arXiv:2303.07553v1 [math.CV] 14 Mar 2023

在 $\mathbb{C}^n$ 单位球上伯格曼投影算子的变指数勒贝格空间加权范数不等式

DAVID BÉKOLLÈ、EDGAR LANDRY TCHOUNDJA 和
ARSÈNE BRICE ZOTSANGOUFACK

摘要。本文扩展了 Békollè-Bonami B_p 权重理论。这里，我们将常数 p 替换为非负可测函数 $p(\cdot)$，该函数是一个下界为 1 的对数 Hölder 连续函数。我们证明，当且仅当 w 属于广义 Békollè-Bonami 类 $B_{p(\cdot)}$时，$\mathbb{C}^n$ 单位球上的伯格曼投影算子在加权变指数勒贝格空间 $L^{p(\cdot)}(w)$上连续。为此，我们定义了一个极大函数，并证明当 $w \in B_{p(\cdot)}$时，该函数在 $L^{p(\cdot)}(w)$上有界。接下来，我们陈述并证明一个加权外推定理，由此得出结论。

1. 引言

本文旨在将 Békollè-Bonami 定理推广 [2] 到单位球上的伯格曼投影算子 $\mathbb{B}$，$\mathbb{C}^n$ 使其适用于加权变指数勒贝格空间。Chacon 和 Rafeiro 研究了无权变指数勒贝格空间的情形 [4, 14]。他们证明，对于满足对数赫尔德连续且下界为$(\cdot)$的指数函数，伯格曼投影算子在变指数勒贝格空间上有界1 （参见下文定义 1.1 ）。他们证明中用到的工具包括：经典 Békollè-Bonami 定理、Hardy-Littlewood 极大函数在变指数勒贝格空间上的有界性，以及一个外推定理。关于变指数勒贝格空间的基本性质，例如 Hardy-Littlewood 极大函数的有界性和外推定理，我们参见[9, 10]。

σ-代数是 $\mathbb{B}$ 上的 Borel σ-代数。设 ν 是 $\mathbb{B}$. 上的一个正测度。 $\mathbb{B}$上的变指数勒贝格空间记为 $L^{p(\cdot)}(\nu)$，它是经典勒贝格空间的一种推广，通过将常指数 p 替换为可测指数函数 $p(\cdot) : \mathbb{B} \to [0, \infty)$ 得到。我们用 $\mathcal{P}(\mathbb{B})$ 表示 $\mathbb{B}$. 上所有指数函数 $p(\cdot)$ 构成的族。对于 $\mathbb{B}$的可测子集 E，我们引入以下记号：

$$p_-(E) = ess \inf_{z\in E} p(z) \quad \text{and} \quad p_+(E) = ess \sup_{z\in E} p(z)$$

并且我们将使用记号 $p_- = p_-(\mathbb{B})$ 和 $p_+ = p_+(\mathbb{B})$。我们用 $\mathcal{P}_+(\mathbb{B})$ 表示由满足 $p_+ < \infty$. 的那些 $p(\cdot)$ 组成的 $\mathcal{P}(\mathbb{B})$ 子族。更确切地说，对于

2010 数学学科分类。32A10；46E40；47B35。关键词和短语。变指数勒贝格空间、变指数伯格曼空间、加权不等式、伯格曼投影算子。

$p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{B})$，我们称 $f \in L^{p(\cdot)}(\nu)$，若存在某个 $\lambda > 0$，使得 $\rho_{p(\cdot)}(\frac{f}{\lambda}) < \infty$，其中

$$\rho_{p(\cdot)}(f) := \int_{\mathbb{B}} |f(z)|^{p(z)} d\nu(z).$$

对于 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_+(\mathbb{B})$，这个定义可简化如下： $f \in L^{p(\cdot)}(\nu)$，若 $\rho_{p(\cdot)}(f) < \infty$. 当 ν 是一个 σ-有限测度，且 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{B})$ 满足 $p(\cdot) \geq 1$ 时，该泛函

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \quad \rho_{p(\cdot)} \left(\frac{f}{\lambda} \right) \leq 1 \right\}$$

是 上的一个范数。这里，对于 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 和 $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in \mathbb{B}$，我们定义

$$\langle z, \zeta \rangle = z_1 \overline{\zeta_1} + \cdots + z_n \overline{\zeta_n} \qquad \text{and} \qquad |z| = \langle z, z \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

空间 $L^{p(\cdot)}(\nu)$；赋予该范数后， $L^{p(\cdot)}(\nu)$ 是一个巴拿赫空间。

我们用 μ 表示 $\mathbb{B}$. 上的勒贝格测度。 $\mathbb{B}$ 上的非负局部可积函数称为权。若 $d\nu = wd\mu$ 对于权 w 成立，则称 $L^{p(\cdot)}(\nu)$ 为加权变指数勒贝格空间。下文中， α 是一个正数，并令$d\mu_\alpha(z) = (1 - |\zeta|^2)^{\alpha-1} d\mu(z)$。我们将重点讨论加权变指数勒贝格空间 $L^{p(\cdot)}(wd\mu_\alpha)$，并简记为 $L^{p(\cdot)}(w)$。

在本文中，我们取

$$d(z, \zeta) = \begin{cases} ||z| - |\zeta|| + \left| 1 - \frac{\langle z, \zeta \rangle}{|z||\zeta|} \right| & \text{if } z, \zeta \in \overline{\mathbb{B}} \setminus \{0\} \\ |z| + |\zeta| & \text{if } z = 0 \text{ or } \zeta = 0 \end{cases}.$$

此应用 d 是 $\mathbb{B}$. 上的一个伪距离。具体而言，对于所有 $z, \zeta, \xi \in \mathbb{B}$，我们有$d(z, \zeta) \leq 2(d(z, \xi) + d(\xi, \zeta))$，且 $0 \leq d(z, \zeta) < 3$.此外，对于 $z \in \mathbb{B}$和 $r > 0$，我们用.....表示

$$B(z, r) = \{\zeta \in \mathbb{B} : \, d(z, \zeta) < r\}$$

以 z 为中心、半径为 $r > 0$的开伪球。

定义 1.1. 函数 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{B})$ 在 $\mathbb{B}$ 上是对数赫尔德连续的，如果存在一个正数常量 $c > 0$，使得对于所有 $z, \zeta \in \mathbb{B}$

$$|p(z) - p(\zeta)| \leq \frac{c}{\ln(e + \frac{1}{d(z,\zeta)})} \quad \text{if} \quad z \neq \zeta. \tag{1.1}$$

我们用 $\mathcal{P}^{\log}(\mathbb{B})$ 表示 $\mathbb{B}$. 上所有对数赫尔德连续函数构成的空间。容易验证， $\mathcal{P}^{\log}(\mathbb{B}) \subset \mathcal{P}_+(\mathbb{B})$。按照惯例，令 $\mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{B}) = \left\{ p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{B}) : \quad p_- > 1 \right\}$。

$\mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{B})$的一个例子是 $p(z) = 2 + \sin|z|$. 我们将 $\mathcal{P}(\mathbb{B})$中由满足 $p_- > 1$. 的那些$p(\cdot)$构成的子族记为 $\mathcal{P}_-$。因此， $\mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{B}) = \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{B}) \cap \mathcal{P}_-(\mathbb{B})$。

定义 1.2。 我们将满足 $\overline{B} \cap \partial\mathbb{B} \neq \emptyset$的 $\mathbb{B}$ 的伪球 B 的集合记为 $\mathcal{B}$。接下来，我们定义极大函数 m_α 如下：

$$m_\alpha f(z) = \sup_{B \in \mathcal{B}} \frac{\chi_B(z)}{\mu_\alpha(B)} \int_B |f(\zeta)| d\mu_\alpha(\zeta).$$

注意，根据引理 2.1， $\mathcal{B}$ 是与 $\mathbb{B}$.的边界相接的伪球集合

在经典勒贝格空间中，我们有如下定义。

定义 1.3. 设 $p > 1$ 为常指数。Békollè-Bonami B_p 权类由满足以下条件的权重 w 构成：

$$\sup_{B\in\mathcal{B}}\left(\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\int_B w d\mu_\alpha\right)\left(\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}d\mu_\alpha\right)^{p-1}<\infty.$$

B_p 的这一等价定义如下：

$$\sup_{B\in\mathcal{B}}\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\|w^{\frac{1}{p}}\chi_B\|_p\|w^{-\frac{1}{p}}\chi_B\|_{p'}<\infty,$$

其中，p' 是 p的共轭指数，即 $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$

同理，我们引入 B_p 权重类的变指数推广。与经典情形类似，对于 $p(\cdot)\in\mathcal{P}_-(\mathbb{B})$, 若对所有 $z\in\mathbb{B}$ 都有以下关系，则称 $p'(\cdot)$为 $p(\cdot)$的共轭指数函数：

$$\frac{1}{p(z)}+\frac{1}{p'(z)}=1.$$

此外，我们定义 $\mathcal{P}_\pm(\mathbb{B})=\mathcal{P}_-(\mathbb{B})\cap\mathcal{P}_+(\mathbb{B})$，它是 $\mathcal{P}(\mathbb{B})$的子族，由满足 $1<p_-\le p_+<\infty.$ 的指数函数 $p(\cdot)$构成。现在我们来定义变指数 Békollè-Bonami 权重类。

定义 1.4. 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}_\pm(\mathbb{B})$。权 w 属于 $\mathbb{B}$ 上的变指数 Békollè-Bonami 类，记作 $B_{p(\cdot)}$, 如果

$$[w]_{B_{p(\cdot)}}:=\sup_{B\in\mathcal{B}}\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\|w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_B\|_{p(\cdot)}\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_B\|_{p'(\cdot)}<\infty. \tag{1.2}$$

我们在 $L^1(\mathbb{B},d\mu_\alpha)$ 上定义算子 P_α，如下：

$$P_\alpha f(z)=\int_{\mathbb{B}}\frac{f(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{n+\alpha}}d\mu_\alpha(\zeta).$$

算子 P_α 在 $\mathbb{B}$ 的 $L^2(\mathbb{B},d\mu_\alpha)$ 上的限制称为伯格曼投影算子。我们还定义正伯格曼算子 P_α^+，如下：

$$P_\alpha^+ f(z)=\int_{\mathbb{B}}\frac{f(\zeta)}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{n+\alpha}}d\mu_\alpha(\zeta).$$

现在回顾经典的 Békollè-Bonami 定理：

定理 1.5. [2] 设 w 为非负可测函数，且 $1<p<\infty$ (p是常指数）。 以下两个断言等价。

1. *Bergman* 算子 P_α 在 $L^p(wd\mu_\alpha)$ 上有定义且有界；2. $w\in B_p$。

此外，P_α^+在 $L^p(wd\mu_\alpha)$ 上定义良好且有界，当且仅当 $w\in B_p$。

本文旨在证明以下对前述定理的推广：

定理 1.6. 设 w 为非负可测函数，且 $p(\cdot)\in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$。以下两个断言等价。

1. *Bergman* 算子 P_α 在 $L^{p(\cdot)}(wd\mu_\alpha)$ 上定义良好且有界；2. $w \in B_{p(\cdot)}$.

此外， P_α^+在 $L^{p(\cdot)}(wd\mu_\alpha)$ 上定义良好且有界，条件是 $w \in B_{p(\cdot)}$。

如果 $w(\mathbb{B}) = 0$，即在 $\mathbb{B}$. 上几乎处处有 $w \equiv 0$，那么所研究的问题显然成立。我们假设 $w(\mathbb{B}) > 0$.

在 [11], Diening 和 Hästo 引入了定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的变指数 Muckenhoupt 权类 $A_{p(\cdot)}$，并证明当 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ 时，Hardy-Littlewood 极大函数在 $L^{p(\cdot)}(w)$ 上有界的必要条件是 $w \in A_{p(\cdot)}$。为了处理这一必要条件，他们引入了一个新类 $A_{p^\cdot(\cdot)}^+$；当 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ 时，该类与 $A_{p(\cdot)}$ 一致，但其条件更易于检验。更准确地说，他们证明了当 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{R}^n)$ 时，类 $A_{p^\cdot(\cdot)}^+$ 包含于类 $A_{p(\cdot)}$，但将证明反向包含关系留待日后研究。之后，Cruz-Uribe 和这两位作者 [7] 利用 Calderón-Zygmund 分解为这一结果给出了新的证明，并且还证明了反向蕴含。最近，Cruz-Uribe 和 Cummings [6] 将[7] 的结果推广到了齐次型空间。

本文将采用 [11, 7] 的技巧来处理定理 1.6 中必要条件的证明。具体而言，我们将引入一个记作 $B_{p^\cdot(\cdot)}^+$ 的新类，当 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$ 时，该类与 $B_{p(\cdot)}$ 一致。为处理充分条件，我们借助 [6] 的结果：对于 $p(\cdot)\in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$ 且 w 属于相应权重类 $A_{p(\cdot).}$ 的情形，齐次型空间 $\mathbb{B}$ 上的 Hardy-Littlewood 极大函数在 $L^{p(\cdot)}(w)$ 上有界。证明分为两步。首先，利用这一结果证明：对于 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$，若 $w \in B_{p(\cdot).}$，则极大函数 m_α 在 $L^{p(\cdot)}(w)$ 上有界。其次，我们基于第一步建立一个新的外推定理，从而完成定理 1.6 中充分条件的证明。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾一些预备知识。接着，在第 3 节中，我们介绍加权变指数勒贝格空间、变指数 Békollè-Bonami 类和 Muckenhoupt 权类的性质。本节最后，我们陈述 Cruz-Uribe 和 Cummings 关于 Hardy-Littlewood 极大函数在 $\mathbb{B}.$ 上的 $L^{p(\cdot)}(w)$ 有界性的定理。在第 4 节中，我们证明定理 1.6 中条件 $w^{\frac{1}{p^\cdot}}(\cdot) \in L^{p(\cdot)}(d\mu_\alpha)$ 和 $w^{-\frac{1}{p^\cdot}}(\cdot) \in L^{p'}(\cdot)(d\mu_\alpha)$ 的必要性。在第 5 节中，我们定义并研究类 $B_{p^\cdot}^+(\cdot)$，并证明恒等式 $B_{p^\cdot}^+(\cdot) = B_{p(\cdot)}$，同时证明反向包含关系 $A_{p(\cdot)}$ 包含于 $A_{p^\cdot}^+(\cdot)$。在第 6 节中，我们证明定理 1.6 中的必要条件。在第 7 节中，我们证明，当 $w \in B_{p(\cdot).}$ 时，极大函数 m_α 在 $L^{p(\cdot)}(w)$ 上有界。最后，在第 8 节中，我们证明一个加权外推定理，并由此推导出定理 1.6 中充分条件的证明。

设 a 和 b 为两个正数。本文中，若存在 $C > 0$ 使得 $a \le Cb$，则记作 $a \lesssim b$。若 $a \lesssim b$ 且 $b \lesssim a$，则记作 $a \simeq b$。

2. 预备知识

本节介绍关于 $\mathbb{C}^n$ 的单位球作为齐次型空间，以及变指数勒贝格空间的一些背景知识。

2.1. **单位球是一个齐次型空间**。 在本小节中，我们回顾一些引理，这些引理出自 [2] 该文首次对此进行了研究 $(\mathbb{B},\ d,\ \mu_\alpha)$。

引理 2.1. 设 $z \in \mathbb{B}$ 和 $R > 0$。伪球 $B(z,\ r)$ 与 $\mathbb{B}$的边界相交（换言之， $B \in \mathcal{B}$）当且仅当 $R > 1 - |z|$。

引理 2.2. 设 $z \in \mathbb{B}$ 和 $0 < R \leq 3$，则有

$$\mu_\alpha(B(z,R)) \simeq R^{n+1} \left(\max(R, 1-|z|)\right)^{\alpha-1}.$$

注记 2.3. 由引理 2.1 和引理 2.2 若 $B(z,\ R) \in \mathcal{B}$ 可得

$$\mu_\alpha(B(z,R)) \simeq R^{n+\alpha}.$$

根据引理 2.2，$(\mathbb{B}, d, \mu_\alpha)$ 是一个齐次型空间。接下来给出以下引理。

引理 2.4. [6] 存在两个正实数 C 和 γ，使得对所有 $\zeta \in B(z,R)$，都有

$$\mu_\alpha(B(\zeta,r)) \geq C \left(\frac{r}{R}\right)^\gamma \mu_\alpha(B(z,R))$$

对每个 $0 < r \leq R < \infty$.

2.2. **变指数勒贝格空间**。 我们用 $\mathcal{M}$ 表示定义在 $\mathbb{B}$上的复值可测函数空间。设 ν 是 $\mathbb{B}$. 上的正测度。变指数族$\mathcal{P}(\mathbb{B})$已在引言中定义。在本文余下部分，我们取 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{B})$。以下定义、性质和命题均陈述于[9, 10, 14]中。我们先回顾模泛函 $\rho_{p(\cdot)}$ 的一些性质： $\mathcal{M} \to [0,\infty]$，其已在引言中定义为

$$\rho_{p(\cdot)}(f) = \int_{\mathbb{B}} |f(z)|^{p(z)} d\nu(z).$$

命题 2.5. 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{B})$ 满足 $p(\cdot) \geq 1$.

(1) 对所有 $f \in \mathcal{M}$， $\rho_{p(\cdot)}(f) \geq 0$，以及 $\rho_{p(\cdot)}(f) = \rho_{p(\cdot)}(|f|)$。*(2)* 对所有 $f \in \mathcal{M}$，如果 $\rho_{p(\cdot)}(f) < \infty$，那么 $|f(z)| < \infty$ 在 $\mathbb{B}$. 上几乎处处成立。*(3)* $\rho_{p(\cdot)}$ 是凸的。特别地，对于 $0 < \alpha \leq 1$ 和 $f \in \mathcal{M}$， $\rho_{p(\cdot)}(\alpha f) \leq \alpha \rho_{p(\cdot)}(f)$；对于 $\alpha \geq 1$， $\alpha \rho_{p(\cdot)}(f) \leq \rho_{p(\cdot)}(\alpha f)$。*(4)* $\rho_{p(\cdot)}(f) = 0$ 当且仅当 $f(z) = 0$ 在 $\mathbb{B}$. 上几乎处处成立。*(5)* 如果对于几乎所有 $z \in \mathbb{B}$， $|f(z)| \leq |g(z)|$，那么 $\rho_{p(\cdot)}(f) \leq \rho_{p(\cdot)}(g)$。*(6)* 如果存在 $\beta > 0$ 使得 $\rho_{p(\cdot)}(\frac{f}{\beta}) < \infty$，那么函数 $\lambda \longmapsto \rho_{p(\cdot)}(\frac{f}{\lambda})$ 在 $[\beta, \infty[$ 上连续且非增。此外

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) = 0$$

.

对于 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{B})$，变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(d\nu)$ 已在引言中定义。

命题 2.6. [9, 定理 2.7。2] 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_+(\mathbb{B})$ 满足 $p(\cdot) \geq 1$. 则 $\mathbb{B}$ 中的紧支撑连续函数子空间在空间 $L^{p(\cdot)}(d\nu)$中稠密。

接下来，我们回顾变指数情形下的霍尔德不等式。

命题 2.7. [9,定理 2.26，推论 2.28]

1. 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{B})$ 满足 $p(\cdot) \geq 1$. 那么，对所有 $f, g \in \mathcal{M},$ ，有
$$\int_{\mathbb{B}} |fg| d\nu \leq 2\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{p'(\cdot)}.$$
2. 设 $r(\cdot)$ $q(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{B})$ 满足 $r(\cdot)$ $q(\cdot) \geq 1$ 且 $\frac{1}{q\,x\,()} + \frac{1}{r\,x\,()} \leq 1$ 对所有 $x \in \mathbb{B}$.
定义 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{B})$ 使得 $p(\cdot) \geq 1$, 通过
$$\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{q(x)} + \frac{1}{r(x)}.$$
那么存在常量 K，使得对所有 $f \in L^{q(\cdot)}$ 和 $g \in L^{r(\cdot)}$， $fg \in L^{p(\cdot)}$ 和
$$\|fg\|_{p(\cdot)} \leq K\|f\|_{q(\cdot)}\|g\|_{r(\cdot)}.$$

我们记录以下有用的注记。

注 2.8. 性质 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$ 对于 $p'(\cdot)$ 也成立。

下文将使用如下引理中给出的 log-Hölder 条件。**引理 2.9.** 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{B})$。设 $B = B(x, R)$ 是 $\mathbb{B}$ 的一个伪球，使得 $R < \frac{1}{4}$. 那么
$$p_+(B) - p_-(B) \leq \frac{c}{\ln(\frac{1}{4R})}.$$

引理 2.10. 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{B})$。存在两个正实数 $C_1 = C_1(\alpha, n, p(\cdot))$和 $C_2 = C_2(\alpha, n, p(\cdot))$，使得对于 $\mathbb{B}$ 中的任意伪球 B，，都有
$$\mu_\alpha(B)^{p_-(B)-p_+(B)} \leq C_1 \text{ and } \mu_\alpha(B)^{p_+(B)-p_-(B)} \leq C_2.$$

证明。由于 $p_+(B) - p_-(B) \geq 0$， $\mu_\alpha(\mathbb{B}) < \infty$， $B \subset \mathbb{B}$ 和 $p(\cdot)$ 有界，因此得出第二个不等式。我们将证明第一个不等式。假设 $B = B(z, R)$。

1. 若 $R \geq \frac{1}{16}$，由引理 2.2，存在 $C > 0$ 使得 $\mu_\alpha(B) \geq CR^{n+\alpha}$，并且由于 $p_-(B) - p_+(B) \leq 0$，我们得到:
$$\mu_\alpha(B)^{p_-(B)-p_+(B)} \leq (CR^{n+\alpha})^{(p_-(B)-p_+(B))} \leq (C(16)^{n+1})^{(p_+(B)-p_-(B))}$$
2. 若 $R < \frac{1}{16}$，由引理 2.9，
$$p_+(B) - p_-(B) \leq \frac{c}{\ln(\frac{1}{4R})}.$$
因此由注记 2.3，
$$p_+(B) - p_-(B) \lesssim \frac{1}{\ln(\frac{1}{\mu_\alpha(B)})}.$$
Thus
$$\mu_\alpha(B)^{p_-(B)-p_+(B)} \lesssim 1.$$

□

由前面的引理，我们很容易推出以下推论。

推论 2.11。令 $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{B})$。存在常数 $C = C(\alpha, n, p(\cdot)) > 1$，使得对于每个 $\mathbb{B}$ 的伪球 B 以及每个 $z \in B$，都有

$$\frac{1}{C} \leq \mu_\alpha(B)^{p_-(B)-p(z)} \leq C.$$

3. 加权变指数勒贝格空间、变指数 Békollè-Bonami 类和 Muckenhoupt 权类

3.1. 加权变指数勒贝格空间。设 w 为一个权，且令 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{B})$ 满足 $p(\cdot) \geq 1.$。相应的加权变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}(wd\mu_\alpha)$ 由满足以下估计的 $f \in \mathcal{M}$ 组成

$$\rho_{p(\cdot),w}(f) = \int_{\mathbb{B}} |f(z)|^{p(z)} w(z) d\mu_\alpha(z) < \infty.$$

我们也将其记为 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{B}, w)$，或简记为 $L^{p(\cdot)}(w)$，其范数记为 $\|\cdot\|_{p(\cdot),\ w\cdot}$。容易验证

$$\|f\|_{p(\cdot),w} = \|f w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}.$$

下文中，我们采用以下记号：

$$w' := w^{1-p'(\cdot)}. \tag{3.1}$$

我们回顾 $L^{p(\cdot)}(\mathbb{B}, w)$ 上从属范数的概念，其定义如下：

$$\|f\|'_{p(\cdot),w} := \sup_{\|g\|_{p'(\cdot),w'}=1} \left| \int_{\mathbb{B}} f(\zeta)\overline{g(\zeta)} d\mu_\alpha(\zeta) \right|.$$

接下来回顾以下命题。

命题 3.1. [9, 10, 推论 2.7.5] 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{B})$ 使得 $p(\cdot) \geq 1$ 并设 w为一个权。则

$$\|f\|_{p(\cdot),w} \leq \|f\|'_{p(\cdot),w} \leq 2\|f\|_{p(\cdot),w}.$$

以下引理将非常有用。

引理 3.2. [9, 10] 设 w 为非负可测函数，并设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_+(\mathbb{B})$满足 $p_- > 0$。那么，对任意支集为 E的，以下双边不等式成立：

$$\min\left(\rho_{p(\cdot),w}(f)^{\frac{1}{p_-(E)}}, \rho_{p(\cdot),w}(f)^{\frac{1}{p_+(E)}}\right) \leq \|f\|_{p(\cdot),w} \leq \max\left(\rho_{p(\cdot),w}(f)^{\frac{1}{p_-(E)}}, \rho_{p(\cdot),w}(f)^{\frac{1}{p_+(E)}}\right).$$

这等价于

$$\min\left(\|f\|_{p(\cdot),w}^{p_-(E)}, \|f\|_{p(\cdot),w}^{p_+(E)}\right) \leq \rho_{p(\cdot),w}(f) \leq \max\left(\|f\|_{p(\cdot),w}^{p_-(E)}, \|f\|_{p(\cdot),w}^{p_+(E)}\right).$$

3.2. **变指数 Békollè-Bonami 权重类。** 关于变指数 Békollè-Bonami 权重类 $B_{p(\cdot)}$，我们记录如下基本注记。

注记 **3.3.** 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}(\mathbb{B})$。若 $w \in B_{p(\cdot)}$，则以下两个断言成立 .

1) $\|w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)} < \infty$ 和 $\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p'(\cdot)} < \infty$.2)

函数 w 和 w' 在 $\mathbb{B}$.上可积

注记的证明。否则，若 $\|w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)} = \infty$，则必有 $\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p'}(\cdot) = 0$，这将意味着 $w \equiv \infty$ 几乎处处成立。或者，若 $\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)} = \infty$，则必然 $\|w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p'}(\cdot) = 0$，这将意味着 $w \equiv 0$ 几乎处处成立。此外，由引理 3.2，对于 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}(\mathbb{B})$，断言 1) 和 2) 等价。□

我们还有以下命题。

命题 3.4. 令 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}(\mathbb{B})$. 对于权重 w, 以下两个断言等价。

(1) $w \in B_{p(\cdot)}$;(2)
$w' \in B_{p'(\cdot)}$.此外,
$[w]_{B_{p(\cdot)}} = [w']_{B_{p'(\cdot)}}$.

下面这个简单引理将会用到。

引理 3.5. 令 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}(\mathbb{B})$. 对于权重 w, 以下两个断言等价。

(1) $w \in B_{p(\cdot)}$;
(2) $\sup\limits_{B \in \mathcal{B}} \frac{1}{\mu_\alpha(B)} \|\chi_B\|_{p(\cdot),w} \|\chi_B\|_{p'(\cdot),w'} < \infty$.

3.3. **权重的变指数穆肯霍普特类。**

定义 3.6. 同类空间 $(\mathbb{B}, d, \mu_\alpha)$ 上的 Hardy-Littlewood 极大函数 M_α 定义为

$$M_\alpha f(z) = \sup_B \frac{\chi_B(z)}{\mu_\alpha(B)} \int_B |f(\zeta)| d\mu_\alpha(\zeta)$$

其中，上确界取遍 $\mathbb{B}$.的所有伪球

当 p 是大于 1 的常数时，Muckenhoupt类 A_p 由满足以下估计的权重w 组成

$$\sup_B \left(\frac{1}{\mu_\alpha(B)} \int_B w d\mu_\alpha\right) \left(\frac{1}{\mu_\alpha(B)} \int_B w^{-\frac{1}{p-1}} d\mu_\alpha\right)^{p-1} < \infty,$$

其中，上确界取遍 $\mathbb{B}$. 的所有伪球 B 。此定义等价于以下定义:

$$\sup_B \frac{1}{\mu_\alpha(B)} \|w^{\frac{1}{p}} \chi_B\|_p \|w^{-\frac{1}{p}} \chi_B\|_{p'} < \infty,$$

其中，上确界再次取遍 $\mathbb{B}$.的所有伪球

接下来给出变指数 Muckenhoupt 权重类的如下变指数推广。该推广最早由 Diening 和 Hästo [11] 提出。

定义 3.7. 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}(\mathbb{B})$。权 w 属于 $\mathbb{B}$上的变指数穆肯霍普特类 $A_{p(\cdot)}$，当且仅当

$$[w]_{A_{p(\cdot)}} := \sup_B \frac{1}{\mu_\alpha(B)} \|w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_B\|_{p(\cdot)} \|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_B\|_{p'(\cdot)} < \infty \tag{3.2}$$

其中，上确界取遍 $\mathbb{B}$. 的所有伪球

设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}(\mathbb{B})$。下面的命题与命题 3.4 类似。

命题 3.8。以下两个断言等价。

(1) $w \in A_{p(\cdot)}$;
(2) $w' \in A_{p'(\cdot)}$.

我们记录下 $A_{p(\cdot)}$ 和 $B_{p(\cdot)}$.的以下性质

命题 3.9。1. 包含关系 $A_{p(\cdot)} \subset B_{p(\cdot)}$ 成立，其中 $[w]_{B_{p(\cdot)}} \leq [w]_{A_{p(\cdot)}}$.
2. $[w]_{B_{p(\cdot)}} \geq \frac{1}{2}$ *and* $[w]_{A_{p(\cdot)}} \geq \frac{1}{2}$.

证明。**1.** 这直接由 $A_{p(\cdot)}$ 和 $B_{p(\cdot)}$.的定义得出

2. 我们先证明 $B_{p(\cdot)}$. 令 $B \in \mathcal{B}$. 由霍尔德不等式及 $B_{p(\cdot)}$的定义可得

$$1 = \frac{1}{\mu_\alpha(B)} \int_B w^{\frac{1}{p(\cdot)}} w^{-\frac{1}{p(\cdot)}} d\mu_\alpha \leq \frac{2}{\mu_\alpha(B)} \|w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_B\|_{p(\cdot)} \|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_B\|_{p'(\cdot)} \leq 2[w]_{B_{p(\cdot)}}. \tag{3.3}$$

$A_{p(\cdot)}$ 的证明随后由断言 1 得出。

□

在 [6], 中，Cruz-Uribe 和 Cummings 针对极大哈代–利特尔伍德函数证明了以下基本结果。这个变指数定理推广了穆肯霍普特在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$中的一个著名定理 [13] 。对于齐次型空间，A. P. Calderón[3]后来证明了常指数情形下的类似定理。

定理 **引理 3.10**。设 $p(\cdot)\in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$。以下两个断言等价。

1. 存在一个正数常量 C，使得对所有 $f \in L^{p(\cdot)}(w)$，都有

$$\|M_\alpha f\|_{p(\cdot),w} \leq C\|f\|_{p(\cdot),w}.$$

2. $w \in A_{p(\cdot)}$.

事实上，这些作者 [6] 在齐次型空间的一般框架下证明了他们的结果。在那里，除了条件 $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{B})$ 之外，他们还要求满足无穷远处条件，该条件在单位球 $\mathbb{B}$ 上的表达式如下：存在两个常量 c 和 p_∞，使得

$$|p(z) - p_\infty| \leq \frac{c}{\ln(e + |z|)}$$

for 每个 $z \in \mathbb{B}$. 很容易证明，这个额外条件在 $\mathbb{B}$ 上成立 .

由于 $m_\alpha f \leq M_\alpha f$，我们得出以下推论。

推论 3.11。 令 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$ 并且 $w \in A_{p(\cdot)}$. 对于定理 C *3.10* 中的相同常数，我们有

$$\|m_\alpha f\|_{p(\cdot),w} \leq C\|f\|_{p(\cdot),w}$$

对所有 $f \in L^{p(\cdot)}(w)$ 。

4. 定理 $w^{\frac{1}{p(\cdot)}(\cdot)} \in L^{p(\cdot)}(d\mu_\alpha)$ 和 $w^{-\frac{1}{p(\cdot)}(\cdot)} \in L^{p'(\cdot)}(d\mu_\alpha)$ 中的条件的必要性 1.6

命题 4.1. 设 w 为一个权，且设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_-(\mathbb{B})$。 若算子 P_α 在 $L^{p(\cdot)}(w)$ 上定义良好，则 $w^{-\frac{1}{p(\cdot)}(\cdot)} \in L^{p'(\cdot)}(d\mu_\alpha)$。

证明。 若算子 P_α 在 $L^{p(\cdot)}(w)$上定义良好，则对每个 $f \in L^{p(\cdot)}(w)$，有

$$P_\alpha^+|f|(z) = \int_{\mathbb{B}} \frac{|f(\zeta)|}{|1 - z \cdot \overline{\zeta}|^{n+\alpha}} d\mu_\alpha(\zeta) < \infty \quad \text{for all} \quad z \in \mathbb{B}.$$

用反证法，假设 $w^{-\frac{1}{p(\cdot)}(\cdot)}$ 不属于 $L^{p'(\cdot)}(d\mu_\alpha)$。那么根据命题 3.1，存在一个非负的 $g \in L^{p(\cdot)}(d\mu_\alpha)$，使得

$$\int_{\mathbb{B}} g(\zeta) w(\zeta)^{-\frac{1}{p(\zeta)}} d\mu_\alpha(\zeta) = \infty.$$

令 $f = gw^{-\frac{1}{p(\cdot)}(\cdot)}$。我们有 $f \in L^{p(\cdot)}(w)$，但 f 不属于 $L^1(\mathbb{B})$；并且由于 $|1-\overline{\zeta}z| \leq 2$，于是

$$P_\alpha^+|f|(z) = \int_{\mathbb{B}} \frac{|f(\zeta)|}{|1 - \overline{\zeta} \cdot z|^{n+\alpha}} d\mu_\alpha(\zeta) \geq \frac{1}{2^{n+\alpha}} \int_{\mathbb{B}} |f(\zeta)| d\mu_\alpha(\zeta) = \infty.$$

这与 $P_\alpha^+|f|(z) < \infty$ 这一事实矛盾，因此我们得到所需结果。 □

命题 4.2. 设 w 为一个权，且 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_-(\mathbb{B})$. 若算子 P_α 在 $L^{p(\cdot)}(wd\mu)$上有界，则 $w^{\frac{1}{p(\cdot)}(\cdot)} \in L^{p(\cdot)}(d\mu_\alpha)$。

证明。 设 $0 < r < 1$，并定义函数 $f(z) = (1 - |z|^2)^{1-\alpha}\chi_{B(0,r)}(z)$ 于 $\mathbb{B}$. 上。我们有

$$\begin{aligned} P_\alpha f(z) &= \int_{\mathbb{B}} \frac{f(\zeta)}{(1 - \langle z, \zeta\rangle)^{n+\alpha}} d\mu_\alpha(\zeta) \\ &= \int_{B(0,r)} \frac{1}{(1 - \langle z, \zeta\rangle)^{n+\alpha}} d\mu(\zeta) \\ &= \overline{\int_{B(0,r)} \frac{1}{(1 - \langle \zeta, z\rangle)^{n+\alpha}} d\mu(\zeta).} \end{aligned}$$

由于函数 $\zeta \longmapsto \frac{1}{(1 - \langle \zeta, z\rangle)^{n+\alpha}}$ 在 $\mathbb{B}$ 上解析，且 $B(0, r)$ 是以 0 为中心、半径为 r 的欧几里得球，因此由平均值性质可得 $P_\alpha f(z) \equiv C_{r,n}$，于是

$$|C_{r,n}| \|w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)} = \|P_\alpha(f)\|_{p(\cdot),w}. \tag{4.1}$$

此外，

$$\rho_{p(\cdot),w}(f)=\int_{B(0,r)} w(z)(1-|z|^2)^{(\alpha-1)(1-p(z))}d\mu(z).$$

另一方面，若 $\alpha\le 1$，则有 $(1-|z|^2)^{(\alpha-1)(1-p(z))}\le 1$，因为 $(\alpha-1)(1-p(z))>0$且 $1-|z|^2\le 1$。因此

$$\rho_{p(\cdot),w}(f)\le\int_{B(0,r)} w(z)d\mu(z)<\infty$$

因为 w 是局部可积的。
另一方面，若 $\alpha>1$，则有 $(1-|z|^2)^{(\alpha-1)(1-p(z))}\le(1-|z|^2)^{(\alpha-1)(1-p_+)}$。因此

$$\rho_{p(\cdot),w}(f)\le\sup_{z\in B(0,r)}(1-|z|^2)^{(\alpha-1)(1-p_+)}\int_{B(0,r)} w(z)d\mu(z)<\infty$$

因为 w 是局部可积的，并且上确界$_{z\in B(0,r)}(1-|z|^2)^{(\alpha-1)(1-p_+)}=(1-r^2)^{(\alpha-1)(1-p_+)}$。因此，由于 $\rho_{p(\cdot),\,w}(f)<\infty$在两种情况下，根据引理 3.2可得 $\|f\|_{p(\cdot),\,w}<\infty$并且由于 P_α 在 $L^{p(\cdot)}(w)$ 上有界，由（ 4.1 ）可推出存在一个正数常量 $c_{r,\,\alpha,\,n}$ 使得

$$\|w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}\le c_{r,\alpha,n}\|f\|_{p(\cdot),w}<\infty.$$

因此，我们得到了这一结果。 □

接下来，我们需要计算某些函数的 $p(\cdot)$–范数，但这不像常数情形那样容易。为了解决这个问题，我们将在下一节引入新空间的定义，这些新空间与类 $B_{p(\cdot)}$ 重合。

5. The weight classes $B^+_{p(\cdot)}$ and $B^{++}_{p(\cdot)}$

定义 5.1。 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}_\pm(\mathbb{B})$，且 w 是一个权。若 w 属于 $B^+_{p\,\cdot()}$类，则称

$$[w]_{B^+_{p(\cdot)}}:=\sup_{B\in\mathcal{B}}\frac{1}{\mu_\alpha(B)^{p_B}}\|w\chi_B\|_1\|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}}<\infty. \tag{5.1}$$

其中

$$p_B=\left(\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\int_B\frac{1}{p(x)}d\mu_\alpha(x)\right)^{-1}.$$

当 $p(\cdot)=p$ (p 为常数) 时，该类与 B_p 类重合。我们还采用以下记号：

$$\langle p\rangle_B=\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\int_B p(x)d\mu_\alpha(x). \tag{5.2}$$

注 5.2. 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}^{\log}(\mathbb{B})$ 并设 B 是 $\mathbb{B}$ 的一个伪球。由于 $p_-(B)\le p_B$，$\langle p\rangle_B\le p_+(B)$由引理 2.10 和推论 2.11 可得

$$\mu_\alpha(B)^{p_-(B)}\simeq\mu_\alpha(B)^{p_B}\simeq\mu_\alpha(B)^{p_B}\simeq\mu_\alpha(B)^{\langle p\rangle_B}\simeq\mu_\alpha(B)^{p_+(B)}.$$

引理 5.3. [10, 定理 4.5.7]
设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}^{log}(\mathbb{B})$ 满足 $p_->0$. 设 B 是 $\mathbb{B}$ 的一个伪球。于是

$$\|\chi_B\|_{p(\cdot)}\simeq\mu_\alpha(B)^{\frac{1}{p_B}}.$$

证明。 由引理 3.2 可得

$$\min\left(\mu_\alpha(B)^{\frac{1}{p_-(B)}},\mu_\alpha(B)^{\frac{1}{p_+(B)}}\right)\le\|\chi_B\|_{p(\cdot)}\le\max\left(\mu_\alpha(B)^{\frac{1}{p_-(B)}},\mu_\alpha(B)^{\frac{1}{p_+(B)}}\right).$$

接下来，由注记 5.2，可得 $\mu_\alpha(B)^{p_-(B)}\simeq\mu_\alpha(B)^{p_+(B)}\simeq\mu_\alpha(B)^{p_B}$，因为 $p(\cdot)$ 有正下界。结论得证。 □

引理 5.4. 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}^{log}_{\pm}(\mathbb{B})$，且设 q 是一个大于 p_++1. 的常指数。存在一个正数常量 C，它仅依赖于 $p(\cdot)$ 的对数赫尔德常数，使得

$$[w]_{B_q}\le C[w]_{B^+_{p(\cdot)}}.$$

证明。 由于 $p(\cdot)<p_++1<q$，我们有 $\frac{q'}{q}\prec\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}$. 因此，由霍尔德不等式（命题 2.7的断言 2），可得

$$\|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{q'}{q}}\le K\|\chi_B\|_{\beta(\cdot)}\|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}},$$

其中

$$\frac{1}{\beta(\cdot)}=\frac{q}{q'}-\frac{p(\cdot)}{p'(\cdot)}=q-p(\cdot)>1.$$

容易验证，$\beta(\cdot)$ 是 $\mathcal{P}^{log}(\mathbb{B})$ 的成员，满足 $\beta_->0$. 因此，由引理 5.3 和注记 5.2，可得

$$\|\chi_B\|_{\beta(\cdot)}\simeq\mu_\alpha(B)^{\frac{1}{\beta_B}}\simeq\mu_\alpha(B)^{q-\langle p\rangle_B}\simeq\mu_\alpha(B)^{q-p_B}.$$

因此，存在一个正数常量 C 使得

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{\mu_\alpha(B)^q}\|w\chi_B\|_1\|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{q'}{q}}&\le C\tfrac{1}{\mu_\alpha(B)^q}\|w\chi_B\|_1\|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}}\mu_\alpha(B)^{q-p_B}\\&=C\tfrac{1}{\mu_\alpha(B)^{p_B}}\|w\chi_B\|_1\|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}}\le C[w]_{B^+_{p(\cdot)}}.\end{aligned}$$

对于所有伪球 $B\in\mathcal{B}$. 结论得证。

□

我们回顾以下定义。

定义 5.5。 权重类 B_∞ 定义为 $B_\infty=\bigcup_{q\in(1,\infty)}B_{q,}$

注 5.6。 由引理 5.4 可知，若 $p(\cdot)\in\mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{B})$，则有

$$B^+_{p(\cdot)}\subset B_\infty.$$

在本文余下部分，为简化记号，我们记 $w(B)=\|w\chi_B\|_1$。
接下来，我们定义另一类权重 Λ，它包含类 B_∞. 。关于参考资料，参见例如 [1]。

定义 5.7。 我们将由满足以下性质的可积权 w 构成的类称为 Λ。存在两个正实数 C 和 δ，使得以下蕴含成立。

$$\frac{\mu_\alpha(E)}{\mu_\alpha(B)} \leq C\left(\frac{w(E)}{w(B)}\right)^{\delta} \tag{5.3}$$

只要 $B \in \mathcal{B}$ 和 E 是 B.的一个可测子集

注 5.8。 1. 对于 $w \in \Lambda$，加权测度 $wd\mu_\alpha$ 按如下意义满足倍增性质。存在一个正数常量 C，使得对于 $\mathbb{B}$ 中的每个伪球 $\widetilde{B}$，若其具有相同中心、半径为其两倍的伪球 B 属于$\mathcal{B}$，则有

$$w\left(\widetilde{B}\right) \leq Cw(B).$$

此结果可由 Λ.的定义直接推出

2. 我们回顾一下 $w(\mathbb{B}) > 0$. 对于 $w \in \Lambda$，这意味着 $w(B) > 0$ 对于每个伪球 B 属于 $\mathbb{B}$. 确实，取 $\mathbb{B}$对于 B 以及 B 对于 E 在（5.3）中。

引理 5.9。 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}(\mathbb{B})$ 满足 $p_- > 0$. 设 $w \in \Lambda$。则

$$\|\chi_B\|_{p(\cdot),w} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_+(B)}} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_-(B)}} \simeq w(B)^{\frac{1}{p(x)}} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_B}}$$

对于所有满足 $w(B) > 0$ 的 $\mathbb{B}$ 伪球 B，以及所有 $x \in B$。

证明。 取 $\mathbb{B}$ 对于 B 以及 B 对于 E 在定义 5.7中。我们有

$$\left(C^{-1}\frac{\mu_\alpha(B)}{\mu_\alpha(\mathbb{B})}\right)^{\frac{1}{\delta}} w(\mathbb{B}) \leq w(B) \leq w(\mathbb{B}).$$

So

$$w(\mathbb{B})^{p-(B)-p+(B)} \leq w(B)^{p-(B)-p+(B)} \lesssim \mu_\alpha(B)^{\frac{1}{\delta}(p-(B)-p+(B))} w(\mathbb{B})^{p-(B)-p+(B)}.$$

容易验证

$$\min(1, w(\mathbb{B})^{p_- - p_+}) \leq w(\mathbb{B})^{p-(B)-p+(B)} \leq \max(1, w(\mathbb{B})^{p_- - p_+}).$$

接下来，结合引理 2.10可得

$$\min(1, w(\mathbb{B})^{p_- - p_+}) \leq w(B)^{p-(B)-p+(B)} \lesssim C_\delta \max(1, w(\mathbb{B})^{p_- - p_+}).$$

因此，我们证明了以下估计： $w(B)^{\frac{1}{p_+(B)}} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_-(B)}} \simeq w(B)^{\frac{1}{p(x)}} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_B}}$，对所有 $x \in B$.

另一方面，由引理 3.2 可得

$$\min\left(w(B)^{\frac{1}{p_-(B)}}, w(B)^{\frac{1}{p_+(B)}}\right) \leq \|\chi_B\|_{p(\cdot),w} \leq \max\left(w(B)^{\frac{1}{p_-(B)}}, w(B)^{\frac{1}{p_+(B)}}\right).$$

因此

$$\|\chi_B\|_{p(\cdot),w} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_-(B)}} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_+(B)}}.$$

□

我们再次回顾记号 $w'(y) = w(y)^{1-p'(y)}$。

引理 5.10。 令 $p(\cdot)\in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$ 以及 $w \in B^{+}_{p\,\cdot()}$. 则

$$\|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}} \simeq \left(\rho_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}}(w^{-1}\chi_B)\right)^{p_B-1} = w'(B)^{p_B-1}. \tag{5.4}$$

证明。 令 $w \in B^{+}_{p\,\cdot()}$ 和 $B \in \mathcal{B}$。根据定义，我们有

$$\frac{1}{\mu_\alpha(B)^{p_B}} w(B)\|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}} \leq [w]_{B^{+}_{p(\cdot)}}. \tag{5.5}$$

另一方面，根据霍尔德不等式（命题 2.7，断言 1）和引理 5.9，我们有

$$\mu_\alpha(B) = \int_B w(y)^{\frac{1}{p(y)}} w(y)^{-\frac{1}{p(y)}} d\mu_\alpha(y) \leq 2\|w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_B\|_{p(\cdot)}\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_B\|_{p'(\cdot)} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_B}}\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_B\|_{p'(\cdot)}.$$

因此

$$\left\|\frac{w(B)^{\frac{1}{p_B}}}{\mu_\alpha(B)} w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_B\right\|_{p'(\cdot)} \gtrsim 1. \tag{5.6}$$

Cons因此，根据（5.6）、引理 3.2、引理 5.9和推论 2.11，我们有 :

$$\begin{aligned} 1 \lesssim \rho_{p'(\cdot)}\left(\frac{w(B)^{\frac{1}{p_B}}}{\mu_\alpha(B)} w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_B\right) &= \int_B \left(\frac{w(B)^{\frac{1}{p_B}}}{\mu_\alpha(B)}\right)^{p'(y)} w(y)^{-\frac{p'(y)}{p(y)}} d\mu_\alpha(y) \\ &\simeq \int_B \left(\frac{w(B)}{\mu_\alpha(B)^{p_B}}\right)^{\frac{p'(y)}{p(y)}} w(y)^{-\frac{p'(y)}{p(y)}} d\mu_\alpha(y) \\ &= \rho_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}}\left(\frac{w(B)}{\mu_\alpha(B)^{p_B}} w^{-1}\chi_B\right). \end{aligned}$$

因此，根据引理 3.2，我们有

$$\left\|\frac{w(B)}{\mu_\alpha(B)^{p_B}} w^{-1}\chi_B\right\|_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}} \gtrsim 1. \tag{5.7}$$

因此，由（5.5）和（5.7），可得

$$\|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}} \simeq \frac{\mu_\alpha(B)^{p_B}}{w(B)}. \tag{5.8}$$

此外，由注记 5.2 以及 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}$，可得以下等价关系

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(B)^{p_+(B)} \simeq \mu_\alpha(B)^{p_-(B)} &\iff \mu_\alpha(B)^{\frac{1}{p_-(B)-1}} \simeq \mu_\alpha(B)^{\frac{1}{p_+(B)-1}} \\ &\iff \mu_\alpha(B)^{\frac{p_B}{p_-(B)-1}} \simeq \mu_\alpha(B)^{\frac{p_B}{p_+(B)-1}}, \end{aligned}$$

由此我们可推得

$$\mu_\alpha(B)^{\frac{p_B}{p_+(B)-1}} \simeq \mu_\alpha(B)^{\frac{p_B}{p_-(B)-1}} \simeq \mu_\alpha(B)^{\frac{p_B}{p_B-1}}$$

由于 $p_-(B) \le p_B \le p_+(B)$。 同样，由引理 5.9，根据该估计可推得

$$w(B)^{p_B} \simeq w(B)^{p_+(B)} \simeq w(B)^{p_-(B)}$$

that

$$w(B)^{\frac{1}{p_-(B)-1}} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_+(B)-1}} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_B-1}}.$$

因此，由（5.8）可得

$$\|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}}^{\frac{1}{p_+(B)-1}} \simeq \|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}}^{\frac{1}{p_-(B)-1}} \simeq \|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}}^{\frac{1}{p_B-1}}.$$

由于 $\rho_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}}(w^{-1}\chi_B) = w'(B)$，结合引理 3.2 ，其中 $p'(\cdot)\ p(\cdot)$ 替代了 $p(\cdot)$，即可得到所需结果。□

命题 5.11。 设 $p(\cdot)\in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$ 且 $w \in B_{p(\cdot)}^{+}$. 则 $w' \in B_{p'(\cdot)}^{+}$ 且

$$\left(\frac{1}{\mu_\alpha(B)^{p_B'}}\|w'\chi_B\|_1\|w'^{-1}\chi_B\|_{\frac{p(\cdot)}{p'(\cdot)}}\right)^{p_B-1} \simeq \frac{1}{\mu_\alpha(B)^{p_B}}\|w\chi_B\|_1\|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}} \simeq \frac{w(B)}{\mu_\alpha(B)}\left(\frac{w'(B)}{\mu_\alpha(B)}\right)^{p_B-1}$$

对所有伪球 $B \in \mathcal{B}$.

证明。 回顾一下，根据注记5.6， $w \in \Lambda$ 。因此，由引理 5.9 应用于 $p(\cdot)\ p'(\cdot)$并以 $p(\cdot)$ 替代，结合等式（5.4）和性质 $w \in B_{p(\cdot)}^{+}$，可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_\alpha(B)^{p_B'}}w'(B)\|w'^{-1}\chi_B\|_{\frac{p(\cdot)}{p'(\cdot)}} &= \frac{1}{\mu_\alpha(B)^{p_B'}}w'(B)\|\chi_B\|_{\frac{p(\cdot)}{p'(\cdot)},w} \\
&\simeq \frac{1}{\mu_\alpha(B)^{p_B'}}w'(B)w(B)^{\frac{1}{p_B-1}} \\
&= \left(\frac{w(B)}{\mu_\alpha(B)^{p_B}}w'(B)^{p_B-1}\right)^{\frac{1}{p_B-1}} \qquad (5.9) \\
&\simeq \left(\frac{w(B)}{\mu_\alpha(B)^{p_B}}\|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}}\right)^{\frac{1}{p_B-1}} \qquad (5.10) \\
&\le [w]_{B_{p(\cdot)}^{+}}^{\frac{1}{p_B-1}}.
\end{aligned}$$

因此 $w' \in B_{p'(\cdot)}^{+}$ 并由 (5.9) 和 (5.10)，我们推得

$$\frac{w(B)}{\mu_\alpha(B)^{p_B}}\|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}} \simeq \frac{w(B)}{\mu_\alpha(B)}\left(\frac{w'(B)}{\mu_\alpha(B)}\right)^{p_B-1}.$$

□

定义 5.12. 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}(\mathbb{B})$，且设 w 为一个权。我们称 w 属于$B_{p(\cdot)}^{++}$ 类，当且仅当

$$[w]_{B_{p(\cdot)}^{++}} := \sup_{B\in\mathcal{B}} \frac{w(B)}{\mu_\alpha(B)}\left(\frac{w'(B)}{\mu_\alpha(B)}\right)^{p_B-1} < \infty. \qquad (5.11)$$

以下命题显然成立。

命题 5.13. </style}令 $(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}(\mathbb{B})$. 以下两个断言等价。

1. $w \in B^{++}_{p(\cdot)}()$;
2. $w' \in B^{++}_{p'(\cdot)}()$.

引理 5.14。 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{B})$，且 $w \in B^{++}_{p(\cdot)}()$。那么对于 $\mathbb{B}$ 中的所有伪球 B，

$$\|\chi_B\|_{p(\cdot),w} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_+(B)}} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_-(B)}} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_B}}.$$

证明。 由于 $w \in B^{++}_{p(\cdot)}()$，我们有 $w'(\mathbb{B}) < \infty$，由引理 3.2 可知$\|\chi_{\mathbb{B}}\|_{p'(\cdot)\,w'} < \infty$。因此，根据霍尔德不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\mu_\alpha(B) &\leq 2\|\chi_B\|_{p(\cdot),w}\|\chi_B\|_{p'(\cdot),w'} \\ &\leq 2\|\chi_B\|_{p(\cdot),w}\|\chi_{\mathbb{B}}\|_{p'(\cdot),w'}.\end{aligned}$$

因此，由引理 2.10，可得

$$\begin{aligned}\|\chi_B\|^{p_-(B)-p_+(B)}_{p(\cdot),w} &\lesssim \mu_\alpha(B)^{p_-(B)-p_+(B)}\|\chi_{\mathbb{B}}\|^{p_+(B)-p_-(B)}_{p'(\cdot),w'} \\ &\lesssim \max\left(1, \|\chi_{\mathbb{B}}\|^{p_+-p_-}_{p'(\cdot),w'}\right). \qquad (5.12)\end{aligned}$$

另一方面，再次利用 $w \in B^{++}_{p(\cdot)}()$，我们有 $w(\mathbb{B}) < \infty$，因此$\|\chi_{\mathbb{B}}\|_{p(\cdot),\ w} < \infty$。于是

$$\|\chi_B\|^{p_+(B)-p_-(B)}_{p(\cdot),w} \leq \|\chi_{\mathbb{B}}\|^{p_+(B)-p_-(B)}_{p(\cdot),w} \leq \max\left(1, \|\chi_{\mathbb{B}}\|^{p_+-p_-}_{p(\cdot),w}\right). \qquad (5.13)$$

因此，由 (5.12) 和 (5.13)，可得

$$\|\chi_B\|^{p_+(B)}_{p(\cdot),w} \simeq \|\chi_B\|^{p_-(B)}_{p(\cdot),w},$$

并由引理 3.2 得证。 □

引理 5.15。设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{B})$。 则 $B^{++}_{p(\cdot)}() \subset \Lambda$。

证明。 设 $w \in B^{++}_{p(\cdot)}()$· 设 $B \in \mathcal{B}$ 并设 E 为 B. 的可测子集。由霍尔德不等式以及引理 3.2，可得

$$\begin{aligned}\mu_\alpha(E) &\leq 2\|\chi_E\|_{p(\cdot),w}\|\chi_E\|_{p'(\cdot),w'} \\ &\leq 2\|\chi_E\|_{p(\cdot),w}\|\chi_B\|_{p'(\cdot),w'} \\ &\leq 2\max\left(w(E)^{\frac{1}{p_+(B)}}, w(E)^{\frac{1}{p_-(B)}}\right)\|\chi_B\|_{p'(\cdot),w'}.\end{aligned}$$

然而，由于 $w' \in B^{++}_{p'(\cdot)}()$ 根据命题 5.13，由引理 5.14 可得

$$\|\chi_B\|_{p'(\cdot),w'} \simeq w'(B)^{\frac{1}{p'_+(B)}} \simeq w'(B)^{\frac{1}{p'_-(B)}} \simeq w'(B)^{\frac{1}{p'_B}}.$$

因此，利用 $w \in B_{p^{\cdot}(\cdot)}^{++}$，我们可以推得：

$$\begin{aligned}\mu_\alpha(E) &\lesssim \max\left(w(E)^{\frac{1}{p_+(B)}} w'(B)^{\frac{1}{p'_+(B)}}, w(E)^{\frac{1}{p_-(B)}} w'(B)^{\frac{1}{p'_-(B)}}\right)\\ &\le \max\left([w]_{B_{p(\cdot)}^{++}}^{\frac{1}{p_+(B)}}, [w]_{B_{p(\cdot)}^{++}}^{\frac{1}{p_-(B)}}\right) \max\left(\left(\frac{w(E)}{w(B)}\right)^{\frac{1}{p_+(B)}}, \left(\frac{w(E)}{w(B)}\right)^{\frac{1}{p_-(B)}}\right) \mu_\alpha(B)\\ &\le \max\left([w]_{B_{p(\cdot)}^{++}}^{\frac{1}{p_+}}, [w]_{B_{p(\cdot)}^{++}}^{\frac{1}{p_-}}\right) \left(\frac{w(E)}{w(B)}\right)^{\frac{1}{p_+(B)}} \mu_\alpha(B)\\ &\le \max\left([w]_{B_{p(\cdot)}^{++}}^{\frac{1}{p_+}}, [w]_{B_{p(\cdot)}^{++}}^{\frac{1}{p_-}}\right) \left(\frac{w(E)}{w(B)}\right)^{\frac{1}{p_+}} \mu_\alpha(B).\end{aligned}$$

因此，

$$\frac{\mu_\alpha(E)}{\mu_\alpha(B)} \lesssim \left(\frac{w(E)}{w(B)}\right)^{\frac{1}{p_+}}.$$

□

命题 5.16. 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$. 则 $B_{p^{\cdot}(\cdot)}^{+} = B_{p^{\cdot}(\cdot)}^{++}$

证明. 对于包含关系 $B_{p^{\cdot}(\cdot)}^{+} \subset B_{p^{\cdot}(\cdot)}^{++}$，应用命题 5.11. 反向包含关系则应用引理 5.15 和引理 5.9. □

注 5.17. 由命题 5.11、注记 5.6 和引理 5.9，可得包含关系 $B_{p^{\cdot}(\cdot)}^{+} \subset B_{p(\cdot)}$，其中 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$。

现在我们证明反向包含关系。在此方向上，我们先陈述以下结果。

引理 5.18。 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$ 且 $w \in B_{p(\cdot)}$。则存在常数 $C > 1$

$$\frac{1}{C} \le \|\chi_B\|_{p(\cdot),w}^{p_-(B)-p_+(B)} \le C$$

对所有 $B \in \mathcal{B}$.

证明。 根据霍尔德不等式，我们有

$$\mu_\alpha(B) \le 2\|\chi_B\|_{p(\cdot),w}\|\chi_B\|_{p'(\cdot),w'}$$

并且由于 $w \in B_{p(\cdot)}$，根据引理 2.10 以及估计式 $\|\chi_{\mathbb{B}}\|_{p'(\cdot)\,w'} < \infty$由注记3.3给出，我们有

$$\begin{aligned}\|\chi_B\|_{p(\cdot),w}^{p_-(B)-p_+(B)} &\lesssim \mu_\alpha(B)^{p_-(B)-p_+(B)} \|\chi_B\|_{p'(\cdot),w'}^{p_+(B)-p_-(B)}\\ &\simeq \|\chi_{\mathbb{B}}\|_{p'(\cdot),w'}^{p_+(B)-p_-(B)}\\ &\lesssim \max\left(1, \|\chi_{\mathbb{B}}\|_{p'(\cdot),w'}^{p_+-p_-}\right).\end{aligned}$$

另一方面，根据估计 $\|\chi_{\mathbb{B}}\|_{p(\cdot),\,w} < \infty$ 由注记3.3给出，我们有

$$\|\chi_B\|_{p(\cdot),w}^{p_+(B)-p_-(B)} \le \max(1, \|\chi_{\mathbb{B}}\|_{p(\cdot),w}^{p_+-p_-}).$$

□

由引理3.2 和引理5.18，我们推得如下推论。

推论 5.19。设 $p(\cdot)\in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$，且 $w \in B_{p(\cdot)}$。则

$$\|\chi_B\|_{p(\cdot),w} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_+(B)}} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_-(B)}} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_B}}.$$

对所有 $B \in \mathcal{B}$,

接下来给出以下定理。

定理 5.20。设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}^{log}(\mathbb{B})$。 则 $B_{p(\cdot)} = B^{+}_{p\,\cdot()} = B^{++}_{p\,\cdot\ ()}$。

证明。 由注记 5.17，可得 $B^{+}_{p\,\cdot()} \subset B_{p(\cdot)}$。设 $w \in B_{p(\cdot)}$. 由命题 3.4，$w' \in B_{p'(\cdot)}$. 由推论 5.19 可知

$$\frac{w(B)}{\mu_\alpha(B)}\left(\frac{w'(B)}{\mu_\alpha(B)}\right)^{p_B-1} \simeq \left(\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\|\chi_B\|_{p(\cdot),w}\|\chi_B\|_{p'(\cdot),w'}\right)^{p_B} \leq \max\left(1,[w]^{p_+}_{B_{p(\cdot)}}\right).$$

□

最后，我们用相同的证明记录下关于变指数穆肯霍普特权重类的以下类似定理。

定理 5.21。 设 w 为一个权，且 $p(\cdot)\in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$。以下三个断言等价。

1. $w \in A_{p(\cdot)}$;
2. $\sup\limits_{B} \frac{1}{\mu_\alpha(B)^{p_B}}\|w\chi_B\|_1\|w^{-1}\chi_B\|_{\frac{p'(\cdot)}{p(\cdot)}} < \infty$, *where the* sup *is taken over all pseudo-balls of* $\mathbb{B}$;
3. $\sup\limits_{B} \frac{w(B)}{\mu_\alpha(B)}\left(\frac{w'(B)}{\mu_\alpha(B)}\right)^{p_B-1} < \infty$, *where the* sup *is taken over all pseudo-balls of* $\mathbb{B}$.

6. 定理 1.6中必要条件的证明

本节旨在证明以下结果。

命题 6.1。 设 w 为一个权，且 $p(\cdot)\in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$。 如果伯格曼投影算子在 $L^{p(\cdot)}(wd\mu_\alpha)$ 上有界，则 $w \in B_{p(\cdot)}$。

证明。 根据定理 5.20，只需证明 $w \in B^{++}_{p\,\cdot\ ()}$，，即以下估计成立

$$\sup_{B\in\mathcal{B}} \frac{w(B)}{\mu_\alpha(B)}\left(\frac{w'(B)}{\mu_\alpha(B)}\right)^{p_B-1} < \infty. \tag{6.1}$$

由命题 4.1 可知 $w^{-\frac{1}{p\,\cdot}}(\,) \in L^{p'(\cdot)}(d\mu_\alpha)$，由命题 4.2 可知 $w^{\frac{1}{p\,\cdot}}(\,) \in L^{p(\cdot)}(d\mu_\alpha)$。特别地， $w(\mathbb{B}) < \infty$ 且 $w'(\mathbb{B}) < \infty$. 。因此，我们只需证明半径小于某个正数常量R_0的伪球满足估计式 (6.1)，因为如果 B 的半径更大，那么 B 可以视为 $\mathbb{B}$。我们将使用以下引理。

引理 6.2。 [2] 存在三个正数 R_0, c 和 C_α，使得以下结论成立。对于任意伪球 $B^1 \in \mathcal{B}$，其半径为 $R < R_0$，存在一个伪球 $B^2 \in \mathcal{B}$，其半径相同，且 $d(B^1, B^2) = cR$，并满足以下性质：对于每个支集包含于 f 中的非负可测函数 B^i 以及两个不同的上标$i, j \in \{1, 2\}$， 有

$$|P_\alpha f| \geq C_\alpha \chi_{B^j} \mu_\alpha(B^i)^{-1} \int_{B^i} f d\mu_\alpha. \tag{6.2}$$

因此，取 $f = \chi_{B^i}$ 代入（6.2）即可得到：

$$|P_\alpha \chi_{B^i}(z)| \geq \chi_{B^j}(z) C_\alpha \mu_\alpha(B^i)^{-1} \int_{B^i} \chi_{B^i} d\mu_\alpha \simeq \chi_{B^j}(z).$$

利用范数$\|\cdot\|_{p(\cdot),\ w}$ 的增长性质，可得

$$\|P_\alpha \chi_{B^i}\|_{p(\cdot),w} = \|w^{\frac{1}{p(\cdot)}} P_\alpha \chi_{B^i}\|_{p(\cdot)} \gtrsim \|\chi_{B^j} w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}$$

因此，利用 P_α 在 $L^{p(\cdot)}(wd\mu_\alpha)$上有界这一事实，可得：

$$\|\chi_{B^j} w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)} \lesssim \|P_\alpha\| \|\chi_{B^i}\|_{p(\cdot),w}$$

于是我们推得

$$\|\chi_{B^1} w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)} \simeq \|\chi_{B^2} w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}. \tag{6.3}$$

在这 在证明的其余部分，我们取 $f = w'\chi_{B^1}$. 我们有 $f \in L^{p(\cdot)}(wd\mu_\alpha)$ sin ce

$$\rho_{p(\cdot),w}(f) = \int_{\mathbb{B}} w(z)^{-p'(z)} \chi_{B^1}(z) w(z) d\mu_\alpha(z) = \rho_{p'(\cdot)}(w^{-\frac{1}{p(\cdot)}} \chi_{B^1}) < \infty$$

由命题 4.1。然而，$\rho_{p(\cdot),\ w}(f) = \int_{B^1} w' d\mu_\alpha = w'(B^1)$。 此外，由（6.2）及前一个等式可得

$$\chi_{B^2}(z) w'(B^1) \leq C_\alpha^{-1} \mu_\alpha(B^1) |P_\alpha f(z)|.$$

转到范数$\|\cdot\|_{p(\cdot),\ w}$，我们得到

$$\|w^{\frac{1}{p(\cdot)}} \chi_{B^2}\|_{p(\cdot)} w'(B^1) \leq C_\alpha^{-1} \mu_\alpha(B^1) \|P_\alpha f\|_{p(\cdot),w}$$

然后使用利用 P_α 在 $L^{p(\cdot)}(wd\mu_\alpha)$ 上的有界性，前一个不等式推出 s

$$\|w^{\frac{1}{p(\cdot)}} \chi_{B^2}\|_{p(\cdot)} w'(B^1) \leq C_\alpha^{-1} \mu_\alpha(B^1) \|P_\alpha\| \|f\|_{p(\cdot),w}$$

并结合（6.3），我们得到以下引理。

引理 6.3（主引理）。 假设 P_α 在 $L^{p(\cdot)}(wd\mu_\alpha)$上有界。 那么

$$\|w^{\frac{1}{p(\cdot)}} \chi_B\|_{p(\cdot)} w'(B) \leq C C_\alpha^{-1} \mu_\alpha(B) \|P_\alpha\| \|w'\chi_B\|_{p(\cdot),w} \tag{6.4}$$

对于每个半径小于 $B \in \mathcal{B}$ 的伪球 R_0.，绝对常数 R_0、C和 C_α 分别在引理 6.2、(6.3) 和 (6.2)中定义。

在这一层面，我们需要计算 $\|w^{\frac{1}{p\cdot()}} \chi_B\|_{p(\cdot)}$ 和 $\|\|w'\chi_B\|_{p(\cdot),\ w}$. 这一计算不像 $p(\cdot)$ 为常数时那样显而易见。

引理 6.4。 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{B})$。若 P_α 在 $L^{p(\cdot)}(w)$上有界，则 P_α 在 $L^{p'(\cdot)}(w')$上有界。

证明。首先回顾，加权 Bergman 投影算子 P_α 是从（希尔伯特）Lebesgue 空间 $L^2(d\mu_\alpha)$ 到其闭子空间 $L^2(d\mu_\alpha) \cap Hol(\mathbb{B})$（标准加权 Bergman 空间）的正交投影。我们将 $\mathcal{C}_c(\mathbb{B})$ 称为 $\mathbb{B}$. 中具有紧支撑的连续函数空间。根据命题 2.6， $\mathcal{C}_c(\mathbb{B})$ 是 $L^{p(\cdot)}(w)$ 和 $L^{p'(\cdot)}(w')$ 的稠密子空间。由命题 3.1 以及 P_α 在 $L^{p(\cdot)}(w)$ 上的有界性，对所有 $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{B})$，有

$$\begin{aligned}
\|P_\alpha f\|_{p'(\cdot),w'} &= \sup_{g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{B}:\|g\|_{p(\cdot),w}=1} \left| \int_{\mathbb{B}} P_\alpha f(\zeta)\overline{g(\zeta)} d\mu_\alpha(\zeta) \right| \\
&= \sup_{g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{B}):\|g\|_{p(\cdot),w}=1} \left| \int_{\mathbb{B}} f(\zeta)\overline{P_\alpha g(\zeta)} d\mu_\alpha(\zeta) \right| \\
&\leq 2 \sup_{g\in\mathcal{C}_c(\mathbb{B}):\|g\|_{p(\cdot),w}=1} \|f\|_{p'(\cdot),w'} \|P_\alpha g\|_{p(\cdot),w} \\
&\leq 2\,\|P_\alpha\|\,\|f\|_{p'(\cdot),w'}.
\end{aligned}$$

我们用到了一个基本事实： $\mathcal{C}_c(\mathbb{B})$ 包含于 $L^2(d\mu_\alpha)$。对于倒数第二个不等式，我们使用了霍尔德不等式。□

引理 6.5. 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}(\mathbb{B})$，并设 w 为一个权。若 P_α 在 $L^{p(\cdot)}(w)$上有界，则对所有 $t > 0$,

$$\|t\chi_{\{|P_\alpha f|>t\}}\|_{p(\cdot),w} \leq \|P_\alpha\|\,\|f\|_{p(\cdot),w}.$$

证明。 只需指出，对所有 $t > 0$， $t\chi_{\{|P_\alpha f|>t\}} \leq |P_\alpha f|$. □

引理 6.6. 设 $p(\cdot)\in \mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{B})$，且 w 为一个权。若 P_α 在 $L^{p(\cdot)}(w)$上有界，则

$$\|\chi_B\|_{p(\cdot),w} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_+(B)}} \simeq w(B)^{\frac{1}{p_-(B)}}$$

对 $\mathbb{B}$中的所有伪球 B 。

证明。 若 $\|\chi_B\|_{p(\cdot),w} \geq 1$，则 $\|\chi_{\mathbb{B}}\|_{p}^{p_--p_+}{}_{(\cdot)\,w} \leq \|\chi_B\|_{p}^{p_--p_+}{}_{(\cdot)\,w} \leq \|\chi_B\|^{p_-}{}_{(B)-p_+(B)\;p(\cdot)\,w} \leq 1$. 因此

$$\|\chi_B\|^{p_-(B)-p_+(B)}_{p(\cdot),w} \simeq 1. \tag{6.5}$$

否则，若 $\|\chi_B\|_{p(\cdot),w} < 1$，则由霍尔德不等式可得

$$\begin{aligned}
\mu_\alpha(B) &\leq 2\|\chi_B\|_{p(\cdot),w}\|\chi_B\|_{p'(\cdot),w'} \\
&\leq 2\|\chi_B\|_{p(\cdot),w}\|\chi_{\mathbb{B}}\|_{p'(\cdot),w'} \qquad (6.6)
\end{aligned}$$

因此，由（6.6）和引理 2.10，可得

$$\begin{aligned}
\|\chi_B\|^{p_-(B)-p_+(B)}_{p(\cdot),w} &\leq 2^{p_+-p_-}\mu_\alpha(B)^{p_-(B)-p_+(B)}\|\chi_{\mathbb{B}}\|^{p_+(B)-p_-(B)}_{p'(\cdot),w'} \\
&\lesssim \max\left(1, \|\chi_{\mathbb{B}}\|^{p_+-p_-}_{p'(\cdot),w'}\right). \qquad (6.7)
\end{aligned}$$

我们指出，根据命题$\|\chi_{\mathbb{B}}\|_{p'(\cdot)\,w'}<\infty$ 4.1，这是因为 P_α 在 $L^{p(\cdot)}(w)$上有界。另一方面，再次利用 P_α 在 $L^{p(\cdot)}(w)$上的有界性，根据命题$\|\chi_{\mathbb{B}}\|_{p(\cdot),\ w}<\infty$ 可得估计 4.2。于是

$$\|\chi_B\|_{p(\cdot),w}^{p_+(B)-p_-(B)}\lesssim \max\left(1,\|\chi_{\mathbb{B}}\|_{p(\cdot),w}^{p_+-p_-}\right)<\infty. \tag{6.8}$$

因此，由（6.5）、（6.7）和（6.8），我们可得

$$\|\chi_B\|_{p(\cdot),w}^{p_+(B)}\simeq\|\chi_B\|_{p(\cdot),w}^{p_-(B)} \tag{6.9}$$

对所有属于 $\mathbb{B}$. 伪球，应用引理 3.2 可得

$$\|\chi_B\|_{p(\cdot),w}\simeq w(B)^{\frac{1}{p_+(B)}}\simeq w(B)^{\frac{1}{p_-(B)}}.$$

□

命题 6.1 的证明到此结束。我们回到主引理（引理 6.3）。一方面，由于 P_α 在 $L^{p(\cdot)}(w)$ 上有界，根据引理 6.4 可知，P_α 在 $L^{p'(\cdot)}(w')$ 上也有界。因此，在引理 6.6 中用 $p'(\cdot)$ 代替 $p(\cdot)$，并用 w' 代替 w，可得

$$\|\chi_B\|_{p'(\cdot),w'}\simeq w'(B)^{1-\frac{1}{p_-(B)}}\simeq w'(B)^{1-\frac{1}{p_+(B)}}.$$

1 1这意味着估计式 $w'(B)^{p_-(B)}\simeq w'(B)^{\overline{p_+(B)}}$. 由引理 6.3可得

$$\|w'\chi_B\|_{p(\cdot),w}\simeq w'(B)^{\frac{1}{p_B}}.$$

另一方面，$\|w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_B\|_{p(\cdot)}=\|\chi_B\|_{p(\cdot),\ w}\simeq w(B)^{\frac{1}{p_B}}$ 根据引理 6.6。主引理中的不等式（6.4）可写为

$$w(B)^{\frac{1}{p_B}}w'(B)\lesssim\mu_\alpha(B)w'(B)^{\frac{1}{p_B}}.$$

等价地，

$$\sup_{B\in\mathcal{B}}\frac{w(B)}{\mu_\alpha(B)}\left(\frac{w'(B)}{\mu_\alpha(B)}\right)^{p_B-1}<\infty.$$

我们已证明估计式（6.1）。由此完成命题6.1的证明。 □

7. Boundedness on $L^{p(\cdot)}(w)$ of the maximal function m_α

本节中，我们证明当 $w\in B_{p(\cdot)}$ 时，极大函数 m_α 在 $L^{p(\cdot)}(w)$ 上的有界性。与 [2]，中一样，我们将使用正则化算子，并在此回顾其定义及若干性质。

定义 7.1。对所有 $k\in(0,1)$，我们定义 R_k^α 阶正则化算子 R_k^α，其阶数为 k，定义如下：

$$R_k^\alpha f(z)=\frac{1}{\mu_\alpha(B^k(z))}\int_{B^k(z)}f(\zeta)d\mu_\alpha(\zeta),$$

其中 $B^k(z)=\{\zeta\in\mathbb{B}:\ d(z,\zeta)<k(1-|z|)\}$.

命题 7.2. 对于所有 $k\in(0,1)$, 存在一个常数 $C_k>1$，使得对于每个非负局部可积函数 f, 以下两个估计成立。

1) $m_\alpha f \le C_k m_\alpha R_k^\alpha f$; 2)
$C_k^{-1} m_\alpha g \le R_k^\alpha m_\alpha g \le C_k m_\alpha g$.

引理 7.3. 设 $k \in (0,1\,2)$。若 $z' \in B^k(z)$，则 $z \in B^{k'}(z')$，其中 $k' = \frac{k}{1-k}$, 且$\chi_{B^k(z)}(z') \le \chi_{B^{k'}(z')}(z)$。此外，存在常数 $C_k > 1$ 使得

$$C_k^{-1}\mu_\alpha(B^k(z)) \le \mu_\alpha(B^{k'}(z')) \le C_k \mu_\alpha(B^k(z)).$$

引理 7.4. 设 $k \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$ 和 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_\pm^{\log}(\mathbb{B})$。对于 $w \in B_{p(\cdot)}$，存在常数$C_k > 1$，使得对所有满足 $z' \in B^k(z)$ 的 $z, z' \in \mathbb{B}$，我们有:

$$C_k^{-1} w(B^k(z)) \le w(B^{k'}(z')) \le C_k w(B^k(z))$$

证明。我们有 $B^k(z) \subset B^{2k'}(z')$ 以及 $B^{k'}(z') \subset B^{6k}(z)$。由定理 5.20 和注记 5.6，可得 $w \in \Lambda$. 应用注记 5.8 即可得出结论。□

引理 7.5. 设 $k \in (0, 1\,2)$. 存在正数常量 C_k，使得对所有非负的局部可积函数 $f, g,$ 均有

$$\int_{\mathbb{B}} f(\zeta) R_k g(\zeta) d\mu_\alpha(\zeta) \le C_k \int_{\mathbb{B}} g(z) R_k f(z) d\mu_\alpha(z).$$

我们还回顾以下初等引理。

引理 7.6. 对于 $z \in B$ 和 $\zeta \in B^k(z)$, 有 $\zeta \in B'$.

在本节余下部分，为简化记号，我们记 $\sigma = R_k^\alpha w$. 以下结果将类似结果推广到变指数情形，该类似结果见 [2, 引理10]。

命题 7.7. 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_\pm^{log}(\mathbb{B})$ $k \in (0,1\,2)$ 且 $w \in B_{p(\cdot)}$。则 $R_k^\alpha w \in A_{p(\cdot)}$ 满足 $[R_k^\alpha w]_{A_{p(\cdot)}} \lesssim [w]_{B_{p(\cdot)}}$.

证明. 根据定理 5.21，只需证明

$$\frac{\sigma(B)}{\mu_\alpha(B)} \left(\frac{\sigma'(B)}{\mu_\alpha(B)}\right)^{p(z_0)-1} \lesssim [w]_{B_{p(\cdot)}}$$

对于每个 B $\mathbb{B}$. 的伪球

记 $a = 2k+1$. 设 $B = B(z_0, r)$ 是 $\mathbb{B}$. 中的一个伪球。令 $B' = B(z_0, ar)$。我们区分两种情况：1. $B \in \mathcal{B}$; 2. B 不属于 $\mathcal{B}$.

1. 首先，假设 $B \in \mathcal{B}$. 。我们断言存在一个正的绝对常数 C_k，使得

$$\frac{\sigma(B)}{\mu_\alpha(B)} \le C_k \frac{w(B')}{\mu_\alpha(B')}. \tag{7.1}$$

事实上，由富比尼-托内利定理和引理 7.3 可得

$$\begin{aligned}\sigma(B) &= \int_B \sigma(z)d\mu_\alpha(z)\\ &= \int_B \left(\frac{1}{\mu_\alpha(B^k(z))}\int_{B^k(z)} w(\zeta)d\mu_\alpha(\zeta)\right)d\mu_\alpha(z)\\ &= \int_{\mathbb{B}}\left(\int_{\mathbb{B}}\frac{\chi_{B^k(z)}(\zeta)\chi_B(z)}{\mu_\alpha(B^k(z))}d\mu_\alpha(z)\right)w(\zeta)d\mu_\alpha(\zeta)\\ &\lesssim \int_{\mathbb{B}}\left(\int_{\mathbb{B}}\frac{\chi_{B^{k'}(\zeta)}(z)\chi_{B'}(\zeta)}{\mu_\alpha(B^{k'}(\zeta))}d\mu_\alpha(z)\right)w(\zeta)d\mu_\alpha(\zeta)\\ &= w(B').\end{aligned}$$

对于后一个不等式，我们使用了引理 7.6。此外，由于 $B \subset B'$ 和$\mu_\alpha(B) \simeq \mu_\alpha(B')$，我们得到

$$\frac{\sigma(B)}{\mu_\alpha(B)} \lesssim \frac{\sigma(B')}{\mu_\alpha(B')}.$$

此外，由霍尔德不等式和引理 5.9 可得

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}(z) &= \frac{\mu_\alpha(B^k(z))}{w(B^k(z))}\\ &\le \frac{2}{w(B^k(z))}\|w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_{B^k(z)}\|_{p(\cdot)}\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_{B^k(z)}\|_{p'(\cdot)}\\ &\simeq \frac{1}{w(B^k(z))}w(B^k(z))^{\frac{1}{p(z)}}w'(B^k(z))^{\frac{1}{p'(z)}}\\ &= \left(\frac{w'(B^k(z))}{w(B^k(z))}\right)^{\frac{1}{p'(z)}}.\end{aligned}$$

因此

$$\sigma'(z) = \left(\sigma^{-1}\right)^{p'(z)-1}(z) \lesssim \left(\frac{w'(B^k(z))}{w(B^k(z))}\right)^{\frac{1}{p(z)}}.$$

由霍尔德不等式和引理 5.9，可得

$$\begin{aligned}\sigma'(B) &= \int_B \sigma'(z)d\mu_\alpha(z)\\ &\lesssim \int_B \left(\frac{w'(B^k(z))}{w(B^k(z))}w(z)\right)^{\frac{1}{p(z)}} w(z)^{-\frac{1}{p(z)}}d\mu_\alpha(z)\\ &\le 2\|w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_B\|_{p'(\cdot)}\|\left(\frac{w'(B^k(\cdot))}{w(B^k(\cdot))}w(\cdot)\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_B\|_{p(\cdot)}\\ &\lesssim w'(B)^{\frac{1}{p'(z_0)}}\|\left(\frac{w'(B^k(\cdot))}{w(B^k(\cdot))}w(\cdot)\right)^{\frac{1}{p(\cdot)}}\chi_B\|_{p(\cdot)}\end{aligned} \tag{7.2}$$

由于 $w' \in \Lambda$，由引理 5.9 可得 $\beta := \|w'^{\frac{1}{p(\cdot)}} \chi_{B'}\|_{p(\cdot)} \simeq w'(B')^{\frac{1}{p(z_0)}}$。因此，当 $B \subset B'$ 时，由引理 7.3 和引理 7.4 可得

$$
\begin{aligned}
&\rho_{p(.)}\left(\frac{1}{\beta}\left(\frac{w'(B^k(.))}{w(B^k(.))}w\right)^{\frac{1}{p(.)}}\chi_B\right)\\
&= \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{\beta^{p(z)}} \frac{w'(B^k(z))}{w(B^k(z))} w(z)\chi_B(z) d\mu_\alpha(z)\\
&\simeq \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{w'(B')} \frac{w'(B^k(z))}{w(B^k(z))} w(z)\chi_B(z) d\mu_\alpha(z)\\
&= w'(B')^{-1} \times \int_{\mathbb{B}} \left(\frac{1}{w(B^k(z))} \int_{\mathbb{B}} w'(\zeta)\chi_{B_k(z)}(\zeta)\chi_B(z)w(z)d\mu_\alpha(\zeta)\right) d\mu_\alpha(z)\\
&\leq C_k w'(B')^{-1} \times \int_{\mathbb{B}} \left(\frac{1}{w(B_{k'}(\zeta))} \int_{\mathbb{B}} \chi_{B_{k'}(\zeta)}(z)\chi_{B'}(\zeta)w(z)d\mu_\alpha(z)\right) w'(\zeta)d\mu_\alpha(\zeta)\\
&= C_k.
\end{aligned}
$$

对于后一个不等式，我们使用了引理 7.6。因此得到

$$
\left\| \left(\frac{w'(B^k(.))}{w(B^k(.))}w\right)^{\frac{1}{p(.)}} \chi_B \right\|_{p(\cdot)} \lesssim C_k w'(B')^{\frac{1}{p(z_0)}}.
$$

因此，由（7.2）可推得

$$
\sigma'(B) \lesssim C_k w'(B)^{\frac{1}{p'(z_0)}} w'(B')^{\frac{1}{p(z_0)}} \leq C_k w'(B')
$$

因为 $B \subset B'$. 此外，由于 $\mu_\alpha(B) \simeq \mu_\alpha(B')$，我们有

$$
\frac{\sigma'(B)}{\mu_\alpha(B)} \leq C_k \frac{w'(B')}{\mu_\alpha(B')}
$$

从而

$$
\left(\frac{\sigma'(B)}{\mu_\alpha(B)}\right)^{p(z_0)-1} \leq C_k' \left(\frac{w'(B')}{\mu_\alpha(B')}\right)^{p(z_0)-1}. \tag{7.3}
$$

结合（7.1）和（7.3）可得

$$
\frac{\sigma(B)}{\mu_\alpha(B)} \left(\frac{\sigma'(B)}{\mu_\alpha(B)}\right)^{p(z_0)-1} \leq \gamma_k \frac{w(B')}{\mu_\alpha(B')} \left(\frac{w'(B')}{\mu_\alpha(B')}\right)^{p(z_0)-1} \leq \gamma_k [w]_{B_{p(\cdot)}} \tag{7.4}
$$

由定理5.20。

2. 接下来，假设伪球 B 不是 $\mathcal{B}$的成员，即 $r \leq 1 - |z_0|$。当 $k(1 - |z_0|) \leq r \leq 1 - |z_0|$时，我们有 $B \subset B(z_0, 1 - |z_0|)$，并且$\mu_\alpha(B) \simeq (1 - |z_0|)^{n+\alpha} \simeq \mu_\alpha(B(z_0, 1 - |z_0|))$。伪球 $B(z_0, 1 - |z_0|)$是 $\mathcal{B}$的成员；因此，我们可以对它应用第一种情形中的计算。于是得到：

$$\frac{\sigma(B)}{\mu_\alpha(B)}\left(\frac{\sigma'(B)}{\mu_\alpha(B)}\right)^{p(z_0)-1} \lesssim \frac{\sigma(B(z_0,1-|z_0|))}{\mu_\alpha(B(z_0,1-|z_0|))}\left(\frac{\sigma'(B(z_0,1-|z_0|))}{\mu_\alpha(B(z_0,1-|z_0|))}\right)^{p(z_0)-1} \lesssim [w]_{B_{p(\cdot)}}.$$

接下来，如果 $0<r<k(1-|z_0|)$，那么对于 $z\in B$，我们有 $(1-k)(1-|z_0|) \leq 1-|z| \leq (1+k)(1-|z_0|)$。这表明 $\mu_\alpha(B^k(z_0)) \simeq \mu_\alpha(B^k(z))$。我们还声称 $w(B^k(z_0)) \simeq w(B^k(z))$。事实上，很容易证明包含关系 $B^k(z_0) \subset B(z,4k(1-|z|))$ 和 $B^k(z) \subset B(z_0,2k(2+k)(1-|z_0|))$。由注 5.8 可得该结论。结合估计式$\mu_\alpha(B^k(z_0)) \simeq \mu_\alpha(B^k(z))$，得到

$$\sigma(z) \simeq \sigma(z_0) \tag{7.5}$$

对于每个 $z\in B$. 现在，由注 2.8， $p'(\cdot)$ 属于 $\mathcal{P}^{log}_{\pm}(\mathbb{B})$。于是，由引理 5.9和推论 2.11，我们有

$$\sigma(z_0)^{1-p'(z_0)} \simeq \sigma(z)^{1-p'(z_0)} \simeq \sigma(z)^{1-p'(z)}.$$

结合式（7.5）可得

$$\frac{\sigma(B)}{\mu_\alpha(B)}\left(\frac{\sigma'(B)}{\mu_\alpha(B)}\right)^{p(z_0)-1} \simeq 1. \tag{7.6}$$

结合式（7.4）和式（7.6），再应用定理 5.20，即可得到引理的结论。

□

引理 7.8. 设 $p(\cdot)\in \mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{B})$ $k\in(0, 1/2)$ 且 $w\in B_{p(\cdot)}$. 则

$$(R^\alpha_k g(z))^{p(z)} \lesssim R^\alpha_k(g^{p(\cdot)})(z)+1$$

对于所有满足 $\|g\|_{p(\cdot),w}=1$ 的非负函数 g，以及所有 $z\in\mathbb{B}$.

证明。由于 $\|g\|_{p(\cdot),w}=1$，由霍尔德不等式（命题 2.7的断言 1），可得

$$\frac{1}{2\|\chi_{B^k(z)}\|_{p'(\cdot),w'}}\int_{B^k(z)} g(\zeta)d\mu_\alpha(\zeta) \leq \|g\chi_{B^k(z)}\|_{p(\cdot),w}=1.$$

因此，由通常的霍尔德不等式和引理 2.10，可得

$$\begin{aligned}
(R_k^\alpha g(z))^{p(z)} &= \left(\frac{1}{2\|\chi_{B^k(z)}\|_{p'(\cdot),w'}}\int_{B^k(z)} g(\zeta)d\mu_\alpha(\zeta)\right)^{p(z)} \mu_\alpha(B^k(z))^{-p(z)}2^{p(z)}\|\chi_{B^k(z)}\|^{p(z)}_{p'(\cdot),w'}\\
&\le 2^{p(z)}\left(\frac{1}{2\|\chi_{B^k(z)}\|_{p'(\cdot),w'}}\int_{B^k(z)} g(\zeta)d\mu_\alpha(\zeta)\right)^{p_-(B)} \mu_\alpha(B^k(z))^{-p(z)}\|\chi_{B^k(z)}\|^{p(z)}_{p'(\cdot),w'}\\
&\lesssim \left(\frac{1}{\mu_\alpha(B^k(z))}\int_{B^k(z)} g(\zeta)d\mu_\alpha(\zeta)\right)^{p_-(B)} \mu_\alpha(B^k(z))^{p_-(B)-p(z)}\|\chi_{B^k(z)}\|^{p(z)-p_-(B)}_{p'(\cdot),w'}\\
&\le \mu_\alpha(B^k(z))^{p_-(B)-p(z)}\|\chi_{B^k(z)}\|^{p(z)-p_-(B)}_{p'(\cdot),w'}\frac{1}{\mu_\alpha(B^k(z))}\int_{B^k(z)} g(\zeta)^{p_-(B)}d\mu_\alpha(\zeta)\\
&\lesssim \frac{1}{\mu_\alpha(B^k(z))}\int_{B^k(z)} g\chi_{g\ge 1}(\zeta)^{p_-(B)}d\mu_\alpha(\zeta)+1\\
&\lesssim R_k^\alpha g^{p(\cdot)}(z)+1.
\end{aligned}$$

对于倒数第二个不等式，我们还用到了以下不等式

$$\|\chi_{B^k(z)}\|^{p(z)-p_-(B)}_{p'(\cdot),w'} \le \max(1,\|\chi_{\mathbb{B}}\|^{p_+-p_-}_{p'(\cdot),w'}).$$

□

引理 7.9. 设 $p(\cdot)\in\mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{B})$ $k\in(0,1\,2)$ 且– $w\in B_{p(\cdot)}$。则

$$\|R_k^\alpha g\cdot w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)} \lesssim \|g\cdot(R_k^\alpha w)^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}$$

对于所有属于 $L^{p(\,)}(R_k^\alpha w d\mu_\alpha)$。 的非负函数 g ·

证明。 由命题 7.7，可得 $\sigma = R_k^\alpha w \in A_{p(\cdot)}\subset B_{p(\cdot)}$ 因为 $w\in B_{p(\cdot)}$.不失一般性，假设 $\|g\|_{p(\cdot),\sigma}=1$.因此，由引理 7.8 和引理 7.5可得

$$\begin{aligned}
\rho_{p(\cdot)}(R_k^\alpha g\cdot w^{\frac{1}{p(\cdot)}}) &= \int_{\mathbb{B}}(R_k^\alpha g(z))^{p(z)}w(z)d\mu_\alpha(z)\\
&\lesssim \int_{\mathbb{B}} R_k^\alpha(g^{p(\cdot)})(z)w(z)d\mu_\alpha(z)+w(\mathbb{B})\\
&\lesssim \int_{\mathbb{B}} g(z)^{p(z)}\sigma(z)d\mu_\alpha(z)+w(\mathbb{B})\\
&\lesssim 1+w(\mathbb{B}).
\end{aligned}$$

对于最后一个不等式，应用引理 3.2。 □

我们仍使用记号 $\sigma = R_k^\alpha w$，其中 $k\in(0,1\,2)$。 –

引理 7.10. 设 $k\in(0,1\,2)$ $p(\cdot)\in\mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{B})$ 且 $w\in B_{p(\cdot)}$. 那么存在一个正数常量 $C([w']_{B_{p'(\cdot)}})$，它依赖于 $[w']_{B_{p'(\cdot)}}$，使得对每个非负函数 $g\in L^{p'(\cdot)}(\sigma'),$，都有

$$\|R_k^\alpha g\|_{p'(\cdot),w'} \le C([w']_{B_{p'(\cdot)}})\|g\|_{p'(\cdot),\sigma'}$$

对所有非负函数 $g\in L^{p'_{(\cdot)}}(\sigma')$.

证明。不失一般性，假设$\|g\|_{p'(\cdot)\,\sigma'}=1$。根据命题3.8 和命题 7.7，可得$\sigma'\in A_{p'(\cdot)}\subset B_{p'(\cdot)}$因为 $w\in B_{p(\cdot)}$。因此，由于$\|g\|_{p'(\cdot)\,\sigma'}=1$，利用引理 7.8 和引理 7.5 可得

$$\begin{aligned}\rho_{p'(\cdot),w'}(R_k^\alpha g)&=\int_{\mathbb{B}}(R_k^\alpha g(z))^{p'(z)}w'(z)d\mu_\alpha(z)\\&\lesssim\int_{\mathbb{B}}R_k^\alpha(g^{p'(\cdot)})(z)w'(z)d\mu_\alpha(z)+w'(\mathbb{B})\\&\lesssim\int_{\mathbb{B}}g(z)^{p'(z)}R_k^\alpha w'(z)d\mu_\alpha(z)+w'(\mathbb{B})\\&=\int_{\mathbb{B}}g(z)^{p'(z)}\sigma'(z)\sigma'(z)^{-1}R_k^\alpha w'(z)d\mu_\alpha(z)+w'(\mathbb{B})\\&\le[w']_{B_{p'(\cdot)}}\int_{\mathbb{B}}g(z)^{p'(z)}\sigma'(z)d\mu_\alpha(z)+w'(\mathbb{B})\\&\lesssim[w']_{B_{p'(\cdot)}}+w'(\mathbb{B}).\end{aligned}$$

事实上，最后一个不等式由引理 3.2 得出；对于倒数第二个不等式，在 w' 处用 w 代替，利用定理 5.20 和引理 5.9，可得

$$\sigma'(z)^{-1}R_k^\alpha w'(z)=(R_k^\alpha w(z))^{\frac{p'(z)}{p(z)}}R_k^\alpha w'(z)\lesssim[w']_{B_{p'(\cdot)}}$$

因为 $B^k(z)$ 几乎是 $\mathcal{B}$ 的一个元素，因为它是该空间中元素 $B(z,1-|z|)$ 的子集，而该元素属于 $\mathcal{B}$, $\mu_\alpha(B^k(z))\simeq\mu_\alpha(B(z,1-|z|))$ 以及 $w'\in B_{p'(\cdot)}$。因此，由引理 3.2，可得

$$\|R_k^\alpha g\|_{p'(\cdot),w'}\lesssim C([w']_{B_{p'(\cdot)}}).$$

□

Lem 命题 7.11。令 $p(\cdot)\in\mathcal{P}_\pm^{\log}(\mathbb{B})$ $f\in L^{p(\cdot)}(w)$ $k\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 和 $w\in B_{p(\cdot)}$。则

$$\|R_k^\alpha f(R_k^\alpha w)^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}\le C([w']_{B_{p'(\cdot)}})\|f\|_{p(\cdot),w}.$$

证明。仍记 $\sigma=R_k^\alpha w$。由对偶性（命题 3.1），存在一个函数 g，满足$\|g\|_{p'(\cdot)\,\sigma'}=1$，且使得

$$\|R_k^\alpha f\|_{p(\cdot),\sigma}\le 2\int_{\mathbb{B}}g(z)R_k^\alpha f(z)d\mu_\alpha(z).$$

接下来，由引理7.5、霍尔德不等式和引理7.10，我们得到

$$\begin{aligned}\|R_k^\alpha f\|_{p(\cdot),\sigma}&\lesssim\int_{\mathbb{B}}f(z)R_k^\alpha g(z)d\mu_\alpha(z)\\&\le 2\|f\|_{p(\cdot),w}\|R_k^\alpha g\|_{p'(\cdot),w'}\\&\le 2C([w']_{B_{p'(\cdot)}})\|f\|_{p(\cdot),w}\|g\|_{p'(\cdot),\sigma'}\\&=2C([w']_{B_{p'(\cdot)}})\|f\|_{p(\cdot),w}.\end{aligned}$$

因此，我们得到了这一结果。 □

定理 7.12. 令 $p(\cdot)\in\mathcal{P}^{\log}_{\pm}(\mathbb{B})$。若 $w\in B_{p(\cdot)}$, 则存在一个定义在 $(0,\infty)$ 上的非负函数 C，使得对所有 $f\in L^{p(\cdot)}(w)$，均有

$$\|m_\alpha f\|_{p(\cdot),w}\le C([w]_{B_{p(\cdot)}})\|f\|_{p(\cdot),w}.$$

证明。 由命题 3.4，我们得到等式 $[w]_{B_{p(\cdot)}}=[w']_{B_{p'(\cdot)}}$. 因此，由引理 7.11，可得

$$\|R^\alpha_k f\cdot(R^\alpha_k w)^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}\le C([w]_{B_{p(\cdot)}})\|f\|_{p(\cdot),w}. \tag{7.7}$$

因此 $R^\alpha_k f\in L^{p(\cdot)}(\sigma)$。 接下来，由于 $\sigma\in A_{p(\cdot)}$ 根据命题 7.7，推论 3.11 给出

$$\|m_\alpha(R^\alpha_k f)\cdot(R^\alpha_k w)^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}\lesssim\|(R^\alpha_k f)\cdot(R^\alpha_k w)^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)} \tag{7.8}$$

因此，由（7.7）和（7.8），我们得到 $m_\alpha(R^\alpha_k f)\in L^{p(\cdot)}(R^\alpha_k w d\mu_\alpha)$。现在，引理 7.9给出

$$\|R^\alpha_k(m_\alpha(R^\alpha_k f))w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}\lesssim\|m_\alpha(R^\alpha_k f)\cdot(R^\alpha_k w)^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}.$$

接下来，根据命题7.2，存在一个正数常量 C 使得

$$m_\alpha f\le CR^\alpha_k(m_\alpha(R^\alpha_k f)).$$

这意味着

$$\|m_\alpha f\|_{p(\cdot),w}\lesssim\|m_\alpha(R^\alpha_k f)\cdot(R^\alpha_k w)^{\frac{1}{p(\cdot)}}\|_{p(\cdot)}.$$

最后，依次应用 (7.8) 和 (7.7)，即可得到所需结果。 □

8. 加权外推定理及定理 1.6中充分条件的证明

现在我们可以证明定理 1.6中的充分条件了；我们将采用 [8] 中使用的策略。

8.1. 预备结果。

我们回顾一下 B_1 类权重。权重 w 属于B_1，当且仅当

$$[w]_{B_1}:=ess\sup_{z\in\mathbb{B}}\frac{m_\alpha w(z)}{w(z)}<\infty. \tag{8.1}$$

在 $\mathbb{R}^n$ 中，Jones [12]证明了以下因子分解定理的类似结论适用于 Muckenhoupt 类 A_p, $1<p<\infty$。

定理 8.1。 对于满足 $1<p<\infty$ 的常指数 p，以下两个断言等价。

1) $w\in B_p$;2) 存在 $w_1\in B_1$ 和 $w_2\in B_1$，使得 $w=w_1w_2^{1-p}$.

证明。 我们首先证明蕴含关系 2) $\Rightarrow$ 1)。假设 $w=w_1w_2^{1-p}$ 且满足 $w_1,w_2\in B_1$. 。对于所有 $B\in\mathcal{B}$ 和 $z\in B$，我们有

$$\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\int_B w_i d\mu_\alpha\le[w_i]_{B_1}w_i(z),\quad i=1,2. \tag{8.2}$$

因此，由于 $(1-p')(1-p)=1$，我们有 $w^{1-p'}=\left(w_1w_2^{1-p}\right)^{1-p'}=w_1^{1-p'}w_2$。因此，由我们有 (8.2)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\int_B w d\mu_\alpha\right)\left(\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\int_B w^{1-p'}d\mu_\alpha\right)^{p-1}\\
&=\left(\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\int_B w_1w_2^{1-p}d\mu_\alpha\right)\left(\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\int_B w_1^{1-p'}w_2 d\mu_\alpha\right)^{p-1}\\
&\le [w_1]_{B_1}[w_2]_{B_1}^{p-1}\left(\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\int_B w_2d\mu_\alpha\right)^{1-p}\left(\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\int_B w_1d\mu_\alpha\right)\\
&\times\left(\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\int_B w_2d\mu_\alpha\right)^{p-1}\left(\frac{1}{\mu_\alpha(B)}\int_B w_1d\mu_\alpha\right)^{-1}\\
&=[w_1]_{B_1}[w_2]_{B_1}^{p-1}.
\end{aligned}$$

因此 $w\in B_p$。

接下来证明反向蕴含 2) $\Rightarrow$ 1)。设 $w\in B_{p\cdot}$，令 $q=pp'$，并在空间 $\mathcal{M}$ 上定义算子 S_1：

$$S_1f(z)=w(z)^{\frac{1}{q}}\left(m_\alpha\left(f^{p'}w^{-\frac{1}{p}}\right)(z)\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

根据闵可夫斯基不等式，S_1 是次线性的。此外，由定理 7.12 [2, 命题 3], 的常指数版本可得

$$\int_{\mathbb{B}}S_1f(z)^q d\mu_\alpha(z)=\int_{\mathbb{B}}\left(m_\alpha\left(f^{p'}w^{-\frac{1}{p}}\right)(z)\right)^p w(z)d\mu_\alpha(z)\lesssim C\left([w]_{B_p}\right)\int_{\mathbb{B}}f^q(z)d\mu_\alpha(z).$$

换言之，$\|S_1\|_q\lesssim\left(C\left([w]_{B_p}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$。

类似地，再次记 $w'=w^{1-p'}\in B_{p'}$，并在空间 $\mathcal{M}$ 上定义算子 S_2：

$$S_2f(z)=w'(z)^{\frac{1}{q}}\left(m_\alpha\left(f^{p}w'^{-\frac{1}{p'}}\right)(z)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

根据闵可夫斯基不等式，S_2 也是次线性的。此外，

$$\int_{\mathbb{B}}S_2f(z)^q d\mu_\alpha(z)\lesssim C\left([w']_{B_{p'}}\right)\int_{\mathbb{B}}f^q(z)d\mu_\alpha(z).$$

换言之，$\|S_2\|_q\lesssim C\left(\left([w']_{B_{p'}}\right)\right)^{\frac{1}{q}}=\left(C\left([w]_{B_p}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$。

我们使用以下引理。

引理 8.2. 设 $S=S_1+S_2$，并在 $\mathcal{M}$ 上定义算子 $\mathcal{R}$，使得

$$\mathcal{R}h(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S^kh(z)}{2^k\|S\|_q^k}$$

其中 $S^0h=|h|.$。那么

a) $|h|\le\mathcal{R}h$;b) $\|\mathcal{R}h\|_q\le 2\|h\|_q$;c) $S(\mathcal{R}h)\le 2\|S\|_q\mathcal{R}h.$

引理 *8.2* 的证明。 根据 $\mathcal{R}h$ 的定义，我们有 $h \le \mathcal{R}h$。此外

$$\|\mathcal{R}h\|_q \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|S^k h\|_q}{2^k \|S\|_q^k} \le \|h\|_q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2\|h\|_q.$$

接下来，由于 S 的次线性性，得到 $S(\mathcal{R}h) \le 2\|S\|_q \mathcal{R}h$。 □

应用引理 8.2的断言 c)，可得

$$w(z)^{\frac{1}{q}} \left(m_\alpha \left((\mathcal{R}h)^{p'} w^{-\frac{1}{p}} \right)(z) \right)^{\frac{1}{p'}} = S_1(\mathcal{R}h)(z) \le S(\mathcal{R}h)(z) \le 2\|S\|_q \mathcal{R}h(z). \tag{8.3}$$

现在令 $w_2 = (\mathcal{R}h)^{p'} w^{-\frac{1}{p}}$. 由 (8.3)，可得 $w_2 \in B_1$。

类似地，我们有

$$w'(z)^{\frac{1}{q}} \left(m_\alpha \left(\mathcal{R}h \right)^{p} w'^{-\frac{1}{p'}}(z) \right)^{\frac{1}{p}} = S_2(\mathcal{R}h)(z) \le S(\mathcal{R}h) \le 2\|S\|_q \mathcal{R}h(z). \tag{8.4}$$

现在令 $w_1 = (\mathcal{R}h)^{p} w'^{-\frac{1}{p'}}$. 由 (8.4)，可得 $w_1 \in B_1$。此外 $w_1 w_2^{1-p} = w \in B_p$.这就完成了引理 8.1的证明。 □

引理 8.3. 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$ 并设 $w \in B_{p(\cdot)}$. 。我们在 $L^{p(\cdot)}(w)$上定义算子 R 如下：

$$Rh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_\alpha^k h(x)}{2^k \|m_\alpha\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^k}$$

其中，当 $k \ge 1$，$m_\alpha^k = \underbrace{m_\alpha \circ m_\alpha \circ \cdots \circ m_\alpha}$ 且 $m_\alpha^0 h = |h|$时，则 R满足以下k次性质：

a) $|h| \le Rh$;
b) R *is bounded on* $L^{p(\cdot)}(w)$ *and* $\|Rh\|_{p(\cdot),w} \le 2\|h\|_{p(\cdot),w}$;
c) $Rh \in B_1$ *and* $[Rh]_{B_1} \le 2\|m_\alpha\|_{L^{p(\cdot)}(w)}$.

证明。 断言 a) 和 b) 的证明与引理 8.2 中断言 a) 和 b) 的证明相同。这里，我们利用 m_α.的次线性性。最后，根据 Rh 的定义，可得

$$\begin{aligned} m_\alpha(Rh)(x) &\le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_\alpha^{k+1} h(x)}{2^k \|m_\alpha\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^k} \\ &\le 2\|m_\alpha\|_{L^{p(\cdot)}(w)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_\alpha^{k+1} h(x)}{2^{k+1} \|m_\alpha\|_{L^{p(\cdot)}(w)}^{k+1}} \\ &\le 2\|m_\alpha\|_{L^{p(\cdot)}(w)} Rh(x). \end{aligned}$$

因此 $Rh \in B_1$ 且 $[Rh]_{B_1} \le 2\|m_\alpha\|_{L^{p(\cdot)}(w)}$。 □

引理 8.4. 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$ 且 $w \in B_{p(\cdot)}$。定义作用于 $L^{p'(\cdot)}$ 上的算子 H，使得

$$Hh = \mathcal{R}' \left(h w^{\frac{1}{p(\cdot)}} \right) w^{-\frac{1}{p(\cdot)}}$$

其中

$$\mathcal{R}'g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m_\alpha^k g(x)}{2^k\|m_\alpha\|_{L^{p'(\cdot)}(w')}^k}.$$

Then

a) $|h|\le Hh$;
b) H *is bounded on* $L^{p'(\cdot)}$ *and* $\|Hh\|_{p'(\cdot)}\le 2\|h\|_{p'(\cdot)}$;
c) $Hh\cdot w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\in B_1$ *and* $[Hh\cdot w^{\frac{1}{p(\cdot)}}]_{B_1}\le 2\|m_\alpha\|_{L^{p'(\cdot)}(w')}$.

证明。 证明与引理 8.3的证明相同。我们将 $p(\cdot)$ 替换为 $p'(\cdot)$ ，并将 $w\in B_{p(\cdot)}$替换为 $w'\in B_{p'(\cdot)}$. 性质 $p'(\cdot)\in\mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$ 由注记 2.8得出。 □

8.2. 加权外推定理。 我们用 $\mathcal{F}$ 表示一族非负可测函数对。现在可以陈述并证明以下加权变指数外推定理。

定理 8.5。 假设对于某个常指数 $p_0>1$， 存在一个函数$C:(0,\infty)\to(0,\infty)$，使得对于所有 $v\in B_{p_0}$ 和 $(F,G)\in\mathcal{F}$，均有

$$\int_{\mathbb{B}}F(x)^{p_0}v(x)d\mu_\alpha(x)\le C([v]_{B_{p_0}})\int_{\mathbb{B}}G(x)^{p_0}v(x)d\mu_\alpha(x). \tag{8.5}$$

那么，给定 $p(\cdot)\in\mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$ 和 $w\in B_{p(\cdot)}$，有

$$\|F\|_{p(\cdot),w}\le 16\times 4^{-\frac{1}{p_0}}\left(C([v]_{B_{p_0}})\right)^{\frac{1}{p_0}}\|G\|_{p(\cdot),w} \tag{8.6}$$

对所有$(F,G)\in\mathcal{F}$ 以及 $F\in L^{p(\cdot)}(w)$

证明。 我们采用 Cruz-Uribe 在[8, 定理 2.6]中的技巧。设 $(F,G)\in\mathcal{F}$。若$\|F\|_{p(\cdot),w}=0$，则结论成立。否则，$\|F\|_{p(\cdot),w}>0$，因此$\|G\|_{p(\cdot),w}>0$，因为若$\|G\|_{p(\cdot),w}=0$，则 $G=0$ 几乎处处成立，并且由（8.5）可得 $F=0$ 几乎处处成立。以下假设$0<\|F\|_{p(\cdot),w}<\infty$ 且$0<\|G\|_{p(\cdot),w}<\infty$. 定义

$$h_1=\frac{F}{\|F\|_{p(\cdot),w}}+\frac{G}{\|G\|_{p(\cdot),w}},$$

则$\|h_1\|_{p(\cdot),w}\le 2$，因此 $h_1\in L^{p(\cdot)}(w)$。

由于 $F\in L^{p(\cdot)}(w)$，由对偶性（命题3.1），存在 $h_2\in L^{p'(\cdot)}$ 使得$\|h_2\|_{p'(\cdot)}=1$ 并且

$$\|F\|_{p(\cdot),w}\le 2\int_{\mathbb{B}}Fw^{\frac{1}{p(\cdot)}}h_2d\mu_\alpha\le 2\int_{\mathbb{B}}F(Hh_2)w^{\frac{1}{p(\cdot)}}d\mu_\alpha \tag{8.7}$$

其中，后一个不等式由引理 a）的断言8.4得出。

令 $\gamma=\frac{1}{p_0'}$. 根据通常的霍尔德不等式，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{B}}F(Hh_2)w^{\frac{1}{p(\cdot)}}d\mu_\alpha&=\int_{\mathbb{B}}F(Rh_1)^{-\gamma}(Rh_1)^{\gamma}(Hh_2)w^{\frac{1}{p(\cdot)}}d\mu_\alpha\\&\le I_1^{\frac{1}{p_0}}I_2^{\frac{1}{p_0'}},\end{aligned} \tag{8.8}$$

其中

$$I_1 := \int_{\mathbb{B}} F^{p_0}(Rh_1)^{1-p_0}(Hh_2)w^{\frac{1}{p(\cdot)}}d\mu_\alpha$$

and

$$I_2 := \int_{\mathbb{B}} (Rh_1)(Hh_2)w^{\frac{1}{p(\cdot)}}d\mu_\alpha.$$

此外，分别由引理 8.3 和引理 8.4 可知， R 在 $L^{p(\cdot)}(w)$ 上有界，且 H 在 $L^{p'(\cdot)}$上有界。 因此，由霍尔德不等式以及引理 $b)$ 和引理 8.3、引理 8.4中的断言，我们得到

$$I_2 \leq 2\|Rh_1\|_{p(\cdot),w}\|Hh_2\|_{p'(\cdot)} \leq 8\|h_1\|_{p(\cdot),w}\|h_2\|_{p'(\cdot)} \leq 16.$$

根据 h_1 的定义以及引理 8.3的断言 a)，可得

$$\frac{\varphi}{\|\varphi\|_{p(\cdot),w}} \leq h_1 \leq Rh_1$$

对于 $\varphi \in \{F,\, G\}$. ，接下来由霍尔德不等式和引理 8.4的断言 b)，可得

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_{\mathbb{B}} F^{p_0}(\zeta)\left(\frac{F(\zeta)}{\|F\|_{p(\cdot),w}}\right)^{1-p_0} H(\zeta)h_2(\zeta)w^{\frac{1}{p(\zeta)}}d\mu_\alpha(\zeta)\\
&= \|F\|_{p(\cdot),w}^{p_0-1}\int_{\mathbb{B}} F(\zeta)H(\zeta)h_2(\zeta)w^{\frac{1}{p(\zeta)}}d\mu_\alpha(\zeta)\\
&\leq 2\|F\|_{p(\cdot),w}^{p_0-1}\|F\|_{p(\cdot),w}\|Hh_2\|_{p'(\cdot)}\\
&\leq 4\|F\|_{p(\cdot),w}^{p_0}\\
&< \infty.
\end{aligned}$$

由于 $Rh_1 \in B_1$ 和 $(Hh_2)w^{\frac{1}{p(\cdot)}} \in B_1$ 分别由引理 8.3 和引理 8.4可知，根据定理 8.1 可得 $v := (Rh_1)^{1-p_0}\left(Hh_2w^{\frac{1}{p(\cdot)}}\right) \in B_{p_0}$. 因此，由（8.5）以及与上文相同的论证，可得

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{B}} F^{p_0}(Rh_1)^{1-p_0}(Hh_2)w^{\frac{1}{p(\cdot)}}d\mu_\alpha\\
&\leq C([v]_{B_{p_0}})\int_{\mathbb{B}} G^{p_0}(Rh_1)^{1-p_0}(Hh_2)w^{\frac{1}{p(\cdot)}}d\mu_\alpha\\
&\leq C([v]_{B_{p_0}})\int_{\mathbb{B}} G^{p_0}\left(\frac{G}{\|G\|_{p(\cdot),w}}\right)^{1-p_0}(Hh_2)w^{\frac{1}{p(\cdot)}}d\mu_\alpha\\
&= C([v]_{B_{p_0}})\|G\|_{p(\cdot),w}^{p_0-1}\int_{\mathbb{B}} G(Hh_2)w^{\frac{1}{p(\cdot)}}d\mu_\alpha\\
&\leq 2C([v]_{B_{p_0}})\|G\|_{p(\cdot),w}^{p_0-1}\|G\|_{p(\cdot),w}\|Hh_2\|_{p'(\cdot)}\\
&\leq 4C([v]_{B_{p_0}})\|G\|_{p(\cdot),w}^{p_0}.
\end{aligned}$$

因此，由（8.7）和（8.8），可得结论。 □

8.3. **定理 1.6 中充分条件证明的结束。** 我们证明以下命题。

命题 8.6. 设 $p(\cdot) \in \mathcal{P}_{\pm}^{\log}(\mathbb{B})$ 且 $w \in B_{p(\cdot)}$. 。则 P_α^+是 $L^{p(\cdot)}(w)$上的连续算子。 因此，伯格曼投影算子 P_α 可延拓为 $L^{p(\cdot)}(w)$上的连续算子。

证明。 我们再次称 $\mathcal{C}_c(\mathbb{B})$ 为 $\mathbb{B}$中的紧支撑连续函数空间，并取 $\mathcal{F} = \{(P_\alpha^+ f, |f|) : f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{B})\}$。由命题 2.6 可知， $\mathcal{C}_c(\mathbb{B})$ 是 $L^{p(\cdot)}(w)$中的稠密子空间。

设 p_0 为任意一个大于 1 的常指数。 设 $v \in B_{p_0}$. 根据定理 1.5，对于每个 $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{B})$，有

$$\int_{\mathbb{B}} (P_\alpha^+ f)^{p_0} v d\mu_\alpha \leq C\left([v]_{B_{p_0}}\right) \int_{\mathbb{B}} |f|^{p_0} v d\mu_\alpha.$$

因此，根据定理 8.5，对于所有 $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{B})$，有

$$\|P_\alpha^+ f\|_{p(\cdot),w} \leq 16 \times 4^{-\frac{1}{p_0}} \left(C([v]_{B_{p_0}})\right)^{\frac{1}{p_0}} \|f\|_{p(\cdot),w}.$$

由稠密性即可得出结论。 □

参考文献

[1] A. Aleman、S. Pott、M. C. Reguera：极限 Bekolle-Bonami 权类的刻画，《伊比利亚美洲数学评论》35（6）（2019），1677–1692。[2] D. Békollè：单位球上 Bergman 投影的加权不等式， $\mathbb{C}^n$，《数学研究》71（1982），第3期，305–323。[3] A. P. Calderón：关于相对于度量的极大函数的不等式。《数学研究》57（3）（1976），297–306。[4] G. Chacón 和 H. Rafeiro：变指数伯格曼空间，《非线性分析》105（2014），41–49。[5] R. R. Coifman 和 R. Fefferman：极大函数与奇异积分的加权范数不等式，《数学研究》51（1974），241–250。[6] D. Cruz-Uribe 和 J. Cummings：齐次型空间上极大算子的加权范数不等式，《芬兰数学年刊》47（第1期）（2022），457–488。[7]D. Cruz-Uribe、L. Diening 和 P. Hästö：加权变指数勒贝格空间上的极大算子，《分数阶微积分与应用分析》14（2011），361–374。[8] D. Cruz-Uribe 和 L.-A. D. Wang：变指数勒贝格空间中的外推与加权范数不等式，《美国数学会汇刊》369（2017），第2期，1205–1235。[9] D. Cruz-Uribe 和 A. Fiorenza：变指数勒贝格空间：基础与调和分析，《应用与数值调和分析》，Birkhäuser（2013）。[10] L. Diening、P. Harjulehto、P. Hästö 和 M. Ruzicka：变指数勒贝格空间与索伯列夫空间，《数学讲义》2017，Springer，海德堡（2011），x+509页。[11] L. Diening 和 P. Hästö：变指数空间中的穆肯霍普特权，预印本（2008）。[12] P. W. Jones：权的因子分解，《数学年刊》111（1980），第3期，511–530。[13] B. Muckenhoupt：哈代极大函数的加权范数不等式，《美国数学会汇刊》165（1972），207–226。[14] A. B. Zotsa Ngoufack：变指数伯格曼空间，UYI硕士论文，雅温得第一大学，2019。https://www.academia.edu/40603645/专业_古典_分析_呈交_并_公开_答辩_者_ZOTSA_NGOUFACK_Arsene_Brice_变指数_伯格曼_空间_在_变指数_

雅温得第一大学理学院数学系，邮政信箱812，雅温得，喀麦隆电子邮箱：
dbekolle@gmail.com Edgar Tchoundja，莱布尼茨汉诺威大学分析研究所，Welfengarden 1，
30167 汉诺威，德国。电子邮箱：etchoundja@math.uni-hannover.de 永久地址：雅温得第一大学
理学院数学系，邮政信箱812，雅温得，喀麦隆。电子邮箱：tchoundjaedgar@yahoo.fr

艾克斯-马赛大学、法国国家科学研究中心、I2M，马赛，法国电
子邮件地址：arsene-brice.zotsa-ngoufack@univ-amu.fr