arXiv:2303.07414v1 [math.CO] 13 Mar 2023

弱收费凸性中的凸包数与区间数的计算

Mitre C. Dourado[*1]、Marisa Gutierrez[†2]、
F´abio Protti[‡3]和 Silvia Tondato[§2]

[1]计算机研究所，里约热内卢联邦大学，巴西。[2]精确科学学院，拉普拉塔国立大学，阿根廷。[3]计算机研究所，弗卢米嫩塞联邦大学，巴西。

2023年3月15日

摘要

图 G 的游走 $u_0u_1\ldots u_{k-1}u_k$ 若满足以下条件，则称为弱收费游走：若 $u_0u_i \in E(G)$，则 $u_0u_k \notin E(G)$；且若 $u_ju_k \in E(G)$，则 $u_j = u_{k-1}$。集合$S \subseteq V(G)$的弱收费区间记为 $I(S)$，由 S 以及属于集合 S中两个顶点之间某条弱收费游走的顶点构成。若 $I(S) = S$，则集合 S 是弱收费凸集。包含 S的最小弱收费凸集称为 S的弱收费凸包，记为 $H(S)$。图 G 的弱收费区间数是满足 $I(S) = V(G)$的集合 $S \subseteq V(G)$的最小基数；图 G 的弱收费凸包数是满足 $H(S) = V(G)$的集合 $S \subseteq V(G)$的最小基数。本文展示了如何在多项式时间内计算图的弱收费区间数和弱收费凸包数。与此相对，我们证明，确定图 G 的弱收费凸性数（即与 $V(G)$不同的最大弱收费凸集的边数）是NP难问题。

关键词：凸几何；凸性；凸包；真区间图；弱 toll 游走

1 引言

有限集 X 的子集族 $\mathcal{C}$ 在满足 $\varnothing$、$X \in \mathcal{C}$，且 $\mathcal{C}$ 在交集 [19]下封闭时，称为 X 上的凸性。$\mathcal{C}$ 中的成员称为凸集。图凸性是指满足以下条件的凸性：对于图 G，$X = V(G)$。文献中有许多例子，其中

*本研究部分得到 CNPq（巴西）资助，项目编号 305404/2020-2；并得到 FAPERJ（巴西）资助，项目编号 E-26/211.753/2021。电子邮箱：mitre@ic.ufrj.br。

†电子邮箱：marisa@mate.unlp.edu.ar。

‡本研究部分得到巴西国家科技发展委员会（Conselho Nacional de Desenvolvimento Cient´ıfico e Tecnol´ogico，项目编号 304117/2019-6）和 FAPERJ（项目编号 201.083/2021）的资助。电子邮箱：fabio@ic.uff.br。

§电子邮箱：tondato@mate.unlp.edu.ar。

图凸性是在路径系统上定义的；单声路径凸性 [7, 11] 由 $V(G)$ 的所有单声路径凸集组成（集合 S 是单声路径凸的，当且仅当连接 S 中两个顶点的每条诱导路径都完全位于由 S诱导的子图中）。同样，测地凸性 [18], 、 m^3-凸性 [9], 、收费凸性 [2], 以及弱收费凸性 [6] 分别基于最短路径、长度至少为三的诱导路径、收费游走和弱收费游走定义。

本文研究弱收费凸性，这是收费凸性的一种变体。给定图 G 中两个不同且不相邻的顶点 u 和 v ，弱收费 (u, v)-游走是指满足 $u = u_0$、 $v = u_k$ 及以下条件的游走 $u_0u_1 \dots u_{k-1}u_k$：

- $u_0u_i \in E(G)$ 蕴含 $u_i = u_1$；
- $u_iu_k \in E(G)$ 蕴含 $u_i = u_{k-1}$。

换言之， u_0 （分别地， u_k）在该游走中只有一个邻点：顶点 u_1 （分别地， u_{k-1}），该顶点可以在游走中出现多次。

弱收费游走的概念是收费游走概念的一种放宽，后者由 [2], 提出，旨在刻画与区间图相关联的凸几何结构（关于凸几何的概念，请读者参阅 [12]）。类似地，弱收费游走可用于将真区间图刻画为凸几何（见 [6]）。除了区间图和真区间图之外，其他重要的图类也被刻画为凸几何。弦图和托勒密图分别是关于单弧凸性和测地凸性的凸几何 [12]; 弱可极化图 [17] 则是关于 m^3-凸性的凸几何 [9]。其他被刻画为凸几何的图类还包括森林、余图、二部图和平面图 [3]。

集合 $S \subseteq V(G)$ 的弱收费区间记为 $I(S)$，它由 S 以及属于 S 中两个顶点之间某条弱 toll 游走的顶点构成。若 $I(S) = V(G)$，则称 S 为弱 toll 区间集；若 $S = I(S)$，则称 S 为弱收费凸集。包含 S 的最小弱收费凸集称为 S 的弱收费凸包，记为 $H(S)$。若 $H(S) = V(G)$，则称 S 为弱 toll 凸包集。 G 的弱收费区间数是弱 toll 区间集 G 的最小基数； G 的弱 toll 凸包数是弱 toll 凸包集 G 的最小基数；而 G 的弱收费凸性数记为 $\mathrm{w}tc(G)$，是与 $V(G)$ 不同的 G 的最大弱收费凸集的边数。

本文研究了与弱收费凸性相关的一些不变量；具体而言，确定了树和区间图的弱区间数与弱包数。本文研究一般图的弱 toll 包、弱收费区间以及弱收费凸性数。值得指出的是，针对其他类型的图凸性，上述不变量已有大量研究。感兴趣的读者可参阅例如 [7, 18]。我们特别指出，在许多情况下，即使对于特殊图类，这三个参数也是 NP 完全的；例如，测地凸性中的偏立方体图的包数 [1] 以及弦二部图的区间数 [8] 便是如此。

关于收费凸性，我们引用了 [5, 10], ，其中研究了包数和区间数。

本文其余部分安排如下。第 2 节介绍所有必要的背景知识。第 3 节阐述有关弱收费凸集和极点的一些事实及复杂性问题。在第 4 节中，我们证明，判定图 G 的弱收费凸性数是否至少为 k 是 NP 完全的，即使对于素图也是如此（G 是指不含团分隔集的素图）。第 4 节中，我们还介绍如何确定图的弱 toll 凸包数；与第 3 节一样，我们将团分隔集分解的相关概念用作解决这一问题的工具。第 5 节致力于确定弱收费区间数。最后，第 6 节总结全文。

2 预备知识

我们考虑有限简单无向图。设 G 为一张图。对于集合 $S \subseteq V(G)$，我们用 $G[S]$ 表示由 S 诱导的 G 的子图。若顶点 $v \in V(G)$ 满足 $N(v)$ 是团，则称其为单纯顶点。若 u和 v是（真）孪生顶点，即 $N[u] = N[v]$，则称它们为（真）孪生顶点。用 $T(u)$ 表示与 u互为孪生顶点的顶点集合，并且 $T[u] = T(u) \cup \{u\}$。注意， G 的顶点可以划分为集合 T_1、.....、T_k，使得对于 $i \in \{1, \ldots, k\}$，存在某个 $u \in V(G)$ 满足 $T_i = T[u]$。我们称该划分中的每个集合为 G 的一个孪生类，并指出，利用模分解可以在线性时间内得到这一划分 [4, 16]。给定集合 S，我们用 S 表示 S 的子集，其中恰好包含 S中每个含有顶点的孪生类的一个顶点。

两个顶点 $u, v \in V(G)$ 之间的路径（分别地，游走）称为（u, v）-路径（分别地，（u, v）-游走）。设 $P = u_0u_1 \ldots u_{k-1}u_k$ 是一条（u_0, u_k）-路径。给定一个集合 $S \subseteq V(G)$，从 u 到 S 的路径是从 u 到 S 中任意顶点的路径。

弱收费凸集 $S \subseteq V(G)$ 中的顶点 x 称为 S 的弱 toll 极端顶点，当且仅当 $S \setminus \{x\}$ 也是弱收费凸集。 S 的弱 toll 极端顶点集合记为 $\mathrm{e}xt(S)$。 $V(G)$ 的弱 toll 极端顶点集合记为 $\mathrm{e}xt(G)$。一般而言，若 $\mathcal{C}$ 是 $V(G)$ 上的凸性且 $S \in \mathcal{C}$，则顶点 $x \in S$ 是 S 的极点，当且仅当 $S \backslash \{x\}$ 也是凸集。若凸性 $\mathcal{C}$ 满足明可夫斯基–克雷因–米尔曼性质 [14]，即每个凸集都是其极点的凸包，则称其为凸几何。

为方便起见，在对给定集合使用区间算子和凸包算子时，有时写出该集合的顶点会很有用。例如，我们可以写成 $I(u, v)$ 来表示 $I(\{u, v\})$。

我们还需要以下一些补充定义，这些定义见 [15]。如果 u 和 v 在 G 中存在一条路径相连，但在 $G - S$ 中不存在这样的路径，则称 $S \subset V(G)$ 分离 u、$v \in V(G)$。此外，如果 S 分离了 G 中的某一对顶点，则称 S 是 G 的一个分隔集；如果 S 是 G 的一个分隔集且为团，则称 S 是 G 的一个团分隔集。若图 G 含有团分隔集，则称其为可约图；否则称其为素图。图 G 的极大素子图，或称 G 的 mp-子图，是 G 的一个极大诱导子图，且该子图为素图。给定 G 的一个 mp-子图 M，我们用 M 表示 $V(M)$ 中属于 G 的至少两个 mp-子图的顶点所组成的集合 $\rightarrow$;

$\overleftarrow{M} = V(M) \setminus M$。

可约图 G 的 mp-子图 M_i 是极值的，若存在一个 mp-子图 $M_j \neq M_i$，使得以下性质成立：对于每个 mp-子图 $M_k \neq M_i$，都有 $\rightarrow V(M_i) \cap V(M_k) \subseteq V(M_i) \cap V(M_j)$。在此情况下，注意 $M_i = V(M_i) \cap V(M_j)$。

命题 2.1. 设 G 是一个阶为 n、边数为 m 且最大度为 Δ 的图。如果 $uw \notin E(G)$，则对于 G 中互不相同的顶点 u、v 和 w，以下结论成立。

1. 那么，v 属于一条弱 toll (u,w)-游走，当且仅当存在 $v_u \in N(u)$ 和 $v_w \in N(w)$，使得图 $G - S(v_u, v_w)$ 含有一个连通分量 C，满足 $\{v_u, v_w, v\} \subseteq V(C)$，其中

$$S(v_u, v_w) = (N[u] \setminus \{v_u\}) \cup (N[w] \setminus \{v_w\}).$$

2. 设 u、v、w 是图 G 中三个互不相同的顶点，且 $uv \notin E(G)$。那么，判断 v 是否位于弱 toll (u,w)-游走中，可以在 $O(\Delta^2(m+n))$ 时间内完成。

证明。（1）假设 v 位于弱 toll 游走 $u, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, w$ 中。令 $v_u = v_1$ 和 $v_w = v_k$。那么 $v_u \in N(u)$ 且 $v_w \in N(w)$。此外，$v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$ 是一条游走，它避开 $N[u]$ 中的所有顶点（$v_u = v_1$ 除外）以及 $N[v]$ 中的所有顶点（$v_w = v_k$ 除外）。这意味着 v_u、v_w 和 v 位于 $G - S(v_u, v_w)$ 的同一个连通分量中。

反过来，假设存在一对（不一定互不相同的）顶点 $v_u \in N(u)$ 和 $v_w \in N(w)$，使得 v_u、v_w 和 v 位于 $G - S(v_u, v_w)$ 的同一个连通分量 C 中。那么，在 C 中存在一条游走 $W = v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k$，其中 $v_1 = v_u$、$v_k = v_w$ 和 W 包含 v。（v_u 和 v_w 可能在 W 中出现多次。）此外，W 避开 $N[u]$ 中的所有顶点（$v_u = v_1$ 除外）以及 $N[v]$ 中的所有顶点（$v_w = v_k$ 除外）。这意味着 $W' = u, v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, w$ 是一条包含 v 的弱 toll 游走。

(2) 根据命题 1，判断 v 是否属于弱 toll u、w-游走，只需检查是否存在一对 v_u、v_w，分别是 u 和 w 的邻点，使得 v_u、v_w 和 v 位于 $G - S(v_u, v_w)$ 的同一个连通分量 C 中。由于可能的配对 v_u、v_w 至多有 Δ^2 个，而且对每一对，判断 v_u、v_w、v 是否位于 $G - S(v_u, v_w)$ 的某个连通分量中可在 $O(n+m)$ 时间内完成，因此结论成立。

□

根据上述命题以及上一节给出的定义，我们可以很容易地推出以下事实。

推论 2.2. 给定一个具有 n 阶、m 条边且最大度为 Δ 的图 G 的顶点集合 S，可以分别用 $O(\Delta^2|S|^2(n-|S|)(n+m))$ 步和 $O(\Delta^2 n^4(n+m))$ 步计算 $I(S)$ 和 $H(S)$。

3 弱收费凸性数

本节讨论如何确定图 G 的 $\mathrm{w}tc(G)$。我们首先证明，即使将问题限制在素图中， Clique 问题仍然是 NP 完全的。

定理 3.1. 设 G为一个素图， k 为一个正整数。那么，判定 G 是否包含一个边数至少为 k 的团的问题是 NP 完全的。

证明. 该问题显然属于 NP。困难性证明是从 Clique问题 [13]归约而来的。设 (G, k) 是该 Clique 问题的一个输入。令 $k' = k$，并按如下方式构造图 G'：

$$V(G') = V(G) \cup \{x_{uv} \mid u, v \in V(G), uv \notin E(G)\}$$

and

$$E(G') = E(G) \cup \{u\, x_{uv}, v\, x_{uv} \mid u, v \in V(G), uv \notin E(G)\}.$$

我们证明 G' 是一个素图。反设不然，设 C 是 G' 的一个团，它分离了 $a, b \in V(G')$。若 $a \notin V(G)$，则对于某些不相邻顶点 $u, v \in V(G)$，有 $a = x_{uv}$；并且 $G' - C$ 的一个连通分量 G_a 包含 a 和 a 的一个邻点 $a' \in \{u, v\}$，因为 u, v 中至少有一个不在 C 中。类似地，若 $b \notin V(G)$，则 $G' - C$ 的一个连通分量 $G_b \neq G_a$ 包含 b的一个邻点 $b' \in V(G)$。因此，无论哪种情况， C 都分离了两个顶点 $a', b' \in V(G)$。此外， $a'b' \notin E(G)$，这意味着 $x_{a'b'} \in V(G')$。由于 $x_{a'b'}$仅与 a' 和 b'相邻，因此 $x_{a'b'} \notin C$ 和 $G' - C$ 包含路径 $a'\, x_{a'b'}\, b'$，这就产生了矛盾。因此， G' 是一个素图。

总结证明，我们有： G' 包含一个边数至少为 k' 的团，当且仅当 G包含一个边数至少为 k 的团，因为我们可以假设 $|V(G)| \geq 2$，且包含 $V(G')$ 中一个顶点的最大团 $\setminus V(G)$ 有 2 个顶点。 □

下一个定理表明，即使 G 是素图，判定图 G 的弱收费凸性数是否至少为 k 的问题也是 NP 完全的。

推论 3.2. 设 G 为素图， k 为正整数。那么，判定 $\mathrm{w}tc(G) \geq k$ 的问题是 NP 完全的。

证明. 给定一个满足 $|S| \geq k$ 的集合 $S \subseteq V(G)$，根据推论 2.2，我们可以在多项式时间内检查 S 是否为弱 toll 凸集。因此，该问题属于 NP。

根据推论 5.2，如果图 G 是素图但不是完全图，那么任何不同于 $V(G)$ 的弱 toll 凸集都是一个团。因此，困难性证明基于以下事实：限制在素图上的 Clique 问题是 NP 完全的（定理 3.1）。 □

4 Weaklytoll 区间数

在本节中，我们将展示如何在多项式时间内计算任意图 G 的 $\mathrm{w}tn(G)$。

定理 4.1. 设 G 是一个非完全连通图，并设 $u, v \in V(G)$ 满足$|I(u,v)| \geq |I(w,z)|$，其中任意 $w, z \in V(G)$ 均成立。以下命题成立。

(i) 若 $u, v \notin ext(G)$，则 $wtn(G) \leq 8$。(ii) 若 $u \in ext(G)$ 且 $v \notin ext(G)$，则 $|T[u]| + 1 \leq wtn(G) \leq |T[u]| + 5$。$(iii)$ 若 $u, v \in ext(G)$，则 $|T[u] \cup T[v]| \leq wtn(G) \leq |T[u] \cup T[v]| + 2$。$(iv)$ 若 $w \in ext(G)$，则 $w \in T[u] \cup T[v]$。

证明。(i) 到 (iii) 由于 G 不是完全图，选择顶点对 $\{u, v\}$ 意味着 $uv \notin E(G)$。注意，根据 u 和 v 中有多少个是弱 toll 极值顶点，(i) 到 (iii) 中恰有一个适用于 G。若 $I(u,v) = V(G)$，则 $wtn(G) = 2$, $|T[u]| = 1$和 $|T[v]| = 1$，这意味着对于符合 G的 (i) 到 (iii) 中任意一项，结论均成立。因此，我们可以假设 $V(G) \setminus I(u,v) \neq \varnothing$。记 Y为 $V(G) \setminus I(u,v)$ 的子集，该子集由那些在 $I(u,v)$ 中含有邻点的顶点构成，并记 $X = V(G) \setminus (I(u,v) \cup Y)$。由于 G是连通的，存在 $y \in Y$。见图 1。

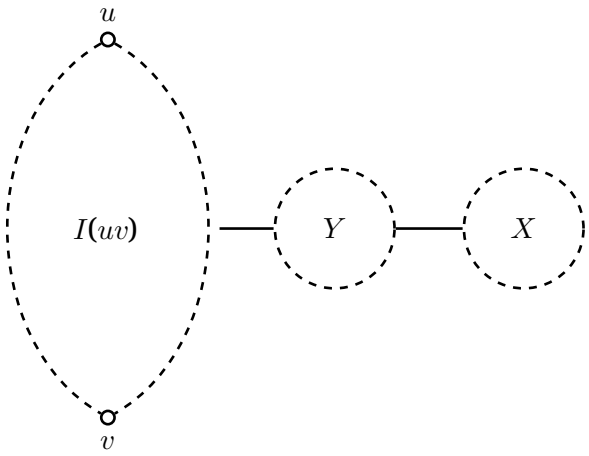


图 1：集合 $I(u,v)$、 Y和 X。

我们断言 $y \in N(u) \cup N(v)$。反设不然，令 $y' \in I(u,v)$ 满足$yy' \in E(G)$，并令 W 为一条包含 y'的弱 toll (u,v)-游走。我们可以看出， W 是两个子游走 W_u和 W_v的拼接，其中 W_u是一条 (u,y')-游走，而 W_v是一条 (v,y')-游走。由于 $W_u y W_v$ 是一条包含 y的弱 toll (u,v)-游走，因此产生矛盾，从而证明该断言成立。

我们知道， Y中没有顶点属于 $N(u) \cap N(v)$，因为如果某个顶点y属于其中，那么 uyv 就会是一条包含 y 的弱 toll (u,v)-游走，并且 y 会属于 $I(u,v)$。因此，我们可以写作 $Y = Y_u \cup Y_v$，使得 $Y_u \cap Y_v = \emptyset$，其中 $Y_u \subseteq N(u)$ 且 $Y_v \subseteq N(v)$。

现在，我们证明 $X = \varnothing$。接着，假设存在 $x \in X$。如果 $Y_u \cup \{u\}$ 将 x与 v分离，那么根据上述断言，存在一条（x,u）-路径，其中恰好包含 Y_u 中的一个顶点，且不包含 $N[v]$中的任何顶点。可以利用这条路径证明 $I(u,v) \subset I(x,v)$，但这与

对 $\{u, v\}$ 的选择相矛盾。因此，根据对称性，存在路径 P_u 和 P_v，分别从 x 到 u 以及从x到 v，使得 P_u 恰好包含 Y_u 中的一个顶点，且不包含 $N[v]$中的任何顶点，而 P_v恰好包含 Y_v 中的一个顶点，且不包含 $N[u]$中的任何顶点。注意，这两条路径构成一条包含 x 的弱 toll（u, v）-游走，这是不可能的。因此， $X = \varnothing$ 和 $V(G) \setminus I(u, v) = Y$。记 $Z_u = Y_u \setminus T[u]$。见图 2。

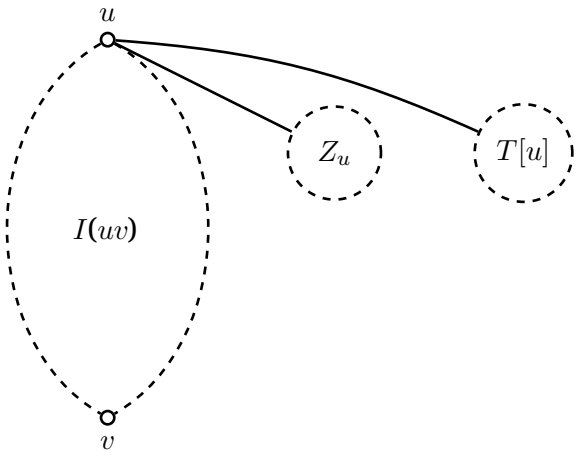


图 2：集合 $I(u, v)$、 Z_u 和 $T[u]$。

我们断言，每个 $u' \in Z_u$ 在 $I(u, v)$ 中都有一个邻点 $\setminus N[u]$。反设 u' 在 $I(u, v) \setminus N[u]$ 中没有邻点。我们将证明， $I(u', v)$ 的顶点数多于 $I(u, v)$。只需证明，对于每个 $w \in I(u, v)$，都存在一条包含 w 的弱 toll (u', v) 游走。设 W 是一条包含 w 的弱 toll (u, v) 游走，设 u^* 是 u 在 W 中唯一的邻点，并用 W' 表示从 W 中删除 w 后得到的游走。若 $u'u^* \in E(G)$，则 $u'W'$ 是一条包含 w 的弱 toll (u', v) 游走。若 $u'u^* \notin E(G)$，则 $u'W$ 是一条包含w 的弱 toll (u', v) 游走。由于 $u' \in I(u', v) \setminus I(u, v)$，我们有 $I(u', v)$ 的顶点数多于 $I(u, v)$，这与矛盾相悖，因此该断言成立。

将 R_u 记为 $I(u, v) \setminus N[u]$ 中由那些与 Z_u 中顶点相邻的顶点组成的子集。根据上述断言，$R_u \neq \varnothing$。我们有， $Q_u = N(u) \cap I(u, v)$ 将 R_u 中的顶点与 v 分离，因为否则 Z_u 中的某个顶点会属于 $I(u, v)$。现在，令 $r \in R_u$。见图 3。

我们断言 $Z_u \subset I(r, u, v)$。令 $z \in Z_u$。对于 $rz \in E(G)$ 的情形，有 $z \in I(r, u)$。因此，我们可以假设 $rz \notin E(G)$。令 G' 为由 $I(u, v)$ 诱导的 G 的子图。令 P_r 为 G' 中从 r 到 Q_u 的一条最短路径。将属于 Q_u 的 P_r 中唯一的顶点记为 q。若 $qv \in E(G)$，则令 $P_v = vq$。否则，令 P_v 为 G' 中从 v 到 Q_u 的一条最短路径。路径 P_r 和 P_v 存在，因为 G' 是连通的。令 q' 为属于 Q_u 的 P_v 中唯一的顶点；它可以等于 q。此外，由于 Q_u 将 R_u 与 v 分离， P_r 与 P_v 的交集至多包含一个顶点。现在，游走 $P_r uzuP_v$ 是一条弱 toll (r, v)-游走，且包含 z，由此完成该断言的证明。

最后，将 R_v 相对于 v 定义为 R_u 已定义的 u，并注意到 G 的每个顶点恰好属于集合 $I(u, v)$ $T(u)$ $T(v)$ Z_u 和 Z_v中的一个。我们根据 $T(u)$ 和 $T(v)$ 的顶点是否为弱 toll 极端，分三种情况讨论。

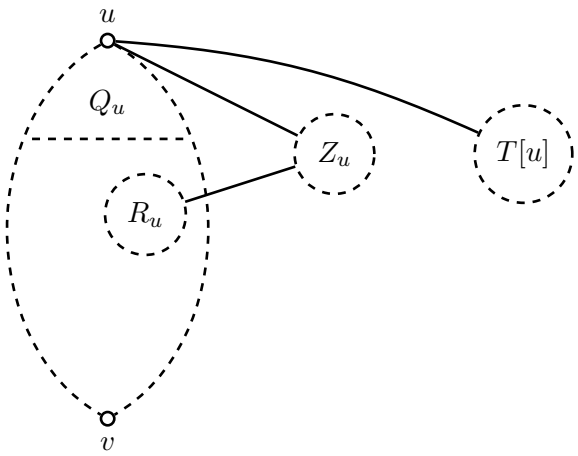


图 3：集合 Q_u、 R_u、 Z_u 和 $T[u]$。

第一种情况是 $T[u] \cup T[v]$ 没有极端顶点。我们将证明存在八个顶点（不一定互不相同），使得 G 的每个顶点都属于这些顶点的某个子集的区间。由于 $T[u] \cup T[v]$ 的顶点不是极端顶点，因此存在两个顶点 w_1, w_2，使得$T[u] \subset I(w_1, w_2)$；并且存在两个顶点 w_3, w_4，使得 $T[v] \subset I(w_3, w_4)$。我们知道存在 $r_u \in R_u$，使得 $Z_u \subset I(u, v, r_u)$，并且存在 $r_v \in R_v$，使得 $Z_v \subset I(u, v, r_v)$。因此， $\{u, v, w_1, \ldots, w_4, r_u, r_v\}$ 是 G 的一个弱 toll 区间集，且至多包含 8 个顶点。因此，(i)成立。

第二种情况是，集合 $T[u]$ 和 $T[v]$ 中恰有一个由弱 toll 极值顶点构成。根据对称性，不妨设 $T[u] \subseteq ext(G)$，且 $T[v] \cap ext(G) = \varnothing$。利用前一种情况中的顶点，我们可以得出， $T[u] \cup \{v, w_1, w_2, r_u, r_v\}$ 是 G 的弱 toll 区间集，至少有 $|T[u]| + 1$ 个顶点，至多有 $|T[u]| + 5$ 个顶点，这意味着 (ii) 成立。

最后一种情况，即 $T[u]$ 和 $T[v]$ 都由弱 toll 极值顶点构成时，我们有 $T[u] \cup T[v] \cup \{r_u, r_v\}$ 是 G 的区间集，至少有 $|T[u] \cup T[v]|$ 个顶点，至多有 $|T[u] \cup T[v]| + 2$ 个顶点。因此，(iii) 确实成立。

(iv) 考虑上文构造的 $V(G)$ 的划分 $I(u, v)$ $T(u)$ $T(v)$ Z_u 和 Z_v。我们已经证明 $Z_u \subset I(u, v, r_u)$ 和 $Z_v \subset I(u, v, r_v)$，这意味着 $(I(u, v) \cup Z_u \cup Z_v) \setminus \{u, v\}$ 的顶点不是 G 的弱 toll 极值顶点。因此， $ext(G) \subseteq T[u] \cup T[v]$。 □

以下结果是定理 4.1（iv）的推论。

推论 4.2. 对任意图 G，由弱 toll 极值顶点构成的 G 至多有 2 个孪生类。

定理 4.1 导出了以下算法，用于求一般图 G 的最小弱收费区间集。

- 首先确定属于收费极端顶点的孪生类 $T_1, \ldots, T_k$，其中 G。根据推论（4.2），我们知道 $k \leq 2$。

• 如果 $k=0$，那么根据定理 4.1（i），$wtn(G) \leq 8$。因此，可以在 $O(n^8\alpha)$ 时间内计算出 G 的最小弱收费区间集，其中 α 是计算给定集合的弱收费区间的时间复杂度。

• 若 $k=1$，则定理 4.1（ii）保证 $|T[u]|+1 \leq wtn(G) \leq |T[u]|+5$，其中 $T[u]$是由弱 toll 极端顶点组成的 G 的唯一孪生类。于是，可以在 $O(n^5\alpha)$ 时间内计算 G 的最小弱 toll 区间集。

• 若 $k=2$，则根据定理 4.1（iii），可得 $|T[u] \cup T[v]| \leq wtn(G) \leq |T[u] \cup T[v]| + 2$，其中 $T[u]$和 $T[v]$是由弱 toll 极端顶点组成的 G的仅有的孪生类。在这种情况下，可以在 $O(n^2\alpha)$ 时间内计算 G 的最小弱 toll 区间集。

推论 4.3. 给定一个阶为 n、边数为 m且最大度为 Δ的一般图 G，可在 $O(n^9\Delta^2(n+m))$ 步内计算 G的最小弱 toll 区间集 S。此外，$|\hat{}S| \leq 8$。

证明。根据推论 2.2，计算集合 S 的弱收费区间的时间复杂度为 $O(\Delta^2|S|^2(n-|S|)(n+m))$。注意，$I(S) = S \cup I(\hat{}S)$。另请注意，对于上述算法中考虑的任意集合 S，$|S| \leq 8$，因此总时间复杂度为 $O(n^9\Delta^2(n+m))$。

□

5 弱 toll 包数

我们指出，第 4 节中介绍的用于求图 G 的最小弱 toll 区间集 S 的多项式时间算法，可以调整后用于在多项式时间内求 G 的最小弱 toll 凸包集 R。正如推论 4.3 中所观察到的，$|\hat{}S| \leq 8$。由于对于任意图 G'，$wth(G') \leq wtn(G')$，我们得出结论：$|\hat{}R| \leq 8$。因此，利用推论 2.2，可以在 $O(n^{12}\Delta^2(n+m))$ 步内计算 $wth(G)$。本节介绍一种时间复杂度为 $O(n^2\Delta^2(n+m))$ 的算法，用于计算 $wth(G)$。当 G 为素图时，可由以下已知结果以及每条诱导路径都是弱 toll 游走这一事实得出。

引理 5.1. [7] 如果 G 是非完全图的素图，那么 G 的任意一对不相邻顶点 u、v 都是 G的单峰凸包集。

推论 5.2. 如果 G 是非完全图的素图，那么 G 的任意一对不相邻顶点都是 G的弱 toll 凸包集。

对于 G 不是素图的情况，我们需要一些辅助结果。

引理 5.3. [15] 设 M_i和 M_j是图 G的两个 mp-子图。如果 $V(M_i) \cap V(M_j)$ 非空，那么它是一个团。

←引理 5.4. 设 G 是一个可约图，且 M 是 G M 的一个极值 mp-子图。如果它不是团，则存在不相邻顶点 $\overleftarrow{u_0}$、$u_1 \in M$，一个顶点 $\overrightarrow{w_0} \in M$，以及一条诱导路径 $\rightarrow P$，使得对于某个 $w_1 \in M$，要么 $P = u_0w_0u_1$，要么 $P = u_0w_0w_1u_1$。

证明. 令 $S = \{u \in V(M_i) \setminus C_i : u$ 在 $C_i\}$中至少有一个邻点。若 $(V(M_i) \setminus C_i) \setminus S = \emptyset$，则由于 $V(M_i) \setminus C_i$不是团， S也不是团。若 $(V(M_i) \setminus C_i) \setminus S \neq \emptyset$，则 S将某个顶点 $x \in (V(M_i) \setminus C_i) \setminus S$ 与某个顶点 $y \in C_i$ 分离。因此， S 不是团，因为 M_i 不含团分隔集。根据以上论述，存在不相邻顶点u_0、 $u_1 \in S$。如果 u_0、 u_1 有一个公共邻点 $w_0 \in C_i$，则结论成立。否则，令$w_j \in C_i$为 u_j的一个邻点，其中 $j \in \{0, 1\}$，并考察诱导路径 $P = u_0w_0w_1u_1$。

□

引理 5.5. [15] 每个可约图至少有两个极值 mp-子图。

←引理 5.6. 设 M_1 和 M_2 是图 G的两个不同的极值 mp-子图。若 $u_1 \in M_1$ 和 ←←←$u_2 \in M_2$，则 $V(G) \setminus (M_1 \cup M_2) \subset H(u_1, u_2)$。

←←证明。设 $v \in V(G) \setminus (M_1 \cup M_2)$。设 P_1 是一条(u_1, v)-路径，其中仅包含 →→M_1 的一个顶点 v_1，且包含 M_2的顶点数最少。设 P_2 是一条(u_2, v)-路径，其中→→仅包含 M_2 的一个顶点 v_2 ，且包含 M_1的顶点数最少。若 P_1 恰有→ M_2的一个顶点，我们可以假设该顶点为 v_2。类似地，若 P_2 恰有→ M_1的一个顶点，我们可以假设该顶点为 v_1。因此，若 P_1 至多有一个 M_2 的顶点→→，且 P_2 至多有一个 M_1的顶点，则将 P_1 和 P_2 连接起来，便得到一条弱 toll (u_1, u_2)-游走，其中包含 v。

因此，由于 M_2 是一个团，因此不失一般性，我们可以假设 P_1 恰有→两个属于 v_2的顶点， v_2' 属于 M_2。假设 v_2 在 P_1中位于 u_1 与 v_2' 之间。令 M_2' 为 G 的一个极大→mp-子图，使得 $M_2 \subseteq V(M_2')$。根据 P_1的选取，我们有 $v_2' \notin V(M_1)$，这意味着 $M_2' \neq M_1$。

我们断言， v_1 不属于 $V(M_2')$。接着，反设 $v_1 \in V(M_2')$。由于 M_2'是一个mp-子图，我们知道 v_2 不会将 v_1 与 v_2'分开。因此， $M_2' - v_2$中存在一条(v_1, v_2')-路径 P_1'。根据 P_1的选取，我们有 P_1' 也有两个属于 M_2的顶点→、 v_2' 以及一个顶点 v_2''。类似地， $\{v_2, v_2''\}$ 不会将 v_1 与 v_2'分开。然而，这→意味着 M_2 是一个无限集，这与矛盾相悖，也就是说，该断言成立。

设 w_1 是 $V(M_2')\setminus$ 的一个顶点 M_2 是 G 中 v_2 的邻点，并设 W 是 $M_2' \setminus M_2$ 的一个闭 (w_1, w_1)-→→游走，其中包含 $V(M_2') \setminus M_2$ 的所有顶点。利用 W, $P_1(u_1, v_2)$ 以及 M_2 中仅包含 M_2 的一个顶点的 (u_2, v_2)-路径→，我们得出 $V(M_2') \subset H(u_1, u_2)$。

设 w_2 是 G 中属于 $M_2' - M_2$ 的 v_2' 的邻点 M_2。最后，由 w_2v_2' 和 P_2 构成的游走是一个包含 v 的弱 toll，证毕。

□

定理 5.7。对于一个阶为 n 的图 G ，以下结论成立。

(1) 若 G 是完全图，则 $\mathrm{w}th(G) = n$ 。
(2) 若

(a) 如果 G 是一个非完全的素图，或者。（b） G至少包含三个极值 mp-子图，或者。

(c) ←G 是可约的，且 M_i 是 G 的一个极值 mp-子图，使得 M_i 不是一个团。

←(3) $wth(G) \in \{2, x_1+1, x_2+1, x_1+x_2\}$，其中 $x_i = |M_i|$ 适用于 $i \in \{1,2\}$，如果 G 恰好包含两个极值 mp-子图 M_1 和 M_2。

证明。(1) 在完全图中，没有顶点能成为弱 toll 游走的内部顶点。因此，$\mathrm{w}th(G) = n$。

$(2a)$ 由推论 5.2 可得。

←(2b) 设 M_1、M_2 和 M_3 是 G的三个极值 mp-子图。设 $u_i \in M_i$，其中 $i \in \{1,2,3\}$。
← ←根据引理 5.6，对于任意不同的 i和 $j \in \{1,2,3\}$，有 $V(G) \setminus (M_i \cup M_j) \subset H(u_i, u_j)$。由于
← ← ←$M_k \subset V(G) \setminus (M_i \cup M_j)$，对于 $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$，我们有 $\{u_1, u_2\}$ 是 G 的一个弱 toll 凸包集。

← →(2c) 根据引理 5.4，存在不相邻顶点 $u_0, u_1 \in M_i$, $w_0 \in M_i$，以及一条诱导→路径 P，使得对于某个 $w_1 \in M_i$，要么 $P = u_0w_0u_1$，要么 $P = u_0w_0w_1u_1$。根据推论 5.2，$V(M_i) \subseteq H(u_0, u_1)$。现在，令 G' 为 $G - V(M_i)$ 中包含 $V(M_j) \setminus$
→ →M_i 的连通分量，其中 $M_j \neq M_i$ 是包含 M_i 的 G 的 mp-子图。mp-子图的定义→意味着 w_0 有一个邻点 $v \in (V(M_j) \setminus M_i) \subseteq V(G')$。此外，在 G' 中存在一条闭游走 W_v，从 v 出发并以其结束，且 W_v 包含 G' 的所有顶点。因此，$u_0w_0W_vw_0u_1$ 或 $u_0w_0W_vw_0w_1u_1$ 是一条包含 G' 所有顶点的弱 toll 游走，即，$V(G') \subseteq I(u_0, u_1) \subseteq H(u_0, u_1)$。

接下来，设 G'' 是 $G - V(M_i)$ 的另一个连通分量，与包含 G 的 mp-子图 M_k 顶点的 G' 不同，使得 $C'_i = V(M_i) \cap V(M_k) \neq \emptyset$，并令 $w \in C'_i$。← →注意，w 有邻点 $b_1 \in M_i$, $b_2 \in V(M_j) \setminus M_i$ 和 $y \in (V(M_k) \setminus C'_i) \subseteq V(G'')$。此外，存在一条在 G'' 中的闭游走 W_y，其起点和终点均为 y，且 W_y 包含 G''的所有顶点。这意味着 $b_1wW_ywb_2$ 是一条包含 G''所有顶点的弱 toll 游走，即 $V(G'') \subseteq I(b_1, b_2) \subseteq H(u_0, u_1)$，因为我们知道 $b_1, b_2 \in H(u_0, u_1)$。总之，$\{u_0, u_1\}$是 G 的弱 toll 凸包集，且 $\mathrm{w}th(G) = 2$。

← ←(3) 根据（2c），我们可以假设 M_1 和 M_2 都是团。对于 $i \in \{1,2\}$，如果 M_i 是完全图，
← ←则任取 M_i中的一个顶点作为 u_i；否则，选择 M_i 中的一个顶点作为 u_i，使其在→ ← ←M_i中有一个非邻点。根据引理 5.6，$V(G) \setminus (M_1 \cup M_2) \subset H(u_1, u_2)$。

注意，如果 M_1 不是完全图，也就是说，存在一对 u、$v \in V(M_1)$，使得 $uv \notin E(G)$，那么还存在另一对 u'、$v' \in V(M_1)$，使得 $u'v' \notin E(G)$ 且 $\{u,v\} \cap \{u,v'\} = \varnothing$。事实上，这成立是因为如果情况并非如此，那么 $V(M_1) \setminus \{u,v\}$ 将是一个团，它把u 与 v分隔开来，这与假设 M_1 是一个 mp-子图相矛盾。注意，这一事实意味着，如果 M_1 不是完全图，那么 M_i 中没有顶点是极点。

我们需要考虑四种情况。第一种情况中，u_1 和 u_2 是 G的极点。根据上述段落可知，M_1 和 M_2 是完全图。因此，对于 $i \in \{1,2\}$，它

←　　←　　←包含 $T[u_i] = M_i$。由于 u_1 和 u_2 是极点，因此 $M_1 \cup M_2$ 是 G 的最小弱 toll 凸包集，且大小为 $x_1 + x_2$。

在第二种情况下，u_1 是一个极点，但 u_2 不是。于是，存在顶点 $v_1, v_2 \in V(G)$，使得 $u_2 \in I(v_1, v_2)$。如果 M_2 是一个完全图，那么 $v_1, v_2 \notin V(M_2)$。由于 M_1 是一个完全图，v_1 和 v_2 中至多有一个属于 $V(M_1)$。如果 v_1 和 v_2 中有一个属于←　　←$V(M_1)$，那么我们可以假设该顶点是 u_1。由于 $V(G) \setminus (M_1 \cup M_2) \subset H(u_1, u_2)$，我们
←　　←有 $M_2 \subset H(u_1, u_2)$。由于 M_1 的所有顶点都是真孪生点，因此 G 的最小弱 toll 凸包集的基数为 $|M_1| + 1 = x_1 + 1$。如果 M_2 不是一个完全图，那么
→　　→　　←u_2 在 M_2中有一个非邻点。由于 $M_2 \subset H(u_1, u_2)$，我们有 $M_1 \cup \{u_2\}$ 是 G的一个弱 toll 凸包集。它是最小的，因为假设 u_1 是一个极点，意味着 M_1 的所有顶点也都是极点。

第三种情形中，u_2 是极点，但 u_1 不是。这与第二种情形类似，因此我们得出结论：$wth(G) = x_2 + 1$。

在最后一种情形中，u_1 和 u_2 都不是 G的极点。如果 M_1 不是完全图，
→　　←　　←那么 u_1 在 M_1中有一个非邻点。因此，由 $V(G) \setminus (M_1 \cup M_2) \subset H(u_1, u_2)$可知，← $M_1 \subset H(u_1, u_2)$。由于对 M_2也同样成立，因此只需考虑 M_1 和 M_2 中至少有一个是完全图的情形。接下来考虑 M_1 是完全图的情形。回顾一下，存在顶点 v_1、$v_2 \in V(G)$，使得 $u_1 \in I(v_1, v_2)$。由于 M_1 是完全图，←　　←
$v_1, v_2 \notin V(M_1)$。由于 M_2 是一个团，v_1 和 v_2 中至多有一个属于 M_2。如果 v_1 和 v_2
←　　←　　←中有一个属于 M_2，那么不妨设该顶点是 u_2。由于 $V(G) \setminus (M_1 \cup M_2) \subset H(u_1, u_2)$，我们得出 $\{u_1, u_2\}$ 是 G的弱 toll 凸包集。

□

推论 5.8. 给定一个阶为 n、边数为 m、最大度为 Δ 的一般图 G，$\mathrm{w}th(G)$ 可在 $O(n^2\Delta^2(n + m))$ 步内计算。

证明. 定理 5.7 的第 (1) 项和第 $(2a)$ 项讨论了素图的各种可能情况。每个非素图都属于第 $(2c)$ 项至第 $(2b)$ 项中的某一项，因为根据引理 5.5，每个可约图至少有两个极值 mp-子图。我们回顾一下，G 的 mp-子图集合可在 $O(nm)$ 步内计算 [15]。第 $(2c)$ 项和第 $(2b)$ 项可在 $O(nm)$ 步内轻松检验。在第 (3) 项中，我们需要检验一个顶点是否为极端。根据推论 2.2，这可在 $O(n^2\Delta^2(n + m))$ 步内完成。

□

6 结论

定理 4.1（iv）表明，不含孪生顶点的弱 toll 极值顶点集合是一个独立集。在接下来的结果中，我们将证明这一事实适用于大多数研究较为充分的图凸性。回顾以下凸性：

- 在 P_3-凸性中，如果对任意两个顶点 x、$y \in S$，它们的任意公共邻点 x 和 y 也都属于 S，则集合 S 是凸的。

- 在诱导的 P_3-凸性中，如果对任意两个不相邻顶点 x、$y \in S$，它们的任意公共邻点 x和 y 也都属于 S，则集合 S 是凸的。

- 在三角路径凸性中，如果对于任意两个顶点 x、$y \in S$，所有弦仅构成三角形且包含这两个顶点的任意 (x, y)-路径上的顶点都属于 S，那么集合 S 是凸的。

- 在 Δ-凸性中，如果对于任意两个相邻顶点 x、$y \in S$，x 和 y 的任意公共邻点也属于 S，那么集合 S 是凸的。

命题 6.1。设 G 是一个图。在测地、单形、 P_3、诱导 P_3、三角路径、收费和弱收费凸性中，若对于每个 $u \in S$，都有 $S \subseteq ext(G)$ 使得 $T(u) = \emptyset$，则 S 是一个独立集。

证明。反设 u、$v \in S$ 和 $uv \in E(G)$。不失一般性，设存在 $u' \in N[u] \setminus N[v]$。注意到 $u \in I(u', v)$，这与 u 是一个极点的假设矛盾。

□

最后，我们指出，上述结果并不总是在 m^3-凸性和Δ-凸性中成立。

参考文献

[1] M. Albenque, K. Knauer. 偏立方体中的凸性：包数，Discrete Math. 339 (2016) 866–876.[2] L. Alc´on, B. Be˘sar, T. Gologranc, M. Gutierrez, T. Kraner ˇSumenjak, I. Peterin, A. Tepeh, 收费凸性，European Journal of Combinatorics 46 (2015) 161–175.[3] R. T. Ara´ujo. 路径凸性与凸几何。理学硕士论文，Universidade Federal do Cear´a, 2013。葡萄牙语。[4] A. Cournier, M. Habib, 一种新的线性时间模分解算法，代数与编程中的树，CAAP，载于：计算机科学讲义，784 (1994) 68–84.[5] M. C. Dourado. 计算收费凸性中的包数。Annals of Operations Research 315 (2022) 121–140.[6] M. C. Dourado, M. Gutierrez, F. Protti, S. Tondato. 弱收费凸性与真区间图。已提交的手稿，2022。参见 https://arxiv.org/abs/2203.17056。[7] M. C. Dourado, F. Protti, J. L. Szwarcfiter，单声路径凸性相关的复杂性结果，离散应用数学 158 (2010) 1268-1274.[8] M. C. Dourado, F. Protti, J. L. Szwarcfiter, D. Rautenbach，关于图的测地数的一些评述，Discrete Math. 310 (2010) 83–837。

[9] F. Dragan, F. Nicolai, A. Brandst¨adt，凸性与无 HHD 图，SIAM 离散数学杂志 12 (1999) 119–135.[10] T. Dravec. 关于图的收费数。离散应用数学 321 (2022) 250–257。[11] P. Duchet，图中的凸集 II：极小路径凸性，组合理论杂志 B 辑 44 (1988), 307–316.[12] M. Farber, R. E. Jamison，图与超图中的凸性，SIAM J. Algebraic Discrete Mathematics 7 (1986) 433–444.[13] M. R. Garey, D. S. Johnson，计算机与难解性：NP 完全性理论指南，W. H. Freeman，纽约，1979.[14] M. Krein, D. Milman，正则凸集的极点，数学研究 9 (1940) 133–138.[15] H. G. Leimer，基于团分隔集的最优分解。Discrete Math. 113 (1993) 99–123.[16] R.M. McConnell, J. Spinrad，线性时间模分解与可比图的高效传递定向，ACM-SIAM 离散算法年度研讨会，SODA，(1994) 536–545.[17] S. Olariu，弱双极可定向图，Discrete Math. 74 (1989), 159–171.[18] I. M. Pelayo，图中的测地凸性，施普林格，纽约，2013.[19] M. L. J. van de Vel，凸结构理论，北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1993。