arXiv:2303.07444v1 [cs.DS] 13 Mar 2023

分数树独立数脆弱图上的独立装填问题多项式时间近似方案

Esther Galby
H汉堡工业大学，算法与复杂性研究所，德国汉堡
Andrea Munaro
D帕尔马大学数学、物理与计算机科学系，意大利帕尔马
ShizhouYang ！
贝尔法斯特女王大学数学与物理学院，英国贝尔法斯特

摘要
我们研究树宽脆弱性概念的一种推广，即树独立数脆弱性。具体而言，我们为分数树独立数脆弱的图类上的独立打包问题构造了多项式时间近似方案。我们的方法统一并扩展了若干已知的多项式时间近似方案，这些方案适用于看似毫不相关的图类，例如固定维数空间中胖对象的相交图类，以及真次闭类。我们还研究了相关概念——分层树独立数，它是分层树宽的一种推广。

2012年ACM学科分类 计算理论 → 近似算法分析

关键词与短语 独立打包、相交图、多项式时间近似方案、树独立数

致谢 感谢匿名审稿人提出宝贵意见。

1 引言

已知，许多涉及 d 维空间中几何对象集合的优化问题都存在多项式时间近似方案（PTAS）。可以说，这类问题中最早的例子，是在由单位圆盘或单位正方形组成的集合中，分别寻找两两不相交的圆盘或正方形的最大数量 [40]。这样的子集通常称为<款 id='3'>独立装填</款>。后来，这一结果被推广到由任意圆盘和正方形组成的集合，更一般地，还推广到了胖对象 [11, 32]。几何问题中近似方案如此丰富，原因在于可以运用移位与分层技术，将问题化简为可通过动态规划求解的小型子问题。事实上，图问题也存在同样的现象，Baker [4] 关于局部问题近似方案的开创性工作便是明证，例如在平面图上求解独立集，以及后来将其推广到无顶点子式图 [31]，再进一步推广到可嵌入有界亏格曲面且每条边的交叉数有界的图 [39]。相交图的概念使我们能够从几何领域转向图论领域。给定由$\mathbb{R}^d$中的几何对象构成的集合$\mathcal{O}$，我们可以考察它的相交图：其顶点是$\mathcal{O}$中的对象，并且当且仅当 $O_i \cap O_j \neq \varnothing$ 时，两个顶点 O_i，$O_j \in \mathcal{O}$ 相邻。因此，$\mathcal{O}$ 中的独立装填不过是相应相交图中的独立集。注意，单位圆盘或正方形的相交图并非小图封闭，因为其中包含任意大的团。我们关注的问题如下：

上述针对独立集、看似互不相关的多项式时间近似方案，是否存在某种潜在的图论原因？

我们对这个问题给出了肯定的回答，并由此得以进一步推广到一族独立装填问题。我们还指出，关于是否存在一种一般性概念，能够据此获得使用 Baker 技术的多项式时间近似方案这一类似问题，早已在 [39]中被提出。

Baker 分层技术依赖于一种适用于平面图的分解定理，可大致概括如下：给定一个平面图 G 和 $k \in \mathbb{N}$，可以将 G 的顶点集划分为 $k+1$ 个可能为空的集合，使得删除任一部分后，在 G中得到的图的树宽至多为 $O(k)$。此外，这种划分以及相应图中宽度至多为 $O(k)$ 的树分解，都可以在多项式时间内找到。此类表述通常称为顶点分解定理 (VDT) [50]。已知平面图 [4], 有界亏格图和无顶点子式图 [31], 以及 H-子式自由图 [19, 21]中存在 VDT。然而，一般而言，要求 VDT 存在过于苛刻；单位圆盘或正方形的相交图，以及更一般的胖对象的相交图便是如此。因此，可以通过两种自然方式放宽 VDT 的概念。首先，可以考虑对顶点集作近似划分，使一个顶点可以属于某个常数数量的集合。其次，可以寻找一个限制性弱于树宽的宽度参数。

Dvořák [26] 沿着第一个方向进行了研究，并引入了高效分数树宽脆弱性的概念。这里我们给出来自 [30]的一种等价表述。若存在一个函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 以及一种算法，使得对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 和 $G \in \mathcal{G}$，该算法能在 poly($|V(G)|$) 时间内返回一个子集集合 $X_1, X_2, \ldots, X_m \subseteq V(G)$，满足$\mathcal{G}$的每个顶点至多属于其中 m/k 个子集；此外，对于 $i = 1, \ldots, m$，该算法还会返回$G - X_i$ 的一个树分解，其宽度至多为 $f(k)$，则称图类$\mathcal{G}$ 是高效分数树宽脆弱的。已知有多个图类具有高效分数树宽脆弱性。事实上，在以下任一情况下，遗传类$\mathcal{G}$ 都具有高效分数树宽脆弱性（例如，参见 [30]）：$\mathcal{G}$ 具有次线性分隔集和有界最大度；$\mathcal{G}$ 是真子式闭的；或者$\mathcal{G}$ 由 $\mathbb{R}^d$ 中有界长宽比的凸对象的交图构成（对固定的 d而言），且 $\mathcal{G}$ 中的图具有有界团数。Dvořák [26] 证明，独立集问题在每个具有高效分数树宽脆弱性的图类上都存在多项式时间近似方案。后来， [28, 30] 将这一结果推广到了一个最大化问题框架，其中包括例如最大权距离-d 独立集、最大权诱导森林和最大权诱导匹配。然而，分数树宽脆弱性的概念未能涵盖单位圆盘图等图类，因为它意味着次线性分隔集的存在 [26]。

接下来，可以尝试沿着上述提到的第二个方向，进一步放宽高效分数脆弱性的概念：考虑比树宽更强大（即在更大的图类上有界）且在算法上有用的宽度参数。一个自然的候选是最近提出的树独立数 [16], ，这是一种以树分解为基础定义、比树宽更强大的宽度参数（见第3节）。树独立数有界性已展现出若干算法应用，其中最引人注目的是 Max Weight Independent Packing 的多项式时间可解性 [16]（定义见第5节）。Max Weight Independent Packing 是 Max Weight Independent Set 和 Max Weight Induced Matching 的共同推广，其距离-d 版本也具有这一性质；对于 d 偶数 [47]亦然。Dvořák 最近在一次报告中 [27], 提出研究高效分数树独立数脆弱性这一概念（简称树-α-脆弱性），并指出，利用 [29], 中的一个论证，可以证明 $\mathbb{R}^d$ 中的球与立方体的交图具有分数树-α-脆弱性。

与分数树宽脆弱性相关的一个成功概念是图的分层树宽 [23]。尽管目前还没有直接的算法应用，但它已被证明很有用，尤其是在着色问题的背景下（更多参考文献请见 [24] ）。这里只提及，具有有界分层树宽的图类包括平面图；更一般地，还包括无顶点子式图，以及可嵌入亏格有界曲面且每条边的交叉数有界的图等 [22]。可以证明，有界分层树宽蕴含分数树宽脆弱性（见第4节）。分层树宽还与局部树宽有关；这一概念最早由 Eppstein [31], 提出。事实上，对于真子式闭类，分层树宽有界当且仅当局部树宽有界（例如见 [22]）。

1.1 我们的结果

本文研究高效分数树-α-脆弱性的概念，并证明它能对我们提出的动机问题给出肯定回答，从而统一并扩展若干已知结果。我们的主要结果可概括如下，并将在第 4 节和第 5 节中证明。

▶**定理 1.** 最大权独立装填在每个高效分数树-α-脆弱图类上都存在一个多项式时间近似方案。此外，对于固定的 d，$\mathbb{R}^d$ 中胖对象的相交图类具有高效分数树-α-脆弱性[1]。

定理 1 表明，VDT 的双重放宽版本足以用于算法应用，而且足够一般，能够适用于若干有趣的图类。除非 FPT $=$ W[1]，否则无法将定理 1 改进为保证存在高效多项式时间近似方案。事实上，Marx[44] 证明，独立集问题在单位圆盘和单位正方形的相交图上仍是 W[1]-完全的。在扩展可处理图族时，近似性方面自然存在一种权衡：能够获得多项式时间近似方案的问题会更少。在本文的情形中，这一点体现在最小化问题反馈顶点集上：除非 P $=$ NP，否则该问题在 $\mathbb{R}^3$ [34] 中的单位球图上不存在多项式时间近似方案，但在 $\mathbb{R}^2$ [43]中的圆盘图上存在高效多项式时间近似方案。

在第4节中，我们还证明了分数树-α-脆弱图类具有有界的双团数，其中图 G 的双团数是满足以下条件的最大 $n \in \mathbb{N}$：完全二分图 $K_{n,\,n}$ 是 G的诱导子图。这尤其表明，分数树-α-脆弱性的概念不足以涵盖平面中的矩形相交图，这一点并不令人意外。在这些图上，独立集问题是否存在多项式时间近似方案仍是该领域的主要开放问题之一（例如参见 [36]）。我们还证明，不含大双团并不足以保证分数树-α-脆弱性：宽度为 n 的 n维网格是 $K_{2,\,3}$-free 的，但并非分数树-α-脆弱。

我们在第3节开始研究分数树-α-脆弱性，并引入分数树-α-脆弱图的一个子类，即具有有界分层树独立数的图类。我们通过放宽分层树宽这一成功概念，得到分层树独立数 这一概念，并证明，除了具有有界分层树宽的图之外，$\mathbb{R}^2$ 中的单位圆盘相交图类以及网格上水平部分有界的路径的相交图类，也具有有界分层树独立数。此外，我们注意到，对于小图封闭类，具有有界分层树独立数等价于具有有界分层树宽，从而推广了 [22]中关于有界分层树宽的一个刻画。

[1] 这里我们采用了一个略微推广 Chan [11] 所给定义的肥度定义（参见第4.1节）。

随后，我们考察分层树独立数在图幂下的表现。我们证明，具有有界分层树独立数的图的奇数次幂仍具有有界分层树独立数，而这一结论无法推广到偶数次幂。结合定理 1，可得以下结果；该结果适用于单位圆盘图等图类，且无法推广到奇数 $d \in \mathbb{N}$ （见第 5.2 节）。

▶**定理 2.** 对于固定的正偶整数 d，只要能够高效计算出可证明分层树独立数较小的树分解和分层，则在每个分层树独立数有界的图类上，最大权独立打包的距离-d 版本均存在多项式时间近似方案。

最后，我们表明，对于某些交图类，通过树独立数实现多项式时间近似方案的方法在运行时间方面具有竞争力。具体而言，在第 5.3 节中，我们为单位圆盘族、单位高度矩形以及网格上水平部分有界的路径的相交图，得到了最大权独立集的多项式时间近似方案，改进了下一节中分别提及的 [45, 12, 6]，的结果。

我们认为，分数树-α-脆弱这一概念可在设计多项式时间近似方案时有更多应用。事实上，若能获得类似于针对分数树宽脆弱类 [30, 28] 和树独立数有界类 [47] 的算法元定理，将会很有意义。尽管我们关注的是近似方案，但顺带指出，第 3 节中的观察结果可为单位圆盘图上的最大权独立打包距离-d 版本（ d 为偶数）导出一种次指数时间算法。最后要指出的是，我们针对几何对象相交图的所有多项式时间近似方案都不具备鲁棒性，也就是说，它们要求输入中包含几何实现。

1.2 其他相关工作

圆盘图。 最近，Lokshtanov 等人 [43] 建立了一个框架，用于为圆盘图上的一大类最小化问题（具体而言，即顶点删除问题）设计高效多项式时间近似方案，其中包括反馈顶点集和 d-有界度顶点删除问题。此前，该图类上零星已知的多项式时间近似方案仅适用于顶点覆盖 [32, 52], 支配集 [37], 独立集 [11, 32] 和最大团 [8]。定理 1 将若干最大化问题加入了这一列表（见第 5 节）。

单位圆盘图。 单位圆盘图可谓计算几何中研究最为广泛的图类之一，因为它们能够自然地对若干现实问题建模。人们尤其关注该图类上最大权独立集的近似算法（例如，参见 [41, 48, 51]）。据我们所知，目前已知最快的多项式时间近似方案是一种 $(1-1/k)$-近似算法，其运行时间为 $O(kn^{4^{\lceil 2(k-1)/\sqrt{3} \rceil}})$ [45]。我们还指出，最近已证明一种特殊类型的分解定理适用于单位圆盘图这一图类。收缩分解定理（CDT）具有如下形式：给定一个图 G，对于任意 $p \in \mathbb{N}$，都可以将 G 的边集划分为E_1、…、E_p，使得在 G 中分别收缩每个 E_i 中的边后，所得图的树宽至多为$f(p)$，其中 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$是某个函数。CDT 有助于设计高效的近似算法和参数化算法，并且已知适用于属数有界图[20] 和单位圆盘图 [5]等图类。由于这些图类都是高效分数树-α-脆弱的，因此，我们的结果可视为为它们提供了另一种类型的松弛分解定理。

单位高度矩形的相交图。正如 Agarwal 等人所观察到的， [1],这类图自然地成为地图标注问题的模型，其中标签的字体大小相同。在 [40], 的基础上，他们为该图类上的最大权独立集问题提出了一个 $(1-1/k)$-近似算法

其运行时间为 $O(n^{2k-1})$。Chan [12]提出了一个 $(1-1/k)$-近似算法，运行时间为 $O(n^k)$。

网格上的路径交图。Asinowski 等人 [3] 引入了网格路径顶点交图（简称*VPG* 图）这一图类。若存在网格$\mathcal{G}$ 上的路径集合$\mathcal{P}$，使$\mathcal{P}$ 与 $V(G)$ 一一对应，且当且仅当对应的路径相交时，G 中的两个顶点相邻，则图 G 是一个顶点相交路径图。不难看出，这一图类与广为人知的弦图类相同。如果$\mathcal{P}$ 中的每条路径至多有 k 弯折，即在网格点处转弯 90 度，则该图是一个 B_k-*VPG* 图。Golumbic 等人 [38] 引入了网格路径边交图（简称*EPG* 图），其定义与 VPG 类似，不同之处在于，当且仅当对应的路径共用一条网格边时，两个顶点才相邻。事实证明，每个图都是 EPG [38]，并且B_k-EPG 图的定义与B_k-VPG 图类似。针对 VPG 图和 EPG 图上独立集问题的近似算法已得到深入研究，尤其是在弯折数为较小常数时（例如，参见 [7, 35, 42, 46]）。独立集问题是否在B_1-VPG 图上存在多项式时间近似方案仍是一个开放问题 [46]。对于 EPG 图，Bessy 等人 [6] 证明，除非 P = NP，否则该问题在 B_1-EPG 图上不存在多项式时间近似方案，即使每条路径的垂直线段或水平线段长度至多为 1。另一方面，他们为 B_1-EPG 图上的独立集问题提供了一个多项式时间近似方案，其中每条路径的水平部分[2] 长度至多为常数 c，运行时间为 $O^*(n^{\frac{3c}{\varepsilon}})$。

—

2 预备知识

我们只考虑有限简单图。若 G' 是 G 的子图，且 G' 包含 G 中两个端点都在 $V(G')$ 中的所有边，则 G' 是 G 的诱导子图，我们记作$G'=G[V(G')]$。对于顶点 $v\in V(G)$ 和 $r\in\mathbb{N}$，r-闭邻域 $N_G^r[v]$ 是 G中与 v 距离至多为 r 的顶点集合。顶点 $v\in V(G)$ 的度 $d_G(v)$ 是 G中与 v 关联的边数。G 的最大度 $\Delta(G)$ 为 $\max\{d_G(v):v\in V\}$。给定图 $G=(V,E)$ 和 $V'\subseteq V$，从 G 中删除顶点集合 V' 的操作得到图 $G-V'=G[V\setminus V']$。若一个图不包含与集合 Z中的图同构的诱导子图，则称其为 Z-自由图。部大小分别为 r 和 s 的完全二分图记作$K_{r,s}$。图的独立集是由两两不相邻的顶点组成的集合。G 的独立集的最大尺寸记作 $\alpha(G)$。图的团是由两两相邻的顶点组成的集合。图的匹配是由两两不关联的边组成的集合。图中的诱导匹配是满足以下条件的匹配 M：M 中属于不同边的任意两个顶点在该图中均不相邻。

单位圆盘和矩形的相交图。现在我们说明如何对这些相交图的几何实现进行编码。半径相同为 $c\in\mathbb{R}$ 的单位圆盘集合，通过表示这些圆盘圆心的 $\mathbb{R}^2$ 中的点集进行编码。除非另有说明，我们所说的矩形均指 $\mathbb{R}^2$ 中的轴对齐闭矩形。按照矩形相交图研究中的惯例，我们假设矩形的顶点位于整数网格 $\mathcal{G}$ 上，并且每个矩形均由其顶点的坐标编码。给定由矩形族 $\mathcal{R}$ 构成的相交图 G，其网格表示是上述形式的一对 $(\mathcal{G},\mathcal{R})$。

VPG 图和 EPG 图。给定一个矩形网格 $\mathcal{G}$，其水平线称为行，垂直线称为列。对于一个 VPG（EPG）图 G，二元组 $\mathcal{R}=(\mathcal{G},\mathcal{P})$ 是

[2] 路径的水平部分是路径在 x轴上的投影所对应的区间。

图 G 的 VPG 表示（EPG 表示）。更一般地，图 G 的网格表示是一个三元组 R $=$(G, P x)，其中 $x \in \{e, v\}$，满足：若 $x = e$，则 (G, P) 是 G 的 EPG 表示；若 $x = v$，则 (G, P) 是 G 的 VPG 表示。注意，无论 $x = e$ （即 G 是 EPG 图）还是 $x = v$ （即 G 是 VPG 图），若 G 中两个顶点 $u, v \in V(G)$ 相邻，则 P_u 和 P_v 至少共享一个网格点。路径 $P \in$ P 的弯折点是对应于 P 弯折处的网格点，而 P 的线段则是构成 P 的多边形曲线中的垂直或水平线段。P 中的路径按如下方式编码。对于每个 $P \in$ P，我们用点 $\mathbb{R}^2$ 的一个序列 $s(P)$ 表示：$s(P) = (x_1, y_1), (x_2, y_2) \ldots, (x_{\ell_P}, y_{\ell_P})$，该序列由 P 的端点 (x_1, y_1) 和 (x_{ℓ_P}, y_{ℓ_P}) 以及 P 的所有弯折点组成，顺序按照沿 P 从 (x_1, y_1) 到 (x_{ℓ_P}, y_{ℓ_P}) 遍历时它们出现的先后排列。若 P 中每条路径的弯折数都是 $|V(G)|$ 的多项式，则该数据结构的尺寸是 $|V(G)|$ 的多项式。给定 $s(P)$，我们可以轻松确定路径 P 的水平部分 $h(P)$（即 P 在 x 轴上的投影）。请注意，尽管我们关于 VPG 图和 EPG 图的结果（定理 13 和 36）表述时假设弯折数为常数，但对于弯折数为 $|V(G)|$ 的多项式的情况仍然成立，只是多项式运行时间会更长。

多项式时间近似方案（PTAS）。针对最大化问题的多项式时间近似方案，是一种算法：它接收该问题的一个实例 I和一个参数 $\varepsilon > 0$，并在时间 $n^{O(f(1/\varepsilon))}$内生成一个与最优解相差不超过因子 $1 - \varepsilon$ 的解。运行时间为 $f(1/\varepsilon) \cdot n^{O(1)}$ 的多项式时间近似方案称为高效多项式时间近似方案（简称 EPTAS）。

3 分层与局部树独立数

本节的关键定义是树独立数和分层，下面回顾这些定义。图 G 的树分解是一个二元组 $\mathcal{T} = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$，其中 T是一棵树，其每个节点 t 都被赋予一个顶点子集 $X_t \subseteq V(G)$，称为一个袋，并满足以下条件：

(T1) G 的每个顶点都至少属于一个袋；(T2) 对于每个 $uv \in E(G)$，存在一个同时包含 u 和 v的袋；(T3) 对于每个 $u \in V(G)$，由 $\{t \in V(T) : u \in X_t\}$ 诱导的 T的子图 T_u 是连通的。T $=(T, \{X_t \in V(T))$ 的宽度是所有 $t \in V(T)$ 中 $|X_t| - 1$的最大值。图 G的树宽记作 tw(G)，是 G的树分解的最小宽度。T 的独立数记作 α(T)，其值为 $\max_{t \in V(T)} \alpha(G[X_t])$。图 G的树独立数记作 tree-α(G)，是 G的树分解的最小独立数。显然，对于任意图 G，tree-$\alpha(G) \leq$ tw(G) $+ 1$。另一方面，树独立数是比树宽更强大的宽度参数，因为存在树独立数有界而树宽无界的图类（例如，弦图的树独立数为 1 [16]）。

图 G 的分层是 $V(G)$ 的一个划分 $(V_0, V_1, \ldots, V_t)$，满足对于每条边 $vw \in E(G)$，若 $v \in V_i$ 且 $w \in V_j$，则 $|i - j| \leq 1$。每个集合 V_i 都是一层。图 G 的树分解 T $=(T, \{$ $X_t\}_{t \in V(T)})$ 的分层宽度，是满足以下条件的最小整数 ℓ：存在 G 的某个分层 $(V_0, V_1, \ldots)$，且对于每个袋 X_t 和每层 V_i，都有$|X_t \cap V_i| \leq \ell$。图 G 的分层树宽是其树分解的最小分层宽度。只有一层的分层表明，图 G 的分层树宽至多为 tw(G) $+ 1$。现在，我们为宽度参数树独立数引入分层树宽的类似概念。

▶ **定义 3**。图 G 的树分解 $T = (T, \{X_t\}_{t \in V(T))}$的分层独立数，是满足以下条件的最小整数 ℓ：存在 G的一个分层 $(V_0, V_1, \ldots)$，并且对于

每个袋 X_t 和层 V_i，都有 $\alpha(G[X_t \cap V_i]) \leq \ell$。图 G 的分层树独立数，是其树分解的最小分层独立数。

仅含一层的分层表明，G 的分层树独立数至多为树-$\alpha(G)$。此外，图的分层树独立数显然至多为其分层树宽。引理 10] 的证明稍作修改即可表明，分层树独立数有界的图具有 $O(\sqrt{n})$ 树独立数：

▶引理 4. </style>每个具有 k 分层树独立数的 n-顶点图，其树独立数至多为 $2\sqrt{kn}$。

给定一个宽度参数 p，若图类$\mathcal{G}$ 具有有界局部 p，则存在一个函数$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对于每个整数 $r \in \mathbb{N}$、图 $G \in \mathcal{G}$以及顶点 $v \in V(G)$，子图$G[N^r[v]]$的 p-宽度至多为 $f(r)$。文献 [23], 指出，若图类$\mathcal{G}$中的每个图的分层树宽至多为 ℓ，则$\mathcal{G}$ 具有有界局部树宽，其中 $f(r) = \ell(2r+1) - 1$。

▶**引理 5**。 如果图类 G 中的每个图的分层树独立数至多为 ℓ，那么 G 的局部树独立数有界，且 $f(r) = \ell(2r+1)$。

证明。设 $r \in \mathbb{N}$, $G \in$ G 且 $v \in V(G)$。令 $G' = G[N^r[v]]$。根据假设，G 有一个树分解 T $= (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$，其相对于某个分层 $(V_0, V_1, \ldots)$ 的分层独立数为 ℓ。假设 $v \in V_i$。那么，$V(G') \subseteq V_{i-r} \cup \cdots \cup V_{i+r}$，因此，对每个袋 X_t，都有 $\alpha(G'[X_t]) \leq \sum_{j=-r}^{r} \alpha($ $G[X_t \cap V_{i-j}]) \leq \ell(2r+1)$。这意味着树-$\alpha(G') \leq \ell(2r+1)$。◀

▶ **推论 6**。 K_n的分层树独立数，n 至少为 $n/5$。

证明。 反设 K_n的分层树独立数，n 小于 $n/5$。由于 $K_{n,\ n}$ 的直径为 2，引理 5 意味着 tree-$\alpha(K_{n,\ n}) < n$，这与 tree-$\alpha(K_{n,\ n}) = n$ [16]这一事实矛盾。◀

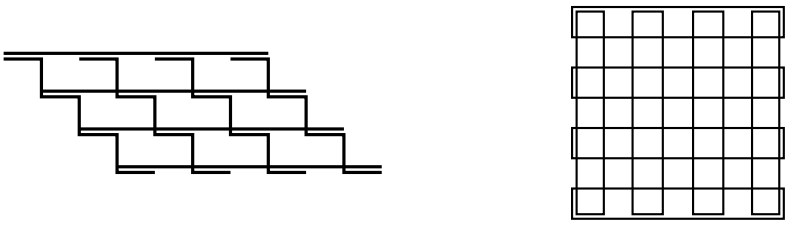


图 1 说明 VPG/EPG 图和矩形相交图的分层树独立数无界的示例：$K_{4,\ 4}$的 VPG/EPG 表示（左）以及矩形相交表示（右）。

▶**定理 7**。 对于小图封闭图类 G，以下条件等价：
1. 某个顶点[3] 图不属于 $\mathcal{G}$；2. $\mathcal{G}$ 具有有界的局部树独立数；3. $\mathcal{G}$ 具有线性的局部树独立数（即 $f(r)$ 关于 r呈线性）；4. $\mathcal{G}$ 具有有界的分层树独立数。

[3] 顶点图是指删除一个顶点后即可变为平面图的图。

证明。 (1) $\Longrightarrow$ (4): 根据 [23], , 若 $\mathcal{G}$ 不含某个顶点图作为子式，则 $\mathcal{G}$ 具有有界分层树宽，因此其分层树独立数也有界。
(4) $\Longrightarrow$ (3): 由引理 5 可知。(3) $\Longrightarrow$ (2): 根据定义可知。
(2) $\Longrightarrow$ (1): 设 G_n 是通过向 $n\times n$-网格图（两个 n-顶点路径的笛卡尔积）添加一个支配顶点 v_n 得到的图。注意，图类$\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$的局部树独立数无界，因为 v_n 是支配顶点，且网格图类的树独立数无界（因为它不是 (tw ω)-有界的，见引理 3. [16, 2]）。因此，如果 $\mathcal{G}$ 包含所有顶点图，那么它尤其包含$\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$，所以其局部树独立数无界。◀

定理 7 推出 [17] 中的以下结果。

▶**推论8。** 一个小图封闭类具有有界树独立数，当且仅当存在某个平面图不属于该图类。

证明。 设 $\mathcal{G}$ 是一个小图封闭图类。若 $\mathcal{G}$ 的树独立数有界，那么，由于墙类的树独立数无界，[14, 16], $\mathcal{G}$ 不含以平面图为子式的图。

反过来，我们声称，对于每个平面图 H，都存在一个整数 c，使得每个H-子式自由图 G 的树独立数至多为 c。设 H^+ 是由 H 添加一个支配顶点 v 得到的顶点图，设 G^+ 是由G 添加一个支配顶点 x得到的图。文献 [23] 证明了 G^+ 是 H^+-子式自由的。根据定理 7， G^+ 的分层树独立数至多为 ℓ，其中ℓ是某个固定整数。由于 G^+ 的半径为 1，因此至多使用三层。于是， G^+以及 G的树独立数至多为 3ℓ。◀

对于 $p \in \mathbb{N}$，图 G 的 p 次幂是图 G^p，其顶点集为 $V(G^p) = V(G)$，其中 $uv \in E(G^p)$ 当且仅当 u 和 v 在 G中的距离至多为 p 。Bonomo-Braberman 和 Gonzalez [9] 证明，有界树宽且有界度图的固定次幂具有有界树宽。更具体地，对于任意图 G 和 $p \geq 2$, $\mathrm{tw}(G^p) \leq (\mathrm{tw}(G) + 1)(\Delta(G) + 1)^{\lceil \frac{p}{2} \rceil} - 1$。根据 Dujmović 等人 [25]的研究，有界分层树宽且有界最大度图的幂具有有界分层树宽。之后，Dujmović 等人 [24],改进了上界，证明若 G 的分层树宽为 k，则 G^p 的分层树宽小于$2pk\Delta(G)^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor}$。我们证明，有界分层树独立数图的奇数次幂具有有界分层树独立数，而这一结果不能推广到偶数次幂。在此之前，我们需要给出来自 [47]的一个定义和一个结果。给定图 G以及由 G的子图组成的族 $\mathcal{H} = \{H_j\}_{j\in J}$，我们用 $G(\mathcal{H})$ 表示顶点集为J的图，其中两个不同元素 i、$j \in J$ 相邻，当且仅当 H_i 和 H_j 有公共顶点，或在 G 中存在一条连接它们的边。

▶ **引理 9** (Milanič 和 Rzążewski [47])。 设 G 为一个图， k 和 d 为正整数。对于 $v \in V(G)$，令 H_v 为由 G 中与 v的距离至多为 d 的顶点诱导的子图，并令 $\mathcal{H} = \{H_v\}_{v\in V(G)}$。那么 $G^{k+2d} = G^k(\mathcal{H})$。

▶定理 *10*。设 G 为一个图， d 为一个正整数。给定 G 的一个树分解 $\mathcal{T} = (T, \{X_t\}_{t\in V(T)})$ 和一个分层 $(V_1, \ldots, V_m)$，其中 G 满足：对于每个袋 X_t 和层 V_i， $\alpha(G[X_t \cap V_i]) \leq k$，则可以在 $O(|V(T)| \cdot (|V(G)| + |E(G)|))$ 时间内，计算出 G^{1+2d} 的一个树分解 $\mathcal{T}' = (T, \{X'_t\}_{t\in V(T)})$ 和一个分层 $(V'_1, \ldots, V'_{m_{1+2d}})$，其中 G^{1+2d}满足：对于每个袋 X'_t 和层 V'_i， $\alpha(G^{1+2d}[X'_t \cap V'_i]) \leq (1 + 4d)k$。特别地，如果 G

的分层树独立数为 k，那么 G^{1+2d} 的分层树独立数至多为$(1+4d)k$。

证明。设 $\mathrm{T} = (T, \{X_t\}_{t\in V(T)})$ 和 $(V_1, \ldots, V_m)$ 分别为给定的 G 的树分解和分层。对于每个顶点 $u \in V(G)$，令 $l(u)$ 为满足 $u \in V_i$ 的唯一索引 i。对于每个 $v \in V(G)$，令 H_v 为由 G 中距 v 至多为 d 的顶点所诱导的子图，并令 $\mathrm{H} = \{H_v\}_{v\in V(G)}$。令 $\mathrm{T}' = (T, \{X'_t\}_{t\in V(T)})$，其中对每个 $t \in V(T)$，$X'_t = \{v \in V(G) : V(H_v) \cap X_t \neq \varnothing\}$。根据引理 6，1]，$\mathrm{T}'$ 是 $G(\mathrm{H})$ 的树分解，因此根据引理 9，它也是 G^{1+2d} 的树分解。此外，对于每个 $v \in V(G)$，当且仅当 v 在 G 中距 X_t 至多为 d 时，$V(H_v) \cap X_t \neq \varnothing$；所有此类顶点 v 均可通过广度优先搜索在 $O(|V(G)| + |E(G)|)$ 时间内求得。因此，可以在 $O(|V(T)| \cdot (|V(G)| + |E(G)|)$ 时间内计算出 T'。现在，对每个 $1 \leq i \leq \mathrm{d}\frac{m}{1+2d}\mathrm{e}$，令 $V'_i = \bigcup_{(1+2d)(i-1)<j\leq(1+2d)i} V_j$。我们声称 $(V'_1, \ldots, V'\mathrm{d}\frac{m}{1+2d}\mathrm{e})$ 是 G^{1+2d} 的一个分层。显然，这些集合构成 $V(G^{1+2d})$ 的一个划分。此外，对于每条边 $uv \in E(G^{1+2d})$，有 $d_G(u, v) \leq 1 + 2d$，因此 $|l(i) - l(j)| \leq 1 + 2d$。由此，$u$ 和 v 要么属于同一层，要么属于连续的层。

现在我们证明，对于每个 $1 \leq i \leq \mathrm{d}\frac{m}{1+2d}\mathrm{e}$ 和 $t \in V(T)$，$\alpha(G^{1+2d}[V'_i \cap X'_t]) \leq (1+4d)k$。反设，对于上述某些 i 和 t，$\alpha(G^{1+2d}[V'_i \cap X'_t]) > (1 + 4d)k$。那么，存在一个独立集 $U = \{u_1, \ldots, u_{(1+4d)k+1}\}$，它是 G^{1+2d} 的子集，且包含于 $V'_i \cap X'_t$ 中。根据构造，对于每个 $1 \leq p \leq (1 + 4d)k + 1$，$V(H_{u_p}) \cap X_t \neq \varnothing$；并且，对于每个这样的 p，我们在 $V(H_{u_p}) \cap X_t$ 中任意选取一个顶点，并将其记为 $r(u_p, t)$。注意，对于 $p \neq q$，在 G 中，$r(u_p, t)$ 与 $r(u_q, t)$ 不同且不相邻；否则，H_{u_p} 和 H_{u_q} 要么共享一个顶点，要么在 G 中有一条边连接它们，由此可得 $u_pu_q \in G(\mathrm{H}) = G^{1+2d}$，这与 U 是 G^{1+2d} 的独立集这一事实矛盾。现在，根据构造，每个 $r(u_p, t)$ 都属于 $V(H_{u_p})$，因此在 G 中与 u_p 的距离至多为 d。此外，对于每个 $1 \leq p \leq (1+4d)k+1$，u_p 都属于 G^{1+2d} 的第 V'_i 层。因此，对于每个 $1 \leq p \leq (1 + 4d)k + 1$，$(1 + 2d)(i - 1) < l(u_p) \leq (1 + 2d)i$，且 $(1 + 2d)(i - 1) - d < l(r(u_p, t)) \leq (1 + 2d)i + d$。也就是说，每个 $r(u_p, t)$ 都属于 G 的 $1 + 4d$ 个连续层 $V_{(1+2d)(i-1)-d+1}, \ldots, V_{(1+2d)i+d}$ 中的一层。由于 $|U| > (1 + 4d)k$，至少有一个这样的层 V_r 包含形如 $r(u_p, t)$ 的 $k+1$ 个顶点。因此，$\alpha(G[V_r \cap X_t]) > k$，矛盾。◀

▶ **引理 11.** 固定一个偶数 $k \in \mathbb{N}$。存在一些图 G，其分层树独立数为 1，且 G^k 的分层树独立数可以任意大。

证明。 根据 [47, 命题 3.7]，的证明，对于每个图 H，都存在一个弦图G，使得 G^k 包含一个与 H 同构的诱导子图。取 $H = K_{5n,\ 5n}$ 以及这样一个 G。根据推论 6，G^k 的分层树独立数至少为 n；而树独立数$\alpha(G) = 1$，因此 G 的分层树独立数为 1。◀

3.1 分层树独立数有界的交图

本节将证明，$\mathbb{R}^2$ 中单位圆盘的相交图图类，以及网格上水平部分有界的路径的交图图类，其分层树独立数均有界。从证明中可以看出，用来证明这一点的树分解实际上都是路径分解。

▶**定理 12.** 设 G 是由一族 D 个 n 单位圆盘构成的相交图。可以在 $O(n)$ 时间内，计算出一个树分解 $T = (T, \{X_t\}_{t\in V(T)})$ 以及 G 的一个分层 $(V_1, V_2, \ldots)$，使得 $|V(T)| = O(n)$，并且对于每个袋 X_t 和每一层 V_i，$\alpha(G[X_t \cap V_i]) \leq 8$。特别地，$G$ 的分层树独立数至多为 8。

10 用于分数树独立数脆弱图上独立装填问题的多项式时间近似方案

证明. 不失一般性，设圆盘的相同半径为 $1/2$，集合 D 包含于第一象限，且 G 连通。因此，D 包含于一个边长为 $(m-1)\times(m-1)$、且 $m = O(n)$ 的正方形内。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $C_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : i-1 \le x \le i\}$ 和 $R_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : i-1 \le y \le i\}$ 分别为第 i 条垂直带和第 i 条横条带。对于每个 $v \in V(G)$，圆盘 D_v 至多与两条横条带相交。任取一个 j，使得横条带 R_j 与 D_v 相交的区域面积至少为 $\pi/8$，并令 $r(v) = j$。我们先构造 G 的一个树分解。考虑一条含有 $m+1$ 个顶点 $\{t_1, \ldots, t_{m+1}\}$ 的路径 T。令 $X_{t_i} = \{v \in V(G) : D_v \cap C_i \neq \varnothing\}$。显然，对于每个 $v \in V(G)$，存在 i 使得 $v \in X_{t_i}$。现在令 $uv \in E(G)$。于是存在一个点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$，它同时包含于 D_u 和 D_v 中，因此 $\{u, v\} \subseteq X_{t_{\lceil x \rceil}}$。最后，对于每个 $v \in V(G)$，与 D_v 相交的垂直带彼此连续，因此 T 中其袋包含 v 的节点构成一条子路径。这说明 $\mathsf{T} = (T, \{X_{t_i}\}_{1 \le i \le m})$ 是 G的一个树分解。显然，这个树分解可以在线性时间内计算得到。现在我们按如下方式构造 G 的一个分层。对于每个 $j \in \mathbb{N}$，令 $V_j = \{v \in V(G) : r(v) = j\}$。显然，$(V_1, \ldots, V_{m+1})$ 是 $V(G)$ 的一个划分。注意，对于满足 $|i-j| \ge 2$的 i和 j，若 $u \in V_i$且 $v \in V_j$，则 $D_u \cap D_v = \varnothing$，因此 $uv \notin E(G)$。显然，分层 $(V_1, \ldots, V_{m+1})$ 可以在线性时间内计算得到。

考虑上文定义的任意袋 X_{t_i} 和层 V_j。对于任意 $v \in X_{t_i} \cap V_j$，我们有 $r(v) = j$ 和 $D_v \cap C_i \neq \varnothing$。于是，横条带 R_j 与 D_v 相交的区域面积至少为 $\pi/8$，并且 D_v 至多与 C_{i-1} 和 C_{i+1}中的一个相交。因此，D_v与 $R_j \cap (C_{i-1} \cup C_i \cup C_{i+1})$相交的区域面积至少为 $\pi/8$。现在，如果 $X_{t_i} \cap V_j$ 中的两个顶点在 G中不相邻，那么对应的单位圆盘互不相交。由于 $R_j \cap (C_{i-1} \cup C_i \cup C_{i+1})$的面积为 3，$G[X_{t_i} \cap V_j]$中两两不相邻的顶点至多有 $\frac{3}{\pi/8} \le 8$ 个，证毕。◀

▶ 定理 *13.* 设 G 是一个具有 n 个顶点的图，并配有网格表示 $R = (G, P\ x)$，其中 P 中每条路径的水平部分长度至多为 $\ell - 1$，$\ell \ge 1$为某个固定值，且弯折数为常数。可以在 $O(n^2)$ 时间内计算出树分解 $T = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ 和 G 的一个分层 $(V_1, V_2 \ldots)$，使得 $|V(T)| = O(n^2)$，并且对于每个袋 X_t 和层 V_i，$\alpha(G[X_t \cap V_i]) \le 4\ell - 1$。特别地，$G$ 的分层树独立数至多为 $4\ell - 1$。

证明。我们不妨假设 G 是连通的。用 P_v 表示与顶点 $v \in V(G)$ 对应的路径。对于每个 $u \in V(G)$ 和 $v \in N_G(u)$，我们在线性时间内任意找出一个同时属于 P_u 和 P_v 的网格点（因为 $uv \in E(G)$，这样的网格点必然存在）。令 p_{uv} 为该网格点在 y轴上的投影。令 T 为垂直路径，其节点是形如 p_{uv}的网格点。显然，$|V(T)| = O(n^2)$。按对应网格点的 y坐标递减顺序排列 T 的节点。对于每个 $t \in V(T)$，令 $X'_t = \{u \in V(G) : p_{uv} = t$ 对于某个 $v \in V(G)\}$。最后，我们按如下方式更新 $\{X'_t\}_{t \in V(T)}$。对于每个 $v \in V(G)$，分别令 $t_v^{\min}$ 和 $t_v^{\max}$为 T 中最小和最大的节点，使得对应的袋分别包含 v。然后，我们将 v 添加到对应于 $t_v^{\min}$和 $t_v^{\max}$之间各节点的所有袋中。令 $\{X_t\}_{t \in V(T)}$为由此得到的袋族，并令 $\mathsf{T} = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$。容易看出，T 可在线性时间内构造。我们证明 T 是 G的树分解。由于 G 没有孤立顶点，对于每个 $u \in V(G)$，存在 $t \in V(T)$，使得对于某个 $v \in V(G)$ 有 $t = p_{uv}$。因此，$u \in X_t$ 且 (T1) 成立。若 $uv \in E(G)$，则 P_u 和 P_v 至少共享 G 中的一个网格点，因此存在 $t \in V(T)$ 使得 $t = p_{uv}$，且 (T2) 成立。最后，根据构造，集合 $\{t \in V(T) : u \in X_t\}$ 诱导出 T的一条子路径，因此 (T3) 成立。令$C_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2(i-1)\ell \le x \le 2i\ell\}$ 为第 i 个垂直带。对于每个 $v \in V(G)$，固定一个

任意的 j，使得垂直带 C_j 与 P_v 相交，并令 $r(v) = j$。现在我们按如下方式构造 G 的分层。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，令 $V_i = \{v \in V(G) : r(v) = i\}$。显然，$(V_1, V_2, \ldots)$ 是 $V(G)$ 的一个划分。注意，对于满足 $|i-j| \geq 2$的 i 和 j，若 $u \in V_i$ 且 $v \in V_j$，则$P_u \cap P_v = \varnothing$，因此 $uv \notin E(G)$。给定 G 的表示后，可以在线性时间内显然地计算出该分层。

考虑上文定义的任意袋 X_t 和层 V_i。现在我们证明 $\alpha(G[X_t] \cap V_i) \leq 4\ell - 1$。令 I 为 $G[X_t \cap V_i]$的一个独立集。注意，根据构造，对于每个$v \in I \subseteq X_t \cap V_i$，路径 P_v 都包含一个网格点，该点位于 $\mathcal{G}$ 中索引为 t 的行与索引为 p的列的交集处，其中 $2(i-1)\ell - (\ell-1) \leq p \leq 2i\ell + (\ell-1)$。由于 I 是一个独立集，索引为 t 的行上的每个网格点至多属于一个满足 $v \in I$ 的 P_v；又由于 $\mathcal{G}$ 中有若干列，其索引为 $2(i-1)\ell - (\ell-1) \leq p \leq 2i\ell + (\ell-1)$，因此我们得出 $|I| \leq 4\ell - 1$。◀

4 分数树-α脆弱性

设 p 是 $\{\text{tw}, \text{tree-}\alpha\}$ 中的一个宽度参数。分数树宽脆弱性最初在 [26] 中定义。这里我们给出一个来自 [28], 的等价定义，该定义在 [27] 中被明确扩展到 tree-α 的情形。

▶ **定义14**。对于 $\beta \leq 1$，图 G 的一个 β-一般覆盖是由 $V(G)$ 的子集组成的多重集 $\mathcal{C}$，使得每个顶点至少属于覆盖中的 $\beta|\mathcal{C}|$ 个元素。该覆盖的 p-宽度为 $\max_{C \in \mathcal{C}} p(G[C])$。

对于参数 p，如果存在一个函数$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得对于每个 $r \in \mathbb{N}$，每个图类 $\mathcal{G}$ 中的 $G \in$ 都有一个 $(1-1/r)$- 一般覆盖，且其 p- 宽度至多为 $f(r)$，则称图类 $\mathcal{G}$ 是分数 p- 脆弱的。

如果存在一种算法，使其对于每个 $r \in \mathbb{N}$ 和图类 $\mathcal{G}$ 中的 $G \in$，都能在多项式$(|V(G)|)$ 时间内返回一个 $1-1/r$)-一般覆盖 $\mathcal{C}$ of$G$，并且对于 $\mathcal{C}$ 中的每个 $C \in$，返回 $G[C]$ 的一个树分解，其宽度（若 $p =$tw）或独立数（若 $p =$ 树-α）至多为 $f(r)$，其中某个函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，则称分数 p-脆弱图类 $\mathcal{G}$ 是高效分数 p-脆弱的。

请注意，得益于 [15]，树独立数有界类能够高效地实现分数树-α-脆弱。因此，高效分数树-α-脆弱图类的族包含两个互不可比的族：树独立数有界图类和高效分数树宽脆弱图类（要看出它们互不可比，可考察弦图和平面图）。现在我们再确定一个子族：

▶ 引理 *15.* 设 $\ell \in \mathbb{N}$，并令 G 为一个图。对于每个 $r \in \mathbb{N}$，给定图 G 的一个树分解 $T = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ 以及一个分层 $(V_0, V_1, \ldots)$，使得对于每个袋 X_t 和层 V_i，$\alpha(G[X_t \cap V_i]) \leq \ell$，可以在 $O(|V(G)|)$ 时间内计算出图 G 的一个 $(1-1/r)$- 一般覆盖 $\mathcal{C}$，并为每个 $C \in \mathcal{C}$ 计算出图 $G[C]$ 的一个树分解，其树独立数至多为 $\ell(r-1)$。特别地，如果图类 $\mathcal{G}$ 中每个图的分层树独立数至多为 ℓ，那么 $\mathcal{G}$ 是分数树-α-脆弱的，且 $f(r) = \ell(r-1)$。

证明。固定 $r \in \mathbb{N}$。设 $\mathsf{T} = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ 和 $(V_0, V_1, \ldots)$ 分别为给定的 G 的树分解和分层。对于每个 $m \in \{0, \ldots, r-1\}$，令 $C_m = \bigcup_{i \not\equiv m \pmod r} V_i$。我们声称，$\mathsf{C} = \{C_m : 0 \leq m \leq r-1\}$ 是 G 的一个 $(1-1/r)$-一般覆盖，其树独立数至多为 $\ell(r-1)$。首先注意，每个 $v \in V(G)$ 恰好不被 C 中的一个元素覆盖，因此它属于 $r-1 = (1-1/r)|\mathsf{C}|$ 个元素。现在令 $C \in \mathsf{C}$。$G[C]$ 的每个连通分量 K 都包含在至多 $r-1$ 个（连续的）层中，因此，由于对于每个袋 X_t 和层 V_i，$\alpha(G[X_t \cap V_i]) \leq \ell$，将 T 中的袋限制到 $V(K)$，可得到一个

K 的树分解，其树独立数至多为 $\ell(r-1)$。然后，我们在线性时间内合并 $G[C]$ 各连通分量的树分解，得到 $G[C]$ 的一个树分解，其树独立数至多为 $\ell(r-1)$。◀

注意，引理 15 的同一论证表明，若图类 $\mathcal{G}$ 中的每个图都具有有界分层树宽，则$\mathcal{G}$ 是分数树宽脆弱的。下面的结果意味着，若一个图类是分数树-α-脆弱的，则其双团数有界。

▶ **定理 16.** 对于任意函数 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 和整数 $r>2$，存在 n，使得 $K_{n,n}$ 不存在树独立数小于 $f(r)$的$(1-1/r)$-一般覆盖。因此，图类 $\{K_{n,n} : n\in\mathbb{N}\}$ 不是分数树-α-脆弱的。

证明。任取 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 和 $r>2$。考虑 $K_{n,n}$ 的一个副本 G，其中 $n>f(r)/(1-2/r)$。设 C 是 G 的一个 $(1-1/r)$-一般覆盖。于是，G 的每个顶点都至少属于 C 的 $(1-1/r)|\mathsf{C}|$ 个元素，因此存在一个尺寸至少为 $2n(1-1/r)$ 的 $C\in\mathsf{C}$。设 A 和 B 是 G 的两个二分部。于是，$|A\cap C|\geq|C|-|B|\geq 2n(1-1/r)-n=n(1-2/r)>f(r)$，类似地，$|B\cap C|>f(r)$。因此，$G[C]$ 包含 $K_{f(r),f(r)}$ 作为诱导子图；并且由于树-$\alpha(K_{f(r),f(r)})=f(r)$ [16], 树-$\alpha(G[C])\geq f(r)$。◀

然而，以下结果表明，双团数较小并不能保证分数树-α-脆弱性。

▶**定理 17.** $K_{2,3}$-自由图类并非分数树-α-脆弱。

证明。令 G_n 为宽度为 n 的 n 维网格图，即其顶点集为 $V(G_n)=[n]^n=\{(a_1,\ldots,a_n)\colon 1\leq a_1,\ldots,a_n\leq n\}$，其中两个顶点 $(a_1,\ldots,a_n)$ 和 $(b_1,\ldots,b_n)$ 相邻，当且仅当 $\sum_{1\leq i\leq n}|a_i-b_i|=1$。不难看出，对每个 $n\in\mathbb{N}$，G_n 都是 $K_{2,3}$-自由的。我们证明图类 $\{G_n : n\in\mathbb{N}\}$ 并非分数树-α-脆弱。

任取 $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 和 $r>2$。对于这样的选择，取 $n\in\mathbb{N}$，使得 $\frac{r-4}{2r}n+1\geq R(3,f(r))$，其中 $R(3,s)$ 表示满足以下条件的最小整数 m：每个含有 m 个顶点的图要么含有一个尺寸为 3 的团，要么含有一个尺寸为 s 的独立集。现在我们证明，G_n 的每个 $(1-1/r)$-一般覆盖的树独立数至少为 $f(r)$。设 C 是 G_n 的一个 $(1-1/r)$-一般覆盖。那么，G_n 的每个顶点都属于 C 中至少 $(1-1/r)|\mathsf{C}|$ 个元素，因此存在一个 $C\in\mathsf{C}$，其中包含 G_n 中至少 $(1-1/r)|V(G_n)|=(1-1/r)n^n$ 个顶点。固定这样一个 C，并令 G 为 G_n 中由 C 诱导的子图。我们断言，树-$\alpha(G)\geq f(r)$。

首先注意，对每个 $v\in V(G_n)$，$n\leq d_{G_n}(v)\leq 2n$。因此，$2|E(G_n)|=\sum_{v\in V(G_n)}d_{G_n}(v)\geq n\cdot n^n$。现在考虑从 G_n 中删除顶点集 C 后得到的图 G'。显然，G' 至多有 n^n/r 个顶点。由于从 G_n中删除一个顶点，所得图的边数至多减少 $2n$，因此我们有 $|E(G)|\geq|E(G_n)|-2n|V(G')|$，由此可得 $\sum_{v\in V(G)}d_G(v)\geq n\cdot n^n-2\cdot 2n\cdot n^n/r=n\cdot n^n(1-4/r)$。因此，$G$ 的平均度至少为 $n(1-4/r)$，所以 $\mathsf{tw}(G)\geq\frac{r-4}{2r}n$，例如可由 [13, 推论 1]得到。这意味着 G 的每个树分解都有一个尺寸至少为 $\frac{r-4}{2r}n+1\geq R(3,f(r))$ 的袋；又由于G是无三角形的，因此 $\mathsf{tree}\text{-}\alpha(G)\geq f(r)$。◀

4.1 胖对象的交图

本节将证明，$\mathbb{R}^d$ 中胖对象的相交图图类具有高效的分数树-α-脆弱性。设 $d\geq 2$ 为一个固定整数。尺寸为 r 的盒是 $\mathbb{R}^d$ 中的边长为 r的轴对齐超立方体。对象 O 在 $\mathbb{R}^d$中的尺寸记为 $s(O)$，定义为其最小包围超立方体的边长。除非另有说明，下文讨论的所有盒均为轴对齐的。

Chan [11] 考虑了以下肥度定义：若 $\mathbb{R}^d$ 中的一组对象满足以下条件，则称其为胖的：对于任意 r 和尺寸为r 的盒 R，我们可以在 $\mathbb{R}^d$ 中选取 c 个点，使得每个与 R 相交且尺寸至少为 r 的对象都包含至少一个所选的点。Chan 还指出，具有有界长宽比的球或盒子集合是胖的（回顾一下，盒的长宽比是其最长边与最短边之比）。我们将这一肥度定义稍作推广如下。

▶**定义 18**。 $\mathbb{R}^d$ 中的对象集合是 c-胖的，如果对于任意 r 和任意尺寸为 r 的闭盒R，对于每个与 R 相交且尺寸至少为 r的两两不相交对象子集 P，我们都能在 $\mathbb{R}^d$ 中选取 c 个点，使得 P 中的每个对象至少包含一个所选点。

▶ 备注 19。处理 c-胖对象集合时，我们假设某些合理的操作可以在常数时间内完成：确定对象的中心和尺寸、判断两个对象是否相交，以及构造该集合的几何实现。

为完整起见，我们现在说明，有界纵横比的球和盒子集合是 c-胖的。下面的引理很有用。对于可测集 $A \subseteq \mathbb{R}^d$，我们用 vol(A) 表示 A的勒贝格测度。

▶ **引理 20**。 设 O 是 $\mathbb{R}^d$中的有限可测对象集合。令 $r_0 = \min_{O \in \mathcal{O}} s(O)$。假设存在 $0 < a \leq 1$，使得对于每个对象 $O \in O$、每个点 $x \in O$以及每个满足 $r_0 \leq r \leq s(O)$的 r，距离 r 以内且以 x 为中心的点集 $O' \subseteq O$ 满足 $\mathrm{vol}(O') \geq ar^d$。那么，$O$ 是 $\frac{3^d}{a}$-胖的。

证明。 固定 r 和一个尺寸为 r 的闭盒 R。考虑边长为 $3r$ 且中心与 R相同的盒子 R'。$\mathcal{O}$ 中任何尺寸至少为 r 且与 R 相交的对象，都必须与 R' 相交于一个体积至少为 ar^d的集合。然而，$\mathrm{vol}(R') = (3r)^d$，因此，$\mathcal{O}$ 中与 R相交的两两不相交对象至多有 $\frac{(3r)^d}{ar^d} = \frac{3^d}{a}$个。◀

由于任何尺寸为 r 的球的体积至少为 $r^d/d!$，因此 $\mathbb{R}^d$ 中的球集合是 $3^d d!$-胖的。此外，由于边长为 l 的 d维盒子的主对角线长度为 $l\sqrt{d}$，长宽比至多为 t 的尺寸为 r 的盒子的体积至少为 $(\frac{r}{t\sqrt{d}})^d$，因此，$\mathbb{R}^d$ 中长宽比至多为 t 的盒子集合（不一定轴对齐）是 $(3t\sqrt{d})^d$-胖的。

▶定理 *21.* 设 O 是 $\mathbb{R}^d$ 中对象的 c-胖集合，且 G 是其相交图。对于每个 $r_0 > 1$，设 $f(r_0) = 2\left\lceil \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{r_0}\right)^{\frac{1}{d}}} \right\rceil$。那么，我们可以在线性时间内计算出 G 的一个尺寸至多为 $(f(r_0)/2-1)^d$ 的 $(1-1/r_0)$-一般覆盖 $\mathcal{C}$。此外，对于每个 $C \in \mathcal{C}$，我们可以在线性时间内计算出 $G[C]$ 的树分解 $T = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$，满足$|V(T)| \leq |V(G)| + 1$，且 $\alpha(T) \leq cf(r_0)^{2d}$。

在证明定理 21 之前，我们先概述一下圆盘图情形下的思路 $\mathbb{R}^2$。首先，假设我们要为一个单位圆盘图寻找一个树独立数有界的 $(1-1/r_0)$-一般覆盖$\mathcal{C}$。我们可以从平面中的一个合适网格出发，按如下方式构造覆盖中的每个元素。假设$\mathcal{H}(y)$是 $\mathbb{R}^2$中的一个网格，由某个 $y \in \mathbb{R}^2$索引，将平面划分为一组边长为 $2r_0$的正方形$\mathcal{B}$。我们首先舍弃所有与$\mathcal{H}(y)$相交的圆盘。与剩余圆盘对应的顶点将构成覆盖中的元素 $C(y)$。我们可以按如下方式为由 $C(y)$诱导的子图构造树分解：为每个正方形 $B \in \mathcal{B}$ 添加一个节点，并为该节点关联一个袋，其中恰好包含对应圆盘位于 B中的顶点。然后，我们适当地连接这些节点以形成一棵树。由此得到的树分解将

具有较小的树独立数，因为在每个正方形 B内，至多有 $4r_0^2$个两两不相交的圆盘。通过向量 y在平面上平移网格$\mathcal{H}(y)$，并按上述方式进行操作，可以确保单位圆盘图的每个顶点都被足够多个元素覆盖。

如果圆盘的半径各不相同，情况就更具挑战性。当大圆盘和小圆盘同时存在时，如果网格过于密集（即将平面划分为非常小的正方形），那么大圆盘将不会属于覆盖中的大多数元素；而如果网格过于稀疏（即将平面划分为非常大的正方形），那么每个正方形内可能会有过多两两不相交的小圆盘。为了解决这个问题，我们采用了 [29, 定理 4]中的一个思路。具体而言，我们根据圆盘的半径将它们分为不同的秩，半径越大，秩越小。稀疏网格将“覆盖”大圆盘，而密集网格将“覆盖”小圆盘。对于秩的每个可能取值 i，我们都将考虑秩为 i 的网格；这些网格以固定的秩 0 网格（最稀疏的网格）为基础，按照类似四叉树的方式生成，并且我们将舍弃与秩为 i 的网格相交的秩为 i 的圆盘。与剩余圆盘对应的顶点将构成覆盖中的一个元素 C（y）。接着，我们将为秩为 i 的网格所诱导的每个正方形 B_i 添加一个节点，并将一个袋关联到该节点，其中恰好包含对应圆盘与 B_i 相交且秩至多为 i的顶点。最后，对于每个对应秩为 i 的正方形 B_i的节点 t_i，如果 t_j 对应于秩为 j 的正方形 B_j，且 $j > i$，使得 B_j 包含于 B_i，我们就添加边 t_it_j。和之前一样，我们将通过 y 在平面上平移网格，以确保确实得到一个一般覆盖。

定理 21 的证明。在此证明中，$[n]$ 表示集合 $\{0, 1, \ldots, n\}$。任取一个$r_0 > 1$。为简化记号，下文将 $r := f(r_0) = 2\left\lceil \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{r_0}\right)^{\frac{1}{d}}} \right\rceil$，并将与顶点 $v \in V(G)$ 对应的对象记为~~O_v。~~通过适当缩放，可以假设集合 $\mathcal{O}$ 中的每个对象的尺寸至多为 1。对于每个 $v \in V(G)$，将对象 O_v 的秩定义为 $\mathrm{rk}(O_v) = \mathrm{blog}_r^1{}^{s}(O_v)\mathrm{c}$。令 $k_0 = \max_{v \in V(G)} \mathrm{rk}(O_v)$。对于每个 $0 \le i \le k_0$、$1 \le j \le d$ 以及 $y = (y_1, \ldots, y_d) \in [\frac{r}{2} - 1]^d$，令 $\mathrm{H}_j^i(y)$ 表示 d 维实数空间 $\mathbb{R}^d$ 中满足以下条件的点的集合：其第 j 个坐标等于 $m_j(\frac{1}{r})^{i-1} + y_j \sum_{k=i}^{k_0+1} (\frac{1}{r})^k$，其中$m_j \in \mathbb{Z}$，并令 $\mathrm{H}^i(y) = \bigcup_{1 \le j \le d} \mathrm{H}_j^i(y)$。此外，令 $V^i = \{v \in V(G) : \mathrm{rk}(O_v) = i\}$,$C^i(y) = \{v \in V^i : O_v \cap \mathrm{H}^i(y) = \varnothing\}$，以及 $C(y) = \bigcup_{0 \le i \le k_0} C^i(y)$。

▷命题 22. $\mathsf{C} = \{C(y) : y \in [\frac{r}{2} - 1]^d\}$ 是 G 的一个 $(1 - 1/r_0)$-一般覆盖，其尺寸为 $(f(r_0)/2 - 1)^d$。证明. 对每个 $1 \le j \le d$，令 e_j 为 $\mathbb{R}^d$ 中第 j 个坐标为 1 的单位向量。令$v \in V(G)$，并令 $i = \mathrm{rk}(O_v)$。那么，$v \in C(y)$ 对某个 $y \in [\frac{r}{2} - 1]^d$ 成立，当且仅当 O_v 不与 $\mathrm{H}^i(y)$ 相交；而后者成立，当且仅当对任意$1 \le j \le d$，O_v 不与 $\mathrm{H}_j^i(y)$ 相交。注意，$\mathrm{H}_j^i(y)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一组超平面，它们垂直于第 j 个坐标轴，且两两之间的距离至少为 $(\frac{1}{r})^{i-1} = r(\frac{1}{r})^i$。此外，对任意 $1 \le j \le d - 1$，$\mathrm{H}_j^i(y + e_j)$ 可由 $\mathrm{H}_j^i(y)$ 沿第 j 个坐标轴平移 $\sum_{k=i}^{k_0+1} (\frac{1}{r})^k$ 得到。容易看出，由于 $r \ge 2$，我们有 $(\frac{1}{r})^i < \sum_{k=i}^{k_0+1} (\frac{1}{r})^k < 2(\frac{1}{r})^i$。另一方面，由于 $\mathrm{rk}(O_v) = i$，根据秩的定义可知，O_v 可以被一个尺寸为 $(\frac{1}{r})^i$ 的盒子所包含。现在来计算满足 O_v 不与 $\mathrm{H}^i(y)$ 相交的点 $y \in [\frac{r}{2} - 1]^d$ 的数量。固定 $1 \le j \le d$ 后，前述观察表明，至多有一个 y_j 的取值使得存在一个点 $y \in [\frac{r}{2} - 1]^d$ 满足 $\mathrm{H}_j^i(y) \cap O_v \ne \varnothing$，因此至少有 $\frac{r}{2} - 1$ 个y_j 的取值使得 y 满足 $\mathrm{H}_j^i(y) \cap O_v = \varnothing$。因此，至少有 $(\frac{r}{2} - 1)^d$ 个点 $y \in [\frac{r}{2} - 1]^d$ 满足 $\mathrm{H}^i(y)$ 不与 O_v 相交。由于集合 $[\frac{r}{2} - 1]^d$ 的尺寸为 $(\frac{r}{2})^d$，C 中包含 v 的元素比例至少为 $(\frac{r}{2}-1)^d(\frac{r}{2})^d = (1 - \frac{2}{r})^d \ge ((1 - \frac{-1}{r_0})^{\frac{1}{d}})^d = 1 - \frac{1}{r_0}$，证毕。◁

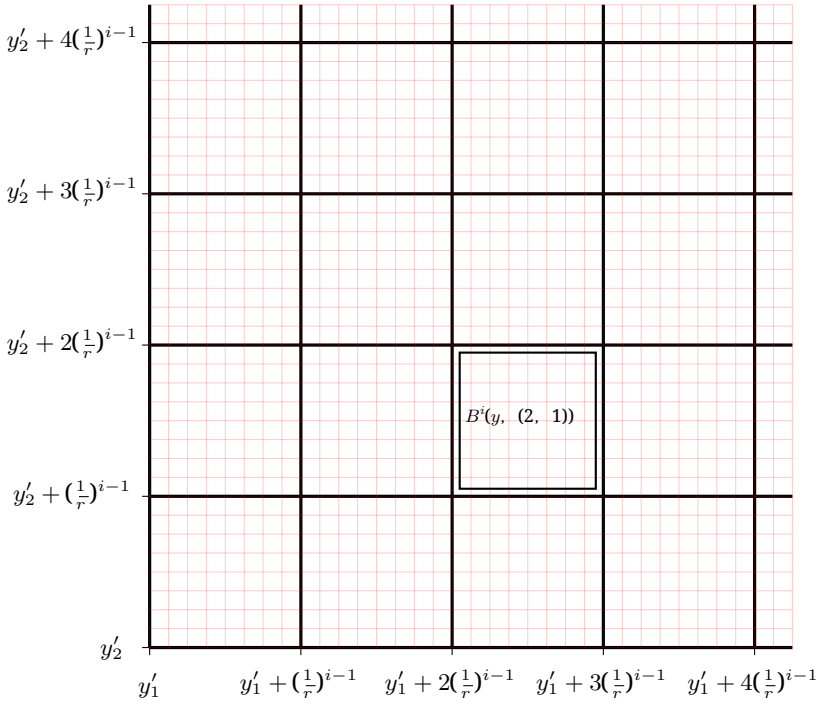


图2 $\mathcal{H}^i(y)$（黑色）和 $\mathcal{H}^{i+1}(y)$（红色），在二维中，其中 $y'_j = y_j \sum_{k=i}^{k_0+1} (\frac{1}{r})^k$。

注意，对于固定的 i 和上述 y，超平面集合 $\mathcal{H}^i(y)$ 将空间划分为尺寸为 $(\frac{1}{r})^{i-1}$ 的盒子。现在我们来考察这些盒子。对于向量 $m = (m_1, \ldots, m_d) \in \mathbb{Z}^d$，考虑盒子 $B^i(y, m) = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : m_j (\frac{1}{r})^{i-1} + y_j \sum_{k=i}^{k_0+1} (\frac{1}{r})^k < x_j < (m_j + 1)(\frac{1}{r})^{i-1} + y_j \sum_{k=i}^{k_0+1} (\frac{1}{r})^k$，对每个 $1 \leq j \leq d\}$。

▷ 断言23. 对于固定的 $y \in [\frac{r}{2} - 1]^d$ 以及任意的 $0 \leq i' < i \leq k_0$，$\mathcal{H}^{i'}(y) \subseteq \mathcal{H}^i(y)$。此外，对于任意的 $m \in \mathbb{Z}^d$，盒 $B^i(y, m)$ 完全包含在一个形式为 $B^{i'}(y, m')$ 的盒中，且恰有一个向量 $m' \in \mathbb{Z}^d$ 满足这一条件。

证明。 设 $y = (y_1, \ldots, y_d)$。设 $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathcal{H}^{i'}(y)$。存在 $1 \leq j \leq d$ 使得 $x \in \mathcal{H}^{i'}_j(y)$。于是，存在 $m_j \in \mathbb{Z}$ 使得

$$x_j = m_j \left(\frac{1}{r}\right)^{i'-1} + y_j \sum_{k=i'}^{k_0+1} \left(\frac{1}{r}\right)^k = m_j \left(\frac{1}{r}\right)^{i'-i} \left(\frac{1}{r}\right)^{i-1} + y_j \sum_{k=i'}^{i-1} \left(\frac{1}{r}\right)^k + y_j \sum_{k=i}^{k_0+1} \left(\frac{1}{r}\right)^k$$
$$= \left(m_j \left(\frac{1}{r}\right)^{i'-i} + y_j \sum_{k=i'}^{i-1} \left(\frac{1}{r}\right)^{k-(i-1)}\right) \left(\frac{1}{r}\right)^{i-1} + y_j \sum_{k=i}^{k_0+1} \left(\frac{1}{r}\right)^k.$$

由于 $(\frac{1}{r})^{i-1}$ 的系数是一个整数，我们得出 $x \in \mathcal{H}^i_j(y)$，因此 $\mathcal{H}^{i'}(y) \subseteq \mathcal{H}^i(y)$。

要证明剩余的结论，只需回想一下，对于 $m, m' \in \mathbb{Z}^d$，$B^i(y, m)$ 是由 $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{H}^i(y)$ 诱导的盒子之一，而 $B^{i'}(y, m')$ 是由 $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{H}^{i'}(y)$ 诱导的盒子之一。由于 $\mathcal{H}^i(y)$ 是 $\mathcal{H}^{i'}(y)$ 的细化，对于任何形如 $B^i(y, m)$ 的盒子，必定恰有一个形如 $B^{i'}(y, m)$ 的盒子包含它。◁

现在，对于上述一般覆盖 $\mathcal{C}$ 中的每个元素 $C(y)$，我们构造一个 $G[C(y)]$，的树分解。因此，固定 $y \in [\frac{r}{2} - 1]^d$。对于每个 $0 \leq i \leq k_0$ 和 $m \in \mathbb{Z}^d$，

16 个分数树独立数脆弱图上独立装填问题的多项式时间近似方案

令 $A^i(y,m) = \{v \in C^i(y) \colon O_v \cap B^i(y,m) \neq \varnothing\}$，并令 $X_{t^i(y,m)} = \bigcup_{0\le k\le i}\{v \in C^k(y) \colon O_v \cap B^i(y,m) \neq \varnothing\}$。换言之，$X_{t^i(y,m)}$ 是由 $C(y)$ 中秩至多为 i 且与盒 $B^i(y,m)$ 相交的对象所对应的顶点集合。对于每一对 (i,m)，若 $A^i(y,m) \neq \varnothing$，则构造一个节点 $t^i(y,m)$，并为其关联集合 $X_{t^i(y,m)}$；该集合将作为我们正在构造的树分解中对应的袋。若满足以下条件，我们称 $t^{i_1}(y,m_1)$ 是 $t^{i_2}(y,m_2)$ 的父节点：$i_1 < i_2$，$B^{i_1}(y,m_1) \supseteq B^{i_2}(y,m_2)$；并且在所有满足这两个条件的数对中，$(i_1,m_1)$ 的第一项取值最大。注意，根据断言23，每个节点 $t^{i_2}(y,m_2)$ 至多有一个父节点。对于每一对节点 $t^{i_1}(y,m_1)$、$t^{i_2}(y,m_2)$，若 $t^{i_1}(y,m_1)$ 是 $t^{i_2}(y,m_2)$ 的父节点，则添加边 $t^{i_1}(y,m_1)t^{i_2}(y,m_2)$。我们断言，所得图 $F(y)$ 是无环的。反设其中包含一个环，其顶点按环上的顺序为 $t^{i_0}(y,m_0)\ t^{i_1}(y,m_1)\ \dots, t^{i_{\ell-1}}(y,m_{\ell-1})$。不失一般性，$t^{i_0}(y,m_0)$ 是 $t^{i_1}(y,m_1)$ 的父节点。这意味着，对于每个 k，$t^{i_k}(y,m_k)$ 都是 $t^{i_{k+1}}(y,m_{k+1})$ 的父节点（下标按模 ℓ 计算）。因此，根据父节点的定义，$i_0 < i_1 < \cdots < i_{\ell-1}$ 和 $i_{\ell-1} < i_0$，矛盾。

随后，我们通过添加一个节点 t^{-1}，并使其与 $F(y)$ 的每个连通分量中的任意节点相邻，将 $F(y)$ 的各个连通分量连接成一棵树。令所得的树为 $T(y)$。注意，$|V(T(y))| \le |V(G)| + 1$。事实上，只有当$A^i(y,m) \neq \varnothing$时，$t^i(y,m)$ 才是 $T(y)$ 的一个节点；并且对于固定的 y，$A^{i_1}(y,m_1) \subseteq V(G)$ 与 $A^{i_2}(y,m_2) \subseteq V(G)$ 不相交。令 $\mathsf{T} = (T(y), \{X_{t^i(y,m)}\}_{t^i(y,m)\in V(T(y))})$，其中将空袋赋给节点 t^{-1}。显然，T 可以在线性时间内计算得出。

▷ 断言 24. $\mathcal{T} = (T(y), \{X_{t^i(y,m)}\}_{t^i(y,m)\in V(T(y))})$ 是 $G[C(y)]$ 的树分解。

证明。 我们首先检查 (T1) 成立。设 $v \in C(y)$，并假设 $\mathsf{rk}(O_v) = i$。那么，O_v 与某个盒子 $B^i(y,m)$ 相交，其中 $m \in \mathbb{Z}^d$，因此 $v \in A^i(y,m)$。因此，$t^i(y,m) \in V(T(y))$，且 $v \in X_{t^i(y,m)}$。

现在我们检查 (T2) 成立。设 $u,v \in C(y)$ 满足 $uv \in E(G)$。那么，$O_u \cap O_v \neq \varnothing$并设 $x = (x_1,\dots,x_d)$ 是该交集中的一个点。不妨设 $\mathsf{rk}(O_u) \le \mathsf{rk}(O_v) = i$。由于 $v \in C^i(y)$，$x \notin \mathsf{H}^i(y)$。这意味着 x 包含在某个盒子 $B^i(y,m)$ 中，其中 $m \in \mathbb{Z}^d$，因此 $v \in A^i(y,m)$，$t^i(y,m) \in V(T(y))$，且 $\{u,v\} \subseteq X_{t^i(y,m)}$。

最后，我们验证 (T3) 成立。对于 $v \in C(y)$，令 $T(y)_v$ 为 $T(y)$ 的子图，它由 $T(y)$ 中袋包含 v 的节点集合所诱导。令 $v \in C(y)$，并假设 $\mathsf{rk}(O_v) = i$。首先注意，存在唯一的 $m \in \mathbb{Z}^d$ 使得 $v \in X_{t^i(y,m)}$，否则$O_v \cap \mathsf{H}^i(y) \neq \varnothing$ 且 $v \notin C(y)$。现在注意，根据定义，对于任意 $i_1 < i$ 和 $m_1 \in \mathbb{Z}^d$，都有 $v \notin X_{t^{i_1}(y,m_1)}$。最后，假设对于某个 $i_1 > i$ 和 $m_1 \in \mathbb{Z}^d$，有 $v \in X_{t^{i_1}(y,m_1)}$。那么，O_v 与 $B^{i_1}(y,m_1)$ 相交；根据断言23，存在唯一的 $m' \in \mathbb{Z}^d$，使得 $B^{i_1}(y,m_1)$ 完全包含于 $B^i(y,m')$ 中（容易看出 $m' = m$）。因此，$t^{i_1}(y,m_1)$ 必须有一个父节点，记为 $t^{i_2}(y,m_2)$，其中某个 i_2 满足 $i_1 > i_2 \ge i$ 和 $m_2 \in \mathbb{Z}^d$。这意味着 $B^{i_2}(y,m_2) \supseteq B^{i_1}(y,m_1)$，因此 $v \in X_{t^{i_2}(y,m_2)}$。由此归纳可得，在 $T(y)_v$ 中，必定存在一条从 $t^{i_1}(y,m_1)$ 到 $t^i(y,m)$ 的路径。因此，$T(y)_v$ 是连通的。◁

▷ 命题 25。 $\alpha(\mathcal{T}) \le cr^{2d}$。

证明。固定 $T(y)$ 中任意一个节点 $t^i(y,m)$。我们界定 $G[C(y)]$ 中由袋 $X_{t^i(y,m)}$ 诱导的子图的独立数。首先注意，对于任意 $v \in X_{t^i(y,m)}$，O_v 与 $B^i(y,m)$ 相交，而后者是边长为 $(\frac{1}{r})^{i-1}$ 的盒子。考虑 $\mathbb{R}^d$ 中一个由r^{2d}个通用闭盒组成的集合 B，每个闭盒的边长为 $(\frac{1}{r})^{i+1}$，且它们的并集恰为$B^i(y,m)$。设 $P \subseteq X_{t^i(y,m)}$ 是 $\bar{}G[C(y)]$ 的一个独立集，并令 $\mathsf{P} = \{O_v \colon v \in P\}$ 为 O 中对应的两两不相交对象子集。对于每个$v \in P$，$\mathsf{rk}(O_v) \le i$，因此 $s(O_v) \ge (\frac{1}{r})^{i+1}$。此外，$O_v$ 至少与 B 中的一个盒子相交。

因此，由于集合 $\mathcal{O}$ 是 c-胖的，我们可以为$\mathcal{B}$ 中的每个盒子选择 c 个点，使得与该盒子相交的$\mathcal{P}$ 中的每个对象都包含至少一个所选点。令 C 为这些 cr^{2d} 个所选点构成的集合。由于$\mathcal{P}$ 中的对象两两不相交，因此其中任意两个对象都不可能包含 C中的同一个点。因此， $|P| \leq cr^{2d}$，如所声称。◁

证明至此结束。 ◀

▶**推论 26.** 存在局部树独立数无界的分数树独立数脆弱图类。

证明。 考虑由圆盘的相交图构成的图类 $\mathcal{G}$ 。根据定理 21，$\mathcal{G}$ 是分数树树-α-脆弱的。现在令 G_n 为在 $n \times n$-网格图上添加一个支配顶点后得到的图。根据定理 7 的证明，图类 $\mathcal{G}' = \{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ 的局部树独立数无界。由于 $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$，结论得证。◀

5 个多项式时间近似方案

我们先定义最大权独立打包。给定一个图 G 以及一个由 G 的连通非空子图构成的有限族 $\mathrm{H} = \{H_j\}_{j\in J}$， G 中的独立 H-打包是 H 中子图的一个子族 $\mathrm{H}' = \{H_i\}_{i\in I}$（即 $I \subseteq J$），其中任意两个子图之间的距离至少为 1，也就是说，它们的顶点互不相交，且任意两个子图之间都没有边。若 H 中的子图配有一个权函数 $w\colon J \to \mathbb{Q}^+$，为每个子图 H_j赋予权重 w_j，则 G 中独立 H-打包 $\mathrm{H}' = \{H_i\}_{i\in I}$ 的权重为 $\sum_{i\in I} w_i$。给定一个图 G、一个由 G 的连通非空子图构成的有限族 $\mathrm{H} = \{H_j\}_{j\in J}$，以及一个定义在 H 中子图上的权函数 $w\colon J \to \mathbb{Q}^+$，最大权独立打包问题旨在求出 G 中权重最大的独立 H-打包。在特殊情形下，若 F 是由连通非空图构成的固定有限族，且 H 是 G 的所有同构于 F 中某个成员的子图组成的集合，则该问题称为最大权重独立 F-打包，是若干问题的共同推广，其中包括：独立 F-打包 [10]，最大权重独立集（$\mathrm{F} = \{K_1\}$）、最大权诱导匹配（$\mathrm{F} = \{K_2\}$）、解耦集（$\mathrm{F} = \{K_1, K_2\}$，且权函数为每个子图 H_j 赋予权重 $|V(H_j)|$） [49, 53]。

5.1 距离至少为 1 的打包子图（高效分数树-α脆弱图类）

我们的多项式时间近似方案依赖于以下结果。

▶ 定理27（*Dallard* 等人[16]）。设 k 和 h 为两个正整数。给定一个图 G 和一个有限族 $H = \{H_j\}_{j\in J}$，其中包含 G 的连通非空子图，并且对每个 $j \in J$ 都有 $|V(H_j)| \leq h$，若给定 G 以及一个树分解 $T = (T, \{X_t\}_{t\in V(T)})$，满足 $\alpha(T) \leq k$，则可以在 $O(|V(G)|^{h(k+1)} \cdot |V(T)|)$ 时间内求解最大权独立打包问题。

▶ **定理 28**。设 $h \in \mathbb{N}$，并设 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 为一个函数。存在一种算法，对于给定的

- $r \in \mathbb{N}$，一个 n 顶点图 G，配备一个 $(1 - 1/r)$-一般覆盖 $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots\}$，并且对于每个 i，都有一个树分解 $T_i = (T_i, \{X_t\}_{t\in V(T_i)})$，其对应于 $G[C_i]$，满足 $\alpha(T_i) \leq f(r)$；还有一个由 G 的连通非空子图组成的有限族 $H = \{H_j\}_{j\in J}$，使得对于每个 $j \in J$，$|V(H_j)| \leq h$；以及定义在 H 中子图上的权函数 $w\colon J \to \mathbb{Q}_+$，
-

在 $|\mathcal{C}| \cdot O\left(n^{h(f(r)+1)} \cdot t\right)$ 时间内，返回一个 G 中的独立 H-打包，其权重至少为最优解的 $(1-h/r)$ 倍，其中 $t=$ 最大值$_i\,|V\left(T_i\right)|$。

证明。对于每个 $i \geq 1$，我们按如下方式进行。利用定理27中的算法，我们只需在 $G[C_i]$ 中计算一个最大权独立 H-装填 P_i，运行时间为 $O(n^{h(f(r)+1)} \cdot t)$。因此，总运行时间为 $|\mathrm{C}| \cdot O(n^{h(f(r)+1)} \cdot t)$。对于 G 的子图集合 A（其中每个子图都与 H 中某个成员同构），以及一个子集 $C \subseteq V(G)$，令 $w(\mathrm{A}) = \sum_{A \in \mathrm{A}} w(A)$，并令 $\mathrm{A} \cap C = \{A \in \mathrm{A} : A \subseteq C\}$。注意，给定 G 的一个子图 H，每个顶点$v \in V(H)$至多不属于一般覆盖 C 的 $1-1/r$ 个元素中的 $|\mathrm{C}|/r$ 个。因此，$V(H)$ 至少属于 C 的 $(1-|V(H)|/r)|\mathrm{C}|$ 个元素。令 $\mathrm{P} = \{P_1, P_2, \ldots\}$ 为 G 中一个权重最大的独立 H-装填。那么，

$$\begin{aligned}
\sum_{C_i \in \mathcal{C}} w(\mathcal{P} \cap C_i) &= \sum_{C_i \in \mathcal{C}} \sum_{P_j \in \mathcal{P}} w(P_j) \mathbb{1}_{\{P_j \subseteq C_i\}} \\
&= \sum_{P_j \in \mathcal{P}} w(P_j) \sum_{C_i \in \mathcal{C}} \mathbb{1}_{\{P_j \subseteq C_i\}} \\
&\geq \sum_{P_j \in \mathcal{P}} w(P_j)(1-|V(P_j)|/r)|\mathcal{C}| \\
&\geq \sum_{P_j \in \mathcal{P}} w(P_j)(1-h/r)|\mathcal{C}| \\
&= |\mathcal{C}|(1-h/r)w(\mathcal{P}).
\end{aligned}$$

根据鸽巢原理，存在 $C_i \in \mathcal{C}$ 使得 $w(\mathcal{P} \cap C_i) \geq (1-h/r)w(\mathcal{P})$。然后，我们返回上面计算得到的最大权独立$\mathcal{H}$装填$\mathcal{P}_i$。由于$\mathcal{P} \cap C_i$ 是 $G[C_i]$中的独立$\mathcal{H}$装填，因此有 $w(\mathcal{P}_i) \geq w(\mathcal{P} \cap C_i) \geq (1-h/r)w(\mathcal{P})$。◀

定理 28 立即推出，最大权独立打包具有 a
在任意高效分数树-α-脆弱图类上都有多项式时间近似方案。以下是一个特例。

▶ **推论 29.** 存在一种算法，给定 $r \in \mathbb{N}$、一个由 n 个对象组成的 c-*fat* 集合 O、$\mathbb{R}^d$ 及其相交图 G，可在$(f(r)/2-1)^d \cdot O(n^{(cf(r)^{2d}+2)})$时间内，返回$f(r) = 2^{\left\lceil \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{d}}} \right\rceil}$，这是 G 中的一个独立集，其权重至少为最优解的$(1-1/r)$ 倍。

证明。给定 $r \in \mathbb{N}$，我们使用定理 21 在 $O(n)$ 时间内计算出 G 的一个 $(1-1/r)$-一般覆盖 C，其尺寸至多为 $(f(r)/2-1)^d$。此外，对于每个 $C \in \mathrm{C}$，我们在 $O(n)$ 时间内计算出 $G[C]$ 的一个树分解 $\mathrm{T} = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$，满足 $|V(T)| \leq n+1$，且使得 $\alpha(\mathrm{T}) \leq cf(r)^{2d}$。最后，我们应用定理 28 中的算法（取 $h=1$）。总运行时间为 $(f(r)/2-1)^d \cdot O(n^{(cf(r)^{2d}+2)})$。◀

5.2 分层树独立数有界的图中距离至少为 d 的打包子图

最大权独立打包有一种自然的推广。对于固定的正整数 d，给定一个图 G 和一个由 G的连通非空子图组成的有限族 $\mathcal{H} = \{H_j\}_{j \in J}$，$G$ 中的一个距离-d $\mathcal{H}$-装填 是指子图$\mathcal{H}$ 中的一个子族 $\mathcal{H}' = \{H_i\}_{i \in I}$，其中任意两个子图之间的距离至少为 d。如果还给定一个权函数 $w\colon J \to \mathbb{Q}_+$，最大

权距离-d 装填问题是指在 G 中寻找权重最大的距离-d $\mathcal{H}$-装填。当 $d = 2$ 时，该问题与最大权独立打包一致。

▶ **定理 30.** 设 $h, \ell \in \mathbb{N}$。设 d 为偶正整数。存在一种算法，给定

- $r \in \mathbb{N}$，一个 n 顶点图 G，配备树分解 $T = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$ 以及 G 的分层 $(V_1, V_2, \ldots)$，使得对于每个袋 X_t 和层 V_i，$\alpha(G[X_t \cap V_i]) \leq \ell$，存在一个由 G 的连通非空子图构成的有限族 $H = \{H_j\}_{j \in J}$，使得对于每个 $j \in J$，均有 $|V(H_j)| \leq h$，
- 以及权函数 $w\colon J \to \mathbb{Q}_+$，

在 G 中返回一个距离-d H-装填，其权重至少为最优解的 $1 - h/r$ 因子$(1 - h/r)$，所用时间为 $r \cdot |V(T)| \cdot n^{O(r)}$。

证明。令 $d = 2k$。正如 [47, 观察 3.9], 所述，对于 $I \subseteq J$，子族 $\mathrm{H}' = \{H_i\}_{i \in I}$ 是 G 中的距离-d H-装填，当且仅当 H' 是图 G^{d-1} 中的独立 H-打包。因此，使用广度优先搜索，我们首先在 $O(n^3)$ 时间内计算图 G^{2k-1}。使用定理 10 中的算法，我们在 $O(|V(T)| \cdot n^2)$ 时间内计算出 G^{2k-1} 的树分解 $\mathrm{T}' = (T, \{X'_t\}_{t \in V(T)})$ 以及 G^{2k-1} 的分层 $(V'_1, \ldots, V'_{\mathrm{d}_{2k-1}^{m}\mathrm{e}})$，使得对于每个袋 X'_t 和层 V'_i，$\alpha(G^{2k-1}[X'_t \cap V'_i]) \leq (4k-3)\ell$。使用引理 15 中的算法，我们在线性时间内计算出 G^{2k-1} 的一个 $(1 - 1/r)$-一般覆盖 C，其尺寸为 r；并且对于每个 $C \in \mathrm{C}$，计算出 $G^{2k-1}[C]$ 的一个树分解，其树独立数至多为 $\ell(4k-3)(r-1)$。最后，我们应用定理 28 中的近似算法，在 $r \cdot O(n^{h(\ell(4k-3)(r-1)+1)} \cdot |V(T)|)$ 时间内，得到 G^{2k-1} 中的一个独立 H-打包，其权重至少为最优解的 $(1 - h/r)$ 倍。◀

结合定理 30 和定理 12，我们得到以下结论：

▶ **推论 31**。设 $d \in \mathbb{N}$ 为偶数。单位圆盘图上的最大权重距离-d 装填问题有一个多项式时间近似方案。

注意，除非 P =NP，否则定理 30 无法扩展到 d 的奇数取值。事实上，Eto 等人 [33] 证明，对于每个 $\varepsilon > 0$ 和固定的奇数 $d \geq 3$，在弦图上将距离 -d 独立集近似到因子 $n^{1/2-\varepsilon}$ 以内是 NP-hard 的。

由于单位圆盘图的树独立数为 $\overline{O}(\sqrt{n})$（定理 12 和引理 4），并且最大权重距离-d 装填问题可在时间 $n^{O(k)}$ 内求解，其中 k 是输入图 [47], 的树独立数，因此我们立即得到一个适用于单位圆盘图的次指数时间算法。

▶ **引理 32**。对于任意固定的偶数 $d \in \mathbb{N}$，单位圆盘图上的最大权重距离-d 装填问题可在 $2^{O(\sqrt{n}\overline{\log} n)}$ 时间内求解。

针对单位圆盘图上的独立集的次指数时间算法，最初由 [2]提出，随后在 [18]中扩展到胖对象的相交图。

5.3 在网格上装填相互独立的单位圆盘、单位宽矩形和水平部分有界的路径

接下来的三个结果给出了这样一类图的树独立数上界：其几何实现包含在宽度有界的轴对齐矩形中。之后将应用这些结果，为标题中提到的图类获得多项式时间近似方案。值得注意的是，与第3.1节类似，本节中考虑的所有树分解实际上都是路径分解。

20 个用于分数树独立数脆弱图上独立装填问题的多项式时间近似方案

▶ 引理*33.* 设 G 为一个 n顶点图，并带有网格表示 $R=(G,P\ x)$，使得 G 至多包含 ℓ 列，其中 $\ell \geq 1$为某个整数，且 P 中每条路径的弯折数均为常数。可以在 $O(n^2)$时间内计算出 G 的一个树分解 $T=(T,\{X_t\}_{t\in V(T)})$，使得 $|V(T)|=O(n^2)$，并且：$\alpha(T)\leq \ell$，若 $x=v$；$\alpha(T)\leq 3\ell-1$，若 $x=e$。

证明。我们不妨假设 G 是连通的。对于每个 $u\in V(G)$ 和 $v\in N_G(u)$，我们找一个同时属于 P_u 和 P_v 的任意网格点（由于 $uv\in E(G)$，这样的网格点存在）。令 p_{uv} 为该网格点在 y 轴上的投影。令 T 为由形如 p_{uv} 的网格点构成的垂直路径。显然，$|V(T)|=O(n^2)$。按对应网格点的 y 坐标递减顺序排列 T 的节点。对于每个 $t\in V(T)$，令 $X'_t=\{u\in V(G)\colon\ p_{uv}=t$ 对某个 $v\in V(G)$ 成立$\}$。最后，我们按如下方式更新 $\{X'_t\}_{t\in V(T)}$。对于每个 $v\in V(G)$，分别令 $t_v^{\min}$ 和 $t_v^{\max}$ 为 T 中对应的袋包含 v 的最小节点和最大节点。然后，我们将 v 添加到对应于 $t_v^{\min}$ 和 $t_v^{\max}$ 之间节点的所有袋中。令 $\{X_t\}_{t\in V(T)}$ 为由此得到的袋族，并令 $\mathsf{T}=(T,\{X_t\}_{t\in V(T)})$。与定理 13 的证明相同，$\mathsf{T}$ 是 G 的树分解，可以在 $O(n^2)$ 时间内构造出来。

现在我们证明，对于每个 $t\in V(T)$，若 $x=v$，则 $\alpha(G[X_t])\leq \ell$；而若 $x=e$，则 $\alpha(G[X_t])\leq 3\ell-1$。由此可分别推出 $\alpha(\mathsf{T})\leq \ell$ 和 $\alpha(\mathsf{T})\leq 3\ell-1$，从而完成证明。令 I 为 $G[X_t]$ 的一个独立集。注意，根据构造，对于每个 $v\in I\subseteq X_t$，路径 P_v 都包含 G 中由 t 索引的行上的一个网格点。先假设 $x=v$，即 G 是一个顶点相交路径图。那么，由 t 索引的行上的每个网格点，至多属于一个满足 $v\in I$ 的 P_v。由于 G 至多有 ℓ 列，因此 $|I|\leq \ell$。最后，假设 $x=e$，即 G 是一个边相交路径图。那么，由于有 $3\ell-1$ 条网格边包含位于由 t 索引的行上的网格点，我们有 $|I|\leq 3\ell-1$；否则，两条路径 P_u 和 P_v（其中 u、$v\in I$）将共享一条网格边。◀

以下两个结果的证明与引理33的证明类似。

▶**引理 34**。设 G 是由一族 n 矩形构成的相交图，并具有网格表示(G,R)，其中 G 至多包含 ℓ 列，$\ell\geq 1$为某个整数。可以在 $O(n^2)$ 时间内计算出 G 的一个树分解 $T=(T,\{X_t\}_{t\in V(T)})$，使得 $|V(T)|=O(n^2)$ 且 $\alpha(T)\leq \lfloor \frac{\ell}{2}\rfloor$。

证明。不失一般性，假设 G 是连通的。对于每个 $u\in V$（G）和$v\in N_G$（u），我们找出一个同时属于两个矩形 R_u 和 R_v 的任意网格点（因为$uv\in E$（G），这样的网格点必然存在）。令 p_{uv} 为该网格点在y轴上的投影，并令 T 为其节点是形如 p_{uv}的网格点的垂直路径。然后，我们完全按照引理33证明中的方法构造$\mathcal{T}=$（T，$\{X_t\}_{t\in V(T)}$）。同样容易看出，$\mathcal{T}$是 G 的一个树分解，且可在 O（n^2）时间内构造。

现在我们证明，对于每个 $t\in V(T)$，$\alpha(G[X_t])\leq \lfloor \frac{\ell}{2}\rfloor$。这将推出 $\alpha(\mathcal{T})\leq \lfloor \frac{\ell}{2}\rfloor$，从而完成证明。令 I 为 $G[X_t]$的一个独立集。注意，根据构造，对于每个 $v\in I\subseteq X_t$，矩形 R_v 在$\mathcal{G}$ 中由 t标记的行上至少包含两个网格点，而由 t 标记的行上的每个网格点至多属于一个满足 $v\in I$的R_v。由于$\mathcal{G}$至多有 ℓ列，因此 $I\leq \lfloor \frac{\ell}{2}\rfloor$。◀

▶**引理 35.** 设 G 是由一族 D 个 n 相同半径为 $c\geq 1$ 的单位圆盘构成的族的相交图，其几何实现包含在一个顶点为整数坐标、宽度至多为 $\ell-1$的轴对齐矩形中，其中 $\ell\geq 1$是某个整数。可以计算

在 $O(n)$ 时间内得到一个树分解 $T = (T, \{X_t\}_{t \in V(T)})$，使得 G $|V(T)| = O(n)$ 并且 $\alpha(T) \leq 2d\frac{\ell}{c}e$。

证明。我们不失一般性地假设 G 是连通的，且圆盘集合包含在第一象限内。对于每个整数 $j > 0$，令 $R_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c(j-1) \leq y \leq cj\}$ 和 $C_j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c(j-1) \leq x \leq cj\}$ 分别为第 j 条横条带和第 j 条垂直带。注意，对于每个 $v \in V(G)$，圆盘 D_v 至多与三条横条带和三条垂直带相交。特别地，$m = |\{j \in \mathbb{N} : R_j \cap \{D_v : v \in V(G)\} \neq \varnothing\}| \leq 3n$。不失一般性，我们可以假设前 m 条横条带均非空，也就是说，对于每个 $j \in [m]$，都有 $R_j \cap \{D_v : v \in V(G)\} \neq \varnothing$。现在，根据假设，$|\{j \in \mathbb{N} : C_j \cap \{D_v : v \in V(G)\} \neq \varnothing\}| \leq d\frac{\ell}{c}e$，并且我们可以类似地假设非空垂直带是前 $d\frac{\ell}{c}e$ 条。现在我们按如下方式构造 G 的树分解。令 T 为一条包含 m 个顶点 $t_1, \ldots\ldots, t_m$ 的路径，并令对于每个 $j \in [m]$，$X_{t_j} = \{v \in V(G) : D_v \cap R_j \neq \varnothing\}$。显然，对于每个 $v \in V(G)$，存在一个 $j \in [m]$ 使得 $v \in X_{t_j}$。现在考虑 $uv \in E(G)$。那么，存在一个点 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$，它同时包含在 D_v 和 D_u 中，因此 $\{u, v\} \subseteq X_{t_{\lceil \frac{y}{c} \rceil}}$。最后，对于每个 $v \in V(G)$，与 D_v 相交的横条带彼此相邻，因此其袋包含 v 的 T 的节点集合诱导出一条子路径。因此，$\mathbf{T} = (T, \{X_{t_j}\}_{1 \leq j \leq m})$ 是 G 的树分解，并且容易看出，这个树分解可以在线性时间内计算出来。

我们现在断言 $\alpha(\mathbf{T}) \leq 2d\frac{\ell}{c}e$。事实上，考虑 $j \in [m]$，并令 $I \subseteq X_{t_j}$ 为 $G[X_{t_j}]$ 的一个独立集。我们证明，对于每个 $i \in [d\frac{\ell}{c}e$，至多存在两个顶点 $v \in I$，使得 C_i 包含 D_v 的中心。为此，对于每个 $p, q \in \mathbb{N}$，将 $B(p, q) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c(p-1) \leq x \leq cp$ 且 $c(q-1) \leq y \leq cq\}$ 称为第 p 个垂直带与第 q 个横条带交集处的盒。注意，对于任意 $p, q \in \mathbb{N}$，$B(p, q)$ 至多包含一个圆盘的中心，其中圆盘属于 $\{D_v : v \in I\}$，因为 $B(p, q)$ 中的任意两点之间的距离至多为 $\sqrt{2}c$。现在考虑 $i \in d\frac{\ell}{c}e$。由于对于任意圆盘 $D \in \{D_v : v \in I\}$，若其中心 c 包含在 C_i 中，则存在 $p \in \{j-1, j, j+1\}$ 使得 $c \in B(i, p)$，因此 C_i 至多包含 $\{D_v : v \in I\}$ 中三个圆盘的中心。现在反设 C_i 包含 $\{D_v : v \in I\}$ 中三个圆盘的中心，分别为 $c_{j-1} = (x_{j-1}, y_{j-1})$、$c_j = (x_j, y_j)$ 和 $c_{j+1} = (x_{j+1}, y_{j+1})$，其中对每个 $p \in \{j-1, j, j+1\}$，$c_p \in B(i, p)$。那么，要么 $y_j - y_{j-1} \leq 3c/2$，要么 $y_{j+1} - y_j \leq 3c/2$；不失一般性地假设后者成立，由此可得 $(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2 \leq c^2(1 + 9/4) < 4c^2$，这与 I 是一个独立集矛盾。因此 $|I| \leq 2d\frac{\ell}{c}e$，从而如所断言，$\alpha(\mathbf{T}) \leq 2d\frac{\ell}{c}e$。◀

▶ **定理 36.** 设 $c \geq 1$ 为整数常数。当限制在具有网格表示 $R = (G, P\ x)$ 且满足以下条件的 n-顶点图上时，最大权独立集问题存在一个多项式时间近似方案：

1. P 中每条路径的弯折次数均为常数；**2.** P 中每条路径的水平部分长度至多为 c。若 $x = v$，运行时间为 $O(cd\frac{1}{\varepsilon}e \cdot n^{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil c+4})$。若 $x = e$，运行时间为 $O(cd\frac{1}{\varepsilon}e \cdot n^{3(\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil c+1)})$。

证明。设 G 是具有网格表示 $\mathbf{R} = (\mathbf{G}, \mathbf{P}\ x)$ 的图，并满足上述三个条件。不失一般性，可假设 $\mathbf{P}$ 中所有路径仅包含坐标非负的网格点。此外，可假设 G 是连通的。因此，$\mathbf{G}$ 中没有未使用的列，所以 $\mathbf{G}$ 至多有 $(c+1)n$ 列。另请注意，由于任意路径 $P \in \mathbf{P}$ 的弯折次数均为常数，我们可以在 $O(1)$ 时间内计算 P 的水平部分 $h(P)$。给定 $0 < \varepsilon < 1$，我们固定 $k = d1/\varepsilon e$。

对于任意 $i \geq 0$，我们用 X_i 表示这样一组顶点：其对应路径对于某个 $j \geq 0$ 包含网格边 $[(i, j), (i+1, j)]$（在本文中及下文中，$[(i, j), (i+1, j)]$ 表示

端点为 (i,j) 和 $(i+1,j)$ 的网格边）。注意，我们可以在 $O(n)$ 时间内计算至多 $(c+1)n-1$ 个非空集合 $X_i's$。鉴于要应用移位技术，我们现在通过以下方式将 G 划分为切片。对于任意 $d\in\{0,\dots,kc-1\}$，令 $V_d=\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}_0}X_{d+\ell kc}$ 表示这样一组顶点：其对应路径对于某个 $\ell,j\in\mathbb{N}$ 包含网格边 $[(d+\ell kc,j),(d+\ell kc+1,j)]$。我们声称，对于任意 $d\in\{0,\dots,kc-1\}$，$G-V_d$ 是非连通的。事实上，删除 V_d 后，水平部分包含于区间 $[0,d+\ell kc]$ 内的顶点，不可能与水平部分包含于区间 $[d+\ell kc+1,(c+1)n]$ 内的顶点相邻。类似地，$G-V_d$ 的每个连通分量都具有一种网格表示，其中列数有 kc 的界。根据引理33和定理27，对于 $G-V_d$ 的每个连通分量，若 $x=v$，我们可在 $O(n^{kc+3})$ 时间内计算 n^{kc+3}；若 $x=e$，则可在 $O(n^{3kc+2})$ 时间内计算最大权独立集。将这些独立集在 $G-V_d$ 的各个连通分量上的并集 U_d，便是 G 的一个独立集；然后，对每个 $d\in\{0,\dots,kc-1\}$ 重复上述过程，并返回各个 U_d 中的最大权集合 U。因此，总运行时间为：若 $x=v$，则为 $O(kc\cdot n^{kc+4})$；若 $x=e$，则为 $O(kc\cdot n^{3kc+3})$。

还需证明 $w(U)\geq(1-\varepsilon)w(\mathsf{OPT})$，其中 OPT 表示实例 G 的最大权独立集的最优解。注意，对于任意 $d\in\{0,\dots,kc-1\}$，$\mathsf{OPT}\cap V_d$ 是 OPT 中对应路径包含网格边$[(d+\ell kc,j),(d+\ell kc+1,j)]$ 的顶点集合，其中某个 $\ell,j\in\mathbb{N}_0$成立。由于每条路径的水平部分长度至多为 c，因此 OPT 中的每个顶点至多属于 c 个不同的 V_d。因此，令 d_0 为使 $\min_{d\in\{0,\dots,kc-1\}}w(\mathsf{OPT}\cap V_d)$ 取得最小值的指标，我们有

$$kc\cdot w(\mathsf{OPT}\cap V_{d_0})\leq\sum_{d=0}^{kc-1}w(\mathsf{OPT}\cap V_d)\leq c\cdot w(\mathsf{OPT})$$

因此

$$w(\mathsf{OPT})=w(\mathsf{OPT}\setminus V_{d_0})+w(\mathsf{OPT}\cap V_{d_0})\leq w(U)+\varepsilon\cdot w(\mathsf{OPT}),$$

从而完成证明。 ◀

▶**定理37**。 最大权独立集 在以下限制情形下存在多项式时间近似方案：一族宽度为 n 的 c 矩形的相交图，连同一个网格表示 (G,R)。运行时间为 $O(cd\frac{1}{\varepsilon}e\cdot n^{\lceil\frac{1}{\varepsilon}\rceil\cdot\frac{c}{2}+4})$。一族 D 中相同半径为 $c\geq1$ 的 n 单位圆盘的相交图。运行时间为 $O(cd\frac{2}{\varepsilon}e\cdot n^{2\lceil\frac{2}{\varepsilon}\rceil+3})$。

证明。由于这些多项式时间近似方案类似，我们引入一些通用记号。令 G 为族 O 的相交图，其中 O 为 R 或 D。不失一般性，假设 O 中的所有对象都包含在第一象限内。此外，假设 G 是连通的。因此，O 包含在一个网格 G 中，该网格有 $O(n)$ 列。对于每个 $O\in$ O，我们在 O 内用 x（1）时间计算 O 的水平部分 $h(O)$（即 O 在 x 轴上的投影）。给定 $0<\varepsilon<1$，在矩形的情况下，我们固定 $k=\mathrm{d}1/\varepsilon\mathrm{e}$；在圆盘的情况下，固定 $k=\mathrm{d}2/\varepsilon\mathrm{e}$。令 X_i 为对应对象的水平部分与网格边 [（i，0），（$i+1$，0）] 相交的顶点集合。我们可以在 $O(n)$ 时间内计算这些 X_i。现在我们按如下方式将 G 划分为切片。对于任意 $d\in\{0,\dots,kc-1\}$，令 $V_d=\bigcup_{\ell\in\mathbb{N}_0}X_{d+\ell kc}$。与定理 36 的证明中一样，容易看出，对于任意 $d\in\{0,\dots,kc-1\}$，$G-V_d$ 是非连通的，并且 $G-V_d$ 的每个连通分量都有一个几何实现，该实现包含在一个顶点为整数坐标、宽度至多为 $kc-1$ 的轴对齐矩形内。若该族由矩形组成，则根据引理 34 和定理27，对于 $G-V_d$ 的每个连通分量，我们在 $O(n^{\frac{kc}{2}+3})$ 中计算一个最大权独立集

时间。若该族由圆盘组成，则根据引理 35 和定理27，对于 $G - V_d$ 的每个连通分量，我们在 $O(n^{2k+2})$ 时间内计算一个最大权独立集。无论哪种情况，将 $G - V_d$ 各连通分量上这些独立集的并集 U_d 作为 G 的独立集；对每个 $d \in \{0, \dots, kc-1\}$ 重复上述过程后，我们返回各个 U_d 中权重最大的集合 U。因此，在矩形的情况下，总运行时间为 $O(\underline{kc} \cdot n^{\frac{kc}{2}+4})$；在圆盘的情况下，总运行时间为 $O(kc \cdot n^{2k+3})$。与定理 36 类似，容易看出 $w(U) \geq (1-\varepsilon)w(\text{OPT})$，其中 OPT 表示实例为 G 的最大权独立集问题的最优解。◀

参考文献

1 Pankaj K. Agarwal、Marc van Kreveld 和 Subhash Suri。基于矩形中最大独立集的标签放置。计算几何，11(3):209–218，1998年。2 Jochen Alber 和 Jiří Fiala。圆盘图上的参数化独立集问题的几何分离与精确解。算法杂志，52(2):134–151，2004年。3 Andrei Asinowski、Elad Cohen、Martin Charles Golumbic、Vincent Limouzy、Marina Lipshteyn 和 Michal Stern。网格路径顶点交图。图算法与应用杂志，16(2):129–150，2012年。4 Brenda S. Baker。平面图上NP完全问题的近似算法。ACM 学报，41(1):153–180，1994年。5 Sayan Bandyapadhyay、William Lochet、Daniel Lokshtanov、Saket Saurabh 和 Jie Xue。单位圆盘图的真实收缩分解与近乎 ETH 紧致的二部化。载于 Xavier Goaoc 和 Michael Kerber（编），第38届国际计算几何研讨会（SoCG 2022），莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）第224卷，第11:1–11:16页。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2022年。6 Stephane Bessy、Marin Bougeret、Steven Chaplick、Daniel Gonçalves 和 Christophe Paul。关于 B_1-边相交路径图上的独立集。离散应用数学，278:62–72，2020年。7 Therese Biedl 和 Martin Derka。将 B_2-顶点相交路径图拆分为外部弦图和余可比图。载于 Faith Ellen、Antonina Kolokolova 和 Jörg-Rüdiger Sack（编），算法与数据结构——第15届国际研讨会（WADS 2017），计算机科学讲义第10389卷，第157–168页。施普林格，2017年。8 Marthe Bonamy、Édouard Bonnet、Nicolas Bousquet、Pierre Charbit、Panos Giannopoulos、Eun Jung Kim、Paweł Rzążewski、Florian Sikora 和 Stéphan Thomassé。圆盘图和单位球图上最大团问题的高效多项式时间近似方案与亚指数时间算法。ACM 学报，68(2)，2021年。9 Flavia Bonomo-Braberman 和 Carolina Lucía Gonzalez。局部可检验问题的新方法。离散应用数学，314:53–80，2022年6月。10 Kathie Cameron 和 Pavol Hell。结构化图中的独立打包。数学规划，105(2-3):201–213，2006年。11 Timothy M Chan。胖对象的装填与刺穿问题的多项式时间近似方案。算法杂志，46(2):178–189，2003年。12 Timothy M. Chan。关于矩形相交图中最大独立集的一则注记。信息处理快报，89(1):19–23，2004年。13 L.Sunil Chandran 和 C.R. Subramanian。围长与树宽。组合理论杂志B辑，93(1):23–32，2005年。14 Clément Dallard、Martin Milanič 和 Kenny Štorgel。树宽与团数。I. 具有禁用结构的图类。SIAM 离散数学杂志，35(4):2618–2646，2021年。15 Clément Dallard、Fedor V. Fomin、Petr A. Golovach、Tuukka Korhonen 和 Martin Milanič。计算独立数较小的树分解。CoRR，abs/2207.09993，2022年。URL: https://arxiv.org/abs/2207.09993。

24 针对分数树独立数脆弱图上独立装填问题的多项式时间近似方案

16 Clément Dallard、Martin Milanič 和 Kenny Štorgel。树宽与团数。II. 树独立数。CoRR, abs/2111.04543，2022年。URL: https://arxiv.org/abs/2111.04543。17 Clément Dallard、Martin Milanič 和 Kenny Štorgel。树宽与团数。III. 具有禁用结构的图的树独立数。CoRR, abs/2206.15092，2022年。URL: https://arxiv.org/abs/2206.15092。18 Mark de Berg、Hans L. Bodlaender、Sándor Kisfaludi-Bak、Dániel Marx 和 Tom C. van der Zanden。几何相交图中指数时间假设紧算法与下界的框架。《SIAM 计算杂志》，49(6):1291–1331，2020年。19 Erik D. Demaine、Mohammad Taghi Hajiaghayi 和 Ken-ichi Kawarabayashi。算法图子式理论：分解、近似与着色。载于第46届 IEEE 计算机科学基础年会（FOCS 2005），第637–646页。IEEE计算机学会，2005年。20 Erik D. Demaine、MohammadTaghi Hajiaghayi 和 Bojan Mohar。通过收缩分解实现近似算法。《组合数学》，30(5):533–552，2010年。21 Matt DeVos、Guoli Ding、Bogdan Oporowski、Daniel P. Sanders、Bruce Reed、Paul Seymour 和 Dirk Vertigan。排除任意图作为子式即可实现低树宽二着色。组合理论杂志B辑，91(1):25–41，2004年。22 Vida Dujmović、David Eppstein 和 David R. Wood。具有局部受限交叉的图的结构。SIAM 离散数学杂志，31(2):805–824，2017年。23 Vida Dujmović、Pat Morin 和 David R. Wood。子式封闭图类中的分层分隔集及其应用。组合理论杂志B辑，127:111–147，2017年。24 Vida Dujmović、Louis Esperet、Pat Morin、Bartosz Walczak 和 David R. Wood。有界度图的簇化三着色。《组合学、概率与计算》，31(1):123–135，2022年。25 Vida Dujmović、Pat Morin 和 David R. Wood。非子式封闭类的图乘积结构。CoRR，abs/1907.05168，2022年。URL: https://arxiv.org/abs/1907.05168。26 Zdeněk Dvořák。次线性分隔集、脆弱性与次指数扩张。《欧洲组合学杂志》，52:103–119，2016年。27 Zdeněk Dvořák。在 GWP 2022（ICALP 2022 卫星专题研讨会）上的报告，2022年。URL: https://homepages.ecs.vuw.ac.nz/~bretteni/GWP2022/。28 Zdeněk Dvořák。有界扩张图类的近似元定理。载于 Artur Czumaj 和 Qin Xin（编），第18届斯堪的纳维亚算法理论研讨会及专题讨论会（SWAT 2022），莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）第227卷，第22:1–22:17页。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2022年。29 Zdeněk Dvořák、Daniel Gonçalves、Abhiruk Lahiri、Jane Tan 和 Torsten Ueckerdt。关于可比盒维数。载于 Xavier Goaoc 和 Michael Kerber（编），第38届国际计算几何研讨会（SoCG 2022），莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）第224卷，第38:1–38:14页。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2022年。30 Zdeněk Dvořák 和 Abhiruk Lahiri。分数树宽脆弱图上有界距离问题的近似方案。载于 Petra Mutzel、Rasmus Pagh 和 Grzegorz Herman（编），第29届欧洲算法研讨会（ESA 2021），莱布尼茨国际信息学会议录（LIPIcs）第204卷，第40:1–40:10页。Schloss Dagstuhl – Leibniz-Zentrum für Informatik，2021年。31 David Eppstein。子式封闭图族中的直径与树宽。Algorithmica，27(3):275–291，2000年。32 Thomas Erlebach、Klaus Jansen 和 Eike Seidel。几何相交图的多项式时间近似方案。《SIAM 计算杂志》，34(6):1302–1323，2005年。33 Hiroshi Eto、Fengrui Guo 和 Eiji Miyano。二部图和弦图上的距离-d 独立集问题。《组合优化杂志》，27(1):88–99，2014年。

34 Fedor V. Fomin、Daniel Lokshtanov 和 Saket Saurabh。双维性与几何图。载于 Yuval Rabani（编），第二十三届 ACM-SIAM 离散算法年会（SODA 2012），第 1563–1575 页。SIAM，2012年。35 Jacob Fox 和 János Pach。计算交图的独立数。载于 Dana Randall（编），第二十二届 ACM-SIAM 离散算法年会（SODA 2011），第 1161–1165 页。SIAM，2011年。36 Waldo Gálvez、Arindam Khan、Mathieu Mari、Tobias Mömke、Madhusudhan Reddy Pittu 和 Andreas Wiese。矩形最大独立集的 3-近似算法。载于 Joseph (Seffi) Naor 和 Niv Buchbinder（编），2022 年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集（SODA 2022），第 894–905 页。SIAM，2022年。37 Matt Gibson 和 Imran A. Pirwani。圆盘图支配集算法：突破对数 n 障碍。载于 Mark de Berg 和 Ulrich Meyer（编），算法——ESA 2010，计算机科学讲义第 6346 卷，第 243–254 页。Springer Berlin Heidelberg，2010年。38 Martin Charles Golumbic、Marina Lipshteyn 和 Michal Stern。网格上单弯折路径的边交图。《Networks》，54(3):130–138，2009年。39 Alexander Grigoriev 和 Hans L. Bodlaender。每条边交叉数较少的可嵌入图的算法。《Algorithmica》，49(1):1–11，2007年。40 Dorit S. Hochbaum 和 Wolfgang Maass。图像处理和超大规模集成电路中的覆盖与装填问题近似方案。《ACM 学报》，32(1):130–136，1985年。41 Harry B Hunt、Madhav V Marathe、Venkatesh Radhakrishnan、S.S Ravi、Daniel J Rosenkrantz 和 Richard E Stearns。几何图中 NP-困难和 PSPACE-困难问题的 NC 近似方案。《算法杂志》，26(2):238–274，1998年。42 Abhiruk Lahiri、Joydeep Mukherjee 和 C. R. Subramanian。B_1-VPG 图上的最大独立集。载于 Zaixin Lu、Donghyun Kim、Weili Wu、Wei Li 和 Ding-Zhu Du（编），组合优化与应用——第九届国际会议（COCOA 2015），计算机科学讲义第 9486 卷，第 633–646 页。施普林格，2015年。43 Daniel Lokshtanov、Fahad Panolan、Saket Saurabh、Jie Xue 和 Meirav Zehavi。圆盘图近似方案框架。载于 Nikhil Bansal 和 Viswanath Nagarajan（编），2023 年 ACM-SIAM 离散算法研讨会论文集（SODA 2023），第 2228–2241 页。SIAM，2023年。44 Dániel Marx。几何问题的高效近似方案？载于 Gerth Stølting Brodal 和 Stefano Leonardi（编），算法——ESA 2005，计算机科学讲义第 3669 卷，第 448–459 页。Springer Berlin Heidelberg，2005年。45 Tomomi Matsui。单位圆盘图上最大独立集问题和分数着色问题的近似算法。载于 Jin Akiyama、Mikio Kano 和 Masat- sugu Urabe（编），《离散与计算几何》，第 194–200 页。Springer Berlin Heidelberg，1998年。46 Saeed Mehrabi。网格路径交图上的支配近似。载于 Roberto Solis-Oba 和 Rudolf Fleischer（编），近似与在线算法——第十五届国际研讨会（WAOA 2017），计算机科学讲义第 10787 卷，第 76–89 页。施普林格，2017年。47 Martin Milanič 和 Paweł Rz˛ażewski。独立数有界的树分解：超越独立集。CoRR，abs/2209.12315，2022年。URL: https://arxiv.org/abs/2209.12315。48 Tim Nieberg、Johann L. Hurink 和 Walter Kern。单位圆盘图中最大权独立集的鲁棒多项式时间近似方案。载于 Juraj Hromkovic、Manfred Nagl 和 Bernhard Westfechtel（编），计算机科学中的图论概念，第三十届国际研讨会（WG 2004），计算机科学讲义第 3353 卷，第 214–221 页。施普林格，2004年。49 Yury Orlovich、Alexandre Dolgui、Gerd Finke、Valery Gordon 和 Frank Werner。图中解离集问题的复杂性。《离散应用数学》，159(13):1352–1366，2011年。

26 针对分数树α脆弱图上独立装填问题的多项式时间近似方案

50 Fahad Panolan、Saket Saurabh 和 Meirav Zehavi。单位圆盘图中的收缩分解及其在参数化复杂性中的算法应用。载于 Timothy M. Chan（编），第三十届 *ACM-SIAM* 离散算法年度研讨会论文集（*SODA 2019*），第 1035–1054 页。SIAM，2019年。51 Erik Jan van Leeuwen。单位圆盘图的近似算法。载于 Dieter Kratsch（编），计算机科学中的图论概念，第*31*届国际研讨会（*WG 2005*），计算机科学讲义第 3787 卷，计算机科学讲义，第 351–361 页。施普林格，2005年。52 Erik Jan van Leeuwen。更优的圆盘图近似方案。载于 Lars Arge 和 Rusins Freivalds（编），算法理论——*SWAT 2006*，第*10*届斯堪的纳维亚算法理论研讨会，计算机科学讲义第 4059 卷，计算机科学讲义，第 316–327 页。施普林格，2006年。53 Mihalis Yannakakis。二分图上的节点删除问题。《*SIAM* 计算杂志》，10(2):310–327，1981年。