arXiv:2303.07482v1 [math.GT] 13 Mar 2023

有理 3-辫子的标准形

BO-HYUN KWON，JUNG HOON LEE

Abstract. 本文定义给定有理 3-缠结中三条互不相交桥弧集合的标准形。我们证明，同一有理 3-缠结的两个标准形之间，存在一系列标准跳跃移动，可将其中一个变为另一个。

1. Introduction

最初，约翰·康威（1970, [1]）提出的有理缠结指的是有理 2-缠结。J. Conway 通过将每个有理缠结对应到一个有理数，完成了有理缠结的分类。此外，若两个有理缠结等价，那么它们对应的有理数相同。根据有理缠结的定义，我们可以扩展有理缠结的含义，定义有理 n缠结，$n \geq 2$。在有理缠结被定义后的很长一段时间里，人们一直试图提前对有理三缠结进行分类。作为分类尝试之一，第一作者 [2]给出了一种比较两个有理三缠结的算法。然而，该算法并未为每个有理三缠结给出一个确定的代表元。本文定义了标准形，它是给定有理三缠结 T中由三个互不相交的桥弧 构成的一个特殊集合。我们为给出每个有理三缠结的确定代表元提供了线索。

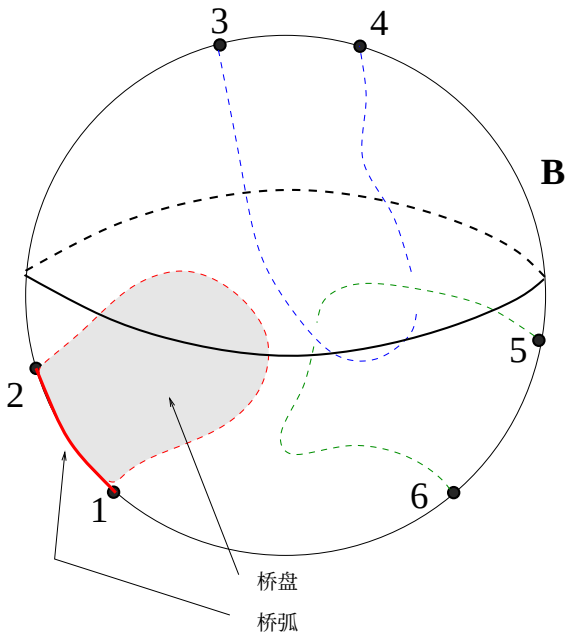


Figure 1. 有理三缠结中的桥盘和桥弧

1.1. 桥盘与桥弧。 设 $\tau = \tau_1 \cup \tau_2 \cup \tau_3$ 是 B中的一个有理三缠结，其中τ_1， τ_2， τ_3 是该有理三缠结的三条弦。称 B 中的圆盘 D 为一个桥盘

日期：2023年3月9日，星期四。

如果存在某个 $i \in \{1,2,3\}$，使得 int $D \cap \tau = \emptyset$ 与 $\partial D = \tau_i \cup \beta$，且 β 是 ∂B 中的一条简单弧，并满足 int $\beta \cap \tau = \emptyset$。若$\Sigma_0$中的简单弧 β . 6 与 τ_i 共同围成某个 $i \in \{1,2,3\}$中的桥盘，则称该弧为桥弧 。根据有理性的定义， B 中存在互不相交且不平行的三个桥盘，因此有理三缠结存在一组互不相交的三条桥弧。不过，这组桥弧并不唯一（相对于同痕而言），即使是同一个有理三缠结也是如此。在$\Sigma_{0,\ 6}$上选定两条互不相交的桥弧后，很容易找到第三条桥弧。根据下面的引理1，连接剩余两个穿孔点且与已有两条桥弧不相交的任何简单弧都应当是桥弧。因此，同一条有理三缠结的弦有无穷多条不同的桥弧。若简单闭曲线 γ 与$\Sigma_{0,\ 6}$ 中 β 的一个小正则邻域的边界同伦，则称该简单闭曲线是由桥弧 β 得到的。

引理1. 设 β_1 和 β_2 是 $\Sigma_{0,6}$ 上的两条互不相交的桥弧，其中 τ 是 B中的一个有理3缠结。设 β_3 是一条连接 $\Sigma_{0,6}$ 上剩余两个穿孔点的弧，且与 $\beta_1 \cup \beta_2$不相交。那么 β_3 也是 (B,τ)在 $\Sigma_{0,6}$ 上的一条桥弧。

设 $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 是 $\Sigma_{0,6}$ 上属于 $T = (B, \tau)$ 的一组三条互不相交的桥弧，称为 T 的弧系 ，或简称系。为便于论述，我们想在 $\Sigma_{0,6}$中构造一个基本形态。令 E_i 为图2中所示的 $\Sigma_{0,6}$ 内固定的二穿孔圆盘。令 $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$、 $\partial E = \partial E_1 \cup \partial E_2 \cup \partial E_3$和 $P = \Sigma_{0,6} \setminus E$。

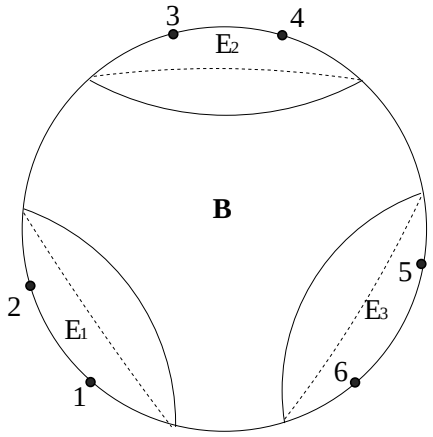


FIGURE 2. 基本构造

1.2. 有理3-缠结的弧系的 Dehn参数化 T。设 $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 为 T的弧系。类似于简单闭曲线的*Dehn*参数化论证（参见 [2]），我们可以如下参数化 $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3$ 。设 ω_i为 ∂E_i 的子弧，使得 ω_i 包含 ∂E_i 与 β 之间的所有交点。这些子弧称为窗口。通过考虑支撑在 ∂E_i上的 Dehn扭转，我们可以按照图 3 中的示意图定义 P 中的标准弧。注意，$P \cap \beta$ 的所有分支都可以通过赋予标准弧权数来实现。标准弧的权数表示与该标准弧平行的弧的条数。现在，我们研究E_i中的弧类型。为此，我们定义最内层二点穿孔圆盘 E_i' ，使其仅包含 β 与 E_i' 之间的竖直交点，如图 4 所示。我们可能需要对β 做同痕，使其具有E_i' ，从而相对于 ∂E 和 $\partial E'$处于极小一般位置，其中$\partial E' = \partial E_1' \cup \partial E_2' \cup \partial E_3'$。我们可能还需要按照图 4 中的示意图调整 E_i' 中半弧的形状。

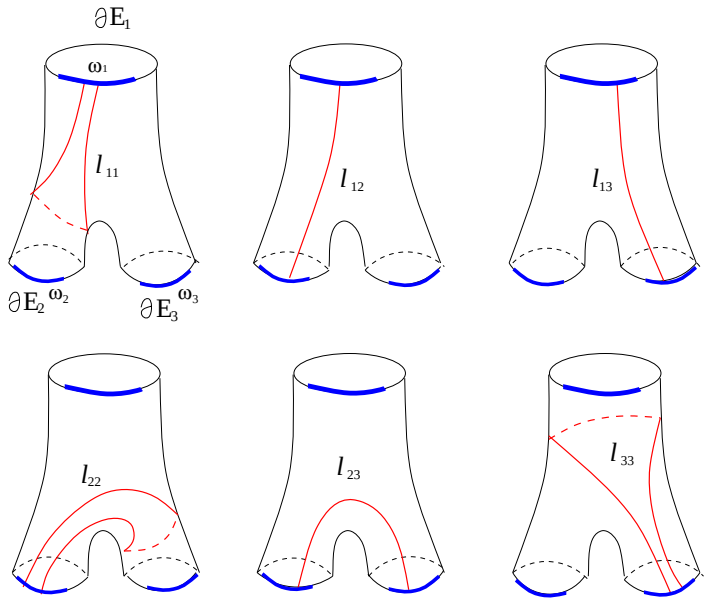


FIGURE 3. 标准弧

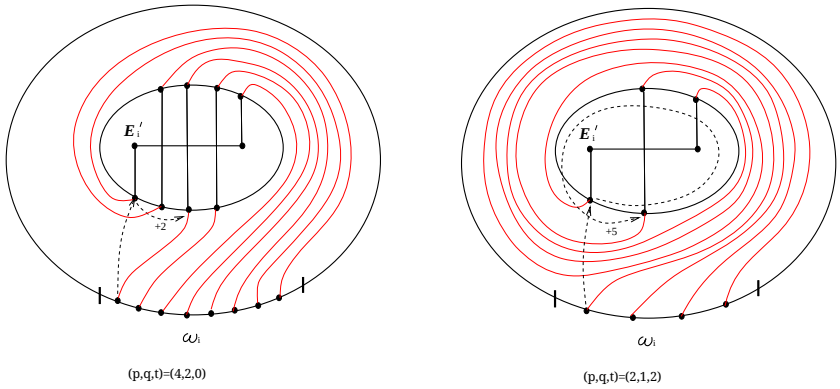


FIGURE 4. E_i中的弧类型

注意，两个整数 p 和 q 决定了 E_i中 β 的所有弧分支，其中p 是弧分支的数量，而 q 给出了 ω_i 上的 $2p$个端点与 $\partial E_i'$上的端点之间的连接模式。参见图 4，了解确定 q的规则。注意，由于所有弧分支彼此不相交，一个连接模式就能决定所有连接模式。综合以上论述，我们得到以下定理。

定理 2 (德恩定理的特殊情形 II)。 存在一一映射 $\phi: \mathcal{C} \to \mathbb{Z}^6$，使得 $\phi([\beta_i]) = (p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3)$，也就是说，它对简单弧（桥弧）的同痕类进行分类，其中 $\mathcal{C}$ 是简单弧同痕类的集合。

我们注意到，定理 2 对 $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3$ 也成立。若一个T 的弧系中，每条桥弧都通过取标准弧的权数，并为 E_i中的连接模式指定整数来实现，我们就称该弧系处于标准位置 。换言之，处于标准位置的弧系中的桥弧不会与 ∂E构成二边形。我们想指出，如果 $p_i = 0$ ，那么由于

β 与 E_i之间没有交点，我们无法确定连接模式。在这种情况下，为方便起见，我们将 q_i 赋为 0。我们注意到，如果 β处于标准位置，那么 $\beta \cup \partial E$ 处于极小一般位置，因为 Dehn参数化是良定义的。（参见 [2]。）

2. Normal forms of systems for a rational 3-tangle T

2.1. 标准形与桥弧替换。 设 $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 是有理三缠结 T 的弧系。假设 $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3$ 处于标准位置。若弧系 $\mathcal{B}$ 属于 T，且对于某个 $j \in \{1, 2, 3\}$， β 与 ω_i 在 ω_i 中不存在相邻的两个交点属于同一个 β_j，则称其为关于 ∂E 的标准形 。为证明标准形的存在性，假设存在两个或更多个连续交点不满足标准形的定义，如图5所示。注意， β_j 有两个子弧，其中每个子弧的一端是这些连续交点之一，另一端是 β_j 的两个端点之一，且它们与其余连续交点均不相交。令 c_1 和 c_2 为 β_j 的这两个子弧。按照图5第一个示意图，定义两个方向（+）和（−）。假设 c_1 和 c_2 分别沿（+）和（−）方向延伸，如图5第二个示意图所示。接着，构造一条新的桥弧，使其经过 c_1 和 c_2，并且与该弧系中除 β_j 之外的另外两条桥弧不相交，如图5第二个示意图所示。然后，将这条桥弧作为新弧系的一条桥弧。根据引理1，显然这条新弧也是桥弧。如果 c_1 和 c_2 仅沿其中一个方向延伸，如第三个示意图所示，则构造一条新的桥弧，使其经过 c_1 和 c_2，并且与该弧系中除 β_j 之外的另外两条桥弧不相交，如图5第四个示意图所示。这

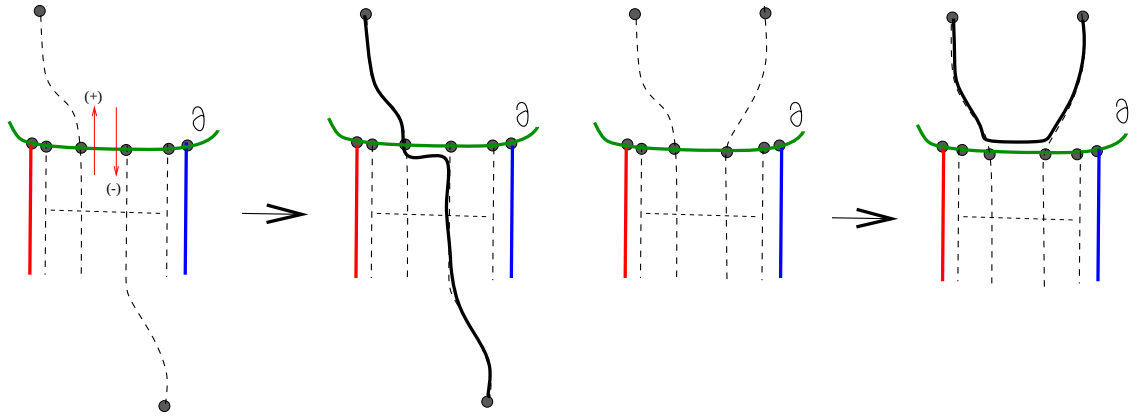


Figure 5. 桥弧替换，**BR**

该操作称为桥弧替换，相对于 ∂E简称为**BR** 。注意，通过**BR** 得到的新桥弧与 ∂E的（几何）交点更少。

引理3. 设 $\mathcal{B}$ 是 $T = (B, \tau)$的弧系。那么，存在一个相对于 ∂E的 T的标准形 $\mathcal{B}'$。

证明. 由于 ∂P 与 β 的交点数有限，通过一系列**BR**操作即可得到一个标准形。□

第一作者 [3] 证明了以下定理。下一个推论由该定理得出。

定理 4. 设 $\mathcal{B}$ 是关于 ∂E 的固定平凡有理 *3*-缠结 $T = (B, \epsilon)$ 的系统标准形。那么， $\mathcal{B}$ 在同痕意义下唯一。特别地，由 $\mathcal{B}$ 分别得到的三条简单闭曲线分别同伦于 ∂E_1、∂E_2 和 ∂E_3 。

推论5. 设 $\mathcal{B}=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 是 $T=(B,\tau)$ 的一个系统，其中 τ 是任意有理3-缠结。设 γ_1、γ_2、γ_3 分别是由 β_1、β_2 和 β_3 得到的简单闭曲线，且两两不相交。设 $\gamma=\gamma_1\cup\gamma_2\cup\gamma_3$。那么，关于 γ （而非关于 ∂E）的 T 系统标准形在同痕意义下唯一。此外，它就是 $\mathcal{B}$。

2.2. 由标准跳跃移动得到的标准形。对于给定的弧系 $\mathcal{B}=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$，若其对应于 T，我们定义如下的跳跃移动。在 ∂B 中取 β_i的一个正则邻域，记为 $N(\beta_i)$，使其与 β_j 和 β_k不相交，其中 $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$。现在，取一个矩形 R，使得 R的内部与 $N(\beta_i)$ β_j及 β_k 不相交，并且 R 的两条平行边分别是 $N(\beta_i)$和 β_j 的子弧。然后，如图 6 所示，通过修改后的带和构造一条新的桥弧。得到这条新桥弧的这一移动称为跳跃移动（越过 β_i）。注意，通过桥弧替换得到的桥弧也可以通过跳跃移动得到。

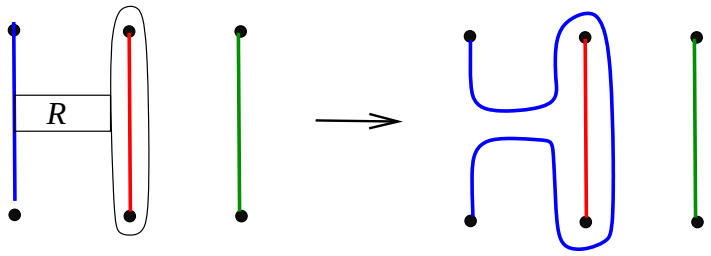


FIGURE 6.

假设 $\mathcal{B}$ 是关于 ∂E 的系统的一个标准形。如果通过跳跃移动将一条桥弧替换后得到的新弧系 $\mathcal{B}'$ 也是标准形，那么该跳跃移动称为标准跳跃移动。现在，我们讨论如何通过标准跳跃移动，从关于 ∂E 的 T 的标准形 $\mathcal{B}=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 得到新的标准形 $\{\beta_1',\beta_2,\beta_3\}$。

情形 1: E_i 包含标准形中的一条桥弧；以下定理给出了用于确定给定有理三缠结 T 的信息。

定理 6. 假设 $\mathcal{B}=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 和 $\mathcal{B}'=\{\beta_1',\beta_2',\beta_3'\}$ 分别是关于 ∂E 的两个有理3-缠结 T 和 T' 的标准形。设$(0,\ 0,\ p_2,\ q_2,\ p_3,\ q_3)$和$(0,\ 0,\ p_2',\ q_2',\ p_3',\ q_3')$分别为 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 的 *Dehn* 参数有序序列。那么，当且仅当 $i=2$ 的 $p_i=p_i'$、3和 $q_2-q_3=q_2'-q_3'$ 时， T 和 T' 同伦。

证明。 设 $\beta=\beta_1\cup\beta_2\cup\beta_3$和 $\beta'=\beta_1'\cup\beta_2'\cup\beta_3'$。由于 $p_1=p_1'=0$, E_1 包含 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 的一条桥弧。设 β_1 和 β_1' 分别为每个标准形的桥弧。注意，它们是同伦的。按照图7所示，通过在 β_1 上进行一系列跳跃变换， $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 都可以得到新的标准形。注意，进行这一系列跳跃变换后， $i=2,\ 3$ 的 p_i 和 p_i' 没有变化。图7右侧的图分为两部分； β_1 以及表示一个有理2-缠结的两条桥弧。首先，我们假设 T 和 T' 是同伦的。于是，由两条桥弧组成的各对所表示的有理2-缠结是同伦的。注意，一个有理2-缠结由 p 和 q唯一确定，其中 p 是两条桥弧之间的最小交数，而 E_2(或E_3)和 q 表示 ω_2 与 ω_3之间端点的连接模式。事实上，注意到 $q=q_2-q_3=q_2'-q_3'$。反过来，注意，如果 $q_2-q_3=q_2'-q_3'$，则对应的两个有理2-缠结是同伦的。因此， T和 T' 是同伦的。证毕。

□

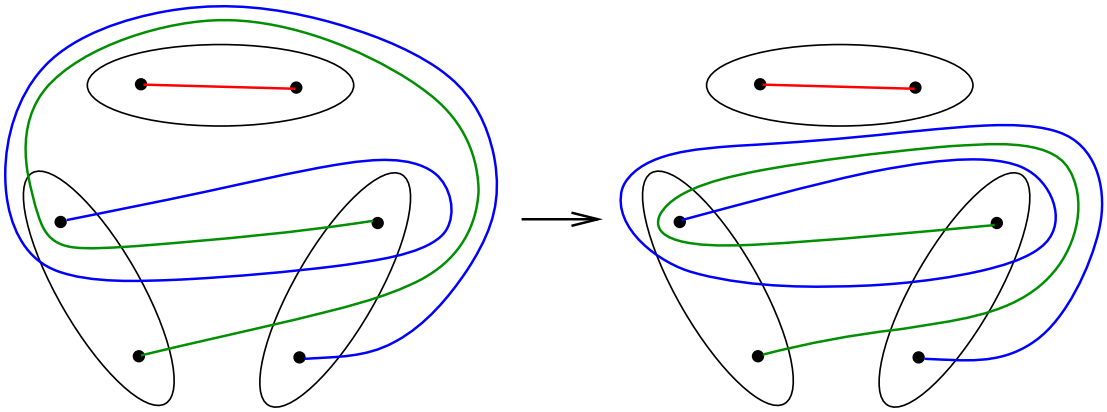


FIGURE 7.

情形2：一个有理三缠结 T 相对于 ∂E具有标准形 $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$，满足以下条件：对于所有 $i = 1, 2, 3$，$|\beta \cap \partial E_i| \geq 2$ $\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \beta_3$。

在这种情况下，我们使用标准跳跃移动来寻找优化后的标准形。首先定义标准正规跳跃移动。我们将在定理7中证明，标准正规跳跃移动是唯一的标准跳跃移动。

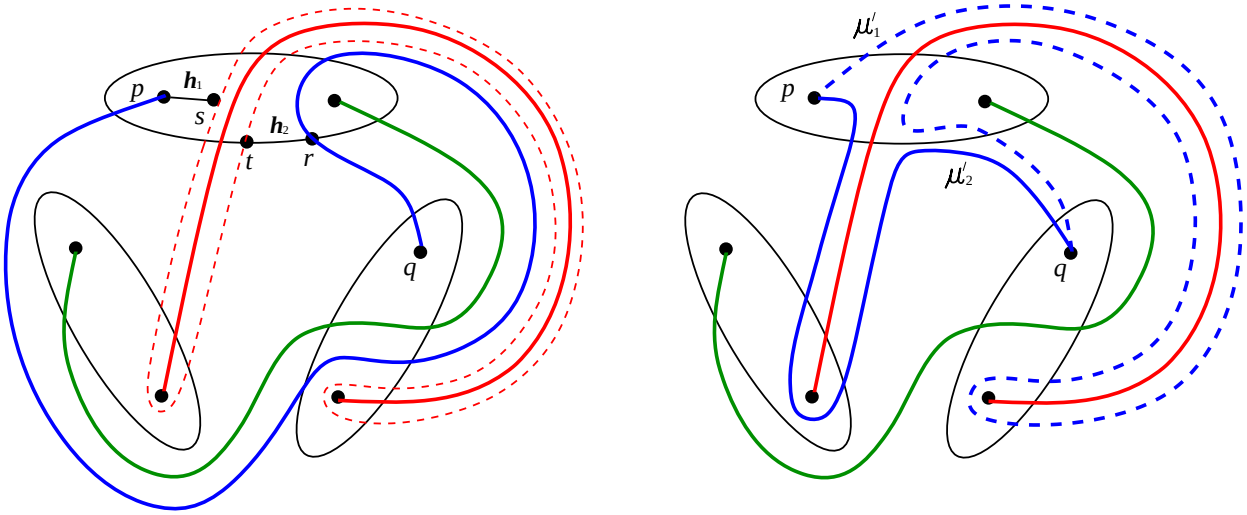


FIGURE 8.

◦ 标准正规跳跃移动：令 p 为 β_1 的一个端点，且该端点位于 E_i中。由于 $\mathcal{B}$ 是标准形且 $|\beta \cap \partial E_i| \geq 2$，因此 β_2 或 β_3 与 p 在 E_i 中相邻。不失一般性，假设 β_2 是与 p相邻的桥弧。现在，我们取 β_2, $N(\beta_2)$的一个小正则邻域，使其不与 β_1 和 β_3 相交，如图8中的第一幅图所示。接着，我们取一条从 p 到 $\partial N(\beta_2)$中一点 s 的最短路径 h_1，该点位于E_i 中，如图8中的第一幅图所示。由于 β_2 是与 p相邻的桥弧，h_1 不与 β相交。注意，β_1 与 ∂E 至少有一个交点，因此它在 ∂E 中有一个相邻交点，该交点属于 β_2，因为 β_2 是与 p相邻的桥弧。令 r 为沿 β_1 从 q出发时它们遇到的第一个交点。令 t 为 $\partial N(\beta_2)$之间的一个交点

以及 ∂E，使得连接 r 和 t 的 ∂E 子弧不与 $\beta_2 \cup \beta_3$相交。令 h_2 为 ∂E的$\tilde{}$子弧。令 h_2 为从 q 到 t 的路径，它由 β_1 上位于q和 r之间的子弧与 h_2组成。从 s到 t的 $\partial N(\beta_2)$有两个弧分支 β_{21}和 β_{22}。$\tilde{}$ $\tilde{}$令 $\mu_1 = h_1 \cup \beta_{21} \cup h_2$和 $\mu_2 = h_1 \cup \beta_{22} \cup h_2$。注意， μ_1和 μ_2 均与$\beta_2 \cup \beta_3$不相交。此外，我们可以对 μ_1和μ_2 进行同痕，使它们除两个端点外彼此不相交，并且仅在端点处与 β_1 相交。令 μ_1' 和 μ_2' 分别为由 μ_1和 μ_2 同痕得到的简单弧。由于 $\mu_1' \cup \mu_2'$ 将 β_2 和 β_3分隔开， β_1 应与 μ_i'中的一个同伦。不失一般性，假设 μ_1' 与 β_1同伦。注意， μ_2 是通过对 μ_1 执行跨越 β_2的跳跃移动得到的。

这种跳跃移动是 β_1 的一种标准跳跃移动，称为标准正规跳跃移动 。我们对 μ_2' 作同痕，使其相对于 ∂E 处于极小一般位置。我们断言这是一种标准跳跃移动。

断言的证明。：取 β_1 与 ∂E_j 的一个交点 a 。由于 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 相对于 ∂E 是标准形，因此如图 9 的示意图 $(a-1)$、$(a-2)$ 和 $(a-3)$ 所示，a 两侧的相邻交点有三种情形。在 $(a-1)$ 中，有两条与 a 相邻的红色虚线。注意，取 μ_2' 时，其中一条会消失，因为它是 μ_1' 的一部分，而 μ_1' 与 β_1 同伦。在 $(a-2)$ 中，绿色弧与红色弧之间没有 μ_2' 的子弧，因为它们之间的红色虚线弧应是 μ_1' 的一部分，而 μ_1' 与 β_1 同伦。在 $(a-3)$ 中，如果绿色弧之间的蓝色弧$\tilde{}$是 h_2 的一部分，那么我们就需要考虑两条蓝色虚线弧，它们分别是 μ_1' 和 μ_2' 的一部分。显然，只有一条蓝色虚线弧是 μ_2' 的一部分。现在考虑绿色弧与红色弧相邻的情形，如图 9 的示意图 (b) 所示。在此情形下，检查标准性时，无论红色虚线弧是否是 μ_2' 的一部分都无关紧要，但它确实应当是。最后，我们得出结论： $\{\mu_2', \beta_2, \beta_3\}$ 是标准形，因此它是一种标准跳跃移动。

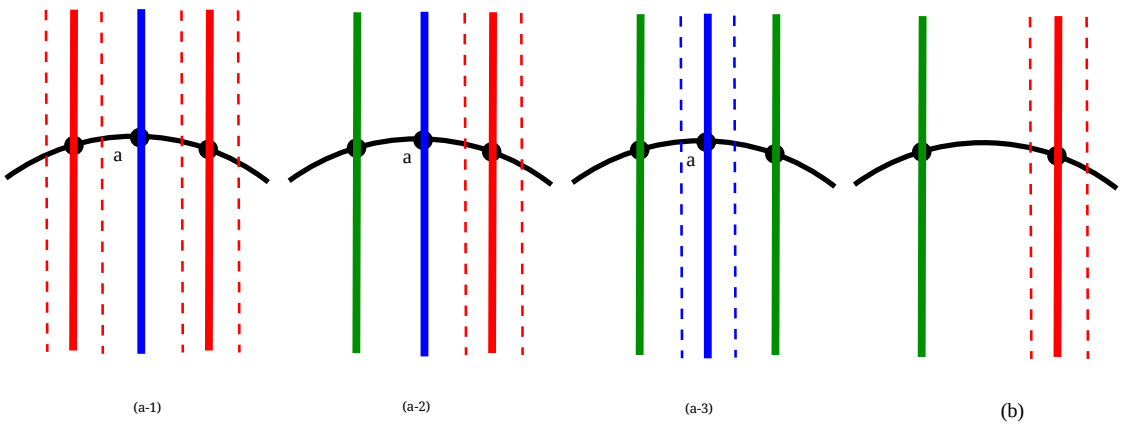


FIGURE 9.

□

下面的定理说明了标准跳跃移动的唯一性。

定理7。 设 $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 是相对于 ∂E 的 T 标准形。则存在唯一的桥弧 β_1' ，用它替换 β_1 ，使其不同伦于 β_1 ，并且 $\{\beta_1', \beta_2, \beta_3\}$ 是相对于 ∂E 的 T 标准形。

证明。设 $\beta_1' = \mu_2'$。于是，我们注意到 $\beta_1 \cup \beta_1'$ 将 β_2 与 β_3 分隔开。图10中的第一个示意图说明了这一情形。设 A 和 B 是 S^2 中由 $\beta_1 \cup \beta_1'$ 围成的两个圆盘区域。假设 A 包含 β_2，而 B 包含 β_3。为了

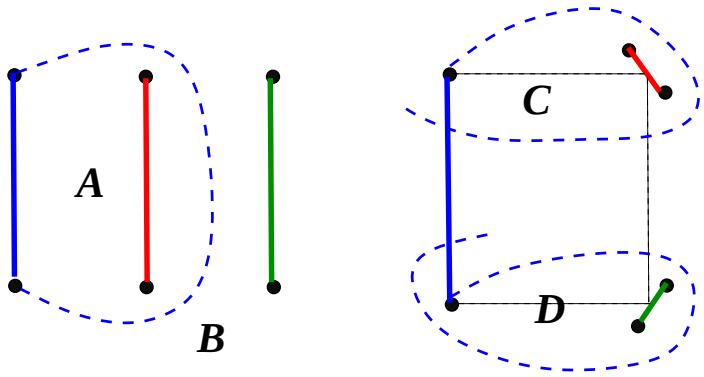


FIGURE 10.

为了导出矛盾，我们假设存在一个与 β_1 和β_1' 都不同伦的 β_1''，且 $\{\beta_1'', \beta_2, \beta_3\}$ 是相对于 ∂E 的标准形。注意，$\beta_1 \cup \beta_1''$也将 β_2和 β_3 分隔开。我们首先假设 $\beta_1 \cup \beta_1''$ 如图10的第一个示意图所示，将 S^2 分成两个连通分支。我们考察$(\beta_2 \cup \beta_3) \cap \partial E$的点分量。首先假设，在某个 i 中，$\beta_2 \cup \beta_3) \cap \partial E$ 有两个相邻且颜色不同的点，并且 β_1 经过连接这两个点的 ∂E_i 子弧。于是，β_1''不能经过同一子弧，因为从 β_2 上的一点出发的简单路径在两次遇到 $\beta_1 \cup \beta_1''$ 时应返回分量 A。因此，该简单路径不能终止于 β_3上的一点。

其次，我们假设在某个 i 和 β_1 中，∂E_i 内的 $(\beta_2 \cup \beta_3) \cap \partial E$ 有两个相邻且颜色不同的分支，并且它们不经过连接这两个分支的 ∂E_i 子弧。我们断言 β_1'' 应经过 ∂E_i 的子弧。由此可知，从 β_2 上的一点到 β_3 上的一点的路径应与 $\beta_1 \cup \beta_1''$ 相交。

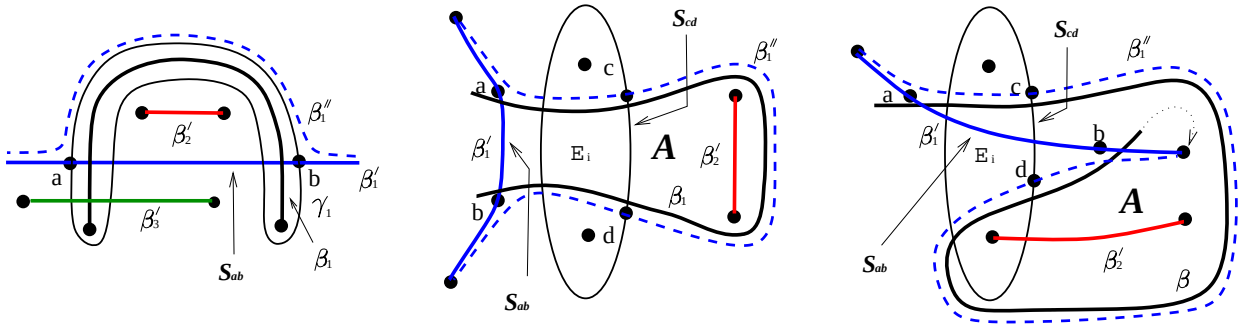
最后，我们假设对于某个 i，∂E_i 中的 $(\beta_2 \cup \beta_3) \cap \partial E$ 有两个颜色相同的相邻分支。显然，由于正规性，β_1 经过连接它们的 ∂E_i 子弧。我们注意到，由于正规性，β_1'' 也应经过 ∂E_i 的同一子弧。

根据上述三种情况，我们注意到 β_1' 和 β_1'' 与 ∂E的相交模式相同。这意味着根据定理 2，β_1' 和 β_1'' 同伦。

现在，假设 $\beta_1 \cup \beta_1''$ 将 S^2 分成两个以上的连通分支。令 C 和 D 分别为包含 β_2 和 β_3 的连通区域，如图10的第二幅图所示。我们注意到 C 和 D之间没有公共面。换言之，它们要么交于一点，要么彼此不相交。采用与前一种情况类似的论证，我们可以验证 β_1 和 β_1'' 与 ∂E 的相交模式相同。这意味着 β_1'' 与 β_1同伦。这就产生了矛盾，并完成了证明。□

定理8. 设 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{B}'$ 是相对于 ∂E的 T 的两个标准形。那么，$\mathcal{B}$ 可以通过一系列标准跳跃移动从 $\mathcal{B}'$ 得到。

证明。设 $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$和 $\mathcal{B}' = \{\beta_1', \beta_2', \beta_3'\}$是关于 ∂E的两个不同的 T正规形。设 γ_1、γ_2、γ_3分别由 β_1、β_2、β_3得到，且它们两两不相交。设 $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$。根据推论5，存在 γ_i和 β_j'，使得



(a) (b-1) (b-2)

FIGURE 11.

γ_i 与 β_j' 之间的交点中有两个在 γ_i中相邻。不失一般性，假设 β_1' 与 γ_1有一对相邻交点 a 和 b （$\subset \gamma$）。换言之，如图 11 的示意图（a）所示， γ_1 上位于 a 和 b 之间的子弧与 $\beta' = \beta_1' \cup \beta_2' \cup \beta_3'$ 没有交点。设 S_{ab} 是 β_1' 上位于 a 和 b之间的子弧。我们强调，示意图（a）只是可能的示意图之一。设 β_1'' 是如图 11 的示意图（a）所示，由 β_1' 通过关于 γ 的 **BR** 得到的桥弧。我们稍微调整 β_1'' 的位置，使其除两个端点外不与 β_1' 相交。为方便起见，我们将修改后的简单弧记作 β_1''。注意， β_1'' 与 β_1' 不同伦，因为 $|\beta_1'' \cap \gamma| < |\beta_1' \cap \gamma|$。此外，它与 $\beta_2' \cup \beta_3'$不相交。因此， $\beta_1' \cup \beta_1''$是一条将 β_2' 与 β_3'分隔开的简单闭曲线。

现在，我们证明 $\{\beta_1'', \beta_2', \beta_3'\}$ 是关于 ∂E 的 T 的标准形。由此便完成了该定理的证明，因为 $|(\beta_1'' \cup \beta_2' \cup \beta_3') \cap \gamma| < |(\beta_1' \cup \beta_2' \cup \beta_3') \cap \gamma| < \infty$。

我们首先断言，当满足 $\{\beta_1'', \beta_2', \beta_3'\}$ 时， ∂E 中不存在仅属于 β_2' 或 β_3' 的相邻交点。若存在仅属于 β_2' 或 β_3' 的相邻交点，那么它们之间必有一个 β_1' 与 ∂E 的单一交点，因为 $\{\beta_1', \beta_2', \beta_3'\}$ 是关于 ∂E 的 T 的标准形。由于 $\beta_1' \cup \beta_1''$ 将 β_2' 与 β_3' 分隔开，给定的交点应分别属于 β_2' 和 β_3' 。这就产生了矛盾。因此，该断言成立。

现在，我们声称，当有 $\{\beta_1'', \beta_2', \beta_3'\}$时，在 ∂E 中也不存在仅属于β_1'' 的相邻交点。为证明这一声称，我们假设存在这样的相邻交点。那么，如图 11 的示意图 (b-1) 和 (b-2) 所示，有两种可能的情形，其中点 c 和 d 是 ∂E中属于β_1'' 的两个相邻交点。令 S_{cd} 为 ∂E_j 的子弧，它连接 c 和 d ，且不再与 $\beta_1'' \cup \beta_2' \cup \beta_3'$相交。于是， S_{cd} 与 β_1''的子弧围成一条简单闭曲线 S ，使得S 包围 β_2' 和 β_3'中的一个。不失一般性，假设 S 包围 β_2'。由于$\beta_1' \cup \beta_1''$ 分隔β_2' 和β_3' ，且 S 分隔β_2' 和β_3'，因此$\beta_2 \cup \beta_3$与 S_{ab}之间以及 $\beta_2 \cup \beta_3$与 S_{cd}之间的交点模式在同伦意义下相同。如果 β_2或 β_3同伦于β_2' ，那么这就违反了 $\mathcal{B}$ 相对于 ∂E 为标准形的条件，因为要么 $(\beta_2 \cup \beta_3) \cap S_{cd}$ 是空集，要么 β_2 或 β_3 与S_{cd}有多于一个交点。因此，我们假设 β_2 和 β_3 均不同伦于 β_2'。令 A 为由 S_{ab}的子弧（或 S_{ab}的延长弧）与 β_1围成的区域$\widehat{\ }$，即简单闭曲线 S 所围成的区域；如图 11 所示，该区域包含 β_2' 。注意， A 的内部与 β_1不相交。还要注意，存在一条简单弧连接剩下的两个

穿孔点（不是 $\beta_1 \cup \beta_2'$ 中的四个穿孔点），使其与 $\beta_1 \cup \beta_2'$ 和 A不相交。根据引理1，它将是一条桥弧。令 β_3''为这条桥弧。于是，$\{\beta_1, \beta_2', \beta_3''\}$ 是同一个有理三缠结 T的一个系统。取由 β_1，β_2' 和 β_3''得到的两两不相交的三条简单闭曲线 γ_1，γ_2'和 γ_3''，我们考察 γ_2 和 γ_3。注意，$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$也是 T的一个系统。根据推论5，注意到 $\beta_2 \cup \beta_3$ 与 S_{ab} 有两个相邻交点，它们属于同一个 β_2 或 β_3，因为 β_1 与 $\gamma_1 \cup \gamma_2' \cup \gamma_3''$不相交。此外，回想一下，$\beta_2 \cup \beta_3$ 与 S_{ab}之间以及 $\beta_2 \cup \beta_3$ 与S_{cd} 之间的交点模式相同。这与 $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 相对于 ∂E为标准形的条件相矛盾。至此，这一声称得证。最后，我们证明了 $\{\beta_1'', \beta_2', \beta_3'\}$ 是 T 相对于 ∂E的标准形。

□

Acknowledgements

本研究得到韩国国家研究基金会（NRF）基础科学研究计划的资助，该计划由教育部资助（NRF- 2020R1I1A1A01052279）。

References

[1] J. Conway，《纽结与链环的枚举及其某些代数性质》，载于《抽象代数中的计算问题》（Pergamon，牛津出版社，1970年），第329–358页。[2] B. Kwon，《一种对有理》3《-缠结进行分类的算法》，《纽结理论及其应用》24（2015），第1期，1550004（62页）。[3] B. Kwon，《关于识别平凡有理 3-缠结》，*preprinted*[4] R. C. Penner；J. L. Harer《轨道图的组合学》，《数学年刊研究》第125号，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1992年。xii+216 页。