arXiv:2303.07471v1 [econ.TH] 13 Mar 2023

# 线性不等式的统一择一定理

Ian Ball*

2023年3月15日

**摘要**

本文提出一个统一的择一定理，明确允许等式、逐分量不等式、弱支配、严格支配和非负关系以任意组合形式出现。该定理涵盖了60个特殊情形，其中一些情形曾被单独表述为定理。

经济理论中的许多结果，都可以通过将分离超平面定理应用于两个精心选取的凸集来证明：资产定价基本定理（例如，Duffie，2001，第 4 页）；非合作博弈论中的非最优回应与严格支配等价性（Pearce，1984；Weinstein，2020）；关于平衡联盟博弈中核心非空性的 Bondareva–Shapley 定理（例如，Osborne 和 Rubinstein，1994，第 262–263 页）；相关类型拍卖中的全部剩余提取（Crémer 和 McLean，1988）；以及可行简化形式拍卖的 Border 刻画（Border，2007）。在这些例子中，只要证明涉及有限个线性等式和不等式系统，就可以使用择一性定理直接证明——这是一项纯代数结果，不依赖微积分或极限。择一性定理有许多

*感谢 John Geanakoplos 最初向我讲解 Farkas 引理。感谢 Stephen Morris、Joseph Root、Iván Werning 以及 MIT IAP 2023 的听众提出意见。

不同版本，分别与 Farkas、Freedholm、Gale 等许多人相关。[1]要理清所有这些版本并不容易，因此很难为特定应用找到恰当的形式。

我提出一个统一的择一性定理，明确允许等式（=）、逐分量不等式（≤）、弱支配（<）、严格支配（≪）以及非负关系的任意组合。[2] 将这些不同关系结合起来，可以揭示原始系统与其对偶之间直观的结构。我希望这个统一版本比文献中的众多版本更容易记忆（或者至少更容易应用）。

**定理 1**（统一择一性定理）
对于 $i \in \{1,2,3,4\}$，给定矩阵 $A_i \in \mathbf{R}^{m_i \times n}$ 和向量 $b_i \in \mathbf{R}^{m_i}$。以下条件恰有一个成立。

*P.* 存在 $x \in \mathbf{R}^n$ 满足

$$A_1 x = b_1, \tag{1}$$
$$A_2 x \leq b_2, \tag{2}$$
$$A_3 x < b_3, \tag{3}$$
$$A_4 x \ll b_4, \tag{4}$$
$$(x \geq 0). \tag{N}$$

*D.* 存在 $\lambda_i \in \mathbf{R}^{m_i}$，满足 $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ [3]

$$\lambda_i \geq 0 \ \textit{for}\ i = 2,3,4, \tag{M}$$

[1]两个密切相关的数学结果是极小极大定理和线性规划对偶性。对于零和博弈和线性规划之外的经济学应用，择一性定理通常比这另外两个结果更便于使用。人们早已知道，择一性定理和线性规划对偶性都可以直接用来证明另外两个结果。从极小极大定理出发则更为微妙。 Reny 和 Brooks （2021）通过直接从极小极大定理证明线性规划对偶性，完成了这一等价关系的证明。[2]也就是说， $x \leq y$ 表示 $x_i \leq y_i$ 对所有 $i$； $x < y$ 表示 $x \leq y$ 且 $x \neq y$；而 $x \ll y$ 表示$x_i < y_i$ 对所有 $i$。[3]系统中各命题之间的逗号表示且。单词或则直接写出。

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i^T A_i = (\geq)\ 0, \tag{L}$$

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i^T b_i \leq 0, \tag{R}$$

$$\sum_{i=1}^{4} \lambda_i^T b_i < 0 \ \textit{or}\ \lambda_3 \gg 0 \ \textit{or}\ \lambda_4 > 0. \tag{S}$$

如果原始系统仅对 $i$ 属于 $\{1,2,3,4\}$ 的子集 $I$ 时包含关系 $i$，那么在对偶系统中，对 $j \notin I$ 设定 $\lambda_j = 0$，并保留 $i \in I$ 对应的未知数 $\lambda_i$。

括号中的表达式表示：如果原始系统中包含非负约束 (N)，那么对偶系统中的 (L) 就变为不等式，而非等式。

对偶系统的任何解都能证明原始系统不可行。为此，对于每个 $i = 1$、2、3、4，将关系式 $i$ 左乘某个向量 $\lambda_i^T$，其中 $\lambda_i \geq 0$ 若满足 $i \geq 2$。求和得到

$$\left(\sum_{i=1}^{4} \lambda_i^T A_i\right) x \leq \sum_{i=1}^{4} \lambda_i^T b_i, \tag{5}$$

若 $\lambda_3 \gg 0$ 或 $\lambda_4 > 0$，则不等号为严格不等式。要有可能得到矛盾，左侧的向量系数必须为零，右侧的标量必须小于或等于 0。于是，若右侧严格小于零或不等式为严格不等式，即若 $\lambda_3 \gg 0$ 或 $\lambda_4 > 0$，就会得到矛盾。这些条件构成对偶系统，其中包括对乘子 (M) 的约束，以及对 (5) 左右两侧的约束，分别记为 (L) 和 (R)，再加上严格性条件 (S)。

定理 1 较难证明的方向指出，如果原始系统不可行，那么就存在其不可行性证书。证明（第 1 节和 2 节）纯属代数推导。定理 1 由一个更基本的择一性定理推导而来，该定理通过傅里叶–莫茨金消元证明。这个证明表明，将集合 1 替换为任意有序域，定理 **R**仍然成立。[4]

[4]Border （2013）提出了择一性定理的不同版本，适用于有理数..... 1

原始不等式和对偶不等式具有直观的结构——原始关系的限制越严格，就越容易导出矛盾。$\lambda_2$ （与逐分量不等式相关）有符号限制，而 $\lambda_1$ （与限制更严格的等式关系相关）则没有。随着 $i$ 从 2 增至 3 再增至 4，原始不等式越严格，对应对偶变量所受的约束就越宽松。

删去原始系统中的某些关系后，我们可以立即从定理 1 推出所有标准的择一性定理。如果原始系统仅对某个子集 $i$ 中的 $i$ 包含关系 $I$，其中 $\{1,2,3,4\}$，那么在对偶系统中对所有 $\lambda_j = 0$ 令 $j \notin I$，就相当于：(a) 将每个求和范围限制为 $i$ 属于 $I$；(b) 删除任何其他含有单个乘子 $\lambda_j$ 且满足 $j \notin I$ 的不等式。[5] 例如，令 $I = \{2\}$ 并省略下标后，原始系统（不含非负约束）变为

$$Ax \leq b,$$

对偶系统则变为

$$\lambda \geq 0, \qquad \lambda^T A = 0, \qquad \lambda^T b < 0.$$

这种基本形式的择一性定理见于 Gale (1960)。定理 1 立即给出 $60 = 15{\cdot}2{\cdot}2$ 个不同的择一性定理，分别对应于四种关系的 15 个非空组合 $=$、$\leq$、$<$、$\ll$，这些关系可以带有或不带非负约束，并采用齐次（$b = 0$）或非齐次形式。

表1 列出了两部常用参考文献中出现的择一性定理：Border (2013) 和 Perng (2017)。[6] 表1中的每个定理都是

系数和对偶变量。[5]我们可以从合取式中去掉真命题，从析取式中去掉假命题。即使 $I = \varnothing$，我们仍会得到原始问题（$x \geq 0$）和对偶问题 $0 < 0$，因此该陈述依然成立。[6]我还纳入了 John Geanakoplos 的讲义中出现的一项结果，他称之为“广义 Farkas 引理”。这些定理按照原始系统中允许的关系进行组织。我不区分不等式方向（例如，$\leq$ 与 $\geq$），因为可以通过将 $A_i$ 和 $b_i$ 取反来翻转方向。

| 作者 | $=, \leq, <, \ll$ | $x \geq 0$ | $b = 0$ |
|---|---|---|---|
| Freedholm | $=$ | N | N |
| Farkas | $=$ | Y | N |
| 盖尔第一定理 | $\leq$ | N | N |
| 盖尔第二定理 | $\leq$ | Y | N |
| Stiemke | $<$ | N | Y |
| Mangasarian | $<$ | Y | N |
| Gordan | $\ll$ | N | Y |
| Ville | $\ll$ | Y | Y |
| Farkas 第二定理 | $=, \leq$ | Y | N |
| Antosiewicz 第一引理 | $\leq, <$ | N | Y |
| Antosiewicz II | $\leq, \ll$ | N | Y |
| Morris | $\leq, \ll$ | N | Y |
| Tucker | $=, \leq, <$ | N | Y |
| Motzkin | $=, \leq, \ll$ | N | Y |
| Slater | $=, \leq, <, \ll$ | N | Y |
| Geanakoplos | $=, \leq, \ll$ | N | N |

**表 1.** 择一性定理

定理1的 60 个特殊情形之一，Morris 的结果除外，因为它需要额外的变换。[7] 对于这些结果，当从原始问题中删除某些不等式时，如何修改对偶问题并不显而易见。[8]相比之下，定理1 提供了一个从原始问题中删除不等式的简单步骤。因此，无需逐一跟踪这些特殊情形。附录

[7]在 Morris(1994) 中，原始系统是一个线性不等式系统族的析取。他通过应用另一种择一性定理（表 1中的 Antosiewicz II）证明了这一结果。Morris 将该结果称为 Farkas 引理，并引用 Gale (1960) 的证明。[8]事实上，Perng(2017) 中关于 Tucker、Motzkin 和 Slater 定理的表述遵循 Mangasarian(1994) 的说法，明确要求严格不等式中出现的矩阵（$<$ 和 $\ll$）是“非空泛的”。Mangasarian(1994，第 28 页）声称，这一限制对其证明至关重要。事实上，即使没有这些限制，结果和证明仍然成立。

# 1 从基本版本证明统一版本

这里，我将从以下标准择一性定理（定理 1 ）推导出定理 2；该定理见 Gale (1960)。为求完整，我还将在第 2 节中使用傅里叶–莫茨金消元证明定理 2。

**定理 2** （基本择一性定理）
给定一个矩阵 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 和一个向量 $b \in \mathbf{R}^m$。以下情况恰有一种成立。

*P.* 存在 $x \in \mathbf{R}^n$ 满足

$$Ax \leq b.$$

*D.* 存在 $\lambda \in \mathbf{R}^m$ 满足

$$\lambda \geq 0, \qquad \lambda^T A = 0, \qquad \lambda^T b < 0.$$

在正文中，我证明了定理 1中的原始与对偶系统不可能同时可行。这里，我证明这两个系统中至少有一个可行。要应用定理 2，关键在于严格不等式总可以按比例放大，直到两边之差至少达到 1。形式化地说，定理 1 中的原始系统（不含非负约束）可行，当且仅当存在 $(x,t) \in \mathbf{R}^{n+1}$ 满足

$$\begin{aligned} t &\geq 1, \\ A_1(tx) &= tb_1, \\ A_2(tx) &\leq tb_2, \\ A_3(tx) &\leq tb_3, \\ \mathbf{1}^T A_3(tx) + 1 &\leq \mathbf{1}^T tb_3, \\ A_4(tx) + \mathbf{1} &\leq tb_4. \end{aligned}$$

Wit通过变量替换 $u = tx$，我们可以看出该命题成立 if

当且仅当存在满足以下条件的 $(u,t) \in \mathrm{R}^{n+1}$：

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ A_1 & -b_1 \\ -A_1 & b_1 \\ A_2 & -b_2 \\ A_3 & -b_3 \\ \mathbf{1}^T A_3 & -\mathbf{1}^T b_3 \\ A_4 & -b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ t \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -\mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

~ ~将左侧的矩阵记为$A$，右侧的向量记为 $b$。若该系统不可行，则根据定理2，存在

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1^+, \lambda_1^-, \lambda_2, \hat{\lambda}_3, \bar{\lambda}_3, \lambda_4) \in \mathbf{R}^{1+m_1+m_1+m_2+m_3+1+m_4}$$

满足

$$\lambda \geq 0, \qquad \lambda^T \tilde{A} = 0, \qquad \lambda^T \tilde{b} < 0. \tag{6}$$

令 $\lambda_1 = \lambda_1^+ - \lambda_1^-$和 $\lambda_3 = \hat{}\lambda_3 + \bar{\lambda}_3 \mathbf{1}$。那么（6）变为

$$\begin{aligned} \lambda_i \geq 0 \text{ for } i = 0, 2, 3, 4, \\ \sum_{i=1}^{4} \lambda_i^T A_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{4} \lambda_i^T b_i = -\lambda_0, \\ -\lambda_0 - \bar{\lambda}_3 - \lambda_4^T \mathbf{1} < 0. \end{aligned}$$

最后一个不等式意味着： $\lambda_0 > 0$ 或 $\bar{\lambda}_3 > 0$ 或 $\lambda_4^T \mathbf{1} > 0$。定理S1 中的条件（1 ）成立。因此，$(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4)$ 满足定理1中的对偶系统。

非负约束可以表示为增广的分量不等式，

带有逐分量不等式的

$$A_2' = \begin{bmatrix} A_2 \\ -I_n \end{bmatrix}, \qquad b_2' = \begin{bmatrix} b_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

应用定理 1 （不含非负约束）于该系统，将修改后的逐分量不等式的对偶向量记为 $\lambda_2' =$ （$\lambda_2$， $\lambda_2$）。ˆ从包含 $\lambda_2$ 的两个约束（M）和（L）中消去它，以逐分量不等式替代（L）中的等式。

若从原始系统中删去关系 $j$，对某个真子集 $j$ 中的所有 $J$， $\{1, 2, 3, 4\}$ 则将 $\lambda$ 中相应的分量从（6）中删去；这等价于将这些分量设为零，正如定理陈述中所规定的那样。

## 2 使用消元法证明基本版本

回顾一下，高斯消元法会依次从线性等式组中消去变量。傅里叶–莫茨金消元是针对线性不等式组的类似过程，不过每一步都会增加关系的数量，因此该算法在计算上效率低下。[9]

**引理 1** （消去一个变量）

给定一个矩阵 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ 和一个向量 $b \in \mathbf{R}^m$。存在一个整数 $p$ 和一个非负矩阵 $E \in \mathbf{R}^{p\times m}$，使得 *(i)* $EA$ 的第一列为零，并且 *(ii)* 系统 $Ax \leq b$ 可行，当且仅当系统 $EAx \leq Eb$ 可行。

我先由引理 1 证明定理 2。原始问题和对偶不可能同时可行，因为这将导出矛盾 $0 < 0$。因此，只需验证至少有一个系统可行。为此，我们对系统 $Ax \leq b$反复应用引理 1 。每一步中，未知数的数量减少一个；系统的可行性保持不变；并且每个新的

[9]虽然可以使用高效的线性规划算法来计算大型线性不等式系统的解，但对于证明而言，Fourier–Motzkin 已足够。

不等式都是原始¯ ¯系统中不等式的非负线性组合。经过 $n$ 步后，我们得到一个整数 $\bar{p}$ 和一个矩阵 $E$，满足：**(i)** $EA$¯是零矩阵；**(ii)** 系统 $Ax \leq b$ 可行，当且仅当 $0 \leq Eb$。¯因此，如果原始系统 $Ax \leq b$ 不可行，那么我们有 $0 \not\leq Eb$，也就是说，对于某个 $i$，有 $(\bar{E}b)_i < 0$。令 $\lambda^T$ 为 $\bar{E}$ 的第 $i$行，它是一个 $m$-向量。我们有 $\lambda \geq 0$（因为 $\bar{E}$ 非负）、$\lambda^T A = 0$（因为 $\bar{E}A$ 是零矩阵），以及 $\lambda^T b =$（$\bar{E}b$）$_i < 0$，证毕。

为证明引理1，根据 $A$ 各行中 $a_{i1}$的符号进行划分：

$$I_0 = \{i : a_{i1} = 0\}, \qquad I_+ = \{i : a_{i1} > 0\}, \qquad I_- = \{i : a_{i1} < 0\}.$$

向量不等式 $Ax \leq b$ 可表示为

$$a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i \in I_0 \tag{7}$$

$$x_1 \leq a_{k1}^{-1}(b_k - a_{k2}x_2 - \cdots - a_{kn}x_n), \quad k \in I_+ \tag{8}$$

$$x_1 \geq a_{\ell 1}^{-1}(b_\ell - a_{\ell 2}x_2 - \cdots - a_{\ell n}x_n), \quad \ell \in I_-. \tag{9}$$

对于任意固定的 $x_2, \ldots, x_n$，存在 $x_1$ 使得$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 满足$|I_+ \cup I_-|$ 中的不等式（8）–（9），当且仅当$(x_2, \ldots, x_n)$ 满足 $|I_+ \times I_-|$不等式[10]

$$a_{\ell 1}^{-1}(b_\ell - a_{\ell 2}x_2 - \cdots - a_{\ell n}x_n) \leq a_{k1}^{-1}(b_k - a_{k2}x_2 - \cdots - a_{kn}x_n), \quad (k.\ell) \in I_+ \times I_-. \tag{10}$$

将 **(7)** 与 **(10)** 合并，得到一个仅涉及 $|I_0| + |I_+||I_-|$ 的不等式系统，变量为 $x_2, \ldots, x_n$ 当且仅当系统 **(7)**–**(9)** 可行时，该系统才可行。新系统可写成矩阵形式 $EAx \leq Eb$，其中 $E$ 由以下各行组成：对所有 $e_i^T$，以及对所有 $i \in I_0$ 和 $a_{k1}^{-1}e_k^T - a_{\ell 1}^{-1}e_\ell^T (k, \ell) \in I_+ \times I_-$。 $EA$ 的第一列全为零（根据 $I_0$的定义），且 $E$ 非负

[10]正向蕴含显然成立。对于反向蕴含，注意到任何满足（$(x_2, .., x_n)$ 的解（10）都满足

$$\max_{\ell \in I_-} a_{\ell 1}^{-1}(b_\ell - a_{\ell 2}x_2 - \cdots - a_{\ell n}x_n) \leq \min_{k \in I_+} a_{k1}^{-1}(b_k - a_{k2}x_2 - \cdots - a_{kn}x_n).$$

对于这些界之间的任意 $x_1$，向量$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 满足（8）–（9）。

（根据 $I_+$ 和 $I_-$的定义）。

# 参考文献


Border, K. C.（2007）：“《约化式拍卖》再探”，*Economic The-ory*，31，167–181。 [1]

———（2013）：“替代线性不等式”，未发表的笔记，版本 2020.10.15::09.50。 [3, 4]

Crémer, J. 和 R. P. McLean（1988）：“贝叶斯拍卖与优势策略拍卖中的剩余完全提取”，《计量经济学》，56，1247–1257。[1]

Duffie, D.（2001）：动态资产定价理论，普林斯顿大学出版社，第3版。 [1]

Gale, D.（1960）：线性经济模型理论，麦格劳-希尔。 [4,5, 6]
Mangasarian, O. L.（1994）：非线性规划，工业与应用数学学会。 [5]
Morris, S.（1994）：“异质先验信念与信息不对称下的贸易”，《计量经济学》，62，1327–1347。 [5]Osborne, M. J. 和 A. Rubinstein（1994）：博弈论教程，麻省理工学院出版社。 [1]Pearce, D.（1984）：“可理性化策略行为与完美性问题”，《计量经济学》，52，1029–1050。 [1]Perng, C.-t.（2017）：“论一类等价于 Farkas 引理的定理”，《应用数学科学》，11，2175–2184。 [4, 5]

Reny, P. 和 B. Brooks（2021）：“一个典范博弈——近75年酝酿而成——展示矩阵博弈与线性规划的等价性”，工作论文。 [2]

Weinstein, J.（2020）：“最佳回应集合”，《经济理论通报》，8，105–112。 [1]