极小值型不等式》，Discrete Comput. Geom. 9 (1993), 165–175. 2[2] A. Freyer 和 E. Lucas，《利用连续极小值在体积与格点计数函数之间插值》，Monatsh. Math. 198 (2022), 717–740. 3[3] D. Halikias、B. Klartag 和 B. A. Slomka，《Brunn-Minkowski 型不等式的离散变体》，Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 30(2) (2021), 267–279. 4[4] M. Henk，《连续极小值与格点》，Rendi. Circ. Matematico Palermo, Serie II, Supppl. 70 (2002), 377–384. 2[5] R. Malikiosis，《关于连续极小值的闵可夫斯基第二定理的离散类比》，Adv. Geom. 12(2) (2012), 365–380. 2, 3[6] I. Z. Ruzsa，《广义算术级数与和集》，Acta Math. Hungar. 65(4) (1994), 379–388. 2[7] T. Tao 和 V. H. Vu，《加法组合学》，剑桥高等数学研究丛书第105卷，剑桥大学出版社，剑桥（2006）。3, 4, 5[8] M. C. H. Tointon，《近似群导论》，伦敦数学会学生教材第94卷，剑桥大学出版社，剑桥（2020）。4

作者

MATTHEW TOINTON 数学学院 布里斯托大学 英国 m tointon bristolac u khttps://tointon.neocities.org/ . @ . .