arXiv:2303.07401v1 [cs.CG] 13 Mar 2023

三角形翻转下的完全多部图绘图

Oswin Aichholzer 格拉茨工业大学，奥地利格拉茨
Man-Kwun Chiu 温州肯恩大学，中国温州
Hung P.Hoang 苏黎世联邦理工学院，瑞士苏黎世
Michael Hoffmann 苏黎世联邦理工学院，瑞士苏黎世
JanKynčl 查理大学，捷克共和国布拉格
YannicMaus 格拉茨工业大学，格拉茨，奥地利
BirgitVogtenhuber 格拉茨工业大学，格拉茨，奥地利
AlexandraWeinberger 格拉茨工业大学，格拉茨，奥地利

摘要

对于标记图的绘图，顶点或交叉点的旋转是其关联边的循环次序，用这些边另一端点的标签表示。绘图的扩展旋转系统（ERS）是所有顶点和交叉点的旋转的集合。如果任意一对边至多有一个公共点，则该绘图是简单的。Gioan 定理指出，对于任意两个具有相同交叉边对的完全图 K_n 的简单绘图，都可以通过一系列三角形翻转（又称第三类 Reidemeister 变换）将一个绘图变换为另一个。此操作指通过局部变换，将由三条两两交叉的边形成的三角形区域的一条边移过该区域对面的交叉点。

我们研究 Gioan 型定理在更广泛的图类中能够在多大程度上成立。两个图的绘图可以通过一系列三角形翻转相互变换的一个必要条件（但一般而言并非充分条件）是它们具有相同的 ERS。作为主要结果，我们证明，对于完全多部图这一大类图，这个必要条件实际上也是充分条件。我们给出该结果的两种不同证明，其中一种较短，另一种则导出一个多项式时间算法；对于具有 n 个顶点的图，所需三角形翻转的数量有界于 $O(n^{16})$。后一种证明使用了一个关于完全多部图简单绘图的 Carathéodory 型定理，我们认为该定理本身也具有独立的研究价值。

此外，我们证明，针对完全多部图的 Gioan 型定理在以下意义上基本是紧的：对于完全二部图 $K_{m,\,n}$ 删去两条边并 $K_{m,\,n}$添加一条边的情形（其中任意 $m,\ n \geq 4$），以及任意 $n \geq 5$ 中删去一个 4-圈的情形，都存在两种具有相同 ERS、但无法通过三角形翻转相互转换的简单绘图。因此，移除或添加极少量边时，具有相同 ERS 并不足以保证这一点。

2012年 ACM 学科分类 计算数学 → 组合学；计算数学 → 图论；以人为中心的计算 → 图绘制

关键词和短语 简单绘图，简单拓扑图，完全图，多部图，k部图，二部图，Gioan 定理，三角形翻转，Reidemeister 变换

本文（不含附录）发表于第*39*届国际计算几何研讨会（*SoCG 2023*）。

资助 *Oswin Aichholzer*：部分由奥地利科学基金（FWF）资助：W1230。*Man-Kwun Chiu*：部分由欧洲研究委员会起始资助项目（ERC StG）757609 资助。Chiu 在柏林自由大学期间完成了部分工作。

Michael Hoffmann：由瑞士国家科学基金会通过合作项目 排列与绘图 资助，项目编号为 SNSF 200021E-171681。
Jan Kynčl：获资助项目编号 . 22-19073S，资助方为捷克科学基金会 (GAČR) .
Birgit Vogtenhuber：部分经费由奥地利科学基金通过合作项目 排列与绘图 资助，项目编号为 F WF I 3340-N35。
Alexandra Weinberger：由奥地利科学基金 (FWF) 资助，项目编号：W1230。

1 引言

Gioan 定理指出，任意两个关于完全图 K_n 的简单绘图，只要其中交叉的边对相同，就可以通过一系列三角形翻转相互转化（忽略强同构）。通俗地说，三角形翻转是指将由三条两两交叉的边形成的三角形区域的一条边，移过该区域内与之相对的交叉点；这一操作的示意见图1，正式定义见第 2 节。



图1 三角形翻转示意图。

Gioan 定理可视为将 Ringel [29]于1955年以及 Roudneff [30] 于1988年关于伪直线的结果推广到 K_n的简单绘图。Gioan的会议论文 [15] 于2005年发表，但仅包含证明概要。完整证明首次发表于2017年，作者为 Arroyo、McQuillan、Richter 和 Salazar [4], ；他们还提出了“Gioan 定理”这一名称。2021年，Schaefer [31]将 Gioan 定理推广到边稍稀疏的图，即去掉任意一个非完美匹配后的 K_n 的简单绘图。Gioan 的完整证明 [16] 最终于2022年发表。

事先并不清楚，如何将 Gioan 定理推广到 Schaefer 的结果之外。要通过三角形翻转变换一般图的绘图，仅有相同的交叉边对还不够。我们还应考虑顶点或边交叉的旋转，即发出边的循环次序。例如，图 2 展示了完全二部图 $K_{3,\,3}$ 的两种简单绘图，它们具有相同的交叉边对和相同的顶点旋转，但涉及 b_1r_3 的交叉点旋转不同。请注意，三角形翻转不会改变交叉点或顶点的旋转。从这一观察中可以得出，若 Gioan 型定理要成立，两种绘图中所有交叉点和顶点的旋转都必须相同。扩展旋转系统这一概念恰好刻画了这一必要条件。图的绘图的扩展旋转系统（ERS）是所有顶点和交叉点旋转的集合。从这个角度来看，Gioan 定理的一项贡献是：对于完全图的绘图，交叉边对相同等价于 ERS 相同（至多相差一次全局反转） [15, 16]。这一事实最早由 Gioan 陈述 [15]；最早发表的证明则出自 Kynčl [22, 23]。Schaefer 已证明，对于 K_n 去掉任意一个非完美匹配后，也有类似结论 [31]。对于完全多部图，这种等价关系并不成立；再次参见图 2。

作为主要结果，我们证明，具有相同的边旋转系统足以通过三角形翻转将完全多部图的简单绘图相互转化。因此，我们得到一个

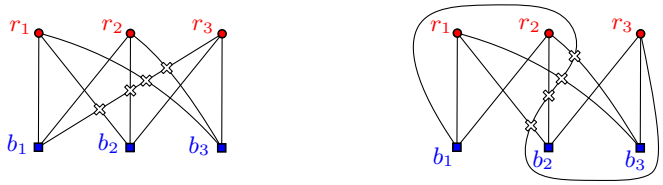


图 2 $K_{3,\,3}$ 的两个简单绘图具有相同的交叉边对，并且所有顶点处的旋转也相同，但所有涉及边 b_1r_3 的交叉点处的旋转都不同，因此边旋转系统也不同。

适用于一大类图的 Gioan 型定理，这类图包括此前研究过的图，即完全图 [4, 15, 16, 31] 以及删去一个非完美匹配后的完全图 [31]。

▶**定理 1**。 设 D_1 和 D_2 是球面 S^2 上完全多部图的两个简单绘图，且具有相同的边旋转系统。那么，存在一系列三角形翻转，可将D_1 变换为 D_2。

我们还证明，定理 1 在本质上是紧的：仅有相同的边旋转系统并不足够，因为即使只删除或添加很少的边，也不再能保证这一点。

▶ **定理 2**。 对于任意 m、 $n \geq 3$ 和$K_{m,\,n}$ 删除任意两条边后，都存在两个具有相同边旋转系统、但无法通过三角形翻转相互变换的简单绘图。对于任意 $n \geq 5$ 和 K_n 删除任意一个四圈 C_4后，结论也成立；对于任意 $m \geq 4$、 $n \geq 1$ 和$K_{m,\,n}$ 在大小为 m的二部划分类中的顶点之间添加一条边后，结论同样成立。

定理 2 的第一部分意味着，对于完全二部图，不可能得到 Schaefer 对 Gioan 定理的推广在 K_n 减去一个非完美匹配后的类似结果，甚至对于 $K_{m,n}$ 减去一个大小为 2 的匹配也不行。注意，$K_{m,n}$ （其中 $m \geq 4$，且 $n \geq 1$ ）是 K_{n+m} 减去一个 4-圈后的子图。因此，定理 2 的第二部分意味着——这或许有悖直觉——满足 Gioan 型定理的图的集合并不在添加边的操作下封闭。由定理 2 的证明可知，定理 1 无法推广到任何包含以下诱导子图的图：K_5 减去一个四圈 C_4 ，或 $K_{3,2}$ 减去两条与较小划分类中的同一个顶点关联的边。

我们给出定理 1 的两种不同证明。第一种证明采用了与 Schaefer [31] 对 Gioan 定理的证明相似的方法。他的证明很大程度上依赖于一个（平面）生成星，将其作为把一个绘图变换为另一个绘图的基础。虽然 K_n（包括减去一个非完美匹配的情形）的任何简单绘图都存在平面生成星，但对于完全多部图，一般并非如此。不过，完全多部图 G 的任何简单绘图都包含一棵平面生成树 [2]。我们证明，对于具有相同边旋转系统的 G 的绘图，可以利用这样的平面生成树将一个绘图变换为另一个。与第二种证明相比，由此得到的证明更短，也可能更优雅。不过，它并不能直接给出一个多项式时间变换算法，因为能否在多项式时间内找到平面生成树 [2] 仍是一个未解决的问题。

我们的第二个证明给出了一个用于该变换的多项式时间算法。它采用了与 Arroyo、McQuillan、Richter 和 Salazar [4] 对 Gioan 定理的证明相似的方法。他们证明中的若干要点是已知的完全图绘图性质，或可由这些性质直接推出；然而，类似的结论是否适用于其他图的绘图，尚不得而知。因此，在我们的证明中，我们发现了完全多部图简单绘图的一些有用的基本性质。例如，我们为这类绘图建立了一个 Carathéodory 型定理。

经典的 Carathéodory 定理指出，若点 $p \in \mathbb{R}^2$ 位于集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ 中 $n \geq 3$ 个点的凸包内，则存在一个由 A 中的点张成的三角形

包含 p。用绘图的术语来说，若点 p 位于 $\mathbb{R}^2$，中 K_n 的直线绘图 D 的一个有界区域内，则存在 D 中的一个 3-圈 C，使得 p 位于 C的有界区域内。这一结论已推广至 K_n [6, 7] 的简单绘图（不一定是直线绘图）。然而，显然它不能推广到任意（非完全）图；例如，考虑一条带有自交并形成有界区域的路径的简单绘图。一个自然的问题是，哪些图类满足这一结论或其某种变体。我们证明，对于完全多部图，该结论成立；此外，除了允许 3-圈（这类图中可能不存在）外，还允许 4-圈包含 p。

▶ **定理 3**（完全多部图简单绘图的 Carathéodory 型定理）。设 D 是平面上完全多部图 G 的简单绘图。对于 D 的任一有界区域中的每个点 p，D 中都存在一个长度为三或四的圈 C，使得 p 包含在 C 的一个有界区域内。这个结论是紧的，因为对于少一条边的 G，该结论可能不成立。

三角形翻转的数量。Schaefer [31, 备注 3.3] 表明，对于 K_n，多项式数量的三角形翻转就足够了，并给出了所需翻转次数的上界 $O(n^{20})$。在定理 1 的第二个证明中，我们采用不同的方法，证明顶点数为 n 的完全多部图所需三角形翻转次数的上界为 $O(n^{16})$。此外，我们还展示了一些绘图，无论采用何种方法，都至少需要 $\Omega(n^6)$ 次三角形翻转。

研究动机与相关工作。最初，旋转系统是为研究图在高亏格曲面上的嵌入而提出的 [17]。如今，它们被广泛用于表示图在平面上的绘图，并推导其结构性质。Gioan 定理表明，对于完全图的简单绘图，相交边对的集合决定了该绘图的边旋转系统（ERS）。反过来，对于完全图的绘图，旋转系统决定哪些边对会交叉 [22, 27]。这些关系对于研究完全图的简单绘图及其生成和枚举至关重要 [1, 22, 24]。

关于非完全图的简单绘图旋转系统，现有文献相当有限。除了 Schaefer 最近的工作 [31]，我们只了解到 Cardinal 和 Felsner 的研究 [8]，，他们探讨了如何将完全二部图实现为外平面绘图。对于完全图绘图之外的情形，旋转系统方面之所以没有更多研究成果，主要是因为人们尚不了解这些情形下的性质。我们的工作致力于将旋转系统推广到更广泛的图类绘图；这不仅体现在主要结论中，也体现在研究过程中获得的结构性结果上。

我们注意到，绘图的旋转系统在更广泛的背景下也发挥着作用。例如，在一项近期的突破性成果中，研究者设计了一种算法，用于对一般图的非简单绘制的交叉数进行次多项式近似 [10]。

三角形翻转的研究在多个不同领域有着悠久的历史。除了前文提到的 Gioan 定理相关工作 [4, 15, 16, 31]，，这还特别包括伪直线排列方面的研究 [14, 29, 30, 32]，、纽结理论方面的研究 [3, 20, 21, 25, 28, 35, 36]，，以及关于如何变换紧致定向曲面上的曲线的研究 [9]。

概要。第 2 节主要陈述定义、介绍记号，并给出完全多部图的一个刻画。第 3 节和第 4 节分别概述 Carathéodory 型定理 3 和定理 2 的证明。第5节专门用于证明定理 1：第一个证明几乎完整地给出，第二个证明则简要概述，以说明该算法。第 6 节给出根据第二个证明推导出的所需三角形翻转次数的界。最后，第 7 节提出若干开放问题。

2 定义与预备知识

若图 $G = (V, E)$ 的顶点集 V 可划分为 k 个非空子集 $V_1, \ldots, V_k$，其中 $k \in$ 为某个自然数，并且对每个 V_i（$i \in \{1, \ldots, k\}$），V_i在 G中诱导出一个独立集，则称图 $G = (V, E)$ 为多部图。也就是说，V_i 中任意两个顶点都不相邻。完全多部图 $G = (V, E)$ 包含独立集之外的所有边，即有$E = \{v_i v_j \colon v_i \in V_i \wedge v_j \in V_j \wedge 1 \le i < j \le k\}$。对于由自然数组成的多重集 $\{n_1, \ldots, n_k\}$，存在一个唯一的（在同构意义下）完全多部图 $K_{n_1,\ldots,n_k}$，满足对所有 $j \in \{1, \ldots, k\}$，$|V_j| = n_j$。注意，n 个顶点上的空图（其中 $k = 1$ 且 $n_1 = n$）和完全图 K_n（其中 $k = n$ 且 $n_1 = \cdots = n_k = 1$）都是完全多部图。我们还有以下一个有用的刻画，其证明是一个简单的图论练习。为完整起见，我们在附录 A.1 中给出该证明。

▶ **引理 4.** 图 $G = (V, E)$ 是完全多部图，当且仅当对于每条边 $uv \in E$和每个顶点 $w \in V \setminus \{u, v\}$，都有 $uw \in E$ 或 $vw \in E$（或两者皆有）。

绘图。 图 $G = (V, E)$ 的绘图 γ 是将 G 通过定向曲面 $\mathcal{S}$上的点和曲线进行几何表示。更准确地说，G 的每个顶点 v 都映射到 $\mathcal{S}$ 上的一个点 γ_v，而 G 的每条边 uv 都映射到 $\mathcal{S}$ 上的一条简单曲线 γ_{uv}（即连续且不自相交的曲线），其端点为 γ_u 和 γ_v，满足：

1. 任意两个顶点都映射到不同的点（$\gamma_u = \gamma_v \Longrightarrow u = v$，对所有 $u, v \in V$）。**2.** 没有顶点映射到某条边的相对内部（$\gamma_{uv} \cap \gamma_w = \emptyset$，对所有 $uv \in E$ 和$w \in V \setminus \{u, v\}$）。**3.** 任意两条曲线 γ_e, γ_f，对于 $e \neq f$，至多相交于有限多个点，每个点要么是公共端点，要么是横截交叉。

本文中，我们考虑球面$\mathcal{S}^2$, 上的绘图，但在少数明确指出的地方，我们考虑平面 R^2上的绘图。我们所有的图和绘图都带有标号。因此，我们常将顶点和边与它们在绘图中的几何表示视为相同。任意子图 H of G 都会诱导出一个子绘图 $\gamma[H]$，该子绘图是通过限制 γ到 H的顶点和边而得到的。对于一个图 F，γ的一个 F-子绘图是由 G 中某个与 F同构的子图 H 诱导出的子绘图 $\gamma[H]$。一个绘图将$\mathcal{S}$ 划分为曲线$\{\gamma_e \colon e \in E\}$的顶点（端点）和交叉点、边片段（移除所有顶点和交叉点后，曲线$\{\gamma_e \colon e \in E\}$ 的连通分量），以及胞腔（移除所有顶点、交叉点和边片段后，$\mathcal{S}$ 的连通分量）。对于一个胞腔 C，我们用 ∂C 表示其边界 C。恰由三个边片段围成的胞腔称为三胞腔。

图的绘图类别极为庞大，在许多情况下过于丰富，难以直接发挥作用。首先，通常并不清楚如何用有限的空间表示一个绘图。解决这一问题有两种自然的方法：(1) 进一步限制绘图的类别；或 (2) 在更粗略的层面上研究绘图，即按照某种同构概念来研究。在本文中，我们结合了这两种方法。

简单绘图。 第一种方法的一个例子是欧几里得平面中的直线绘图（也称为几何图），其中边的几何形状由其端点的位置唯一确定；参见《离散与计算几何手册》 [34, 第 10] 章及其中的参考文献。在这项工作中，我们考虑一类更一般的绘图，文献中称之为简单绘图 [11], 优良绘图 [5, 12],拓扑图 [26], 简单拓扑图 [22], ，甚至也称作绘图 [18]。在简单绘图中，任意一对边至多有一个公共点，该点可以是公共端点，也可以是正常交叉。此外，我们可以假设没有三条边相交于



图 3 具有相同边旋转系统但不同构（因为 ux 与 vy 和 wz 的交叉顺序不同）的 $K_{3,3}$ 的两个绘图。阴影三胞腔是一个可逆三角形，在这两个绘图中的奇偶性不同。

同一个公共点。简单绘图是直线绘图在组合和拓扑意义上的推广。如果图 G 有 n 个顶点，那么 G 的每个简单绘图都有O个n^4交叉点、边片段和区域。简单绘图对于交叉数最小化也很重要，因为所有交叉数最小的绘图都是简单的 [33]。

强同构。 第二种方法的一个例子是绘图的强同构概念，定义如下。图 $G = (V, E)$ 的两个绘图 γ 和 η 称为强同构，记作 $\gamma \cong \eta$，如果存在一个保定向同胚 [1]，将 γ 映射到 η，也就是说，对于所有 $v \in V$，都有 $\gamma_v \mapsto \eta_v$；对于所有 $e \in E$，都有 $\gamma_e \mapsto \eta_e$。对于连通绘图，可以得到一个等价的组合表述，具体如下 [22]:

1. 相同的边对相交。（这称为弱同构。）**2.** 沿每条边的交叉点顺序相同。**3.** 在每个顶点和交叉点处，旋转（即关联边的顺时针循环次序）相同（更多详情见下一段）。

强同构这一概念基本涵盖了从拓扑或组合观点出发能够描述绘图的所有信息：顶点和胞腔周围边的次序、哪些边对相交，以及交叉点沿边出现的次序。就本文而言，我们认为强同构的绘图是等价的。

扩展旋转系统。 通过要求两个绘图具有相同的旋转系统，可以得到一种较宽泛的等价概念；旋转系统是所有顶点的旋转所构成的集合。上述组合描述中的性质 3 使用了一种稍强的等价概念，即两个绘图在交叉点处的旋转也相同。更正式地说，交叉点的旋转 χ 是由交叉边对的边片段围绕 χ的循环次序所决定的、该交叉边对的四个顶点的顺时针循环次序。（换句话说，交叉点 χ 的旋转，就是将交叉边对在 χ 处分开，并用 v_χ替换 χ 后得到的额外四度顶点 v_χ 的旋转。）绘图的扩展旋转系统 （ERS）是所有顶点和交叉点的旋转所构成的集合。任何两个强同构的绘图都具有相同的 ERS [22]。但反过来一般并不成立，图 3 中的例子便说明了这一点。

交叉三角形。 事实上，图 3 中这两个绘图在强同构方面的唯一区别，源于由两两交叉的边三元组 ux、vy、wz 形成的三胞腔，该三胞腔在图中以灰色阴影标出：在左侧绘图中，该区域位于有向边 的右侧，

[1] 强同构也可以针对无标号绘图来定义；此时需要建立顶点集之间的映射。有时不要求同胚是保定向的；例如，绘图的镜像也会被视为强同构。

而在右侧绘图中，该区域位于 ux 的左侧。给定一个简单绘图，由三条两两交叉的边 Δ 构成的子绘图中的三胞腔 e_1、e_2、e_3 称为交叉三角形；这三条边 e_1、e_2、e_3 称为张成 Δ。请注意，简单绘图中的每个边三元组至多张成一个交叉三角形。下面的引理表明，交叉三角形对于完全多部图是定义良好的。我们之后不会用到该引理，而且它也可由定理 1 的证明推出。不过，为求完整起见，我们在附录 A.2 中给出一个直接（且短得多）的证明。

▶**引理 5**。 在完全多部图的任何简单绘图中，张成交叉三角形的边三元组集合由边旋转系统唯一确定。

可逆三角形与三角形翻转。 为了正式定义三角形翻转操作，先为抽象图 G的边全局固定一种定向 π。这种定向可以任意选择，但图一旦确定，其定向也随之固定。根据这一种定向 π，我们可以按如下方式为每个交叉三角形指定奇偶性。绘图中交叉三角形 Δ 的奇偶性 是指满足以下条件的 Δ 边界边数量的奇偶性（奇或偶）： Δ 沿边的定向前进时位于该边左侧。图 3 展示了交叉三角形奇偶性为偶（左）和奇（右）的两种绘图。如果存在同一图 G 的另一种简单绘图 $\gamma' \neq \gamma$，其边定向 π 相同、边旋转系统也相同，且其中 Δ 的奇偶性相反，则绘图 γ 中的交叉三角形 Δ 称为可逆。在引理 14 中，我们将证明，完全多部图绘图中的任何可逆三角形都是空的，也就是说，其中不包含任何顶点。

局部重绘一个空交叉三角形的边，从而改变其奇偶性，是将给定绘图（例如图 3（左））转换为新绘图（例如图 3（右））的一种基本操作。除强同构外，重绘方式唯一。此操作称为三角形翻转 [4], 三角形变异 [15],滑动移动 [31], 同伦移动 [9, 20], 或第三类 *Reidemeister* 移动；后一名称在纽结理论中被广泛使用[2] [3, 21, 25, 28, 35, 36]。

三角形翻转图。 </style}以三角形翻转作为基本操作，我们可以定义一个元图，其顶点为绘图，边对应三角形翻转。我们
固定一个图 G，并考虑其在S </style}上除强同构外的所有简单绘图；这些构成三角形翻转图$T(G)$的顶点。若绘图 γ，η 可由绘图 γ 经过一次三角形翻转得到，则二者由$\pi(G)$中的一条边相连。由于三角形翻转可逆，边是对称的。因此，我们将$\pi(G)$视为无向图。

注意，三角形翻转不会改变任何顶点或交叉点的旋转，只会改变各边上交叉点的顺序。因此，只有具有相同 ERS 的绘图才能属于 $\mathcal{T}(G)$ 的同一个连通分量。一般而言，翻转图 $\pi(G)$ 可能是非连通的。例如，考虑图4中所示的一条路径的两种绘图。由于这两种绘图都不包含交叉三角形，因此它们都是 $\pi(G)$ 中的孤立顶点。



图4 一条路径的两种绘图具有相同的边旋转系统，但边 cd上的交叉点顺序不同，因此这两种绘图并非强同构。两种绘图都不包含可翻转的三胞腔。

[2] 不过，在纽结的语境中，曲线之间的上下关系也很重要

3 完全多部图的 Carathéodory 型定理

本节旨在概述 Carathéodory 型定理 3 的证明。对于 K_n 的简单绘图，相应的结论是对 R ^{2}，中凸集的经典定理的直接推广，Balko、Fulek 和 Kynčl 已证明了这一结论 [6]。后来，Bergold、Felsner、Scheucher、Schröder 和 Steiner 给出了更简单的证明 [7], ，我们将沿用其证明思路。定理 3 的完整证明见附录 B。此处我们概述证明。

证明概要。 如果 G 为空或为星图 $K_{1,\ n}$，那么该命题显然成立。因此我们假设 G 既非空也非星图，于是任意一对不同顶点 u，$v \in V$（其中 $uv \notin E$）至少有两个不同的公共邻点。通过研究一个极小反例，我们用反证法证明定理 3。为此，我们考虑 G 的一个简单绘图 D 和一个点 p，使得满足以下条件：

1. 点 p 位于 D的一个有界区域内。**2.** 点 p 不包含在 C_i的任何诱导子绘图的有界区域内，其中 D取自 $i \in \{3,\ 4\}$。**3.** 从 D中移除任意顶点后，点 p 都位于无界区域内。

设 a 是 G的一个顶点，并设 O 是与 a 关联的最小边集，使得从 D 中移除 O 的所有边后，p 位于所得绘图 D^-的无界区域内。于是，在 D^- 中，可以画一条从 p 到 D 无界区域内部的简单曲线 P，使得 P 不与 D^-的任何顶点或边相交。在满足此约束的前提下，我们选择 P，使其与 D的边的交叉点数量最少。我们证明，可以假设 O 中的每条边都与 P 恰好相交一次。最后，我们考虑一条边 $ab \in O$，它在点 p_{ab}处与 P相交，并根据 ab 是否在 a 与 p_{ab} 之间与另一条边相交，分析两种情况。我们证明，在这两种情况下，p 都包含在 D的一个诱导 C_i-子绘图的有界区域内，其中 $i \in$ 取自$\{3,\ 4\}$。

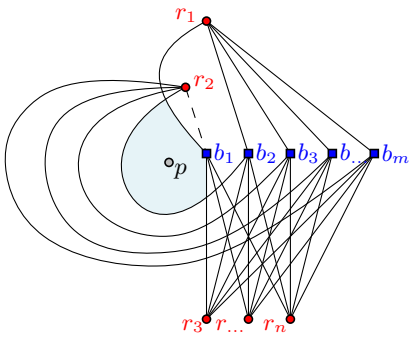


图 5 K_m的绘图，n 删去一条边（r_2b_1，以虚线绘出）后，基于图 6。点 p 位于一个有界区域内，但不在任何 C_i中，其中 $i \in \{3,\ 4,\ 5\}$。

要说明从 G 中移除一条边后，该定理可能不再成立，请考虑图 5 所示的 $K_{m,\ n}$、m、$n \geq 2$ 的简单绘图。移除边 b_1r_2 后，点 p 仍位于一个有界区域中，但任何包围 p 的圈都至少有六个顶点。◀

4 定理 1 本质上是紧的

定理 2 表明，定理 1 在本质上是紧的：移除或添加极少数边，就可能得到一个不满足该定理的图。这意味着，Gioan 型定理成立的图类，在取（非诱导）子图或超图的操作下并不封闭。我们通过展示用于说明紧性的绘图，简要概述定理 2 的证明。完整证明见附录 C。

图 6–9 中每幅图都包含同一个图的两种简单绘图，且它们具有相同的边旋转系统。在所有这些图中，两种绘图沿着 b_1r_1 的交叉顺序都不同。由于以不同顺序与 b_1r_1 交叉的边两两不交叉，因此无法通过三角形翻转改变这一顺序。图 6 和图 7 展示了$K_{m,n}$ 减去两条相邻边或不相交边的情形；图 8 是将图 6 扩展到 K_m 减去一个 4-圈的情形；图 9 展示了图 8 的子绘图，它们构成一个$K_{m-1,n+1}$ 加一条边。

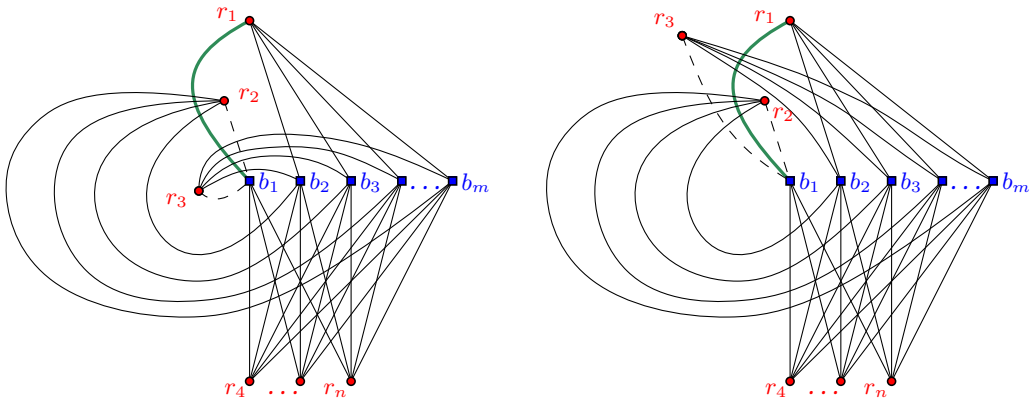


图 6 同一个$K_{m,n}$ 减去两条相邻边 b_1r_2 和 b_1r_3 （以虚线绘制）的两种绘图，它们具有相同的边旋转系统，但无法通过三角形翻转相互转换。

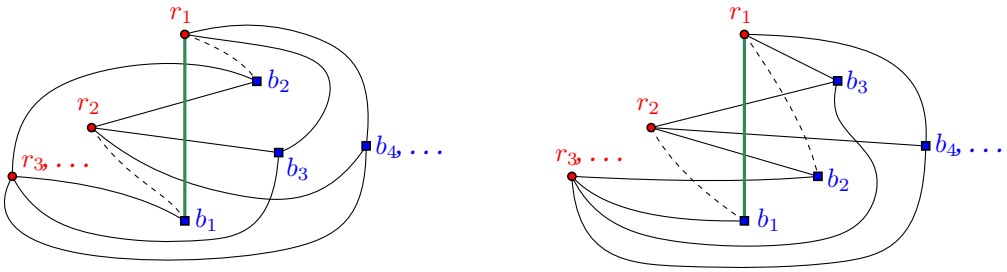


图 7 K_m的两幅绘图，n 去掉两条独立边 b_2r_1 和 b_1r_2 （以虚线绘出）后，具有相同的边旋转系统（ERS），但无法通过三角形翻转相互转换。

我们指出，对于任何包含以下子图的图，也存在具有相同边旋转系统、但无法通过三角形翻转相互转换的两个简单绘图：(1) 一个 K_5 减去一个 4-圈；或 (2) 一个 $K_{2,3}$ 减去二部划分类中共享一个顶点的两条边，其中该划分类的基数为二（诱导子图列表并非穷尽）。通过在图 8 所示的构造中选取适当的子绘图即可证明这一点。

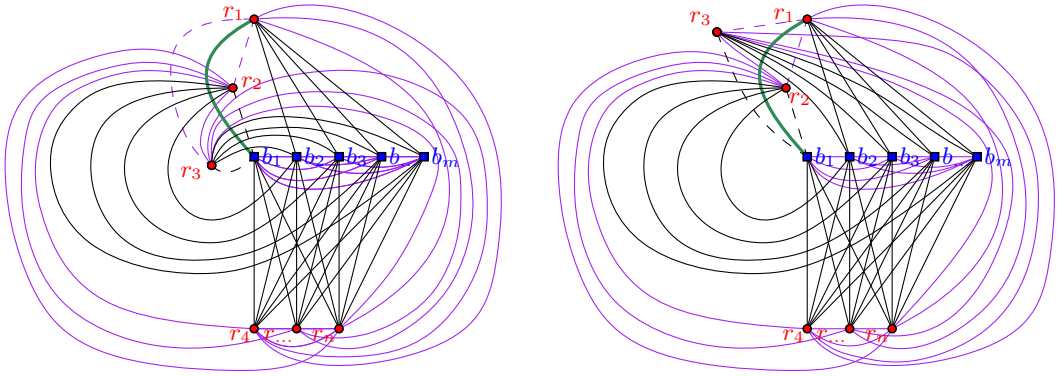


图 8 K_m 减去一个 4-圈（以虚线绘制）的两种绘图，它们具有相同的边旋转系统，但无法通过三角形翻转相互转换。

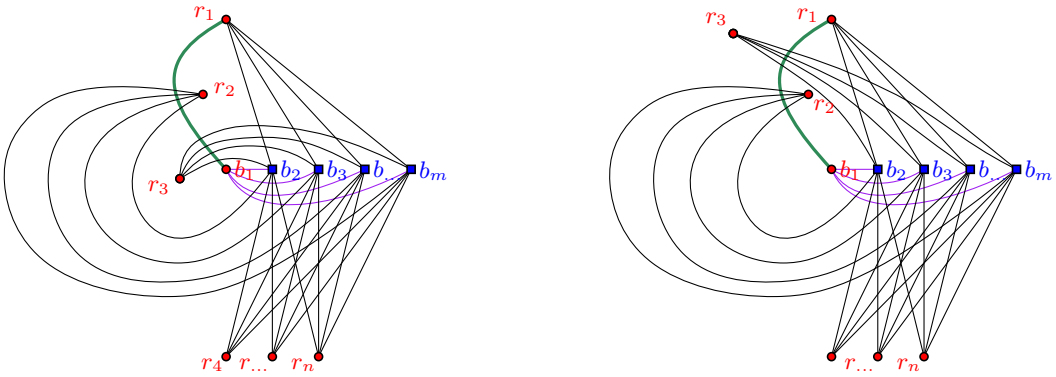


图 9 $K_{m-1,\ n+1}$ 加上一条边（b_1r_1）的两种绘图，无法通过三角形翻转相互转换。

5 完全多部图的 Gioan 型定理

本节将给出定理 1 的两种证明，并对第二种证明作简短的算法讨论。

5.1 定理 1 的第一个证明

在定理 1 的第一个证明中，我们采用与 Schaefer [31] 相同的总体思路。为了紧密遵循 Schaefer 的论证路线，我们在此证明中也使用同胚。

证明。 设 G 是一个完全多部图，D_1 和 D_2 是该图在 $\mathcal{S}^2$ 上具有相同边旋转系统的两个简单绘图。设 $R=\{r_1,r_2,\dots,r_n\}$ 是 G 中的一个极大独立集，并设 $B=\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$ 表示其余顶点的集合。注意，由顶点集 $R\cup B$ 以及所有一端在 R、另一端在 B 的边所构成的图是一个完全二部图 $K_{n,m}$，且集合 R 是 G 中的一个独立集，而 B 不一定是独立集。

根据 [2]，D_1 由此$K_{n,\ m}$ 生成的子绘图包含一棵生成树 T，它在该子绘图中绘制时没有交叉，因此在 D_1中也没有交叉。由于 D_1 和 D_2 具有相同的交叉边对，T 在 D_2 中绘制时也没有交叉。根据假设，D_1和 D_2 的旋转系统相同，因此 T 在 D_1 和 D_2 中的绘图同胚。

因此，存在一个绘图 D:≅ D_1 ，具有以下性质。
1. T 的绘图在绘图 D 和 D_2中相同，这意味着两幅绘图中的顶点位置也相同。2. 将 D 和 D_2 的顶点与边组成的集合视为 D 和 D_2的组合绘图，我们把从某个顶点发出的、属于 D 和 D_2 的边的循环次序称为该顶点处的组合旋转。对于 G 中（不属于 T的）每条边 e ，以及 e中的每个顶点 v ， e 的两种绘图在 v处的组合旋转中相邻。3. 对于 G中的每条边 e ， e 的两种绘图要么完全相同，要么只有有限个公共点（其中两个是其端点，其余为正常交叉）。

我们的目标是通过三角形翻转（以及保向同胚）改变 D ，直到得到 $D = D_2$。由于两幅绘图中的顶点位置相同，我们可以讨论一条边在 D和 D_2中的两种绘图是否相同。与 Schaefer 的证明一样，我们逐步减少在 D和 D_2中绘制方式不同的边的数量。令 $E_=$ 为在 D 和 D_2 中绘图相同的边的集合。初始时， $E_=$至少包含 T的所有边。如果 $E_=$ 包含 G 的所有边，那么我们就完成了。

因此，假设情况并非如此，并考虑一条在 D和 D_2中绘制方式不同的边 e 。令 e_1 和 e_2 分别表示 e 在 D 和 D_2中的曲线。由于 D和 D_2 具有相同的边旋转系统， e_1 和 e_2 与 T 中的相同边相交，且交叉旋转也相同。此外，下面的引理表明，它们与这些边相交的顺序也相同。借助引理 4，并对含有六个顶点的绘图进行分类讨论，即可证明该引理。

▶**引理6**。 设 D 是定义在 S^2 上的完全多部图 G 的简单绘图，且vw 是 G的一条边。那么，对于 vw所交叉的任意一对相邻边或不相交边， D 的边旋转系统决定了 vw 与它们相交的顺序。

因此，就 T 的绘图而言， e_1 和 e_2 等价（该绘图在 D和 D_2中相同）；也就是说， e_1 与 T 具有相同的有向交叉序列。令 $\Gamma = e_1 \cup e_2$为由 e_1 和 e_2构成的闭曲线（不一定是简单闭曲线）。 Γ 中的透镜是 Γ的一个区域，其边界恰由 Γ的两段边片段构成，其中一段来自 e_1 ，另一段来自 e_2。接下来，考虑 T 的绘图 D_T ，以及 e的绘图 e_1 和 e_2 。如果 Γ 的一个透镜内部不含 T 的顶点（因而也不含 G的顶点），则称其为空的。下面的引理将证明 Γ 构成一个空透镜。该引理是 Hass和Scott关于曲面 [19, 上相交曲线的一个结果1]，（引理3）的特例，该结果也称为双边形判据 [13, （第1.2节）4]。Schaefer [31, （引理3）2] 针对平面（或球面）情形给出了一个初等证明，其中平面生成树 T 为星图。不过，他只用到了以下条件：该星图是无交叉的生成子绘图，且e_1 和 e_2 关于该星图等价。因此，我们可以逐行沿用其证明，从而得到适用于任意平面生成树 T的结果。

▶ **引理 7** ([13, 19, 31])。 设 D_1 和 D_2 是图 S^2 的两个简单绘图，它们都包含同一个生成树 T 的无交叉绘图 D_T 作为子绘图。设 e 是一条边，两个绘图 e_1 和 e_2 在这条边上的绘制不同，但相对于 D_T等价。那么，$\Gamma = e_1 \cup e_2$ 构成一个空透镜。

设 L 是 Γ的一个空透镜，它分别由 e_1 的边片段 γ_1 和 e_2的边片段 γ_2 构成。 $\gamma_1 \cap \gamma_2$ 的两个点各自要么是端点，要么是 e_1与 e_2之间的交叉点。回想一下，在 D 和 D_2的组合绘图中， e_1 和 e_2 在各自端点处的组合旋转中相邻。因此，无论$\gamma_1 \cap \gamma_2$ 的点是交叉点还是端点，γ_2 都是 Schaefer 所称的“ e_1上的 γ_1 的同伦绕行 ”。

接下来需要用到他的绕行引理，我们在此用稍有不同的术语（并针对球面上的绘图，而非平面上的绘图）重新表述该引理。

▶ **引理 8** (绕行引理 [31, 引理 2。1])。 设 γ_2 是图的简单绘图中边 e_1 上弧 γ_1 的一个同伦绕行。设 F 是与 γ_2 相交至少两次的边的集合。于是，我们可以对球面 S^2进行一系列三角形翻转和同胚，使得在所得绘图中， γ_1 被绘制得任意接近 γ_2，且不与其相交。三角形翻转和同胚只影响由 $\gamma_1 \cup \gamma_2$围成区域的一个小开邻域，并且只有 F 中的边和 e_1 的 γ_1 部分会被重新绘制。

请注意，受该变换影响的边集 F 与 $E_=$不相交，因为 $E_=$ 中的任何边在 D 和 D_2 中都相同，因此与 γ_2 至多相交一次。

如果 $\gamma_1 \cap \gamma_2$ 的点中至少有一个是交叉点，那么应用绕行引理后，我们可以（通过同胚）重新绘制 e_1，使其与 e_2 至少少一个交叉点，然后用重新绘制的边重复应用引理 7 和引理 8 的过程。

如果 $\gamma_1 \cap \gamma_2$ 的点中没有交叉点，那么 $e_1 \cup e_2$ 是一条简单闭曲线，且 $\gamma_1 = e_2$ 是 $\gamma_2 = e_1$ 的同伦绕行。因此，最后再应用一次引理 8 后，我们可以重新绘制 e_1，使其与 e_2 完全相同。通过这一步， e_2 被加入 $E_=$，并且我们使 D 和 D_2 之间不同的边数减少了一个。

对其余不同的边重复这一过程，我们便得到两幅完全相同的绘图。忽略同胚，这一过程给出了一系列三角形翻转，可将 D_1 转化为 D_2 （至强同构），从而完成定理的证明。◀

5.2 定理 1 的第二个证明

我们在此简要概述定理 1 的第二个证明。该证明采用了与 Arroyo、McQuillan、Richter 和 Salazar [4] 对 Gioan 定理的证明相同的总体框架。此处仅给出简要概述。完整证明（从更详细的概述开始）见附录 D。

证明概要。 我们考虑两个简单绘图 D_1 和 D_2，它们是同一个完全（多部）图 $G = (V, E)$ 的绘图，且具有相同的边旋转系统。我们将其中一个（例如 $D := D_1$）逐步变换，使其变得“更相似于”另一个。相似程度通过子图 X 来衡量，该子图属于 G；我们要求其诱导子绘图 $D[X]$ 和 $D_2[X]$ 强同构，作为一项不变量。每次迭代中，我们都会向 X 添加一条边，然后在 D 中进行一系列三角形翻转，以重新建立该不变量。

首先，我们按以下方式建立不变量。如同第一个证明，我们考虑一个顶点独立集 $R \subseteq V$，使得 G 在 R 和 B 之间包含一个完全二分子图：$= V \setminus R$。如果 G 是完全的，那么 R 只包含一个顶点；一般而言，它可能包含多个顶点。然后，我们选取一个顶点 $r_0 \in R$，首先令 X 为以 r_0 为中心的 G 的极大诱导子星（其中包括 B 的所有顶点）。随后，不变量成立，因为根据假设，两个绘图具有相同的旋转系统。

然后，我们按任意顺序考虑 R 中可能剩余的顶点。设 $r \in R$ 为下一个要考虑的顶点。首先，我们证明 r 在由不变量保证强同构的诱导子绘图 $D[X]$ 和 $D_2[X]$ 中的位置是一致的，即顶点 r 位于这些绘图中相同的（根据同构确定的）面内（引理 11，其证明使用了 Carathéodory 型定理 3）。

我们将与 r 相 incident 的边逐一添加到 X。添加边 rb 到 X 以得到 $X' = X \cup \{rb\}$ 时，绘图 $D[X']$ 和 $D_2[X']$ 可能并非强同构，因为边 rb 在两幅绘图中与其他边交叉的顺序可能不同。我们考虑

两幅绘图 $D[X']$ 和 $D_2[X']$ 的一种叠加图 O，其中两个版本的 rb 合在一起构成一条闭曲线 Γ，带有 $O(|V(X')|^4)$ 个自交点（引理 12），其中 $|V(X')|$ 表示 X' 的顶点数。在 Γ 中，我们可以找到一个良好的子结构，称为**自由透镜**，并证明它总是存在（引理 13）。Γ 中的透镜若不包含 O 的任何顶点，则称为**自由的**；不过，它可以包含边交叉。每个这样的边交叉都对应于 D 中的一个可逆三角形。可逆三角形中不含顶点（引理 14），不仅不含 X 的顶点，也不含（可能尚未考虑的）R 的顶点。因此，与可逆三角形 Δ 相交的 D 的边，在 Δ 内的行为类似于一组伪直线，只是并非所有线对都必须相交。设 m 为与 Δ 相交的边数。利用 Hershberger 和 Snoeyink 的经典扫描算法 [32, 引理 3]，所有 m 条边都可以通过 D 中的三角形翻转从 Δ 中“扫出”，翻转总数有界于 $O(m^3)$。经过这些翻转后，Δ 已成为一个交叉三角形，可以在 D 中翻转。以这种方式处理所选自由透镜内的所有可逆三角形，就能有效消除该透镜。迭代消除所有自由透镜后，所得绘图 $D[X']$ 与 $D_2[X']$ 强同构。

在将 R 中的所有顶点以及 R 和 B 之间的 G 完全二分子图添加到 X 后，我们以与上述完全相同的方式添加剩余的边（即两个端点都位于 B 中的边）。◀

尽管上述证明的整体思路大体遵循 K_n [4] 的证明，但其核心难点在于证明若干命题；这些命题在 K_n 中已有对应结果，但对于完全多部图尚无相关结果。尤其包括引理 11、13 和 14 的证明（而引理 12 的证明相当直接）。我们将在附录 D.2 的末尾讨论这些难点。

算法复杂度。 上述证明给出了一种可使用标准计算几何数据结构实现的算法。其运行时间关于输入规模和执行的三角形翻转次数呈多项式增长。

6 三角形翻转的数量

具有相同边旋转系统的完全多部图的两种不同绘图之间的翻转距离，是将一种绘图转换为另一种绘图所需的最少三角形翻转次数。本节旨在给出翻转距离的界。

对于上界，Schaefer [31, 备注 3.3] 证明，具有相同旋转系统的任意两种 K_n 简单绘图，都可以通过至多 $O(n^{20})$ 次三角形翻转相互转换。利用定理 1 的第二个证明，我们可以得到上界 $O(n^{16})$，用于表示具有 n 个顶点且边旋转系统相同的任意完全多部图的两种简单绘图之间的翻转距离（因此也适用于 K_n 的此类绘图）。

▶**定理 9。** 设 D_1 和 D_2 是完全多部图 G 在 S^2 上的两种简单绘图，该图有 n 个顶点，且两种绘图具有相同的边旋转系统。那么，D_1 可以通过一系列 $O(n^{16})$ 次三角形翻转转换为 D_2；这些翻转由定理 *1* 的第二个证明中的算法得到。

证明。 我们通过定理 1 的第二个证明来分析所进行的翻转次数。回想一下，在该证明中，我们迭代地考察 G 的边。我们在绘图 D（初始设为 D_1）中进行翻转，使得由已考察的边所诱导的 D 和 D_2 的子绘图变得（强）同构。

考虑一条新边 e时，我们设想将它的两个版本（分别来自 D和 D_2）添加到已经同构的子绘图 X 中，该子绘图属于 D 和 D_2。根据引理 12，

可以通过某种方式完成这一操作，使得在组合绘图中，e 的两个副本有$O(|V(X)|^4) = O(n^4)$个交叉点，其中 $|V(X)|$ 是 X的顶点数。

设 C 为由 e 的两个副本构成的闭曲线。为了变换 D，使得 e 在 D 中的绘图与 D_2 中的绘图同构，我们迭代地消除 C 的一个自由透镜。每次迭代中，我们都会减少 C 的交叉点数量，最后一次迭代（即最后一个透镜）除外。因此，处理 e 时需要消除的透镜数量也有界于 $O(n^4)$。要消除一个自由透镜，我们需要翻转该透镜中所有以 e 为边的倒置三角形，其数量至多为 $O(n^4)$ 个。对于一个被 $m = O(n^2)$ 条边穿过的倒置三角形 Δ，可以通过 $O(m^3) = O(n^6)$ 次三角形翻转来完成。因此，消除一个自由透镜可以通过 $O(n^4) \cdot O(n^6) = O(n^{10})$ 次三角形翻转来实现。

对 C 的所有透镜以及 G 的每条 $O(n^2)$ 边重复这一操作，可得三角形翻转总次数的上界为 $O(n^2) \cdot O(n^4) \cdot O(n^{10}) = O(n^{16})$。◀

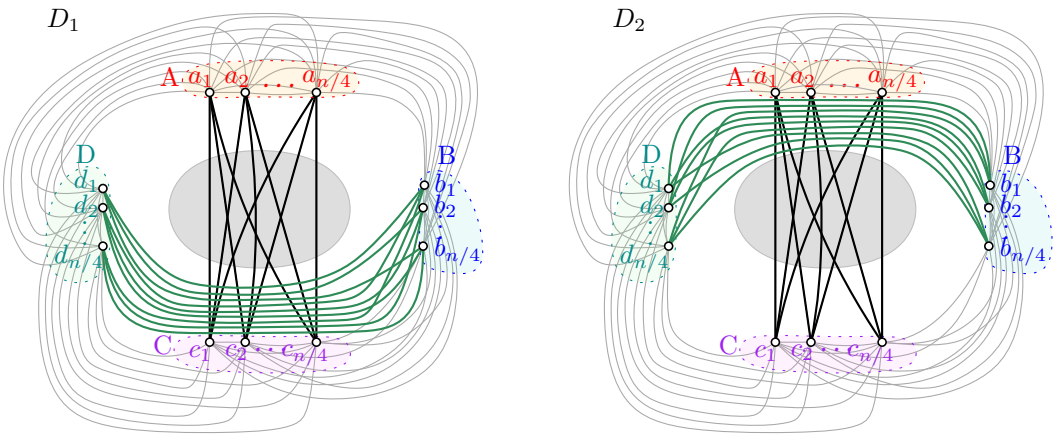


图 10 K_n 的两个简单绘图具有相同的边旋转系统，其翻转距离为 $\Omega(n^6)$。

▶**定理 10。** 设 G 是一个有 n 个顶点的多部图 G，其中包含两个顶点不相交的子图，且每个子图均构成一个 $K_{m,\,m}$，其中 $m = \Theta(n)$。则 G 存在两个绘图D_1 和 D_2，它们具有相同的边旋转系统，且翻转距离为 $\Omega(n^6)$。

证明思路。 要将图 10 中 K_n 的两个绘图相互转换，$\Theta(n^2)$ 条边 $b_i d_j$ 均需越过由边 $a_k c_\ell$ 形成的 $\Theta(n^4)$ 个交叉点，由此得到 $\Omega(n^6)$ 的下界。忽略所有边 $a_i b_j$ 和 $c_i d_j$，即可得到一个 $K_{m,\,m}$ 的两个绘图作为相应示例。详细证明见附录 E。◀

7 结论与开放问题

我们证明了 Gioan 定理适用于完全多部图（定理 1），从而扩展了此前的结果 [4, 15, 16, 31]。此外，我们证明了满足类似陈述的图类在添加或移除边后并不封闭（定理 2）。我们还给出了若干障碍，证明任何包含这些障碍之一作为子结构的图都不满足 Gioan 定理。不过，这份障碍清单可能并不完整。对于哪些图而言，具有相同边旋转系统的绘图满足 Gioan 型陈述，目前仍未得到完整刻画。

▶**问题 1.** 对于具有相同边旋转系统（*ERS*）的绘图，哪些图满足 *Gioan* 型定理？我们能否对此作出完整刻画？

此外，具有相同的边旋转系统（ERS）并非 Gioan 型陈述成立的唯一必要条件。另一个这样的条件是：在所有绘图中，相邻边或不相交边必须具有相同的交叉顺序。定理 2 证明中的构造依赖于违反这一条件。

▶**问题 2.** 我们能否刻画所有满足 *Gioan* 型定理的图，其中所讨论的绘图类满足（部分）显然必要的条件？

在第 3 节中，我们证明了一个关于具有相同边旋转系统（定理 3）的完全多部图简单绘图的 Carathéodory 型定理。我们很想知道，对哪些其他图类也有类似的结论。

自然地，我们也希望缩小甚至消除第 6 节中得到的翻转距离下界 $\Omega(n^6)$ 与上界 $O(n^{16})$ 之间的差距。

▶**问题 3.** 对于具有给定边旋转系统的 n 个顶点完全多部图，两个简单绘图之间的最坏情形翻转距离是多少？

参考文献

1 Bernado M. Ábrego、Oswin Aichholzer、Silvia Fernández-Merchant、Thomas Hackl、Jürgen Pammer、Alexander Pilz、Pedro Ramos、Gelasio Salazar 和 Birgit Vogtenhuber。《小型完全图的所有良好绘图》。载于 31^{st} 欧洲计算几何研讨会 EuroCG '15 论文集，第 57–60 页，斯洛文尼亚卢布尔雅那，2015年。URL：http://www.csun.edu/~sf70713/publications/all_good_drawings_2015.pdf。2 Oswin Aichholzer、Alfredo García、Irene Parada、Birgit Vogtenhuber 和 Alexandra Wein- berger。《简单绘图中的流星》，K_{m}、$_{n}$。载于 Patrizio Angelini 和 Reinhard von Hanxleden 编，《图绘制与网络可视化》，第 49–57 页，尚，2023年。施普林格国际出版。doi:10.1007/978-3-031-22203-0_5。3 James W. Alexander 和 Garland B. Briggs。《纽结曲线的类型》。Ann. Math.，28(1/4)：562–586，1927年。doi:10.2307/1968399。4 Alan Arroyo、Dan McQuillan、R. Bruce Richter 和 Gelasio Salazar。《具有相同旋转方案的 K_n 绘图在三角形翻转下等价（Gioan 定理）》。Australas. J. Comb.，67(2)：131–144，2017年。URL：https://ajc.maths.uq.edu.au/pdf/67/ajc_v67_p131.pdf。5 Alan Arroyo、Dan McQuillan、R. Bruce Richter 和 Gelasio Salazar。《Levi 引理、 K_n的伪直线绘图与空三角形》。J. Graph Theory，87(4)：443–459，2018年。doi:10.1002/jgt.22167。6 Martin Balko、Radoslav Fulek 和 Jan Kynčl。《 K_n单调绘图的交叉数与组合刻画》。Discrete Comput. Geom.，53：107–143，2015年。doi:10.1007/s00454-014-9644-z。7 Helena Bergold、Stefan Felsner、Manfred Scheucher、Felix Schröder 和 Raphael Steiner。《拓扑绘图与凸几何中的经典定理相遇》。载于第 28 届国际图绘制研讨会论文集，《计算机科学讲义》第 12590 卷，第 281–294 页。施普林格出版社，2020年。doi:10.1007/978-3-030-68766-3_22。8 Jean Cardinal 和 Stefan Felsner。《完全二部图的拓扑绘图》。J. Comput. Geom，9(1)：213–246，2018年。doi:10.20382/jocg.v9i1a7。9 Hsien-Chih Chang、Jeff Erickson、David Letscher、Arnaud de Mesmay、Saul Schleimer、Eric Sedgwick、Dylan Thurston 和 Stephan Tillmann。《通过局部变换收紧曲面上的曲线》。载于第 29 届 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集，第 121–135 页，2018年。doi:10.1137/1.9781611975031.8。10 Julia Chuzhoy 和 Zihan Tan。《低度图中图交叉数的次多项式近似算法》。载于第 54 届 ACM SIGACT 计算理论研讨会论文集，STOC 2022，第 303–316 页，美国纽约州纽约，2022年。计算机协会。doi:10.1145/3519935.3519984。

16 三角形翻转下的完全多部图绘图

11 Walter Didimo、Giuseppe Liotta 和 Fabrizio Montecchiani。《超越平面性的图绘制综述》。ACM Comput. Surv.，52(1)：4:1–4:37，2019年。 doi:10.1145/3301281。12 Paul Erdős 和 Richard K. Guy。《交叉数问题》。Am. Math. Mon.，88：52–58，1973年。 doi:10.2307/2319261。13 Benson Farb 和 Dan Margalit。《映射类群入门》，普林斯顿数学丛书第 49 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2012年。14 Stefan Felsner、Alexander Pilz 和 Patrick Schnider。《趋近伪直线的排列》。Discrete Comput. Geom.，67：380–402，2022年 3 月。 doi:10.1007/s00454-021-00361-w。15 Emeric Gioan。《三角形变异下的完全图绘制》。载于第 31 届国际图论概念与计算机科学研讨会论文集，《计算机科学讲义》第 3787 卷，第 139–150 页。施普林格，2005年。 doi:10.1007/11604686_13。16 Emeric Gioan。《三角形变异下的完全图绘制》。Discrete Comput. Geom.，67：985–1022，2022年。 doi:10.1007/s00454-021-00339-8。17 Jonathan L. Gross 和 Thomas W. Tucker。《拓扑图论》。Wiley-Interscience离散数学与优化丛书。John Wiley & Sons Inc.，纽约，1987年。Wiley-Interscience 出版物。18 Heiko Harborth。《完全图绘图中的空三角形》。Discrete Math.，191：109–111，1998年。 doi:10.1016/S0012-365X(98)00098-3。19 Joel Hass 和 Peter Scott。《曲面上的曲线交点》。Isr. J. Math.，51(1-2)：90–120，1985年。20 Noboru Ito 和 Yusuke Takimura。《结投影上的 (1,2) 与弱 (1,3) 同伦》。J. Knot Theory Ramif.，22(14)，2013年。 doi:10.1142/S0218216513500855。21 Louis H. Kauffman。《三维空间中的图不变量》。Trans. Am. Math. Soc.，311(2)：697–710，1989年。 doi:10.1090/S0002-9947-1989-0946218-0。22 Jan Kynčl。《简单完全拓扑图的计数》。Eur. J. Comb.，30：1676–1685，2009年。 doi:10.1016/j.ejc.2009.03.005。23 Jan Kynčl。《P 中完全抽象拓扑图的简单可实现性》。Discrete Comput. Geom.，45：383–399，2011年。 doi:10.1007/s00454-010-9320-x。24 Jan Kynčl。《改进的简单拓扑图计数》。Discrete Comput. Geom.，50：727–770，2013年。 doi:10.1007/s00454-013-9535-8。25 Marc Lackenby。《Reidemeister 变换次数的多项式上界》。Ann. Math.，82(2)：491–564，2015年。 doi:10.4007/annals.2015.182.2.3。26 János Pach、József Solymosi 和 Géza Tóth。《完全拓扑图中的不可避免构形》。Discrete Comput. Geom.，30(2)：311–320，2003年。 doi:10.1007/s00454-003-0012-9。27 János Pach 和 Géza Tóth。《图有多少种画法？》。Combinatorica，26(5)：559–576，2006年。 doi:10.1007/s00493-006-0032-z。28 Kurt Reidemeister。《结理论的初等论证》。Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg，5：24–32，1927年。 doi:10.1007/BF02952507。29 Gerhard Ringel。《由直线或拓扑直线划分平面》。Math. Z.，64：79–102，1956年。 doi:10.1007/BF01166556。30 Jean-Pierre Roudneff。《平面中点的伪构形的 Tverberg 型定理》。Eur. J. Comb.，9(2)：189–198，1988年。 doi:10.1016/S0195-6698(88)80046-5。31 Marcus Schaefer。《绕道而行；或 Gioan 定理与完全图的伪直线绘图》。Discrete Comput. Geom.，66：12–31，2021年。 doi:10.1007/s00454-021-00296-2。32 Jack Snoeyink 和 John Hershberger。《曲线排列扫描》。载于《离散与计算几何：DIMACS特别年度论文集》，DIMACS 第 6 卷，第 309–349 页。AMS，1991年。 doi:10.1090/dimacs/006/21。33 László A. Székely。《一种成功的图非平面性度量概念：交叉数》。Discr. Math.，276(1)：331–352，2004年。第六届国际图论会议。doi:10.1016/S0012-365X(03)00317-0。

34 Csaba D. Tóth、Joseph O'Rourke 和 Jacob E. Goodman 编。《离散与计算几何手册》第三版。Chapman and Hall/CRC，2017年。网址： https://www.routledge.com/9781498711395。35 Bruce Trace。关于经典纽结的 Reidemeister 变换。《美国数学会会刊》，89(4):722–724，1983年。doi:10.1090/S0002-9939-1983-0719004-4。36 Shûji Yamada。空间图的一个不变量。《图论杂志》，13(5):537–551，1989年。doi:10.1002/jgt.3190130503。

A 第 2 节缺失的证明

A.1 完全多部图的刻画（引理 4 的证明）

▶ **引理 4。** 图 $G=(V,E)$ 是完全多部图，当且仅当对于每条边 $uv \in E$和每个顶点 $w \in V \setminus \{u,v\}$，都有 $uw \in E$ 或 $vw \in E$ （或两者都有）。

证明。“⇒”：若 $uv \in E$，则 u 和 v 属于划分中的不同部分。因此， w 最多只能与 u 或 v 中的一个属于同一划分部分。不失一般性，假设 u和 w 属于不同的划分部分。于是 $uw \in E$。

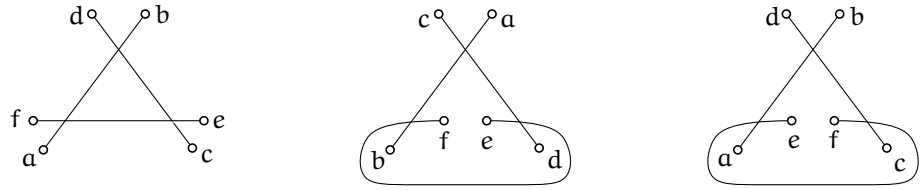
“⇐”：在 $V \times V$ 上定义非邻接关系 $\not\sim$，使得 $u \not\sim v \iff uv \notin E$。我们断言 $\not\sim$ 是等价关系。自反性和对称性显然。为证明传递性，假设 $u \not\sim v$ 和 $v \not\sim w$。于是 $uv \notin E$ 和 $vw \notin E$。若 $v \in \{u,\ w\}$，则 $u \not\sim w$ 显然成立。因此，假设 $v \in V \setminus \{u,\ w\}$。我们要证明 $u \not\sim w$，也就是说， $uw \notin E$。反设 $uw \in E$。那么，根据引理陈述中的假设，将其应用于边 uw 和顶点 v，可得 $vu \in E$ 或 $vw \in E$，这与 $u \not\sim v$ 和 $v \not\sim w$矛盾。因此，我们有 $uw \notin E$ 和 $u \not\sim w$，这证明了 $\not\sim$ 具有传递性。

令 $V_1,\dots,V_k$ 表示 V按照 $\not\sim$划分得到的等价类。显然，根据 $\not\sim$的定义，对于 $i \in \{1,\dots,k\}$ 中的每个 V_i，它都是 G中的独立集；对于满足 $1 \le i < j \le k$ 的每一对 $u \in V_i$ 和 $v \in V_j$，都有 $u \neq v$，也就是说， $uv \in E$。换言之，图 G 是顶点划分为 $V_1,\dots V_k$的完全多部图。◀

A.2 边旋转系统确定交叉三角形（引理 5 的证明）

▶**引理 5.** 在完全多部图的每个简单绘图中，张成交叉三角形的边三元组集合 s 由边旋转系统唯一确定。

证明。 考虑一个多部图 $G=(V,E)$，它有 n 个顶点。如果 G 不存在包含交叉三角形的简单绘图，则引理结论成立。特别地， $n \le 5$ 就是这种情况，因为张成交叉三角形需要六个顶点。因此，我们可以假设 $n \ge 6$，并且存在一个绘图 Γ，它是 G 的绘图，且包含交叉三角形 T。令 $ab, cd, ef \in E$为定义 T的三条边。简单绘图中的三条两两交叉的边，在忽略标记和（强）同构的情况下，只能形成两种可能的排列：类型 1（图 11a）对应一个交叉三角形（也就是说，所有顶点都在同一个区域的边界上）；类型 2（图 11b）则有两个顶点位于一个区域的边界上，另外四个顶点位于另一个区域的边界上。



(a) 类型 1 **(b)** 类型 2 **(c)** 类型 2

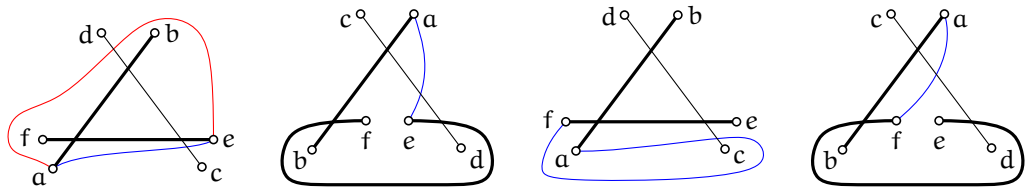
图 11 由三条两两交叉的边形成的可能排列。

因此，姑且假设存在另一种对 G 的绘图 Γ'，其边旋转系统与 Γ 相同，且边 ab、 cd和 ef 构成类型 2 排列，这就导致矛盾。由于类型 1 排列完全对称，我们可以不失一般性地固定其标记方式，如图 11a 所示，并选择

ef 作为 Γ' 中在类型 2 排列的同一个区域内两端顶点的边。随后，其余顶点由边旋转系统唯一确定；两种可能的情况如图 11b 和图 11c 所示。我们将依次考察这两种情况。在每种情况下，我们都会加入 G的一些其余边；根据引理 4，这些边必然存在。这样一来，所有情况下都会导出矛盾。

情形 1： 在 Γ'中，这三条边形成了图 11b 所示的排列。根据引理 4，我们有 $ae \in E$ 或 $af \in E$。

情形 1.1： $ae \in E$。示意图见图 12a 和图 12b。于是，在 Γ' 中，边 ae 与 cd 相交。考虑子绘图 $\Gamma'[\{a,b,e,f\}]$: 顶点 c 位于由边 ae 围成的三胞腔内，而顶点 d 不在其中。在 Γ 中绘制边 ae，使其与 cd 相交，有两种不同的方式，见图 12a 中的红色和蓝色曲线: 一种情况（红色曲线）下，顶点 c 和 d 都位于由边 ae 围成的 $\Gamma[\{a,b,e,f\}]$ 三胞腔内；另一种情况（蓝色曲线）下，该三胞腔内没有顶点。无论哪种情况，都会与引理 16 矛盾。◁



(a) Γ: $ae \in E$ **(b)** Γ': $ae \in E$ **(c)** Γ: $af \in E$ **(d)** Γ': $af \in E$

图12 引理 5 证明中的情形 1。

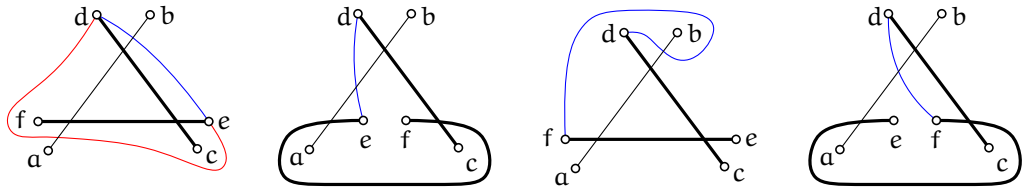
情形 1.2： $af \in E$。示意见图12c和图12d。于是，在 Γ' 中，边 af与 cd交叉，而且只有一种方式可以在 Γ 中画出边 af，使其与 cd 以相同的旋转交叉，见图12c中的蓝色曲线。注意，在 $\Gamma[\{a,b,e,f\}]$, 中，顶点 c位于由边 af围成的三胞腔内；而在 $\Gamma'[\{a,b,e,f\}]$中，由边 af 围成的三胞腔不包含任何顶点。这与引理 16 矛盾。◁

情形 2： 在 Γ'中，三条边形成了图 11c 所示的排列。根据引理 4，可得 $de \in E$ 或 $df \in E$。

情形 2.1： $de \in E$。图 13a 和图 13b 展示了示意图。于是，在 Γ' 中，边 de 与 ab 相交。考虑子绘图 $\Gamma'[\{c,d,e,f\}]$: 顶点 b 位于由边 de 围成的三胞腔内，而顶点 a 不在其中。在 Γ 中绘制边 de，使其与 cd 相交且旋转相同，有两种不同的方式，见图 12a 中的红色和蓝色曲线：一种情况（红色曲线）下，顶点 a 和 b 均位于 $\Gamma[\{c,d,e,f\}]$ 中由边 de 围成的三胞腔内；另一种情况（蓝色曲线）下，没有顶点位于该三胞腔内。无论哪种情况，都会与引理 16 矛盾。◁

情形 2.2： $df \in E$。图 13c 和图 13d 展示了示意图。于是，在 Γ' 中，边 df与 ab交叉；要使边 df 在 Γ 中的画法与 cd 以相同的旋转交叉，只有一种方式，见图 13c 中的蓝色曲线。注意，在 $\Gamma[\{c,d,e,f\}]$, 中，顶点 b位于由边 df围成的三胞腔内，而该三胞腔不包含 $\Gamma'[\{c,d,e,f\}]$中的任何顶点。这与引理 16 矛盾。◁

引理 5 的证明至此完成。◀



(a) Γ: $de \in E$ **(b)** Γ′: $de \in E$ **(c)** Γ: $df \in E$ **(d)** Γ′: $df \in E$

图 13 引理 5 证明中的情形 2。

B 第 3 节缺少证明：Carathéodory 型定理

本节将给出定理 3 的证明。如前所述，Balko、Fulek 和 Kynčl [6], 以及 Bergold、Felsner、Scheucher、Schröder 和 Steiner [7]已证明了关于 K_n 简单绘图的相应结果。我们沿用后者的证明思路，但将其推广到多部图情形并非易事——具体而言，下面证明中对显式命题 的证明颇具挑战性。

▶ **定理 3**（完全多部图简单绘图的 Carathéodory 型定理）。设 D 是平面上完全多部图 G 的简单绘图。对于 D 的任意一个有界区域中的点 p，D 中都存在一个长度为三或四的圈 C，使得 p 位于 C 的某个有界区域内。此结论是紧的，因为对于少一条边的 G，该结论未必成立。

证明。如果 G 为空图或星图 $K_{1,\,n}$，那么该结论显然成立，因为 D 不含有界区域，因此 p 的可能取值集合为空。所以我们可以假设 G 既非空图也非星图，从而任意一对不同顶点 u，$v \in V$（其中 $uv \notin E$）至少有两个不同的公共邻点。

为导出矛盾，假设存在 G 的一个简单绘图 D，其中有一点 p 位于 D 的某个有界区域内，但 p 不位于 D 的任何一个诱导 C_i 子绘图的有界区域内，其中 $i \in \{3,\ 4\}$。我们选择顶点数最少的 D。也就是说，从 D 中移除任意一个顶点（以及所有与之关联的边）后，p 都位于无界区域中。

令 a 为图中的任意一个顶点，并令 O 为与 a 相 incident 的最小边集，使得从 D 中移除 O 的所有边后，p 位于所得绘图 D^- 的无界区域中。于是，在 D^- 中可以绘制一条简单曲线 P，从 p 延伸至 无穷远点（即 D 的无界区域内部的任意一点），使得 P 不与 D^- 的任何顶点或边相交。在此限制下，我们选择 P，使其与 D 的边的交叉点数量最少。注意，由 O 的极小性可知，每条边 $o \in O$ 至少与 P 相交一次；将 o 添加到 D^- 后，p 位于所得绘图的一个有界区域中。还要注意，O 中的边两两不交叉，因为 D 是简单绘图，且 O 中的所有边都与公共顶点 a incident。

▷ 命题。我们可以假设 O 中的每条边都与 P 恰好相交一次。

证明。假设存在一条边 $ab \in O$，它与 P 至少交叉两次。沿着边 ab从 b追踪到 a，并将沿途遇到的与 P的第 i次交叉记为 χ_i，其中 $i = 1,\ \ldots, k$。根据假设，我们有 $k \geq 2$。现在，χ_1 与 χ_2之间有两条曲线，一条沿着边 ab，另一条沿着 P。将前一条曲线记为 γ_{ab}，后一条记为 γ_P。它们共同构成一条闭合的若尔当曲线 $\Gamma_{ab\cup P} = \gamma_{ab} \cup \gamma_P$。将 $\Gamma_{ab\cup P}$ 的有界区域记为 R。

我们断言，在 D 中存在一条边 uw，使得 $u \in R$ 且 $w \notin R$。为此，注意到 $P' = (P \setminus \gamma_p) \cup \gamma'_{ab}$ 是一条从 p 到无穷远点的曲线，其中 γ'_{ab} 是 γ_{ab} 的一个紧邻副本，且 $\gamma'_{ab} \cap ab = \{\chi_1, \chi_2\}$。如果 D 的边都不与 γ_{ab} 交叉，那么 P' 的交叉点会少于 P（至少少一个），这与 P 的极小性矛盾。因此，D 中存在一条与 γ_{ab} 交叉的边 uw。由于 D 是简单的，交叉边 ab 和 uw 没有共同端点，且恰好交叉一次。由于只有与 a 关联的边可能与 P 交叉，边 uw 不会与 P 交叉。因此，边 uw 与 $\Gamma_{ab \cup P}$ 恰好有一个交叉点，所以其两个端点中恰有一个位于 R 中。不失一般性，我们取 $u \in R$ 和 $w \notin R$。根据 $b \in R$ 是否成立，我们分两种情况讨论。

情形 1：$b \in R$。那么，bw 不是 G 的一条边，因为从 b 到 w 的任意简单曲线都会与 $\Gamma_{ab \cup P}$ 交叉；但边 bw 既不能与 ab 交叉（因为它们是关联边），也不能与 P 交叉（因为它与 a 不关联）。因此，aw 和 bu 都是 G 的边（分别将引理 4 应用于 w 和 ab，以及 b 和 uw），这意味着 $abuw$ 在 G 中构成一个 C_4。由于沿着 ab 从 b 到 a 行进时，χ_1 和 χ_2 是 ab 与 P 的前两个交叉点，因此有 $p \in R$。此外，由于 bu 和 uw 都不与 P 交叉（它们与 a 不相邻），我们得出 p 位于由 $abuw$ 诱导的 C_4 子绘图的一个有界区域内，由此完成了此情形的证明。◁

情形 2：$b \notin R$。那么，基于与第一种情形类似的理由，bu 不是 G 的一条边，而 bw 和 au 都是 G 的边，这意味着 $abwu$ 在 G 中构成一个 C_4。由于边 bw 与 a 不关联，它必定不会与 P 交叉。因此，从 b 出发，沿着边 ba 走到它与 uw 的交叉点，再沿着 uw 走到 w，然后经由边 bw 返回 b 的闭曲线，与 P 恰好交叉一次，交叉点为 χ_1，因此将 p 包含在其内部。由此，点 p 位于由 $abwu$ 诱导的 C_4 子绘图的一个有界区域内，从而完成了此情形的证明。◁

至此，命题的证明也就完成了。◁

对于一条边 $ab \in O$，记 $ab \cap P$ 中唯一的点（由命题可知）为 p_{ab}。最后，我们再次分两种情形讨论（为方便起见，编号为情形 3 和情形 4）。

情形 3：在 D 中存在边 $ab \in O$ 和 cd，使得 cd 在 a 与 p_{ab} 之间与 ab 交叉。由引理 4 可知，c 或 d 至少有一个在 G 中与 b 相邻。不失一般性，设 bc 是一条边。考虑闭曲线 Γ_Δ：从交叉点 $ab \cap cd$ 出发，沿 cd 到达 c，接着沿 cb 到达 b，再沿 ab 返回 $ab \cap cd$。路径 P 与 Γ_Δ 恰好交叉一次，即在沿 ab 的部分上。（根据假设，它在那里交叉；根据命题，它沿 ab 仅交叉一次；而沿边 bc 和 cd 完全不交叉，因为这些边与 a 不关联。）因此，p 被 Γ_Δ 围成（等价地说，p 与无穷远点位于 Γ_Δ 的不同侧）。如果 a 和 d 在 G 中相邻，则可知 p 位于由 $abcd$ 诱导的 C_4- 子绘图的某个有界区域内。如果 a 和 d 在 G 中不相邻，那么由引理 4 可知，顶点 a 必须在 G 中与 c 相邻，并且 d 必须与 b 关联。由于 ab 与 cd 交叉，包含 p 的 3-圈 abc 和 abd 的侧恰好在由 Γ_Δ 围成的区域内相交；该区域包含 p，因而不包含无穷远点。因此，无穷远点至多能位于 3-圈 abc 和 abd 中一者的 p 同侧。于是，p 至少位于其中一个 3-圈内的有界区域中，从而完成了这一情形下的证明。◁

情况4：在 D 中，每条 $ab \in O$ 边在 a 与 p_{ab} 之间都不交叉。令 ab 为从 O 出发、被 P 交叉的第一条边。于是，我们可以重新布线 P，使其在 p_{ab} 处不与 ab 交叉，而改为沿着 ab 到达 a，且不与 D 的任何边交叉。令 ac 为沿同一区域与 a 相 incident 的下一条边。我们断言 $ac \notin O$。为证明这一点，反设 $ac \in O$。那么，我们继续将 P 从 a 沿着 ac 布线至 p_{ac}，且不与任何边交叉

of D，然后从那里沿其原有轨迹到达无穷远点。由此得到的从 p 到无穷远点的路径，与 D 中的边交叉的数量严格少于 P，这与 P 的交叉最小性矛盾。因此，命题成立，且 $ac \notin O$；特别地，$P \cap ac = \emptyset$。如果 $bc \in E$，那么 p 位于 3-圈 abc 的有界区域内，因为 P 恰好与 abc 交叉一次，交叉点为 p_{ab}。否则，我们有 $bc \notin E$。正如证明开头所述，任意一对不相邻的不同顶点都至少有两个不同的公共邻点，因此 b 和 c 在 G 中至少有两个不同的公共邻点。其中一个邻点是 a；令 $d \neq a$ 表示 b 与 c 的另一个公共邻点。由于 P 恰好与由 $abcd$ 诱导的 C_4 子绘图的一条边，即 ab，交叉，因此 p 位于该子绘图的某个有界区域内。◁

总之，在每种情况下，我们都建立了 C_i 的 D 子绘图，其中 $i \in \{3,4\}$，使得 p 位于该子绘图的一个有界区域内。至此，证明的主要部分告一段落 .

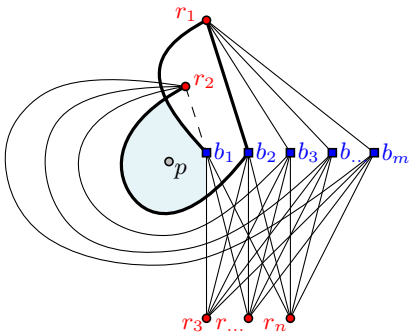


图 14 基于图 15 绘制的 $K_{m,n}$（缺少一条边 r_2b_1，以虚线绘出）。点 p 位于一个有界区域内，但不属于任何 C_i，其中 $i \in \{3,4,5\}$。

为了说明从 G 中删除一条边后定理可能不再成立，考虑图 14 所示的 $K_{m,n}$ 的简单绘图，其中 $m, n \geq 2$。唯一缺失的边是 r_2b_1。点 p 位于一个有界区域内。要构造一个包围 p 的圈，我们需要边 r_1b_1 和顶点 r_2；在一个圈中，该顶点有两条关联边，分别连接到 b_i 和 b_j，其中 $2 \leq i < j$。因此，任何包围 p 的圈都至少有六个顶点。◀

C 第 4 节证明缺失：定理 1 的紧性

本节旨在证明定理 2，其证明思路已在第 4 节中概述。为便于阅读，这里重复展示第 4 节中的图。此外，为方便起见，我们也在证明前重复陈述该定理。

▶ **定理 2.** 对于任意 m、$n \geq 3$ 和 $K_{m,\,n}$ 去掉任意两条边后，都存在两个具有相同边旋转系统的简单绘图，无法通过三角形翻转相互转换。对于任意 $n \geq 5$ 和 K_n 去掉任意一个四圈 C_4后，结论也成立；对于任意 $m \geq 4$、$n \geq 1$ 和 $K_{m,\,n}$ 再加上一条连接大小为 m 的二部划分类中两个顶点的边，结论同样成立。

证明。 我们首先考虑$K_{m,\,n}$ 去掉两条边的情况。两条缺失的边相邻时的情形如图 15 所示。图中展示了两个$K_{m,\,n}$ 去掉两条边后的绘图b_1r_2，以及 b_1r_3，它们具有相同的边旋转系统。首先注意到，这两个绘图并不强同构，因为在两个绘图中，r_1b_1 与其他边发生交叉的顺序不同。我们声称，这两个绘图无法通过三角形翻转相互转换。边 r_1b_1 只与关联于 r_2 或 r_3的边发生交叉。所有关联于 r_2或 r_3 的边所构成的子绘图是平面的。因此，不存在包含边 r_1b_1的交叉三角形。 consequently,

沿着 r_1b_1的交叉点顺序无法通过三角形翻转改变。（边旋转系统确定交叉边对的集合，而该集合在三角形翻转下保持不变量。因此，边 r_1b_1 永远不可能成为交叉三角形的一部分。）

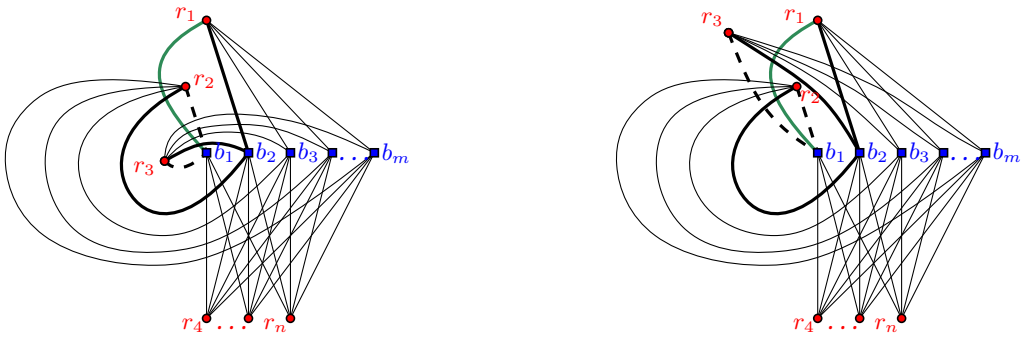


图 15 两个$K_{m,n}$ 的绘图，各自缺少两条相邻边 b_1r_2 和 b_1r_3 （以虚线绘制），它们具有相同的边旋转系统，但无法通过三角形翻转相互转换。最小情形的绘图 $K_{2,3}$以粗线显示。没有任何三角形翻转能够改变绿色边 r_1b_1上的交叉顺序，而两幅绘图中的交叉顺序不同。

接下来考虑两条缺失边彼此独立的情形，如图16所示。标记为 $r_3,\ldots$ 和 $b_4,\ldots$ 的顶点分别代表任意大的（也可以为空）红色和蓝色顶点簇；从拓扑上看，它们与其余顶点的连接方式相同。两幅绘图中，边 b_1r_1 与 b_2r_2 和 b_3r_3 交叉的顺序不同。在与 b_1r_1 交叉的这些边中，任意两条都不交叉。因此，不存在包含 b_1r_1 的交叉三角形，也就无法通过一系列三角形翻转改变 b_1r_1上的交叉顺序。因此，无法通过三角形翻转将一幅绘图变换为另一幅。

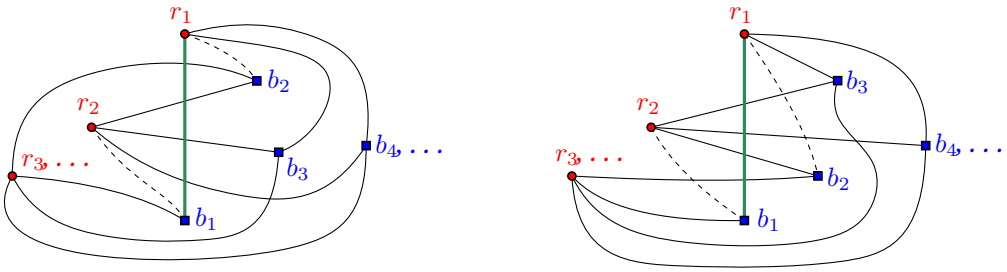


图16 $K_{m,\ n}$ 去掉两条独立边 b_2r_1 和 b_1r_2 （以虚线表示）后的两种绘图。它们具有相同的边旋转系统，但无法通过三角形翻转相互转换。

为了得到关于 K_n的陈述，我们将图15中的绘图扩展为去掉构成 C_4 的4条边后的完全图绘图，使两种绘图具有相同的边旋转系统。扩展结果如图17所示，原始边以黑色绘制，扩展边以紫色绘制。此绘图包含图15中的绘图作为子绘图。与之前一样，边 r_1b_1 与关联于 r_2 和 r_3的原始（黑色）边相交的顺序不同，并且不存在同时涉及边 r_1b_1 以及关联于 r_2 和 r_3的边的交叉三角形。因此，无法通过三角形翻转将一种绘图转换为另一种。

最后，划分类大小至少为四时$K_{m,n}$ 再加一条边的结论，可以通过以下方式从图17所示的构造得出：用一种颜色给缺失的四个

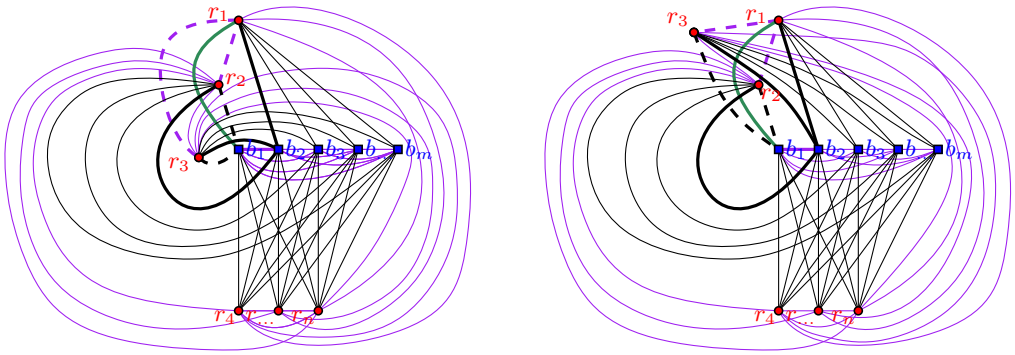


图17 两个去掉四条边的 K_m 绘图构成一个 C_4，它们具有相同的边旋转系统，但无法通过三角形翻转相互转换。缺失的边为 b_1r_2、 r_2r_1、 r_1r_3和r_3r_1，并以虚线绘出。（ K_5 的绘图用粗线标出。）没有任何三角形翻转能够改变绿色边 r_1b_1 与连接到 r_1 和 r_2的黑边的交叉顺序。

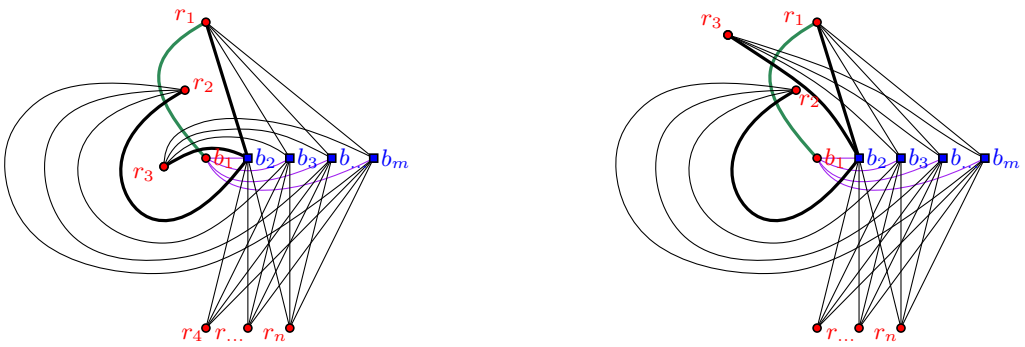


图18 两个$K_{m-1,\ n+1}$ 加上一条边（b_1r_1）的绘图，无法通过三角形翻转相互转换。

顶点 r_1、 r_2、 r_3 和 b_1 着色，用另一种颜色给顶点 b_2 着色，其余顶点任意着色，图18给出了一个例子。然后，忽略两个同色顶点之间的所有边，但保留边 r_1b_1，就得到两种不同的$K_{m,n}$ 再加一条边的绘图。按照与 K_n 减去 C_4时相同的推理，这两种绘图无法通过三角形翻转相互转换。◀

D 第5节缺失的证明

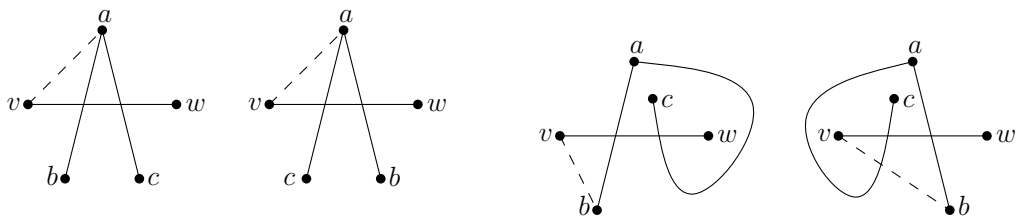
D.1 引理6的证明

本节中，我们证明引理6，它是定理 1的第一个证明的一部分。为方便起见，我们在证明之前重述该引理。

▶**引理6**。 设 D 是 S^2 上完全多部图 G 的简单绘图，且vw 是 G 的一条边。那么，对于被 vw 穿过的任意一对相邻边或不相交边， D 的边旋转系统决定了 vw 穿过它们的顺序。

证明。 我们通过证明以下命题来说明这一点：如果完全多部图 G的两种不同绘图中，边 vw 与一对相邻边或不相交边交叉的顺序不同，那么相应的绘图必定具有不同的边旋转系统。根据与 vw 交叉的两条边是相邻边还是不相交边，我们区分两种情形。

情形 1： 边 vw 与两条相邻边交叉的顺序 ab 和 ac 不同。 根据 vw、 ab和 ac的绘图拓扑，我们再区分两种子情形；见图 19。



(a) 情形 1.1 **(b)** 情形 1.2

图 19 情形 1： vw 与 ab 和 ac 相交的两种拓扑上不同的情形（忽略重新标记）。

情形 1.1： ab 和 ac 从同一侧穿过 vw 。 由引理 4 可知， va 和 wa 中至少有一个是 G的一条边。无妨设 va 属于 G （另一种选择完全对称）。由于 va 不得与 vw、 ab和 ac中的任何一个相交，因此每个绘图中的 va 绘图都是唯一的。所得绘图在 a 处的旋转不同，因此边旋转系统也不同。◁

情形 1.2： ab 和 ac 从不同侧穿过 vw 。 由引理 4 可知， vb 和 wb 中至少有一个是 G 的一条边。无妨设 vb 属于 G （另一种选择完全对称）。由于 vb 不得与 vw 和 ab中的任何一个相交，因此每个绘图中的 vb 绘图同样是唯一的。然而，在其中一个绘图中， vb 不与任何边相交，而在另一个绘图中，它必须与 ac相交，这再次说明边旋转系统不同。◁

情形 2： 边 vw 与两条不相交边 ab 和 cd 以不同的顺序交叉。在这种情况下， vw、 ab 和 ac 的绘图拓扑只有一种可能，如图 20 所示。我们将再次借助其他已有的边进行推理。

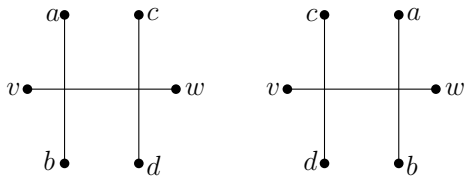


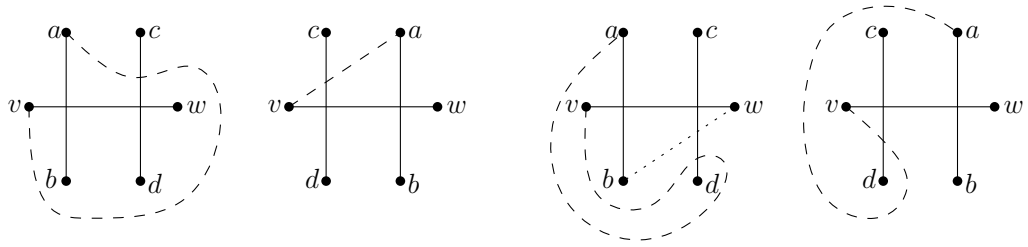
图 20 情形 2：展示 vw 与 ab 和 cd 相交的方式（至多相差重新标记）。

考虑两条边 vw 和 ab。根据引理 4，这四个顶点中的每一个都必须与另一条边的至少一个顶点相连。因此，在四条边 va、 wa、 vb和 wb中， va 和 wb 或者 vb 和 wa 必定属于 G。不失一般性，假设 va 和 wb 属于 G（另一种选择是对称的）。注意， va 和 wb 都可能与 cd交叉，但它们都不能与 vw 和 ab中的任何一条交叉。此外，根据情形 1，我们知道，任意一条边与两条相邻边的交叉顺序在两幅绘图中都必须相同。

情形 2.1： va 与 cd 之间的交叉 c 以及与 vw 和 cd的交叉。 参见图 21a。于是，在每个绘图中， va 和 cd 的交叉旋转都是固定的，因为另一种旋转会

要求出现第二个交叉（这不符合绘图的简单性）。由于这两个绘图中的固定交叉旋转不同，边旋转系统也不同。◁

情形 2.2： va 与 cd 之间交叉 d，且与 vw 和 cd的交叉。见图 21b。由左图可知，wb 必须与 cd交叉。然而，在右图中，wb 不得与 cd交叉。◁



(a) 情形 2.1　　**(b)** 情形 2.2

图 21 情形 2：va 与 cd交叉的两种情形。

注意，如果 va 不与 cd 交叉，但 wb 与 cd交叉，则图 21a 和图 21b 同样适用。因此，唯一遗漏的情形是所有边都不与 cd交叉；见图 22。

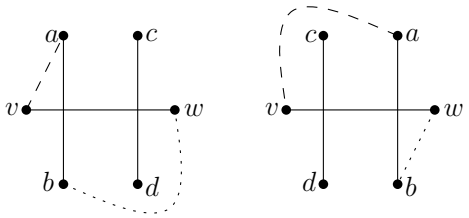


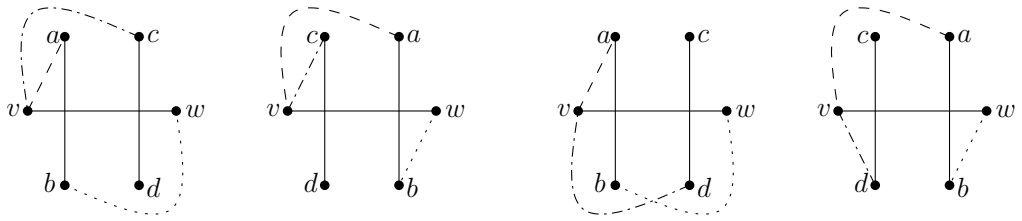
图 22 情形 2.3：va 和 wb 均不与 cd交叉的情形。

情形 2.3： 和均不与 va 交叉，且 wb 不与 cd交叉。考虑两条边 vw 和 cd。根据引理 4，这四个顶点中的每一个都必须与另一条边的某个顶点相连。因此，在四条边 vc、wc、vd 和 wd中，vc 和 wd 或 vd 和 wc 属于 G，由此得到两个子情形。

情形 2.3.1： vc 和 wd 是 G的边。我们可以假设边 vc 和 wd均不与 ab交叉，否则，根据情形 2.1 和情形 2.2，这两个绘图具有不同的边旋转系统（无论 va 和 wb 如何绘制）。因此，若要使两个绘图具有相同的交叉点，必须在不与任何边交叉的情况下添加 vc（这由右侧绘图可知），而且在两个绘图中，添加它的方式都是唯一的。这些唯一的添加方式会导致 v 处的旋转不同，因此这两个绘图的边旋转系统仍然不同；见图 23a。◁

情形 2.3.2： vd 和 wc 是 G的边。与前一种情形一样，根据情形 2.1 和情形 2.2，我们可以假设边 vd 和 wc 都不与 ab 交叉。因此，在左侧的绘图中，vd必定与 wb交叉；而在右侧的绘图中，vd 不能与任何边交叉，这再次说明两个绘图具有不同的边旋转系统；见图 23b。◁

由于该结论在每种情况下都成立，因此引理得证。◀



(a) 情形 2.3.1 **(b)** 情形 2.3.2

图 23 情形 2.3 中的两种可能情况

D.2 定理 1 的第二个证明

在定理 1 的第二个证明中，我们采用与 [4] 相同的总体证明框架，迭代地变换其中一个绘图，以增加两个绘图中强同构部分的数量。然而，[4] 中证明的许多步骤依赖于完全图绘图的一些已知性质，而这些性质通常并不适用于完全多部图（或者在本研究之前尚未证明适用于完全多部图）。下面我们概述证明的整体思路，并将一些关键引理的证明留待后续章节讨论。随后，我们将重点介绍该证明的新贡献，并探讨它与 [4] 的主要区别。

▶**定理 1.** 设 D_1 和 D_2 是球面 S^2 上具有相同边旋转系统（*ERS*）的完全多部图的两个简单绘图。那么，存在一系列三角形翻转，可将 D_1 转化为 D_2。

证明。设 G 是一个完全多部图，D_1 和 D_2 是 G 在 $\mathbb{S}^2$ 上具有相同边旋转系统的两个简单绘图。设 $R=\{r_1,r_2,\dots,r_n\}$ 是 G 中的一个极大独立集，并令 $B=\{b_1,b_2,\dots,b_m\}$ 表示其余顶点的集合。我们分别将 R 和 B 中的顶点称为红色顶点和蓝色顶点。注意，顶点集为 $R\cup B$ 且包含所有端点分别为红色和蓝色的边的图构成完全二部图 $K_{n,m}$；集合 R 是 G 中的独立集，而 B 不一定是独立集。令 $D:\cong D_1$。我们通过执行三角形翻转来改变 D，直至得到 $D\cong D_2$。我们依次考察顶点 $r_1,\dots,r_n$。对于每个顶点 r_i，我们依次考察关联边 $r_ib_1,\dots,r_ib_m$。之后，以某种任意但固定的顺序考察其余边，这些边连接 B 中的两个顶点。形式化地，我们按照顺序 $(a_1,\dots,a_t)$ 考察 G 的边，其中对于每个 $1\le i\le t$，$a_i=r_jb_k$，或者对于某个 $1\le j\le n$ 和 $1\le k$，$a_i=b_kb_\ell$，并且 $\ell\le m$，且

- 对于所有 $1\le i\le n$ 和 $1\le j<k\le m$，边 r_ib_j 先于 r_ib_k；对于所有
- $1\le i<k\le n$ 和 $1\le j$，边 r_ib_j 先于 r_kb_ℓ，$\ell\le m$；对于所有
- $1\le i\le n$ 和 $1\le j$，k，$\ell\le m$，边 r_ib_j 先于 b_kb_ℓ。

对于 $1\le i\le t$，我们将由边集 $\{a_1,\dots,a_i\}$ 诱导的 G 的子图记为 X_i。考虑边 a_i 时，目标是证明 $D[X_i]\cong D_2[X_i]$，其中 $D[X_i]$ 和 $D_2[X_i]$ 分别是 D 和 D_2 的对应子绘图。

对于基例 $i\le m$，注意到 $D[K_{1,i}]\cong D_2[K_{1,i}]$，因为 $K_{1,i}$ 只有一种简单绘图（我们的图带有标号，但边旋转系统是给定的）。

对于一般情形 $i>m$，假设 $D[X_{i-1}]\cong D_2[X_{i-1}]$。注意，由于 $i>m$，B 的所有顶点都已出现在 X_{i-1} 中。在首次引入顶点 r_j 的情形下

（即 r_j 出现在 X_i 中，但不在 X_{i-1} 中），我们首先说明顶点 r_j 在 $D[X_{i-1}]$ 和 $D_2[X_{i-1}]$ 中的位置一致。为此，我们使用以下引理，其证明依赖于定理 3（卡拉西奥多里定理），并推迟至附录 D.3。

▶**引理 11.** 设 F 是 S^2 上完全多部图的一个简单绘图。对于 F 中的任意顶点 v， F 的边旋转系统唯一确定 v 所在的 $F' := F \setminus \{v\}$ 胞腔。

由于 $D[X_{i-1}] \cong D_2[X_{i-1}]$，这两个绘图在拓扑上具有相同的区域。根据边的顺序，如果 r_j 首次在 X_i 中引入，那么 X_{i-1} 就是一个完全二部图，其两部分分别由 B 中的顶点和 $\{r_1, \ldots, r_{j-1}\}$ 中的顶点组成。此外， X_{i-1+m} 此时也是一个完全二部图，其两部分分别由 B 中的顶点和 $\{r_1, \ldots, r_j\}$ 中的顶点组成。因此，由于 D 和 D_2 具有相同的边旋转系统，对 $F = D[X_{i-1+m}]$ 和 $D_2[X_{i-1+m}]$ 分别应用引理 11（两次均取 $v = r_i$），可得 r_i 在 $D[X_{i-1}]$ 和 $D_2[X_{i-1}]$ 中位于同一个胞腔。

现在考虑边 $a_i = xb_j$，其中 x 可以位于 R 或 B。我们的目标是使用一系列三角形翻转来变换 D，使得 $D[X_i] \cong D_2[X_i]$。令 e_1 表示在 D中代表 xb_j 的曲线。我们设想在 D 中添加另一份 $\widetilde{e_2}$ xb_j，它对应于曲线 e_2，该曲线表示 D_2 中的边 xb_j，并作为我们要将 e_1 变换成的“目标”曲线。以下引理在附录 D.4 中得到证明，它保证了合适的目标曲线存在。

▶ **引理 12.** 存在一条简单曲线 $\widetilde{e_2}$，使得 $D[X_{i-1}] \cup \widetilde{e_2} \cong D_2[X_i]$ 和 e_1 以及 $\widetilde{e_2}$在 $D[X_i] \cup \widetilde{e_2}$中有 $O(|V(X_{i-1})|^4)$ 个交点，其中 $|V(X_{i-1})|$ 是 X_{i-1}的顶点数。

现在固定这样一条曲线 $\widetilde{e_2}$。那么 $\Gamma = e_1 \cup \widetilde{e_2}$ 构成一条（不一定简单的）闭曲线。 Γ 中的透镜 是指一个区域，其边界恰由 Γ的两条边片段构成，其中一条来自 e_1，另一条来自 $\widetilde{e_2}$。借助下一个引理，我们证明 Γ 中存在一个透镜，可作为起点，通过 D中的三角形翻转将 e_1 变为 $\widetilde{e_2}$。其证明见附录 D.5。

▶ **引理 13**。 在 Γ 中存在一个自由透镜，即一个不包含 $D[X_i]$任何顶点的透镜 .

现在考虑一个由引理 13 保证存在的自由透镜 L。虽然 L 不包含 $D[X_{i-1}]$的任何顶点，但其中可能包含 $D[X_{i-1}]$的交叉点。接下来，我们打算通过三角形翻转变换 D，使得 L 不包含 $D[X_{i-1}]$的任何交叉点。设 $\chi \in L$ 是图 $D[X_{i-1}]$中两条边 a'， a'' 的一个交叉点。由于 x 和 b_j 是 $e_1 \cup \widetilde{e_2}$中仅有的顶点，因此 a'， a'' 中的每一条边都与 ∂L 相交两次；由于 D 和 D_2 都是简单绘图，其中一个交叉点与 e_1 相交，另一个则与 $\widetilde{e_2}$相交。因此， a'、a''和 e_1 在 D中构成一个交叉三角形 Δ_{e_1}。此外， D_2 中对应的交叉三角形具有相反奇偶性，因此 Δ_{e_1} 可逆。根据下一个引理（其证明见附录 D.6），如果 D 是一个完全二部图，那么三角形 Δ_{e_1} 内部不含 D 的任何 顶点（对于已在 X_i中的顶点，我们已经知道这一点；但对于不在 $D[X_i]$中的 R 里的顶点，则尚不知晓）。

▶ **引理 14** (可逆三角形为空)。 设 D 是完全二部图 G的一个简单绘图，且 Δ 是 D中的一个可逆三角形。那么， D 的所有顶点都位于 Δ之外。

因此，尽管 $D[X_i]$ 只包含连接 R 和 B之间顶点的边，交叉三角形 Δ_{e_1} 中也不能有 D的任何顶点。如果 $D[X_i]$ 还包含连接 B中两个顶点的边，那么 D 的所有顶点都位于 $D[X_i]$ 中，因此根据引理 13，Δ_{e_1} 中没有 D 的任何顶点。

我们断言，所有与 Δ_{e_1} 相交的边也都可以从 Δ_{e_1} 中“扫出”。为此，考虑 Ξ，即与 Δ_{e_1} 相交的 D 的所有边组成的集合。注意，从 Ξ 出发的每条边都与

恰好两条 Δ_{e_1} 的侧（也就是边）相交。对于 Δ_{e_1} 的两条侧 a、b，令 $\Xi_{a,b} \subseteq \Xi$ 表示同时与 a 和 b 相交的边的集合。选取一对 a、b，使得 $\Xi_{a,b} \neq \emptyset$（若不存在这样的组合，则我们已完成证明），并令 η 为 $\Xi_{a,b}$ 中与 a 相交且最靠近 a 和 b 公共端点的那条边。令 R_η 表示由 a、b 和 η 围成且内部位于 Δ_{e_1} 内的闭三角形区域，并令 Ξ_η 表示 Ξ 中与 R_η 的内部相交的边的集合。注意，根据 η 的选取，Ξ_η 中的每条边都恰好与 η 和 $\partial R_\eta \setminus \eta$ 各相交一次。因此，在 R_η 的局部范围内，$\Xi_\eta \cup \{a\}$ 中的边表现得类似于一组伪直线，只是并非任意一对都必定相交（Hershberger 和 Snoeyink 将其称为具有单交性质的双无限曲线排列 [32]）。我们将使用以下引理，通过 η 扫掠 R_η。

▶ **引理 15** ([32, 引理 3。1])。任何具有单交点性质的双无限曲线排列，都可以从排列中的任意一条曲线开始，通过三种操作进行扫掠：经过一个三角形、经过第一条射线，以及取第一条射线。

注意，操作经过一个三角形 就是一次三角形翻转。只有当排列中存在不与扫掠曲线相交的直线，或存在除扫掠曲线外不与任何对象相交的直线时，才会应用另外两种操作。因此，不会应用另外两种操作，因为 $\Xi_\eta \cup \{a\}$ 中的所有边都与 b 和 η中的每条边相交。由于我们的扫掠曲线 η与 $\Xi_\eta \cup \{a\}$中的所有边相交，我们可以通过一系列三角形翻转扫过 η，经过 R_η；这样，每次都会扫过 $\Xi_\eta \cup \{a、b\}$中各边之间的一个交叉点。完成这一过程中的最后一次翻转（针对交叉三角形 ηab）后，边 η 不再与 Δ_{e_1}相交。因此，将这一过程重复 $|\Xi|$ 次——每次适当选择 η——交叉三角形 Δ_{e_1} 便会变为空，因而也可以进行翻转。值得注意的是，用这一过程清空 Δ_{e_1} 所需的翻转次数，上界为 Ξ 中的边与 Δ_{e_1} 中的边之间的交叉点数乘以 Ξ中的边数。因此，至多需要$O(|\Xi|^3)$次翻转。

按照所述方式处理 L 内所有剩余的交叉点后，我们可以证明，在得到的绘图中，透镜 L 不包含 $D[X_{i-1}]$ 的任何顶点或交叉点。换言之，在 L 附近，边 e_1 相对于 $D[X_{i-1}]$ 与 $\widetilde{e_2}$ 在拓扑上相同。因此，我们可以对 $\widetilde{e_2}$ 作相应调整：用 e_1 在 ∂L 上的边部分的一个近似副本，替换其在 ∂L 上的边部分，从而有效地将透镜 L 从 Γ 中移除。这样一来，在 D 中，边 e_1 和 $\widetilde{e_2}$ 的交叉点比之前更少，而且参数 D 和 $\Gamma = e_1 \cup \widetilde{e_2}$ 再次满足引理 13 的条件。重复应用这一过程，最终得到一个绘图 $D[X_i] \cup \widetilde{e_2}$，其中 e_1 与 $\widetilde{e_2}$ 不相交，因此 Γ 构成一条简单闭曲线。根据引理 13，由 Γ 围成的两个区域中，有一个不包含 $D[X_i]$的任何顶点。因此，按照上述方法再进行最后一轮变换后，我们得到一个绘图 $D[X_i] \cup \widetilde{e_2}$，其中所有顶点和交叉点都位于 Γ 的同一侧。由此，我们得到 $D[X_i] \cong D_2[X_i]$。处理所有顶点 r_i，对于 $i = 2$、.....、n，并依次处理所有与 r_i 相 incident 的边，最终得到一个绘图 $D \cong D_2$。◀

证明中的主要差异 [4] 针对完全图的证明。与 [4] 中的证明相比，主要差异集中在引理 11、13 和 14 的陈述上。

首先，在通过顶点 v 扩展“同构子图”时，我们要求 v 在由该子图诱导的两个绘图中都位于同一区域，正如引理 11 所述。对于完全图而言，这一结论很容易由已知事实推出：每个区域都是若干个 3-圈的交集，而且第四个顶点相对于一个 3-圈的位置由旋转系统决定。然而，多部图可能不含任何 3-圈。为了解决这一问题，我们也允许使用 4-圈——与三角形不同，4-圈可能

自交——并为完全多部图的简单绘图提出相应的 Carathéodory 型定理（定理 3）。

其次，为了给“同构子图” X_{i-1} 添加一条边 a_i，该边在 $D[X_i]$ 中绘制为 e_1，在 $D_2[X_i]$ 中绘制为 e_2，且交叉顺序不同，我们设想将 e_2 虚拟地绘入 $D[X_i]$，使其成为 $\widetilde{e_2}$，并旨在通过三角形翻转解开 e_1 和 $\widetilde{e_2}$。为此，我们要求这两种边的曲线围成至少一个“自由透镜”；参见引理 13。完全图的相应结论可由以下事实推出：这些绘图是简单的，并且每一对顶点都相邻。然而，在并非所有顶点对都相邻的图中，边 e_1 和 e_2的绘制方式受到的限制较少，因此它们之间可能产生复杂的相互作用。因此，要证明这一性质，需要更审慎的考量和新的结构性见解。我们认为引理 13 是证明的核心引理。

最后，Gioan 定理在完全图 [4] 中的证明还有另一个本质要素：对于任意可逆三角形 T，所有顶点都位于 T的同一侧。对于完全图，这一结论同样可以利用所有顶点两两相邻这一事实来证明。但对于一般的多部图，这一结论并不成立。因此，为了证明引理 14 中相应的结论，我们需要采用不同的方法。

D.3 边旋转系统确定顶点的位置（引理 11 的证明）

为证明引理 11，我们先考虑至多包含四个顶点的子图这一关键基例 .

▶**引理 16.** 设 D 是定义在 S^2, 上的完全多部图的简单绘图， D' 是 D 的一个至多包含四个顶点的子绘图，且 v 是 $D \setminus D'$中的一个顶点。那么， D 的边旋转系统唯一确定 v位于 D' 的哪个区域。

证明。令 $G = (V, E)$ 表示由 D'表示的（完全多部）图。如果 G 没有边，或者 G 是一棵树，那么该结论显然成立，因为此时 D' 只有一个区域。因此，我们可以假设 G 是 $K_{1,1,1} = K_3 = C_3$, $K_{2,2} = C_4$, $K_{1,1,2}$ 或 K_4。

首先考虑 G 恰有三个顶点的情形。于是 $G = K_3$。令 $e \in E$。由引理 4 可知，对于 e 的某个端点 u，有 vu 属于 D。我们从 u出发，沿着 $D' \cup D[uv]$中的边 uv 追踪。给定的边旋转系统会告知我们，离开 u时，边 uv进入与 u 关联的两个区域中的哪一个。由于 uv 与 G的三条边中的两条相邻，因此它至多只能与第三条边交叉一次。边旋转系统会告知我们是否存在这次交叉，从而确定包含 v的 D' 区域，证毕。

因此，我们可以假设 G 恰有四个顶点。于是 G 是 $K_{2,2}$, $K_{1,1,2}$ 或 K_4 之一。在（强）同构意义下，这三个图各自恰有两种不同的绘图方式绘制在 $\mathcal{S}^2$, 上：一种没有交叉点，另一种恰有一个交叉点，如图 24 所示。我们按如下方式选取一条边 $e \in E$：若 $G = K_{1,1,2}$，则令 e 为连接两个三度顶点的边；否则，任意选取 $e \in E$。由引理 4 可知，对于 e的某个端点 u，有 vu 属于 D。我们从 u出发，沿着 $D' \cup D[uv]$ 中的边 uv 追踪。给定的边旋转系统会告知我们，离开 u时，边 uv 进入与 u 关联的哪个区域。它还会告知我们要与哪些其他边交叉，以及所有这些交叉点的旋转方向。我们声称，这些信息足以唯一确定包含 v的 D' 区域。

注意， uv 与 D' 的每条边最多相交一次，而与 u 相连的每条边都不会相交。因此，追踪 uv 对应于对偶图中的一条迹[3]，更准确地说，是图 D^*中的一条迹

[3] 图中的迹是一种每条边至多经过一次的游走。与路径不同，顶点可以被多次访问。

该图由 D' 的对偶图删去与 u相连的边的对偶边得到。图 24 展示了一个示例，其中图 D^* 以粉色标出。

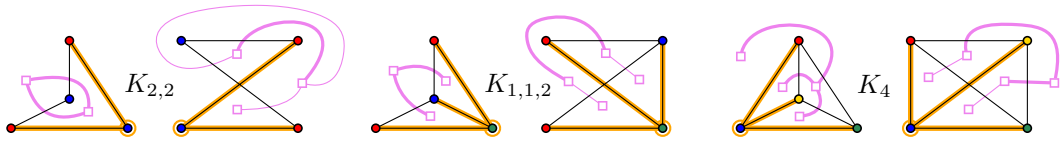


图 24 引理 16 中需要考虑的三个图及其各自的两种绘图。它们各自的对偶图以粉色方形顶点绘出。顶点 u 用橙色圆圈标记，其关联边也以橙色标记；边 uv不得与这些边交叉。

粗体显示的对偶边与 G 的边一一对应。

首先考虑 $G \in \{K_{1,1,2}, K_4\}$ 的情形，并注意此时图 D^* 总是一棵树。此外，这四种绘图中的大多数对偶边都与 G 的边一一对应；我们称这些边为粗体，它们在图 24 中也以粗体显示。唯一的非粗体边是在绘图 D' 中与叶节点 D^* 关联的边，此时只有一次交叉，因为这两条边都与 G 的同一条边交叉。由于 D^* 是一棵树，每当我们追踪的对偶迹遇到一条粗体边，且该边对应于 G 中必须被交叉的一条边时，就必须沿这条边前进。所有非粗体边都与 D^* 的叶节点关联（无论如何，此处都只有一种继续前进的选择），并且 D^* 中没有两条非粗体边相邻（因此从来不需要在两者之间作出选择），由此可知，在这些情形下，uv 在 D^* 中追踪的迹由被交叉边的列表唯一确定。

接下来考虑 $G = K_{2,\ 2}$ 的情形。没有交叉点的绘图只有两个区域，每个交叉点都会在这两个区域之间切换。因此，目标区域由沿着 uv 的交叉点数量唯一确定（数量为零、一或二）。有一个交叉点的绘图更有意思，因为此处需要用到交叉旋转。注意，我们的追踪从与 u 相邻的一个区域开始，有两种选择。与 u 相邻的三胞腔是 D^* 的叶，而使用与之相邻的边就能排除 D^* 的另一条非粗体边。因此，如果追踪从这三胞腔开始，路径便是唯一确定的。否则，边 uv 会进入与 u 相邻的另一个区域，该区域由六个边片段围成。如果必须使用粗体边，情况就很明确，因为它不能与那条和 D^* 的叶相邻的非粗体边结合使用。否则，就不能使用粗体边；此时，我们可以通过考察交叉旋转，选出正确的非粗体边（如果有的话）。◀

结合引理16和定理 3，我们现在可以证明引理 11。接下来证明的思路与 Gioan 在其完整证明 [16]中独立提出的引理3.4的证明类似。

▶**引理 11.** 设 F 是定义在 S^2上的一个完全多部图的简单绘图。对于 F中的任意顶点 v，F 的边旋转系统唯一确定了 $F' := F \setminus \{v\}$ 的哪个区域包含 v。

证明。 如果 F' 只有一个区域，那么该命题显然成立。因此，我们可以假设 F' 既非空集也非星图。设 c_1 和 c_2 是 F'中任意两个不同（因而不相交）的区域。要证明该引理，只需证明 c_1 或 c_2 至少有一个不可能包含 v。

通过将一个区域标记为无界区域，我们可以将 F' 视为平面 $\mathbb{R}^2$ 中的一个绘图 Γ'。我们选取 c_1 作为 Γ'中的无界区域，这使得 c_2 成为 Γ'中的有界区域。于是，由定理 3 可知，对于任意点 $p \in c_2$，在 Γ'中存在一个 C_i-子绘图 C，其中某个 $i \in \{3, 4\}$，使得 p 位于 C的一个有界区域内。由于 c_2 是 Γ'的一个区域，因此 C 不取决于 p的选择，也就是说，整个区域 c_2 包含在 C的一个有界区域内。相反，按照构造，区域 c_1 包含在 C 的无界区域内。至于

根据引理 16，包含 v 的 C 的区域（在 F' 中，因而也在 Γ'中）是唯一确定的，因此 c_1 和 c_2 中至多有一个包含 v。◀

D.4 一条新曲线可以绘制得很漂亮（引理 12 的证明）

我们采用第5节中引入的记号。回想一下，对于给定的图 G，我们有两个绘图 D 和 D_2，其中假设 $D[X_{i-1}] \cong D_2[X_{i-1}]$ 对某个 $i > m$成立。我们分别考虑图 xb_j 在 D 和 D_2中的边曲线 e_1 和 e_2。

▶ **引理 12.** 存在一条简单曲线 $\widetilde{e_2}$，使得 $D[X_{i-1}] \cup \widetilde{e_2} \cong D_2[X_i]$ 和 e_1 以及 $\widetilde{e_2}$在 $D[X_i] \cup \widetilde{e_2}$中有 $O(|V(X_{i-1})|^4)$ 个交点，其中 $|V(X_{i-1})|$ 是 X_{i-1}的顶点数。

证明。鉴于 $D[X_{i-1}] \cong D_2[X_{i-1}]$，陈述的第一部分显而易见。为证明陈述的第二部分，考虑 $D[X_{i-1}]$的一个区域 c。$D[X_i]$ 中的曲线 e_1 与 c相交于一个（可能为空的）有限集合 J_1，其中包含两两不相交的边片段，这些边片段连接 ∂c 上的点（若 e_1 的端点位于 c内部，则连接 c 内部的点）。类似地，$D[X_{i-1}] \cup \widetilde{e_2}$中的曲线 $\widetilde{e_2}$ 与 c 相交于一个（可能为空的）有限集合 J_2，其中包含两两不相交的边片段，这些边片段连接 ∂c上的点（若 $\widetilde{e_2}$ 的端点位于 c内部，则连接 c 内部的点）。因此，我们可以选择 $\widetilde{e_2}$，使得 J_2 中的每个边片段与 J_1 中的每个边片段至多相交一次（并且我们也以这种方式选择它们）。在 $D[X_{i-1}]$ 的每个区域中相应地处理这些弧，便得到一条与 e_1 相交有限次的曲线 $\widetilde{e_2}$。

总之，e_1 和 $\widetilde{e_2}$ 各有 $O(|X_{i-1}|^2)$ 个边片段，因为它们与 $D[X_{i-1}]$ 的每条边至多相交一次。此外，e_1 的每个边片段至多与 $\widetilde{e_2}$的每个边片段交叉一次。因此，$\widetilde{e_2}$ 与 e_1 之间的交叉点数量有界，为 $O(|X_{i-1}|^4)$，如所述。◀

D.5 存在空透镜（引理 13 的证明）

本节旨在证明引理 13。它是我们证明完全多部图的 Gioan 定理时的关键引理，因为它提供了一种方法，可以理清我们所考虑的边 xb_j 的两种几何表示之间可能复杂的关系；这两种表示分别来自两幅绘图。我们先介绍一些术语。

给定两幅具有相同边旋转系统的简单绘图 H_1，H_2，它们绘制的是 G，我们考虑由边集 X_i 诱导的子绘图，定义见附录 D.2。假设 $H := H_1[X_{i-1}] \cong H_2[X_{i-1}]$，我们在 $H_1[X_i]$ 中考虑边 xb_j 的一个虚拟副本 $\widetilde{e_2}$；其中已有一条曲线 e_1 表示边 xb_j。引入 $\widetilde{e_2}$ 是为了模拟 H_2中 xb_j 的作用，并为变换 H_1 设定目标状态，从而得到 $H_1[X_i] \cong H_2[X_i]$。我们在定理 1 的证明中（使用引理 12）论证过，可以找到一条简单曲线 $\widetilde{e_2}$，使得 (1) $H \cup \widetilde{e_2} \cong H_2[X_i]$，并且 (2) e_1 和 $\widetilde{e_2}$ 在 $H^+ = H_1[X_i] \cup \widetilde{e_2}$中有有限个交点。

准透镜。用 $\Gamma = H^+[e_1 \cup \widetilde{e_2}]$ 表示由闭曲线 $e_1 \cup \widetilde{e_2}$诱导的子绘图。回顾一下，绘图的透镜是一个区域，其边界恰由两条边片段组成。（对于 Γ 的透镜，其中一条边片段必须来自 e_1，另一条来自 $\widetilde{e_2}$。）我们对这一概念稍作推广，将 Γ 的准透镜 定义为 $\mathcal{S}^2$ 的一个开区域，它（1）由一条简单闭曲线围成，该曲线由 Γ 的一条边片段 e 与另一条边（若 $e \subseteq \widetilde{e_2}$，则为 e_1；若 $e \subseteq e_1$，则为 $\widetilde{e_2}$）上位于 e 两个端点之间的部分组成；并且（2）不包含 b_j 或 x_o。特别要注意，Γ 的透镜也是准透镜，但反之未必成立，因为准透镜不一定是 Γ的区域。

图示见图25。此外， Γ 的每条边片段至多诱导一个准透镜——除非 b_j 和 x 是该片段的两个端点，此时它会诱导两个准透镜（事实上，它们都是透镜）。我们可以将透镜视为（按包含关系）极小的准透镜，下面这个简单引理便说明了这一点。请注意，图25中的准透镜包含一个透镜，如图26所示。我们将证明这一点始终成立。

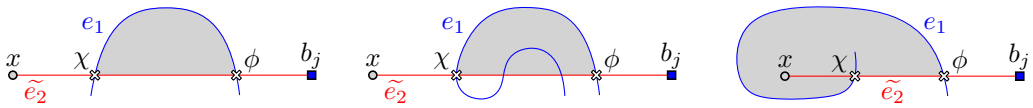


图25 Γ中由 e_1 的一条边片段 $\chi\phi$ 所形成的不同类型双边形：透镜（左）、准透镜（中）和反透镜（右）。

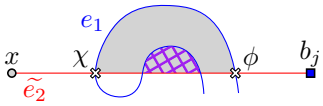


图26 一个包含一个透镜（以紫色网格标出）的准透镜（灰色阴影部分）。

▶**引理17。** Γ 的每个准透镜都包含一个透镜。

证明。考虑 Γ的一个准透镜 Q ，不失一般性，设 Q 由 e_1的一条片段 uv 所诱导。令 e' 表示 $\widetilde{e_2}$ 位于 u 与 v之间的部分。我们对构成 e'的边片段数量进行归纳。若该数量为一，也就是说，若 e' 是 $\widetilde{e_2}$的一条片段，则 Q 是一个透镜，结论成立。否则，边 e_1 在某个点 χ处与 e'相交。从 χ 出发，沿 e_1 进入 Q。由于 e_1 是简单曲线，且根据定义（准透镜的定义），e_1 的两个端点均不在 Q 上，因此这条轨迹最终必定在某个点 $\psi \in \partial Q \cap \widetilde{e_2}$处离开 Q ，于是 $\chi\psi$ 是 e_1的一条片段。随后， $\chi\psi$ 诱导出一个准透镜 $Q' \subsetneq Q$，其边界上的 $\widetilde{e_2}$ 片段数量严格少于 Q。根据归纳假设，准透镜 Q' 包含一个透镜，因此 Q也包含一个透镜。◀

由于 Γ 是 H^+的子绘图，我们可以根据 Γ 中包含 H^+ 的哪些部分，对其区域和准透镜进行分类。具体而言， Γ 的区域或准透镜属于

- **被刺穿** 当且仅当其包含[4] 的至少一个顶点；**自由** 当且仅当其未被刺穿（即不包含 H的任何顶点）；**正常** 当且仅当其包含至少一个交叉，但不包含 H的任何顶点；**空** 当且仅当其包含至少一个边片段，但不包含 H的任何顶点或交叉；**冗余** 当且仅当其不包含 H的任何顶点或边片段；**本质的** 当且仅当其不是冗余的（即包含 H的某个顶点或边片段）。

反透镜。 根据定义，准透镜不包含 x 或 b_j。但我们还需要处理包含这两个点之一的区域。我们将 Γ 的**反透镜** 定义为$\mathcal{S}^2$ 的一个开区域，它满足：(1) 其边界是一条简单闭曲线，由 Γ 的一条边片段 e 与另一条边（若 $e \subseteq \widetilde{e_2}$ 则为 e_1 ，若 $e \subseteq e_1$则为 $\widetilde{e_2}$ ）在 e 的两个端点之间的部分构成；(2) 它恰好包含 b_j 或 x中的一个。注意，反透镜由 e_1 与 $\widetilde{e_2}$ 之间的两个交叉点诱导，这两个交叉点沿 e_1 或 $\widetilde{e_2}$相邻，且具有相同的交叉旋转

[4] 由于所有区域和准透镜都是开集，“包含”等价于“在其内部包含”。

并且具有相同的交叉旋转。等价地， Γ 中的 e_1 或 $\widetilde{e_2}$ 的边片段，当且仅当其两个端点分别连接到 $\widetilde{e_2}$ 或 e_1的不同侧时，才会诱导一个反透镜。特别地，对于由 $c \in \{e_1, \widetilde{e_2}\}$ 在 Γ中的边片段 f诱导的反透镜 A ，构成 $c \setminus f$ 的两个"短边"中，一个始于 A 内部，另一个始于 A 外部（若将它们视为从 A 指向 $\{x, b_j\}$）。因此，我们称它们为 A的内侧 短边和外部短边 。反透镜有如下与引理17对应的结论。

▶**引理18.** 每个 A 的反透镜都包含一个准透镜，该准透镜由一条边 e A的内部短枝的片段诱导。

证明。考虑一个反透镜 A ，不失一般性地假设 A 由 e_1 的一个片段 $\chi\phi$ 诱导，且 A 的内部短枝 s 从 ϕ开始。令 ψ 为 s 与 $\widetilde{e_2}$ 的第一个交点（该交点存在，因为 s 终止于 $\widetilde{e_2}$）。令 $\phi\psi$ 表示 s的边片段。注意， $f\setminus\{\phi,\psi\} \subset A$。我们通过对 s 与 $\widetilde{e_2}$之间交点的数量进行归纳来证明该结论。

如果恰好有一个这样的交点（此时 $\psi \in \{x, b_j\}$），或者 f 在 ϕ 和 ψ处连接到 $\widetilde{e_2}$ 的同一侧，那么 f 就在 Γ中诱导出一个准透镜 $Q \subset A$ 。

否则，我们知道 f 在 ϕ 和 ψ处连接到 $\widetilde{e_2}$ 的不同侧。于是， f 形成一个反透镜 $A' \subset A$，其内部短枝 s' 与 $\widetilde{e_2}$ 的交点至少比 s少一个，因为 $\phi \in s \setminus s'$。根据归纳假设， Γ中存在一个准透镜 $Q \subset A' \subset A$。◀

自由透镜。 现在我们可以证明引理 13 了。证明将基于另一个引理，而我们将在本节余下部分证明该引理。

▶ **引理 13**。 在 Γ 中存在一个自由透镜，也就是说，一个不包含 $D[X_i]$中任何顶点的透镜 .

证明。 先考虑基例：假设 e_1 与 $\widetilde{e_2}$ 不相交。那么 Γ 只有两个区域，二者都是透镜。这两个透镜具有相同的边界，即 $e_1 \cup \widetilde{e_2}$，且 x 和 b_j都位于该边界上。在 H 中，所有蓝色顶点都与 X_i中的所有红色顶点相连。由于 $i > m$，因此 H 中至少有一个红色顶点（例如， r_1）。由于 $H_1[X_{i-1}] \cong H_2[X_{i-1}]$和 $H_1[X_{i-1}] \cup \widetilde{e_2} \cong H_2[X_i]$， H 的任意一条边要么同时与 e_1 和 $\widetilde{e_2}$相交，要么都不相交。因此， H 的所有顶点都位于 Γ的同一个透镜中，所以另一个透镜是自由透镜。

否则， Γ中至少有两个透镜。特别是， $\widetilde{e_2}$的第一个边片段构成一个准透镜，该准透镜本身是一个透镜，或包含一个带有 $b_j \notin \partial L$ 的透镜 L 。根据引理19，这足以保证 Γ 中存在一个自由透镜。◀

▶ **引理19**。如果 Γ 中存在一个满足 $b_j \notin \partial L$ 的透镜 L ，那么 Γ 中就存在一个自由透镜。

为了证明引理19，我们结合若干关于 Γ 结构的观察。其中第一个观察刻画了 H 中红色顶点的位置。

▶ **引理 20**。 H 中 b_j 的所有邻点都位于 Γ 中同一个区域 U 内，且满足 $b_j \in \partial U$。

证明。考虑 H 中与 b_j 相邻的一个邻点 y 。边 yb_j 与 xb_j 相邻，因此既不与 H^+ 中的 e_1 相交，也不与 H^+ 中的 $\widetilde{e_2}$ 相交。由此可知， y 位于 Γ 中的一个区域 C 内，且满足 $b_j \in \partial C$。由于 H_1 和 H_2 的边旋转系统相同，边 e_1 和 $\widetilde{e_2}$ 在 H^+中围绕 b_j的旋转中相邻。因此， H^+ 中 b_j 的所有邻点都位于 Γ 的同一个区域内。◀

遗憾的是，蓝色顶点的情况并不对称，因为它们不一定与 x 或 b_j 在 H中相连。下文中，我们将曲线 e_1 和 $\widetilde{e_2}$ 都视为从 x 指向 b_j。这会在每个区域周围的边片段上诱导出一种定向

Γ的定向。若（准）透镜 Q 的边片段在 ∂Q上构成一个有向环，则称其为循环的；否则，Q 称为无环的。接下来，我们要证明 Γ 中的所有本质准透镜都是无环的。

▶**引理 21**。 每个边界上含有 x 或 b_j 的准透镜都是无环的。

证明。 所有与 x 关联的边片段都背离 x定向。类似地，所有与 b_j 关联的边片段都朝向 b_j 定向。◀

▶ **引理 22**。 在 Γ 中存在一个自由透镜，或者每个带有 $b_j \notin \partial Q$ 的准透镜 Q 都被 H的一个蓝色顶点刺穿。

证明。 假设 Γ 中的所有透镜都被刺穿；由引理17可知，Γ 中的所有准透镜也都被刺穿。设 Q 是 Γ中的一个准透镜。根据定义（准透镜的定义），Q 不含有 b_j，且根据假设有 $b_j \notin \partial Q$。因此，由引理 20 可得 $Q \cap R = \emptyset$。所以，Q 被一个蓝色顶点刺穿，命题得证。◀

▶**引理23**。 Γ 中存在一个自由透镜，或者 Γ 的每个本质准透镜都是无环的。

证明。 反设 Γ 中的所有透镜都被刺穿，且存在一个本质循环准透镜 Q。不失一般性，我们对准透镜 Q作如下两个假设：

1. Q 由 e_1 中的一个片段 $\beta\xi$ 在 Γ 中诱导得到，且 β 沿着 b_j 比 e_1 更近（并且沿着 x 比 $\widetilde{e_2}$更近）。**2.** 的任何片段都不会在 $\widetilde{e_2}$ 中 β 与 b_j之间的部分上诱导出循环准透镜（否则，我们就可以让这样的准透镜充当 Q）。

为便于说明，我们设想 $\widetilde{e_2}$ 是一条水平线段，x 位于 b_j 的左侧，而 e_1 是一条围绕 $\widetilde{e_2}$ “蜿蜒”的曲线。根据引理 21 和引理 22，我们知道 Q 包含 H 的一个蓝色顶点 v。令 $r \in R \setminus \{x\}$。这样的顶点确实存在，因为 $i > m$，因此 $r_1 \in R \setminus \{x\}$。由于 r 位于 Q 的外部，H 的边 vr 与 ∂Q 相交。我们分两步证明该结论。首先，考虑 Q 是一个透镜的情形。然后，我们再说明如何将结论扩展到准透镜。

因此，暂且假设 Q 是一个透镜。那么不失一般性，我们可以假设 vr 沿着 e_1 与 ∂Q 交叉（否则，由于 Q 也是由 $\widetilde{e_2}$的一个片段诱导的，我们可以交换 e_1 和 $\widetilde{e_2}$的角色）。由于 $e_1 \cong_H \widetilde{e_2}$，$H$ 中 vr 之间交叉的旋转，与 vr 和 e_1之间交叉的旋转相同。vr 与 $\widetilde{e_2}$ 或 e_1之间没有其他交叉。$\widetilde{e_2}$ 端点的标记也确定了 e_1 的两条短边分别连接到哪一个端点，因此得到以下两种情形。在情形 1（图 27（左））中，边 vr 在 Q 和 b_j之间与 $\widetilde{e_2}$ 相交；在情形 2（图 27（右））中，它在 Q 和 x之间与 $\widetilde{e_2}$ 相交。如果 x 是蓝色的，那么 rx 也属于 H 的一条边，并且在本证明中，x和 b_j 的角色可以互换。因此，我们可以将这种情况视为情形 2 的一个实例；反过来，这使我们能够不失一般性地假设情形 1 中的 $x \in R$。

在这两种情况下，我们也将边 rb_j 加入图中。由于 rb_j 在 H 中与迄今为止考虑的所有其他边都相邻，因此它不会与其中任何一条边交叉。我们依次考虑这两种情况。移除 ∂Q 会将 $c \in \{e_1, \widetilde{e_2}\}$ 分成两部分；将连接到 $p \in \{x, b_j\}$的那一部分称为 c 相对于 Q的 p-短边。我们将 p-短边视为从 Q 指向 p。

情形 1： $x \in R$ 与 vr 在 Q 和 b_j之间相交。H 的每条边至多被 e_1 和 $\widetilde{e_2}$交叉一次。因此，e_1 或 $\widetilde{e_2}$ 与 vr之间不会再有交叉点。令 c_x 表示相对于 Q 而言，e_1 的 x短边 s_x^1 与相对于 Q 而言，$\widetilde{e_2}$ 的 x短边 s_x^2 的第一个交点（定义良好



图 27 引理23证明中的两种情形：情形 1（左）和情形 2（右）。

因为 x 就是这样的一个交点）。考虑简单闭曲线 C：从 c_x沿着 $\widetilde{e_2}$ 到达 ξ，再沿着 s_x^1 返回 c_x。现在考虑相对于 Q而言，e_1 的 b_j短边 s_b^1。由于 C无法与边 vr 或 rb_j交叉，因此 b_j 和 s_b^1的起始片段位于 C的不同侧。因此，为了到达 b_j，短边 s_b^1 会交叉 C。虽然 s_b^1无法与 $C \cap e_1$ 交叉，但它可以与 $C \cap \widetilde{e_2}$ 交叉，甚至多次。然而，它无法与 ∂Q 交叉，因为 Q 是一个透镜，因此它会交叉 $s_{x^\circ}^2$。将$\mathcal{R}_C$ 记为由 C 围成且不包含 b_j的$\mathcal{S}$ 区域。

我们断言，存在一个准透镜 $Q' \subset \mathcal{R}_C$，它由 Γ 中 s_b^1 的一个片段所诱导。为此，考虑 s_b^1 与 s_x^2 的第一个交点 c_b。如果 s_b^1 在 c_b 处从左向右交叉 s_x^2，那么命题成立，因为 s_b^1 上直到 c_b 的部分与 $\widetilde{e_2}$ 一起诱导出一个循环准透镜。否则，短边 s_b^1 在 c_b 处从右向左交叉 s_x^2，也就是说，s_b^1 的初始边片段在 Γ 中诱导出一个反透镜，其内部短枝由 s_b^1 上从 c_b 开始的部分构成。在这种情形下，由引理18可得命题成立。

由于 Q' 和 b_j 被 C 分隔，根据引理 22，Q' 包含 H 的一个蓝色顶点 u。图28（左）给出了示意图。接下来考虑 H 的边 ur。它不能与 H 中关联于 r 的其他边交叉，尤其不能与边 vr 和 rb_j 交叉。但 ur 可以（实际上也必须）与 e_1 和 $\widetilde{e_2}$ 交叉，不过每条边至多交叉一次，且旋转方向相同。注意，Q' 和 r 位于 C 的不同侧。因此，从 u 开始描绘 ur 时，为到达 r，这条边必须同时与 $\partial Q'$ 和 C 交叉。由于它与 e_1 至多交叉一次，ur 只能通过与 s_x^2 交叉才能离开 C；我们将这个交点记为 $p_u = ur \cap s_{x^\circ}^2$。因此，边 ur 也以相同的旋转方向与 s_b^1 交叉。这两个交点的先后顺序可以互换，这决定了 ur 的绘图；无论哪种顺序，都存在一条简单闭曲线 C'，它从 p_u 出发，沿着 ur 到达 r，随后沿着 rv 延伸，直到与 $\widetilde{e_2}$ 交叉，再从那里返回 p_{u° 注意，x 和 v 位于 C' 的不同侧。图 28（中）给出了示意图。

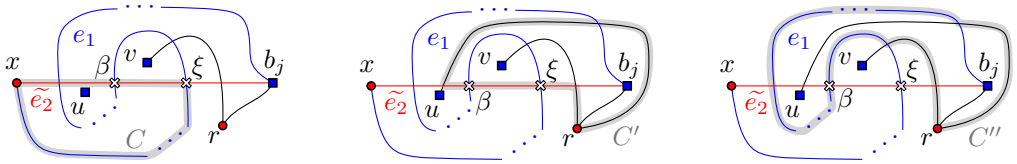


图28 引理23证明中情形 1 的情况。

最后，我们考虑边 vx。由于在这种情况下我们假设 $x \in R$，因此这条边确实存在。请注意，它可能不是 H 的边，但我们仍需确保在 $H \cup e_1$ 和 $H \cup \widetilde{e_2}$ 中以一致的方式绘制它（交叉点和交叉旋转相同），从而能够将这些绘图扩展为具有相同边旋转系统的完全多部图的绘图。因此，我们先考虑在 $H \cup \widetilde{e_2}$ 中绘制 vx 的情况。注意，vx 不得与相邻边 $\widetilde{e_2}$ 和 vr 交叉。由于 vx 与 C' 交叉，可知它也与 ur 交叉；因此，当沿着这条边从 v 经过该交叉点到达 x 时，顶点 u 位于左侧。所以，在 $H \cup e_1$ 中绘制 vx 时，也必须以相同的方式与 ur 交叉。在 $H \cup e_1$ 中，边 vx 不得与相邻边 e_1 和 vr 交叉。考虑简单闭曲线 C''：它从 r 出发，沿着 ur 延伸至交叉点

该曲线在交叉点处与 e_1 相交，然后从那里沿着 e_1 延伸至与 vr 的交叉点，再从那里沿着 vr 返回 r。示意见图 28（右）。注意， v 位于 C'' 的一侧，而边 ur 位于另一侧，并且位于 $\partial C''$ 上。沿着 $\partial C''$， vx 唯一可能交叉的边是 ur；但这样一来，它与 ur 的交叉旋转就会不正确（沿着这条边从 v 经过该交叉点到达 x 时，顶点 u 位于右侧）。因此，无法按要求在 $H \cup e_1$ 中绘制 vx，这与我们的假设矛盾： $H \cup e_1$ 和 $H \cup \widetilde{e_2}$ 均可扩展为具有相同边旋转系统的完全多部图的绘图。因此我们得出结论，这种情况不可能发生。◁

情形 2： vr 在 Q 和 x之间与 $\widetilde{e_2}$ 相交。由于绘图 $H \cap e_1$ 和 $H \cap \widetilde{e_2}$ 都是简单的，因此 vr 与 e_1 或 $\widetilde{e_2}$之间没有其他交叉点。考虑闭曲线 C： 它从 b_j 出发，沿着 rb_j 到达 r ，然后沿着 rv 前进，直到到达 ∂Q ；随后沿着 $\partial Q \cap e_1$ 到达 β，再沿着 $\widetilde{e_2}$ 返回 b_j。现在考虑相对于 Q的 e_1 的 x-短边 s_x^1。示意图见图29。由于 $\widetilde{e_2}$ 既不能与 ∂Q相交，也不能与边 rb_j 相交，而且它最多只能与 vr 相交一次，因此 x 和 s_x^1 的初始片段位于 C的不同侧。于是，为了到达 x，短边 s_x^1 必须与 C相交。由于 s_x^1 不能与 vr、 rb_j或 ∂Q 相交（后者是因为 Q 是一个透镜），该交叉点位于相对于 Q的 $\widetilde{e_2}$ 的 b_j-短边上，位置为 ϕ。接着，以 ϕ 为端点的 s_x^1 边片段，沿着 $\widetilde{e_2}$ 在 β 和 b_j之间的部分，在 Γ 中诱导出一个循环准透镜 Q'。这与我们关于 Q 的假设 2 矛盾，因此这种情形也不可能发生。◁

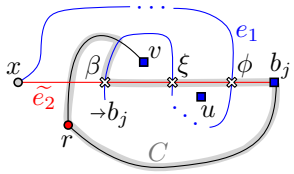


图29 引理23证明中情形 2 的情况。

由于两种情形都会导出矛盾，我们得出 Q 不是透镜，从而完成了证明的第一部分。接下来考虑这样的情形： Q 是一个一般准透镜，但不是透镜。根据引理17，存在一个透镜 $L \subset Q$。示意见图30（左）。由于 L 沿着 $\widetilde{e_2}$ 上介于 β 和 b_j之间的部分，根据假设 2，它是无环的。此外，根据引理的假设，透镜 L 被 H的一个顶点 v刺穿。由于 x 和 b_j 都不位于 ∂L上，根据引理 22，我们知道 v 是蓝色的，因此在 H中通过一条边与 r 相连。由于 $r \notin Q$，边 vr 恰好与 ∂Q 交叉一次。鉴于 vr 也分别与 ∂L 和 e_1 恰好交叉一次，我们得出它与 $\partial Q \cap \widetilde{e_2}$ 在 β 和 ξ之间的点 μ 处交叉。注意， vr 不可能与 $\partial L \cap e_1$ 交叉，因为这样的交叉

其旋转将与 $\widetilde{e_2}$ 在 μ处的交叉不同。因此可得 $\mu \in \partial L$。令 ν表示 L 中位于 μ 和 ξ之间的顶点。



图30 将该结论推广到引理23中的一般准透镜。

考虑简单闭曲线 C，它从 μ 出发，沿着 $\widetilde{e_2}$ 到达 b_j，然后沿着 $b_j r$ 到达 r，再沿着 rv 返回 μ。令 e' 表示 e_1 上从 ν 朝向 b_j 延伸至其下一个

与 C 的交点之间的部分（该交点存在，可能就在 b_j处）。注意， e' 不能与 vr 交叉，因为这样的交叉相对于交叉 $vr \cap \widetilde{e_2} = \mu$而言旋转方向不正确。它也不能与相邻边 rb_j交叉，也不能与 $\widetilde{e_2}$ 上位于 μ 和 ν 之间的部分交叉，因为 L是一个透镜。因此， e' 在 ν 和 b_j 之间的某处与 $C \cap \widetilde{e_2}$ 相交。此外，鉴于 vr与 $\widetilde{e_2}$交叉，它也必定与 e_1 交叉。用 f 表示 e_1 上从 $e_1 \cap vr$ 朝向 b_j 延伸至与 C 的下一个交点之间的部分（该交点存在，可能就在 b_j 处）。为了使 e_1 与 vr交叉处的旋转方向正确，曲线 f 从与 e'相同的 C 一侧开始。此外，由于曲线 f 是 e_1的一部分，它与 e' 具有相同的交叉限制，因此终止于 $C \cap \widetilde{e_2}$上，在 ν 和 b_j之间的某处。由于 e' 和 f 与 $C \cap \widetilde{e_2}$ 的交点彼此不同，因此可知 e' 在 ν 和 b_j之间与 $\widetilde{e_2}$ 恰当地交叉。换句话说， e_1的片段 e' 在 Γ中诱导出一个无环拟透镜 Q' 。

由于 $x \notin \partial Q'$ 和 $b_j \notin \partial Q'$，根据引理 22，存在一个蓝色顶点 $u \in Q'$。考虑 H^+中的边 ur ：它从 Q' 内部出发，其目标 r 位于 Q' 外部且在 C上。然而，它无法在始终位于 C 同一侧的情况下到达 r ，因为这需要同时穿过 e' 和 f。因此，边 ur 必须与 C交叉。但它既不能与相邻边 vr和 rb_j交叉，也不能穿过 Q，因为这需要以不同的旋转方式穿过 e_1 和 $\widetilde{e_2}$ 。因此我们得出结论： ur 在 $\widetilde{e_2}$上与 C 交叉，交叉点 λ 位于 ξ 和 b_j之间。示意图见图30（右）。

令 C' 表示这样一条简单闭曲线：从 r 出发，沿着 rv 到达 μ，再沿着 $\widetilde{e_2}$ 到达 λ，然后沿着 ur 返回 r。现在考虑曲线 e' 和 f。它们都属于 e_1，因此沿着 e_1，其中一条先于另一条出现。我们假设 f 沿着 e_1先于 e' 出现。（当 e' 沿着 e_1 先于 f 出现时，推理类似。）注意， e' 和 f 都始于 e_1 与 $C \cap C'$的一个交叉点。因此，为了将 f 连接到 e'，边 e_1 必须从 f 的端点到达 C' 的另一侧；该端点位于 C 上，但严格处于 C' 的一侧。换言之，在 f 和 e'之间的某处，边 e_1 与 C'交叉。令 ϕ 表示第一个这样的交叉点。那么 $\phi \notin vr$ ，因为我们已经知道唯一的交叉点 $e_1 \cap vr$，它是 f的起点。此外， $\phi \notin ur$ ，因为这样一来，与交叉点 $\lambda = ur \cap \widetilde{e_2}$相比， ϕ 的旋转就会出错。因此可得 $\phi \in \widetilde{e_2} \cap C'$。令 σ 表示沿着 e_1紧邻在 ϕ 之前的交叉点 $e_1 \cap \widetilde{e_2}$ 。由于 e_1 无法与相邻边 rb_j交叉， e_1 的片段 $\sigma\phi$ 在 ϕ 和 σ 处连接到 $\widetilde{e_2}$ 的同一侧。因此，这个片段在 Γ 中形成一个准透镜 Q''。此外，根据定义， ϕ 是 f之后 e_1 与 C' 的第一个交叉点；结合 f 的端点（沿着 $\widetilde{e_2}$位于所有 $C' \cap \widetilde{e_2}$ 之后）的位置，我们得出 Q'' 是循环的。但这与我们对 Q 的选择相矛盾，具体而言，与上述假设 2 相矛盾。因此，这样的循环准透镜 Q 从一开始就不存在，由此完成引理的证明。◀

经过这些准备，我们现在可以证明引理19了。

▶ **引理19**。 如果在 Γ 中存在一个满足 $b_j \notin \partial L$ 的透镜 L ，那么 Γ 中就存在一个自由透镜。

证明。 反设 Γ 中的每个透镜都被刺穿。那么，根据引理17， Γ 中的每个准透镜也都被刺穿，因此都是本质的。令 L 为 Γ 中的一个透镜，且满足$b_j \notin \partial L$；根据假设，这样的透镜存在。由于 L 被刺穿，它包含一个 H的顶点 v 。此外，由于 $b_j \notin \partial L$ ，根据引理 20，有 $v \in B$ 。由于 L 是本质的，根据引理23，它是无环的。

令 $\chi_1, \ldots, \chi_q$为 e_1与 $\widetilde{e_2}$的交点，沿 $\widetilde{e_2}$排列，其中 $\chi_1 = x$和$\chi_q = b_j$。由于 $b_j \notin \partial L$，透镜 L 由 $\widetilde{e_2}$ 在 χ_k 与 χ_{k+1}之间的一段边片段所界定，其中 $1 \leq k \leq q-2$。为便于说明，我们将 $\widetilde{e_2}$ 想象成一条水平线段，使 x 位于 b_j 左侧，并将 e_1 想象成一条围绕 $\widetilde{e_2}$“蜿蜒”的曲线。不失一般性，我们可以假设 e_1 在 χ_{k+1} 处从左向右 交叉 $\widetilde{e_2}$ （否则，将绘图上下翻转）。接着，由于 L 是无环的，边 e_1 在 χ_k处从右向左交叉 $\widetilde{e_2}$ 。

令 $r \in R \setminus \{x\}$。这样的顶点存在，因为 $i > m$，因此 $r_1 \in R \setminus \{x\}$。由于 $L \cap R = \emptyset$，H 中的边 vr 恰好在 ∂L 的两个边片段之一上与之交叉。不失一般性，假设 vr 沿 e_1 交叉 ∂L（否则，交换 e_1 和 $\widetilde{e_2}$的角色），并将此交叉记为 ψ。那么 vr 从右向左交叉 e_1。由于 vr 以相同方向交叉 $\widetilde{e_2}$，它必定会“绕过” b_j 或 x，并在 χ_{k+1} 和 b_j 之间交叉 $\widetilde{e_2}$，然后终止于 r；见图31。（图中将 χ_k 画成交叉，但也可以是 $\chi_k = x$。）

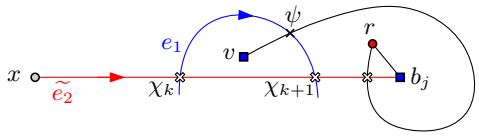


图31 引理19证明中的基本情形。

令 χ_ℓ 表示在 χ_{k+1}（可能为 $\chi_\ell = b_j$）之后，e_1 与 $\widetilde{e_2}$ 的下一个连续交点。根据 k 与 ℓ 的关系以及 χ_ℓ 的旋转，我们区分几种情形。

情形 1： $\ell < k$ 与 e_1 从右向左穿过 $\widetilde{e_2}$，交于 χ_ℓ。那么，e_1在 χ_{k+1} 与 χ_ℓ 之间的边片段在 Γ中诱导出一个循环准透镜，这与引理23矛盾。因此，这种情形不可能发生。◁

情形 2：$\ell < k$ 与 e_1 从左向右穿过 $\widetilde{e_2}$，交于 χ_ℓ。那么，e_1 的边片段 $\chi_{k+1}\chi_\ell$ 在 Γ 中形成一个反透镜 A，其内部短枝 s_A 由 e_1 从 χ_ℓ 到 b_j 的部分构成。示意见图32。根据引理18，存在一个准透镜 $Q \subset A$，它由 s_A 的一个边片段在 Γ 中诱导而成。由于 A 将 Q 与 b_j 分隔开，根据引理 22，存在一个蓝色顶点 $u \in Q$。我们断言，无法将边 ur 添加到该绘图中。

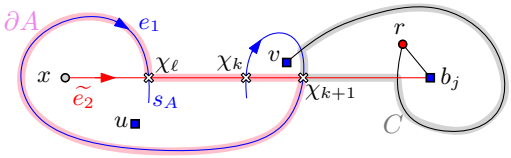


图32 引理19证明中的情形 2：$\ell < k$。

为了解这一点，首先注意到，$\widetilde{e_2}$ 的边片段 $\chi_k\chi_{k+1}$ 没有被 s_A交叉，因为 L 是一个透镜。特别地，Q 和 L 的闭包互不相交。由于 $u \in Q$ 和 $r \notin Q$，首先，连接 u 与 r 的一条边必须离开 Q，沿着 e_1 或 $\widetilde{e_2}$之一交叉 ∂Q。由于 $\partial Q \cap \partial L = \emptyset$ 和 $r \notin L$，这意味着 ur 无法进入 L（若要到达 r，它途中就必须再次交叉 e_1或 $\widetilde{e_2}$ 之一，而这是不允许的）。接下来注意到，u 和 r 也被简单闭曲线 C 分隔开来：该曲线从 χ_{k+1} 出发，沿着 $\widetilde{e_2}$ 朝 b_j 延伸至与边 rb的交叉点，然后沿着 rb 朝 b 延伸至与 ∂L的交叉点，最后沿着 ∂L 返回 χ_{k+1}。因此，边 ur 也必须同时交叉 ∂A 和 C。曲线 C由三个部分组成：

1. 沿着 ∂L 的部分无法被 ur 穿过，正如上文所述。**2.** 沿着边 br 的部分与 ur 相邻，因此也无法被 ur 穿过。**3.** 沿着 $\widetilde{e_2}$ 的部分是唯一剩下可供 ur 穿过的选项。

边界 ∂A由两部分组成：
1. 沿 $\widetilde{e_2}$ 的部分， ur 不能交叉，因为它已经沿 $\widetilde{e_2}$ 与 C 的唯一公共点 χ_{k+1} 是 ∂L的一部分。**2.** 沿 e_1的部分，是唯一剩下可被 ur交叉的选择。

然而，此外，边 ur 还与 ∂Q 交叉。由于 $C \cap \partial Q = \emptyset$ 和唯一的公共点 $\partial A \cap s_A$ 是 $\chi_\ell \in \widetilde{e_2}$，因此不可能沿着 ur 实现所有这些必需的交叉。因此，这种情况也不可能发生。◁

情形 3： 或者 $k+1 < \ell < q$ 和 e_1 从左向右交叉 $\widetilde{e_2}$ 于 χ_ℓ，或者 $\ell = q$，因此 $\chi_\ell = b_j$。那么就无法绘制边 vr 而不与 e_1 或 $\widetilde{e_2}$交叉多于一次，这是不允许的。图 33 给出了示意图。因此，这种情况也不可能发生。◁

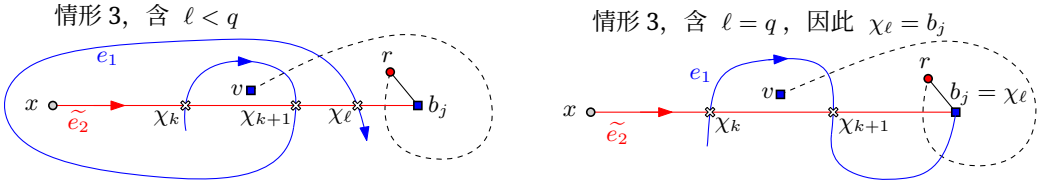


图33 引理19证明中的情形 3： $k+1 < \ell < q$ 或 $\ell = q$。

情况4： $k+1 < \ell < q$ 和 e_1 从右向左交叉 $\widetilde{e_2}$ 于 χ_ℓ。那么边片段$\chi_{k+1}\chi_\ell$ 的 e_1 形成一个准透镜 Q，其中 $\widetilde{e_2}$根据引理 22，其中包含一个蓝色顶点 u。边 ur 必须离开 Q，这涉及与 e_1 或 $\widetilde{e_2}$交叉。

首先假设 ur 沿着 ∂Q与 e_1 交叉。那么 ur 从左向右与 e_1 交叉。令 F为包含 r 的区域，其边界由 χ_{k+1} 与 ψ之间的边 e_1 、 ψ 与 br 和 $\widetilde{e_2}$交叉处之间的 vr，以及该交叉处与 χ_{k+1}之间的 $\widetilde{e_2}$ 构成；参见图34中的阴影区域。 ur 在与 e_1 交叉后紧接着的部分位于 F之外。为了到达 r，边 ur 必须进入 F。然而，它不能与 vr相交，不能再次与 e_1 相交，并且必须从左向右与 $\widetilde{e_2}$ 相交。因此， ur 无法完成，产生矛盾。

因此，我们可以假设 ur 沿着 ∂Q从右向左与 $\widetilde{e_2}$ 交叉。令 $\Delta \subset F$ 为由 $b_j r$、 r 与 vr 和 $\widetilde{e_2}$交叉处之间的 vr 部分，以及该交叉处与 b_j之间的 $\widetilde{e_2}$ 部分所围成的区域。 ur 在与 $\widetilde{e_2}$ 交叉后紧接着的部分位于 F中。为了到达 r，边 ur 必须始终位于 F 中，且不能与 Δ相交，因此得到图34（右）所示的绘图。

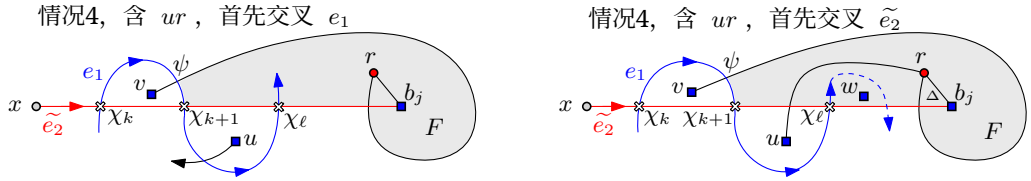


图34 情况4 引理19

考虑 e_1 如何延伸到 χ_ℓ 之外：
1. 它不能与 ur 交叉，因为 $ur \cap e_1$ 的旋转与 $ur \cap \widetilde{e_2}$的旋转不匹配。**2.** 它不能与 rv 交叉，因为会与 $rv \cap e_1 = \psi$交叉。

3. 它不能在 χ_ℓ 左侧与 $\widetilde{e_2}$ 交叉，因为这会形成一个循环准透镜，与引理23矛盾。4. 因此，它在 χ_ℓ右侧与 $\widetilde{e_2}$ 交叉，从而形成一个（循环）准透镜 Q'。

wr 的边要到达 r，必须与 $\partial Q'$ 交叉，这意味着它会与 e_1 或 $\widetilde{e_2}$之一交叉。因此，它也会与另一个交叉，且交叉旋转相同。由于 wr 不能与相邻边 vr 和 ur交叉，它必须离开 F，以便与 $\widetilde{e_2}$交叉。为了到达位于 F内部的 r，边 wr 必须再次进入 F。但这是不可能的，因为:

1. 边 wr 不能再次与 $\widetilde{e_2}$ 交叉。2. 它不能与 vr交叉。3. 它无法到达 F 而不经过 L 并与 e_1 交叉两次。

因此，这种情况也不可能发生。 ◁

总而言之，在这四种情况下，我们都得出了与“ Γ 中的每个透镜都被刺穿”这一假设矛盾的结论。因此， Γ中存在一个自由透镜。◀

D.6 可逆三角形为空（引理 14 的证明）

根据可逆三角形的定义，存在一个绘图 D'，其中由与 Δ 相同的组合边构成的交叉三角形 Δ' 具有不同于 Δ 的奇偶性。我们称 Δ' 为 D' 中 Δ 的反向三角形。引理 14 可直接由下面两个引理推出（见本节末尾）。

▶ **引理 24。 </style}对于、和，设和是,** n 在球面上的两个绘图，它们具有相同的边旋转系统；设 Δ 和 Δ' 分别是 D_1 和 D_2中的交叉三角形，且 Δ' 是 Δ的反向三角形。设 v 是一个顶点，在 D 中它位于 Δ内部。那么在 D'中， v 不可能位于 Δ'内部。

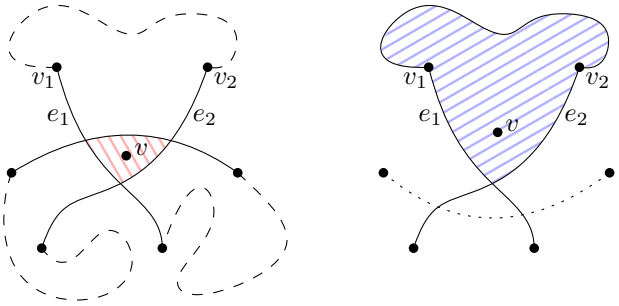


图35 如果绘图 D （左图）中的顶点 v 位于三角形 Δ （红色阴影部分）内部，那么它相对于一个诱导的$K_{2,3}$ 的位置是固定的：在绘图 D' （右图）中， v 必须位于该$K_{2,3}$ 的同一区域内，因此不可能位于 Δ'中。

证明。 首先注意，由构成 Δ in D 的三条边的六个端点中，恰有三个属于 $K_{m,n}$ 顶点的一个二部划分类，另外三个属于另一个划分类。考虑以图 35 左侧虚线所示的方式连接这些端点的三条曲线。这些曲线中至少有一条连接了 $K_{m,n}$ 顶点的不同二部划分类中的两个点，因此是该完全二部图绘图中的一条有效边。否则，至少四个端点必须属于同一个二部划分类——这与第一个观察相矛盾。

不失一般性，设 v_1 和 v_2 分别是以这种方式连接的边 e_1 和 e_2 的端点。考虑由 e_1 和 e_2 的顶点所诱导的 $K_{2,2}$ 的绘图，见图 35（右）。加上 v 后，这就构成了一个 $K_{2,3}$ 的绘图；根据引理 16，顶点 v 位于该绘图的一个固定区域内。在绘图 D 中，该区域是 Δ 内部的区域，如图 35 中的阴影部分所示。因此，在绘图 D' 中，顶点 v 必须位于由 e_1、e_2 诱导的 $K_{2,3}$ 的同一区域内（图 35 中蓝色阴影部分），且不能位于 Δ' 内部。◀

▶ **引理25.** 对于 m、$n \geq 3$ 和 $m+n \geq 7$，设 D 和 D' 是球面上具有相同边旋转系统的$K_{m,n}$ 的两个绘图；设 Δ 和 Δ' 分别是 D_1 和 D_2中的三角形，且 Δ' 是 Δ的反向三角形。设 v 是一个顶点，它在 D 中位于 Δ内部。那么在 D'中，v 不能位于 Δ'外部。

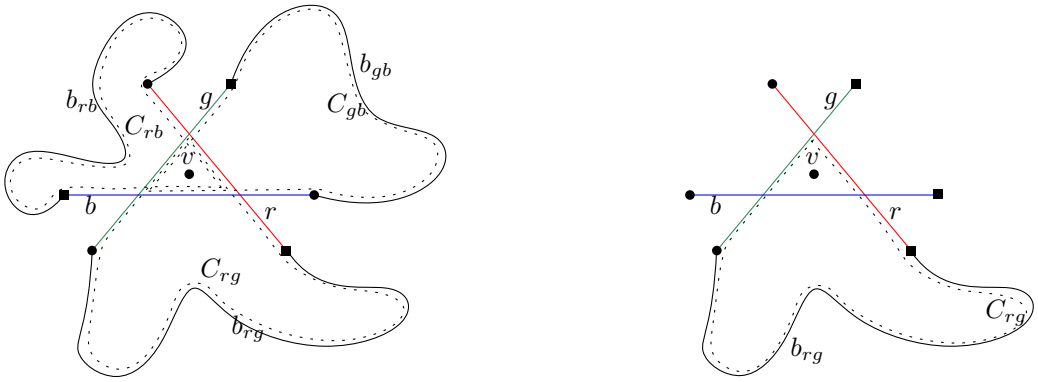


图 36 绘图 D，其中三角形 Δ 有一个顶点 v 位于 Δ内部。两个二分部的顶点分别画成圆形和方形。在左图中，Δ 的边的端点交替属于$K_{m,n}$ 的两个顶点二分部；而在右图中，它们则构成两个连续的块。

证明。 考虑 Δ的端点。这些端点归属于$K_{m,n}$的两个顶点二分部，有两种不同的情形：它们交替排列（情形 1，见图36（左）），或者每个二分部各有三个顶点，形成两个块（情形 2，见图36（右））。为简化描述，我们将构成 Δ 的三条边分别着成蓝色（边 b）、红色（边 r）和绿色（边 g），并考虑连接其端点的三条边，即绘图图 36 中所示的黑边 b_{rg}、b_{gb}和 b_{br}。请注意，我们不对这三条黑边的绘制方式作任何假设，只要求它们属于一个简单绘图。例如，b_{rg} 可能与 b_{gb} 和 b相交。

为了得出矛盾，在这两种情况下，我们都假设在绘图 D 中，顶点 v 位于 Δ 的内部，而在绘图 D' 中，顶点 v 位于 Δ' 的外部。D' 的绘图如图37所示。与图 36 一样，除了要求三条黑边是简单曲线外，我们不对它们的绘制方式作任何假设（图中可能还有未画出的交点）。

情形 1： 各部分的交替端点。考虑由 r 和 g 的端点以及顶点 v 所诱导的 $K_{2,3}$ 的绘图，以及由 r 和 g 的端点所诱导的 $K_{2,2}$ 的绘图。将引理 16 应用于上述 $K_{2,3}$ 的绘图，可知 Δ 中的顶点 v 也位于 $K_{2,2}$ 绘图的一个区域内，该区域由边 r 的一部分、边 g 的一部分以及边 b_{rg}围成，如图 36（左）绘图中的虚线圈所示。我们将这个边界圈记为 C_{rg}。类似地，v 也位于.....的绘图区域内

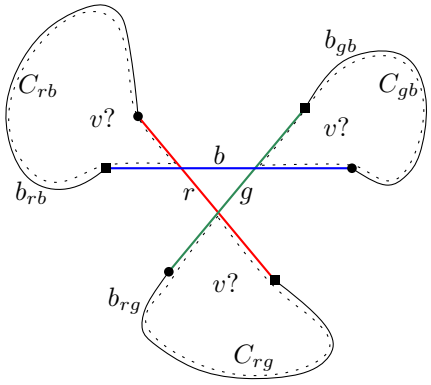


图37 绘图 D'，其中顶点 v 必须位于所示的三个环内，且在 Δ'之外。

由 r 和 b 诱导的 $K_{2,\ 2}$ 绘图中，该区域由虚线圈 C_{rb}围成；而对应于 g 和 b 的区域则由虚线圈 C_{gb}围成。

考虑由 v 以及 r 和 b 的端点诱导的子图。由于 D 和 D' 具有相同的边旋转系统，v 必须位于该子图任意绘图中的同一区域。因此，在 D 和 D' 中，它必须位于圈 C_{rb} 的同一侧。类似地，在 D 和 D' 中，它必须位于 C_{rg} 和 C_{gb} 的同一侧。但由于这三个圈在 Δ' 内已不再有共同区域，因此必定还有其他位置使这三个圈相关区域的交集（即 v 所在的区域）非空；参见图 38。

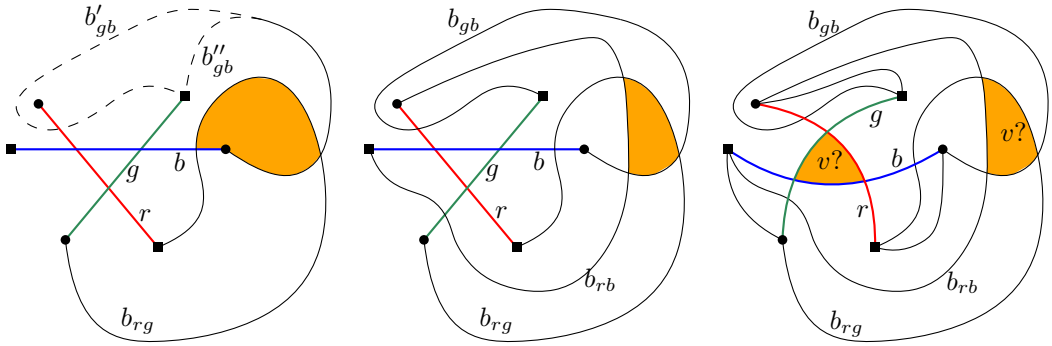


图 38 绘图 D'，其中三个区域的交集非空，因此 v 可以放置在那里。

我们先从 C_{rg} 和 C_{gb} 的交点开始。这两个圈可能的交叉点为 $b_{rg} \cap b$、$b_{gb} \cap r$ 和 $b_{rg} \cap b_{gb}$。由于两个圈必须有公共区域，根据简单的奇偶性论证可知，这两个圈之间恰好有两个交叉点。根据对称性，不妨假设其中一个交叉点是 $b_{rg} \cap b$。注意，这两条边只有一种可能的交叉旋转（图38（左））。

现在，b_{gb} 不可能与 r 中属于 C_{rg} 的部分交叉，而不同时与 b_{rg} 交叉。因此，第二个交叉点是 $b_{rg} \cap b_{gb}$。同样，这个交叉点只有一种可能的旋转。b_{gb} 可以在 C_{rg} 外与 r 交叉（在图38（左）中画作 b'_{gb}），也可以不在 C_{rg} 外与 r 交叉（在图38（左）中画作 b''_{gb}）。

这给出了顶点 v 可能所在的一个区域；它在图38中以橙色绘出。因此，b_{rb} 也必须与该区域相交。由于它不能与 b相交，因此必须同时与 b_{rg}和 b_{gb}相交。如果我们绘制 b''_{gb}，这是不可能的，因为 b_{rb}只能与 g 交叉一次。所以 b_{gb}

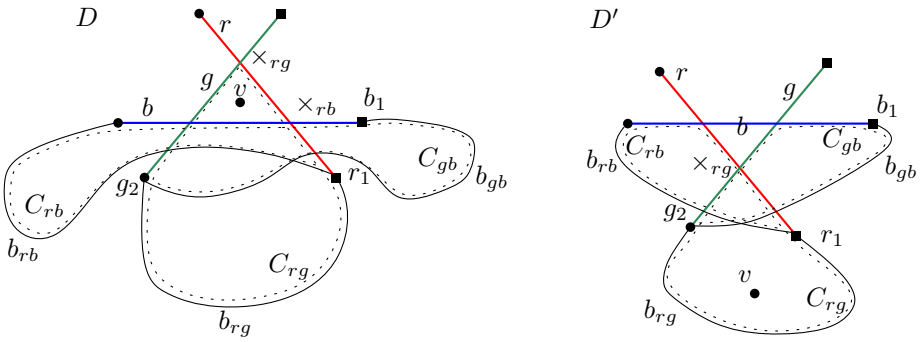


图38 在 D （左图）中， v 必须位于所示环 C_{rg} 的内部，但位于所示环 C_{gb} 和 C_{rb}的外部。因此， D' （右图）也必须满足相同条件。

绘制为 b'_{gb}，也就是与 r交叉。

于是，绘制 b_{rb} （图 38 中图）只有一种唯一方式。

到目前为止，绘图中已有 9 个交叉点，这是绘制 $K_{3,\ 3}$时的最大交叉点数。因此，剩下的三条边必须绘制成没有交叉，这样就完成了绘图（图 38 中图）。

由于此区域边界上的边与 Δ'边界上的边不相交，˜我们可以绘制一个 D，使其与 D' 中的这个 $K_{3,\ 3}$ 的绘图完全相同，只是对应于 Δ' 的三角形 Δ 发生了翻转（图 38 右图）。注意，在这两个 D 和 D'中，限制在这个 $K_{3,\ 3}$ 上的边旋转系统 ˜相同。然而，现在有两个区域 ˜可供 v 所在：三角形 Δ 内部，以及 D' 中 v 所在的区域（见图 38 右图中的阴影区域）。但这与引理 11 矛盾。因此可知，在这种情况下，v 不能位于 Δ'的内部。◁

情形 2： 每个划分类中三个端点组成的块。为方便起见，我们按图39所示标记 b、r、g之间的顶点和交叉点；不失一般性，顶点 v和下标为 2 的顶点属于同一个二部划分类。在由 r和 g的端点诱导的 $K_{2,\ 2}$ 的绘图中，考虑由 b_{rg}、r和 g围成的三胞腔，该三胞腔在图 39（左）中以虚线圈标示。令 C_{rg} 为此区域的边界圈，并将此区域称为 C_{rg}的固定侧。注意， v 位于此固定侧中。类似地，在由 r 和 b （分别由 g 和 b）的端点诱导的 $K_{2,\ 2}$的绘图中，我们分别用 C_{rb} （和 C_{gb}）表示边界上有 b_{rb} （和 b_{gb}）的三胞腔的边界圈，该三胞腔同样在图39（左）中以虚线圈标示。我们称该区域为 C_{rb} （分别为 C_{gb}）的固定侧，而 v 不在此固定侧中。沿用情形 1 中类似的论证，在 D'中的 Δ' 的绘图里， v 位于 C_{rg} 对应的固定侧中，而不位于 C_{gb} 和 C_{rb}对应的固定侧中；见图39（右）。

在 D' 中，由于 v 位于 C_{rg} 的固定侧，但不位于 C_{gb} 的固定侧，而且根据简单绘图假设，边 b_{gb} 不能与 b_{rg} 交叉，因此 b_{gb} 必定与边片段 $\chi_{rg}r_1$交叉，其中 χ_{rg} 是 r 与 g的交叉点。考虑K_2的绘图中由 r 和 b_{gb} 在 D' 中诱导出的、 v 所在的区域，$_2$ 。具体而言，该区域由 b_{rg}、 b_{gb}和 r围成，因此 b_1 不在该区域内。因此，连接 v 和 b_1 的边 e 必定与该区域的边界交叉奇数次。由于 e 不能与 b_{gb}交叉，因此它与该边界恰好交叉一次。我们考虑以下两种子情况：

情形 2.1： e 在 D' 中与 $r_1\chi_{rg}$ 交叉，且不与 b_{rg}交叉。在 D'中，由于 (i) v 和 b_1 位于 C_{rb}的同一侧，(ii) e 与 $r_1\chi_{rg}$交叉，且 (iii) e 无法与 b交叉，因此我们必须有 (iv) e 也与 b_{rb}交叉。同理，在 D中，根据前述陈述中的 (i)、(iii) 和 (iv)，可以得出 e 必须与 $r_1\chi_{rb}$交叉。由于 v 和 b_1 在 D中的 Δ 两侧，e 必须

与 Δ的至少一条边交叉。由于 e 与 $r_1\chi_{rb}$交叉，因此它不能与 $\chi_{rg}\chi_{rb}$交叉。结合 e 无法与 b 交叉这一事实，我们得出 e 必须与 g交叉。然而，现在考虑 D中的圈 C_{rg}。沿着 e 从 v 走向 b_1时，我们先与 g 交叉；由于不能与 b_{rg}交叉，因此不能以与 D'中相同的交叉旋转与 $\chi_{rb}r_1$ 交叉。因此，我们得出矛盾。◁

情形 2.2： e 与 b_{rg} 在 D'处交叉。我们在 D' 中遇到的情况如图39（左）所示。正如开头所观察到的， b_{gb} 与 r 在 D'处交叉，因此在 D中也是如此。由于 b_{gb} 不能与 g交叉，因此绘制 b_{gb} 于 D有两种方式。如果 b_{gb} 像图39（中）那样与边片段 $r_2\chi_{rg}$ 交叉，请注意，我们无法绘制边 e，使其既不与 b 或 b_{gb} 交叉，又同时以与 D'相同的交叉旋转方式与 b_{rg} 交叉。因此， b_{gb} 必须与边片段 $\chi_{rb}r_1$交叉。然而，由于 e 不能与 b_{gb}交叉，在遵循交叉 $e\cap b_{rg}$的旋转的前提下，从 v绘制 e的唯一方式如图39（右）所示。但这样一来，我们就无法完成边 e 到 b_1的绘制。◁

至此，引理25得证。 ◀

▶ **引理 14** (可逆三角形为空)。 设 D 是完全二部图 G的一个简单绘图，且 Δ 是 D中的一个可逆三角形。那么， D 的所有顶点都位于 Δ之外。

证明。 由于 Δ 是 D中的一个可逆三角形，因此在具有相同边旋转系统的 K_m中，存在另一绘图 D' 中的一个反向三角形 Δ'。假设存在一个顶点 v 位于 Δ内部。那么，根据引理24，在 D' 中，顶点 v 不能位于 Δ'内部；而根据引理25， v 也不能位于 Δ'外部。因此， v 在 D'中无处可画，矛盾。故 $K_{m,\ n}$ 的所有顶点都位于 D中 Δ 之外。◀

E 第 6 节证明缺失：翻转距离的下界

为了证明定理 10（关于翻转距离下界），我们证明图40中的两个 K_n 绘图之间的翻转距离为 $\Theta(n^6)$。该图与第 6 节中的图 10 相同，此处重复呈现以便阅读。为方便起见，我们也在证明之前再次列出定理。

▶**定理 10**。 设 G 是一个多部图 G，有 n 个顶点，且包含两个顶点不相交的子图，每个子图都构成一个$K_{m\text{三角形}m}$，其中 $m=\Theta(n)$。那么 G 存在两个具有相同边旋转系统的绘图D_1 和 D_2，其翻转距离为$\Omega(n^6)$。

证明。我们先通过构造 D_1 和 D_2来证明 $G=K_n$ 的界；示意图见图40。为方便起见，假设 n 能被4整除。图40中的两个绘图具有相同的扩展旋转系统。有 $\Theta(n^2)$ 条黑边连接 $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_{\frac{n}{4}}\}$中的顶点与 $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_{\frac{n}{4}}\}$中的顶点，它们产生 $\Theta(n^4)$ 个交叉点。所有这些交叉点都位于灰色阴影区域内。因此，该区域内的黑边之间有$\Theta(n^4)$ 个交叉点。所有连接 $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_{\frac{n}{4}}\}$中的顶点与 $D=\{d_1,d_2,\ldots,d_{\frac{n}{4}}\}$中的顶点的绿边都与所有黑边相交。在绘图 D_1 （图40左）中，绿边与黑边之间的所有交叉点都位于 C 中的顶点与灰色阴影区域之间。在绘图 D_2 （图40右）中，绿边与黑边之间的所有交叉点都位于 A 中的顶点与灰色阴影区域之间。因此，任意两条相交的黑边与每一条绿边都会构成一个三角形；要将 D_1 变为 D_2，必须翻转这些三角形。由于有 $\Theta(n^2)$ 条绿边，至少需要翻转 $\Theta(n^6)$ 个三角形。

对于任何包含A 与 C 之间的黑边以及 B 与 D之间的绿边的子绘图，同样的论证也成立；其中可包含任意子集的灰

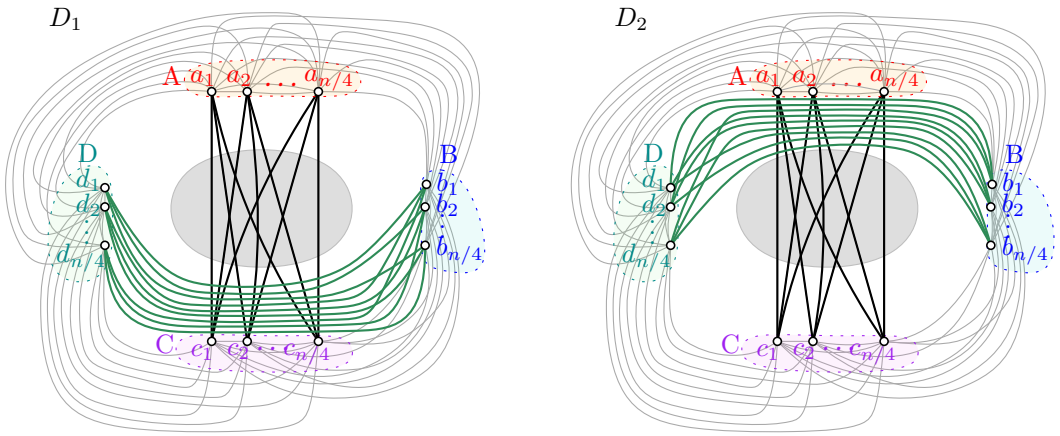


图40 具有相同边旋转系统的 K_n 的两个简单绘图。B 与 D 之间有 $\Theta(n^2)$ 条（绿色）边，需要移过 A 与 C 之间的（黑色）边的 $\Theta(n^4)$ 个交叉点，总共进行 $\Theta(n^6)$ 次三角形翻转。

边。因此，只要包含 A与 C 之间以及 B 与 D之间的完全二分子图，这一下界便适用于一类更一般的完全多部图。◀