arXiv:2303.07561v1 [math.CV] 14 Mar 2023

关于有界变差函数的概念以及双曲区间上强分割的黎曼–斯蒂尔切斯积分

G. Y. Tellez-Sanchez† 和 J. Bory-Reyes*

† 国立理工学院物理与数学高等学院，9号楼
1层，阿道夫·洛佩斯·马特奥斯校区，邮编
07338，墨西哥城，墨西哥
gtellez.wolf@gmail.com ORCID：
0000-0002-6387-5336

* 国立理工学院机械与电气工程高等学院，5号楼3层，
阿道夫·洛佩斯·马特奥斯校区，邮编 07338，墨西哥城，
墨西哥 juanboryreyes@yahoo.com ORCID：
0000-0002-7004-1794

2023年3月15日

摘要

本文对双曲平面上的区间分割进行了分类。对于一种称为强分割的划分，我们定义了双曲数值有界变差函数的概念，并引入一种黎曼–斯蒂尔切斯积分。一个同时涉及这两个概念的条件，看来是积分存在的自然条件，正如实分析中的情形一样。

关键词与短语：双曲数、分割、有界变差函数、黎曼–斯蒂尔切斯积分。

数学主题分类（2020）：30G35、28B15、26B15。

1 引言

双曲数，又称分裂复数，可追溯至1848年，当时詹姆斯·科克尔在 [1]中提出了四元数。最初，在1935年至1941年间，超复分析领域中的双曲值函数理论得到了深入研究，并在许多方面得到广泛发展，作为实分析的一种恰当推广，参见 [2–18]。

利用早在 [17], 中引入、也称为光锥基的双曲数幂等表示，我们可以将双曲数平面视为实数与自身的直积。这一事实的重要意义在于，我们可以借助欧几里得平面 [19] 中逐点定义的偏序，将实数上的全序扩展为双曲数上的偏序。一

幂等表示的一个优点是，它能轻松用于简化计算。

双曲区间上的分割具有显著特点，这使得人们得以对康托型集合进行分类 [13,14,19], ，并引入双曲值概率[2] ，随后其在双曲数混沌游戏算法中的应用见 [15]。在 [20] 中，研究者在双复数情形下引入了柯西型积分，随后又在 [21]中提出了双曲值函数的积分概念。在 [5,6]中可以找到双曲值测度的概念。沿着这一方向进一步研究，关于双曲值函数的黎曼–斯蒂尔切斯积分的首次介绍见 [22], ；与此同时， [23] 则将其扩展至双复数值函数框架。近期研究已证明，类柯西积分公式对双曲变量的函数成立，参见 [24–26]。

本文的结构安排如下。在简短的引言之后，第2 节回顾双曲值函数理论的基本概念和事实。第3节介绍双曲值划分的一种分类，其中强分割尤为重要，因为它使得定义双曲值有界变差函数和黎曼–斯蒂尔切斯积分成为可能。在第4节定义双曲值有界变差函数，并给出一项主要结果：双曲平面上有界变差函数的所有间断点都位于与幂等轴平行的直线上。因此，有界变差函数的所有间断点构成的集合的勒贝格测度为零，这与实分析中的情形相同 [27]。

在最后一节中，我们将发展双曲值函数上的黎曼–斯蒂尔切斯积分理论，并将强分割的概念纳入考量。我们给出确保积分存在的充要条件，这些条件也涵盖了双曲值有界变差函数与黎曼–斯蒂尔切斯积分之间的关系。

2 双曲值函数理论

2.1 双曲数

双曲数环由实数和一个虚单位 $\mathbf{k} \notin \mathbb{R}$ 生成，满足 $\mathbf{k}^2 = 1$，可写为

$$\mathbb{K} := \mathbb{R}[\mathbf{k}] = \{t + s\mathbf{k} \mid t, s \in \mathbb{R}\}.$$

与复数类似， $\mathbb{K}$ 可以与欧几里得平面对应，因此通常称为双曲数平面。

复数和双曲数属于不同的数系，因为前者具有域的结构，而后者是一个含有零因子的含幺交换环。

$\mathbb{K}$中有两个重要的零因子:

$$\mathbf{e}_1 := \frac{1+\mathbf{k}}{2}, \quad \mathbf{e}_2 := \frac{1-\mathbf{k}}{2}.$$

它们是幂等元，且这两个数的乘积等于零。

尽管 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 是零因子，但每个元素 $\alpha \in \mathbb{K}$ 都可以唯一地表示为这些幂等元的实线性组合。

$$\alpha = t + s\mathbf{k} \Rightarrow \alpha = (t+s)\mathbf{e}_1 + (t-s)\mathbf{e}_2.$$

$$\alpha = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(a_1+a_2) + \frac{1}{2}(a_1-a_2)\mathbf{k}.$$

当 α 写成 $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$, 时，我们称 α 处于幂等表示形式。

利用幂等表示，双曲数平面可与下列对象等同 $\mathbb{R}\mathbf{e}_1 + \mathbb{R}\mathbf{e}_2$，并且 $\mathbb{K}$ 与直积 $\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}$之间存在环同构，参见例如 [11,17]。实数轴通过映射 $\mathbb{K}$ 嵌入 $x \mapsto x\mathbf{e}_1 + x\mathbf{e}_2$。此外，子集 $A \subset \mathbb{K}$ 的幂等投影定义如下:

$$A_{\mathbf{e}_1} := \{a \in \mathbb{R} \mid \exists b \in \mathbb{R},\ a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 \in A\},$$

$$A_{\mathbf{e}_2} := \{b \in \mathbb{R} \mid \exists a \in \mathbb{R},\ a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 \in A\}.$$

2.2 偏序

在超复数的实现中，[9]上定义了偏序关系。对于两个双曲数 $\alpha = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$ 和 $\beta = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$，若满足以下条件，则它们满足关系 $\preceq$:

$$a_1 \le b_1 \ \wedge\ a_2 \le b_2.$$

可以验证，该关系具有自反性、传递性和反对称性，是对实数上的全序的一种良好推广。

双曲数上的严格序定义如下:

$$\alpha \prec \beta \quad \Leftrightarrow \quad a_1 < b_1 \ \wedge\ a_2 < b_2.$$

这里，严格序的处理方式与 [8], 中定义的方式不同，因为这里只考虑两种情况之一: $a_1 = b_1$ 或 $a_2 = b_2$。

闭区间和开区间是相对于偏序定义的集合:

$$\text{Closed: } [\alpha,\beta]_{\mathbf{k}} := \{\xi \in \mathbb{K} \mid \alpha \preceq \xi \preceq \beta\},$$

$$\text{Open: } (\alpha,\beta)_{\mathbf{k}} := \{\xi \in \mathbb{K} \mid \alpha \prec \xi \prec \beta\}.$$

双曲区间 $\mathfrak{I} = [\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}$ 的长度按定义为以下数值:

$$\lambda_{\mathbf{k}}(\mathfrak{I}) := \beta - \alpha. \tag{2-E1}$$

当 $a_1 = b_1$ 或 $a_2 = b_2$ 时，闭区间 $[\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}$ 称为退化区间。这类区间可视为由 α 和 β 界定的线段。

2.3 全纯双曲值函数

双曲数 $\alpha = t + s\mathbf{k}$ 的共轭是另一个双曲数，记作 $\alpha^\dagger := t - s\mathbf{k}$。但是，当 α 以幂等表示 $\alpha = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2$, 表示时，其共轭为 $\alpha^\dagger := a_2\mathbf{e}_1 + a_1\mathbf{e}_2$。

我们将考虑由以下方式定义的双曲数 α 的双曲值模

$$|\alpha|_k := |a_1|\mathbf{e}_1 + |a_2|\mathbf{e}_2.$$

由于 $|\alpha|_{\mathbf{k}} = \sqrt{\alpha^2}$, 双曲模的行为在某种意义上近似于实数模的行为是合理的。此外，双曲值模会生成一个双曲值度量（见 [7–9]），其定义如下:

$$D_{\mathbf{k}} = |\alpha - \beta|_{\mathbf{k}}$$

具有以下性质

1. 当且仅当 $\alpha = \beta$ 时， $D_{\mathbf{k}}(\alpha, \beta) = 0$。

2. $D_{\mathbf{k}}(\alpha, \beta) = D_{\mathbf{k}}(\beta, \alpha)$。3. $D_{\mathbf{k}}(\alpha, \gamma) \preceq D_{\mathbf{k}}(\alpha, \beta) + D_{\mathbf{k}}(\beta, \gamma)$】【。

我们将 $D_{\mathbf{k}}$ 称为 $\mathbb{K}$上的通常双曲度量。

借助双曲度量空间的结构，文献[8]中引入了连续函数的概念。

定义 2.1。设 F 是 $\Omega \subset \mathbb{K}$上的双曲值函数。若给定一个双曲正数 ϵ，存在另一个双曲正数 δ，使得 F 是 $\xi \in \Omega$ 上的$\mathbb{K}$-连续函数，并且 $D_{\mathbf{k}}(\xi, \zeta) \prec \delta$，满足条件

$$D_{\mathbf{k}}(F(\xi), F(\zeta)) \prec \epsilon.$$

我们需要对双曲值函数 $F = F_1 + F_2\mathbf{k} : \Omega \to \mathbb{K}$提出这样的要求：它的实值分量 F_1, F_2 是单变量函数。若例如 F 满足柯西-黎曼型方程组，则幂等表示可保证这一点。

$$\frac{\partial F_1(\xi)}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1(\xi)}{\partial x_2}, \quad \wedge \quad \frac{\partial F_1(\xi)}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2(\xi)}{\partial x_1}, \tag{2-E2}$$

对于 $\xi = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \in \Omega$。

当 $F = F(\xi) = F_1(x_1)\mathbf{e}_1 + F_2(x_2)\mathbf{e}_2$ 满足系统 2-E2 时，我们得到所谓的 $\mathbb{K}$-可导或全纯双曲值函数，其导数为

$$F'(\xi) := dF_1(x_1)\mathbf{e}_1 + dF_2(x_2)\mathbf{e}_2,$$

其中 dF_1、dF_2 分别是 F_1 和 F_2 的实导数。关于这一结果以及全纯双曲值函数性质的深入讨论，请参阅 [11, 17, 18]。

定义在开连通集 Ω 上的全纯函数可扩展到 $\Omega_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1 + \Omega_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_2$, ，成为开区间 $(\omega_1, \omega_2)_{\mathbf{k}}$，其中

$$\omega_1 = \inf \Omega_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1 + \inf \Omega_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_2, \quad \omega_2 = \sup \Omega_{\mathbf{e}_1}\mathbf{e}_1 + \sup \Omega_{\mathbf{e}_2}\mathbf{e}_2.$$

这一结果见于 [17]。

3 双曲划分的分类

非退化双曲区间可以看作欧几里得平面中的一个矩形，因此可以用经典划分 $P = P_1 \times P_2$ 将区间 $[\alpha, \beta]_{\mathbf{k}}$ 划分，其中 $P_1 \subset [a_1, b_1]$ 和 $P_2 \subset [a_2, b_2]$ 是其对应区间的划分。这种划分的一个缺点是，无法得到 $[\alpha, \beta]_{\mathbf{k}}$ 的长度等于 P 的子矩形并集的长度之和，见 [19]。

例3.1. 设区间 $\mathfrak{I} = [0, 1]_{\mathbf{k}}$ 被分为以下九个子区间：

$$\mathfrak{I}_1 = \left[0, \tfrac{1}{3}\right]_{\mathbf{k}}, \qquad \mathfrak{I}_2 = \left[\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right]_{\mathbf{k}}, \qquad \mathfrak{I}_3 = \left[\tfrac{2}{3}, 1\right]_{\mathbf{k}},$$

$$\mathfrak{I}_4 = \left[\tfrac{1}{3}\mathbf{e}_1, \tfrac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \tfrac{1}{3}\mathbf{e}_2\right]_{\mathbf{k}}, \mathfrak{I}_5 = \left[\tfrac{2}{3}\mathbf{e}_1, 1\mathbf{e}_1 + \tfrac{1}{3}\mathbf{e}_2\right]_{\mathbf{k}}, \mathfrak{I}_6 = \left[\tfrac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \tfrac{1}{3}\mathbf{e}_2, 1\mathbf{e}_1 + \tfrac{2}{3}\mathbf{e}_2\right]_{\mathbf{k}},$$

$$\mathfrak{I}_7 = \left[\tfrac{1}{3}\mathbf{e}_2, \tfrac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \tfrac{2}{3}\mathbf{e}_2\right]_{\mathbf{k}}, \mathfrak{I}_8 = \left[\tfrac{2}{3}\mathbf{e}_2, \tfrac{1}{3}\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2\right]_{\mathbf{k}}, \mathfrak{I}_9 = \left[\tfrac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \tfrac{2}{3}\mathbf{e}_2, \tfrac{2}{3}\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2\right]_{\mathbf{k}}.$$

根据定义（2-E1），所有子区间的长度之和 $\mathfrak{I}_j$，其中 $j \in \{1,...,9\}$，不等于 $[0,1]_{\mathbf{k}}$的长度。

$$\lambda_k(\mathfrak{I}) = 1 \neq 3 = \sum_{j=1}^{9} \lambda_{\mathbf{k}}(\mathfrak{I}_j).$$

现在我们说明如何克服这一困难。

定义 3.2. 任意有限集 $S_1,...,S_n$，由此划分成的子区间：

$$[\alpha,\beta]_{\mathbf{k}} = \bigcup_{j=1}^{n} S_j,$$

称为正则分割，若

$$\mu_{\mathbb{R}^2}([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}) = \sum_{j=1}^{n} \mu_{\mathbb{R}^2}(S_j),$$

其中 $\mu_{\mathbb{R}^2}$ 表示欧几里得平面上的勒贝格测度。

注3.3。定义3.2 并不限于像例 3.1 中那样，由实区间的分割的笛卡尔积生成的子矩形的情形。

下面给出双曲区间分割的一个自然定义。

定义 3.4. 将 $[\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}$ 分成 $\mathcal{I}$ 个子区间的任意集合：

$$[\alpha,\beta]_{\mathbf{k}} = \bigcup_{I\in\mathcal{I}} I$$

称为弱分割，若

$$\lambda_{\mathbf{k}}([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}) = \sum_{I\in\mathcal{I}} \lambda_{\mathbf{k}}(I).$$

弱分割允许子区间集合中存在空交集，如图1所示。



(a) (b)

图1：弱分割示例

图1a 展示了 $[0,1]_{\mathbf{k}}$ 个长度均为 1 3 的子区间。因此

$$\lambda_{\mathbf{k}}(I_1) + \lambda_{\mathbf{k}}(I_2) + \lambda_{\mathbf{k}}(I_3) = 1.$$

另一方面，图 1b 展示了四个区间，其中 I_1 和 I_4 的长度均为$_{1\ 3}$，而其余两个区间则有

$$\lambda_{\mathbf{k}}(I_2) = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 \text{ and } \lambda_{\mathbf{k}}(I_3) = \frac{1}{3}\mathbf{e}_2.$$

因此，这四个区间的长度之和仍等于 1。

注3.5. 在 [19], 中，为避免不相交区间的问题，需要对生成划分的点规定一个全序。

定义3.6. 设 $\mathfrak{P} = \{\rho_0, ..., \rho_n\}$ 是区间 $[\alpha, \beta]_{\mathbf{k}}$中的一个有限点集，使得当 $s \neq t$时， $\rho_s \neq \rho_t$。如果以下两个条件均满足，则称 $\mathfrak{P}$ 为一个强分割

1)- $\mathfrak{P}$ 是 $\mathbb{K}$上的一条链。

2)- $\rho_0 = \alpha$、 $\rho_n = \beta$ 和

$$\rho_0 \preceq \rho_1 \preceq ... \preceq \rho_n.$$

定义 3.6 的限制性弱于 [19], ； 不过，“强”一词是相对于定义 3.4而言的。

作者不允许出现（3.6-2）中的等式 [19], ，因此他们的定义仅适用于不含零因子元素的情形。不过，定义 3.6 中的这一限制不会影响[19] 中对下一个结果所给出的证明。

定理3.7. 若 $\mathfrak{P}$ 是 $[\alpha, \beta]_{\mathbf{k}}$的强分割，则

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{\mathbf{k}}([\rho_{j-1}, \rho_j]_{\mathbf{k}}) = \lambda_{\mathbf{k}}([\alpha, \beta]_{\mathbf{k}}).$$

图2a 展示了包含零因子元素的强分割的构造方式。图2b则展示了直径等于$_{1\ 3}$ 的实数分割向双曲平面的扩展。

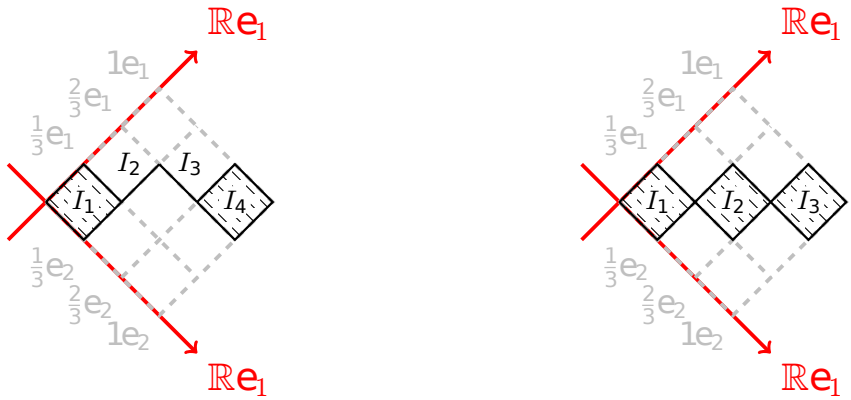

图2：强分割示例

一个划分在区间 $[\alpha, \beta]_{\mathbf{k}}$ 上的投影 $\mathfrak{P} = \{\rho_0, \rho_2, ..., \rho_n\}$，形成实区间 $[a_1, b_1]$ 和 $[a_2, b_2]$ 的两个划分。

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{\mathbf{e}_1} &= \{p_{0,1}, p_{2,1}, ..., p_{n,1}\} \\ \mathfrak{P}_{\mathbf{e}_2} &= \{p_{0,2}, p_{2,2}, ..., p_{n,2}\}, \end{aligned} \tag{3-E3}$$

其中 $\rho_j = p_j,\ {}_1\mathbf{e}_1 + p_j,\ {}_2\mathbf{e}_2$ 对每个 $j \in \{1, 2, ..., n\}$ 均成立。

现在，给定分割 $P = \{p_0, ..., p_s\} \subset [a_1, b_1]$ 和 $Q = \{q_0, ..., q_t\} \subset [a_2, b_2]$，就可以构造出 $[\alpha, \beta]_{\mathbf{k}}$的一个双曲分割。

根据划分的定义， $\alpha = p_0\mathbf{e}_1 + q_0\mathbf{e}_2$ 和 $\beta = p_s\mathbf{e}_1 + q_t\mathbf{e}_2$。将它们重新命名为$\alpha = \rho_{0,0}$ 和 $\beta = \rho_{s,t}$。

构造双曲点的一般过程是取点 $p_{s_j} \in P$ 和 $q_{t_j} \in Q$，使其满足 $p_{s_j-1} \le p_{s_j} \le p_s$ 和 $q_{t_j-1} \le q_{t_j} \le q_t$；但若 $p_{s_j} = p_{s_j-1}$，则有 $q_{t_j} \in Q \setminus \{q_{t_j-1}\}$；类似地，若 $q_{t_j} = q_{t_j-1}$，则有 $p_{s_j} \in P \setminus \{p_{s_j-1}\}$。这定义了点 $\rho_{s_j,t_j} = p_{s_j}\mathbf{e}_1 + q_{t_j}\mathbf{e}_2$。

上一步最多只能重复 $s + t$ 次，并在 $\rho_{s_j,\ t_j} = \rho_{s,\ t}$ 时结束。

此过程生成一个强分割

$$\mathfrak{P} = \{\rho_{1,1}, \rho_{s_1,t_1}, ..., \rho_{s,t}\}, \tag{3-E4}$$

尽管 $\mathfrak{P}$ 并不唯一。图3展示了一些示例。

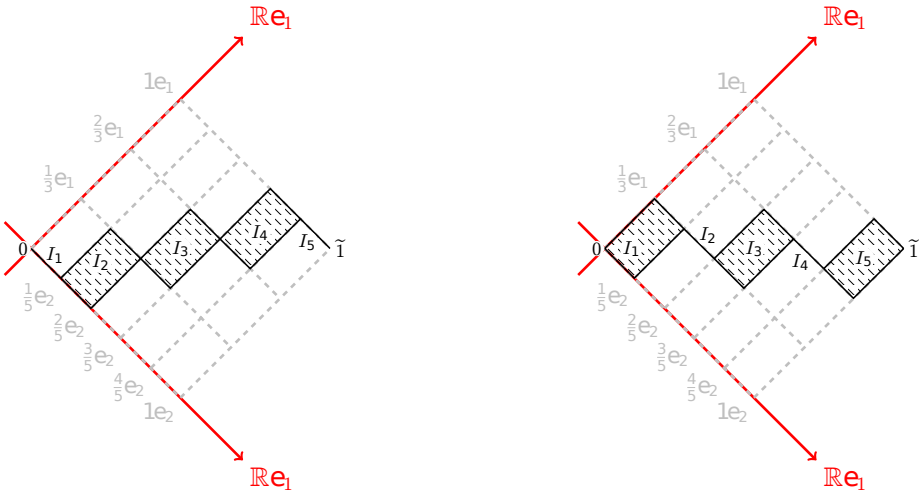

图3：由 $P_1 = \left\{0、\underset{_}{1}\,3、2\,3、1\right\}$、$P_2 = \left\{0、\underset{_}{1}\,5、\underset{_}{2}\,5、\underset{_}{3}\,5、\underset{_}{4}\,5、\underset{_}{1}\right\}$ 生成的强分割。两者都是实区间 $[0, 1]$ 上的分割。

4 有界变差双曲函数

设 $[\alpha, \beta]_{\mathbf{k}} \subset \mathbb{K}$ 和 $F\colon\ [\alpha, \beta]_{\mathbf{k}} \to \mathbb{K}$ 是一个具有幂等表示 $F = F_1\mathbf{e}_1 + F_2\mathbf{e}_2$的双曲值函数。

如果 $\mathfrak{P}=\{\rho_0,\rho_1,...,\rho_n\}$ 是 $[\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}$的强分割，那么我们可以考虑以下量:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{n-1}|F(\rho_{j+1})-F(\rho_j)|_{\mathbf{k}}=\\&\sum_{j=0}^{n-1}\left(|F_1(\rho_{j+1})-F_1(\rho_j)|\mathbf{e}_1+|F_2(\rho_{j+1})-F_2(\rho_j)|\mathbf{e}_2\right)=\\&\left(\sum_{j=0}^{n-1}|F_1(\rho_{j+1})-F_1(\rho_j)|\right)\mathbf{e}_1+\left(\sum_{j=0}^{n-1}|F_2(\rho_{j+1})-F_2(\rho_j)|\right)\mathbf{e}_2=\\&\left(\sum_{j=0}^{n-1}\Delta_{\mathfrak{P},j}F_1\right)\mathbf{e}_1+\left(\sum_{j=0}^{n-1}\Delta_{\mathfrak{P},j}F_2\right)\mathbf{e}_2.\end{aligned}\tag{4-E5}$$

令 $\mathcal{P}([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}})$ 表示 $[\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}$ 的所有强分割组成的族，并定义 th e set

$$\sum_{\mathcal{P}([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}})}(F):=\left\{\left(\sum_{j=0}^{n_{\mathfrak{P}}-1}\Delta_{\mathfrak{P},j}F_1\right)\mathbf{e}_1+\left(\sum_{j=0}^{n_{\mathfrak{P}}-1}\Delta_{\mathfrak{P},j}F_2\right)\mathbf{e}_2\;\middle|\;\mathfrak{P}\in\mathcal{P}([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}})\right\}.$$

定义 4.1. 若双曲值函数 $F:[\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}\to\mathbb{K}$ 具有有界变差，则

$$\mathrm{Sup}\left(\sum_{\mathcal{P}([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}})}(F)\right)\prec\infty.$$

上确界的取法与参考文献 [10, 12–14] 中相同。在非空集合 $A\subset\mathbb{K}$,

$$\mathrm{Sup}(A):=\sup(A_{\mathbf{e}_1})\mathbf{e}_1+\sup(A_{\mathbf{e}_2})\mathbf{e}_2.$$

因此，说一个函数具有有界变差，等价于要求

$$\left(\sum_{\mathcal{P}([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}})}(F)\right)_{\mathbf{e}_1}\quad\text{and}\quad\left(\sum_{\mathcal{P}([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}})}(F)\right)_{\mathbf{e}_2}$$

是实数的有界集合。

定义 4.2. 有界变差函数 F 的全变差 $[\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}\to\mathbb{K}$ 定义为

$$\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}}(F):=\mathrm{Sup}\left(\sum_{\mathcal{P}([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}})}(F)\right).$$

因此,

$$\mathcal{V}_{[\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}}(F)=\sup_{\mathfrak{P}\in\mathcal{P}([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}})}\left(\sum_{j=0}^{n_{\mathfrak{P}}-1}\Delta_{\mathfrak{P},j}F_1\right)\mathbf{e}_1+\sup_{\mathfrak{P}\in\mathcal{P}([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}})}\left(\sum_{j=0}^{n_{\mathfrak{P}}-1}\Delta_{\mathfrak{P},j}F_2\right)\mathbf{e}_2.$$

满足定义 4.1 的函数的分量不一定具有有限的维塔利变差（维塔利变差的定义见 [28–31] ）。有限维塔利变差函数会考虑由正则分割在实平面中生成的每个子区间（或子正方形）的四个顶点。相比之下，双曲情形只考虑两个极值点

（或两个顶点），这些点取自强分割中的每个区间，而强分割是正则分割的真子集。

需要考虑的一种特殊情况是：每个分量都只依赖于变量中相应分量的函数。因此，设 $F:[\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}\to\mathbb{K}$ 是一个满足以下条件的函数：$F(\xi)=F_1(x_1)\mathbf{e}_1+F_2(x_2)\mathbf{e}_2$。式 4-E5 可化为：

$$\sum_{j=0}^{n_{\mathfrak{P}}-1}|F(\rho_{j+1})-F(\rho_j)|_{\mathbf{k}}= \left(\sum_{j=0}^{n_{\mathfrak{P}}-1}|F_1(p_{j+1,1})-F_1(p_{j,1})|\right)\mathbf{e}_1+\left(\sum_{j=0}^{n_{\mathfrak{P}}-1}|F_2(p_{j+1,2})-F_2(p_{j,2})|\right)\mathbf{e}_2. \tag{4-E6}$$

注 4.3。式 3-E3 表明，式 4-E5 中的求和是对投影$\mathfrak{P}_{\mathbf{e}_1}$、$\mathfrak{P}_{\mathbf{e}_2}$进行的，它们分别是实区间 $([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}})_{\mathbf{e}_1}=[a_1,b_1]$ 和 $([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}})_{\mathbf{e}_2}=[a_2,b_2]$ 的分割。

记 $\mathcal{P}([a_j,b_j])$ 为实区间 $[a_j,b_j]$的所有分割的集合，其中 $j\in\{1,2\}$ 取任意值，并引入以下集合

$$\sum_{\mathcal{P}([a_j,b_j])}(F_j)=\left\{\sum_{j=0}^{n_P-1}|F_j(p_{j+1})-F_j(p_j)|\mid P\in\mathcal{P}([a_j,b_j])\right\}.$$

定理4.4。设 $F:[\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}\to\mathbb{K}$ 是一个函数，且每个分量都依赖于变量中相应的分量。则

$$\sum_{\mathcal{P}([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}})}(F)=\sum_{\mathcal{P}([a_1,b_1])}(F_1)\mathbf{e}_1+\sum_{\mathcal{P}([a_2,b_2])}(F_2)\mathbf{e}_2.$$

证明。设给定集合中的一个点$\sum_{\mathcal{P}([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}})}(F)$。根据注 4.3，投影 $\mathfrak{P}_{\mathbf{e}_1}$ 和 $\mathfrak{P}_{\mathbf{e}_2}$ 分别是 $[a_1,b_1]$ 和 $[a_2,b_2]$ 上的划分，并且其形式如等式 4-E6所示。

反过来，两个分割 $P\in\mathcal{P}([a_1,b_1])$ 和 $Q\in\mathcal{P}([a_2,b_2])$ 定义了一个强分割$\mathfrak{P}$ (见等式 3-E4)。分割 $\mathfrak{P}$ 满足 $\mathfrak{P}_{\mathbf{e}_1}=P$ 和 $\mathfrak{P}_{\mathbf{e}_2}=Q$，即使该过程产生 $n_{\mathfrak{P}}=n_P+n_Q$ 个点，其中 n_P 和 n_Q 分别表示 P 和 Q的基数，也不会在求和中加入额外项，因为在退化区间 $|F_1(p_{j+1})-F_1(p_j)|=0$ 或 $|F_2(p_{j+1})-F_2(p_j)|=0$中，这意味着

$$\left(\sum_{j=0}^{n_{\mathfrak{P}}-1}\Delta_{\mathfrak{P},j}F_1\right)\mathbf{e}_1+\left(\sum_{j=0}^{n_{\mathfrak{P}}-1}\Delta_{\mathfrak{P},j}F_2\right)\mathbf{e}_2= \left(\sum_{j=0}^{n_P-1}|F_1(p_{j+1})-F_1(p_j)|\right)\mathbf{e}_1+\left(\sum_{j=0}^{n_Q-1}|F_2(q_{j+1})-F_2(q_j)|\right)\mathbf{e}_2.$$

□

它是定义4.1 与定理4.4的结合，使双曲值有界变差函数的定义得以成立。

推论4.5。设 $F:\ [\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}\to\mathbb{K}$ 是由式 *4-E6*给出的函数F 具有双曲有界变差，当且仅当其幂等分量函数$F_1:\ [a_1,b_1]\to\mathbb{R}$ 和 $F_2:\ [a_2,b_2]\to\mathbb{R}$ 都是实有界变差函数。

根据这一结果，有界变差的双曲函数的所有间断点构成的集合是良定义的。这是因为实有界变差函数只有跳跃间断点，因此所有间断点的集合是可数的，参见[27, 第6节8]。

引理 4.6. 设 $F: [\alpha,\beta]_{\mathbf{k}} \to \mathbb{K}$ 是一个双曲值有界变差函数，且其每个分量仅依赖于相应的变量分量。那么， F 的所有间断点构成一个可数的垂直于幂等轴的线段之并。

证明. F 的分量 F_1 和 F_2 是实值有界变差函数，因此，存在两个集合 $\{x_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a_1,b_1]$ 和 $\{x_{2,n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a_2,b_2]$，分别由 F_1 和 F_2 的所有间断点构成。

对于每个点 $y \in [a_2,b_2]$ 和 $n \in \mathbb{N}$，点 $x_{1,n}\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ 是 F 的一个间断点。因此，间断点集包含以下并集

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_{1,n}\mathbf{e}_1 + [a_2,b_2]\mathbf{e}_2.$$

类似地， F 的不连续点集包含以下并集

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_1,b_1]\mathbf{e}_1 + x_{2,n}\mathbf{e}_2.$$

由此可知，并集

$$\mathfrak{D}(F) := \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_{1,n}\mathbf{e}_1 + [a_2,b_2]\mathbf{e}_2\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [a_1,b_1]\mathbf{e}_1 + x_{2,n}\mathbf{e}_2\right)$$

包含 F的所有不连续点，这显然是因为，如果存在$\xi = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ 是 F的不连续点，那么 x 将是 F_1 的不连续点，或者 y 是 F_2的不连续点，这意味着 $x \in \{x_{1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 或 $y \in \{x_{2,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$。 □

定理 4.7. 分量仅依赖于变量相应分量的有界变差双曲值函数，其所有不连续点构成的集合在欧几里得平面中的勒贝格测度为零。

证明. 证明的思路在于，欧几里得平面中的每条直线测度均为零，而可数条直线的并集测度仍为零。 □

注意，若以 [6], 中定义的双曲勒贝格测度替代勒贝格测度，类似的结论并不成立。由于勒贝格测度可表示为 $\mu = \mu_{\mathbb{R}}\mathbf{e}_1 + \mu_{\mathbb{R}}\mathbf{e}_2$,，其中$\mu_{\mathbb{R}}$是实数轴上的勒贝格测度，因此，对于所有 $n \in \mathbb{N}$，集合$x_1,\ {}_n\mathbf{e}_1 + [a_2,b_2]\mathbf{e}_2$的测度都不为零，这是因为 $[a_2,b_2]$ 不是零测度的实数集。

5 双曲数值黎曼–斯蒂尔切斯积分

实数分割 P 的直径定义为由 P 生成的所有相邻区间长度中的最大值，

$$\operatorname{diam}(P) = \max\{\lambda([p_{j+1},p_j]) \mid j \in \{0,...,n-1\}\}.$$

显然，只要将最大值替换为上确界，就可以自然地将划分的直径这一概念推广到强分割的情形；但这无助于建立黎曼–斯蒂尔切斯积分的定义。

定义5.1. 设 $\mathfrak{P}$ 是 $[\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}$的一个强分割。 $\mathfrak{P}$ 的直径定义为双曲数

$$\operatorname{diam}_{\mathbf{k}}(\mathfrak{P})=\operatorname{diam}(\mathfrak{P}_{\mathbf{e}_1})\mathbf{e}_1+\operatorname{diam}(\mathfrak{P}_{\mathbf{e}_2})\mathbf{e}_2.$$

直径与强分割这两个概念之间的关系引出了黎曼–斯蒂尔切斯积分的概念。

定义5.2. 设 $F:\ [\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}\to\mathbb{K}$ 和 $G:\ \mathbb{K}\to\mathbb{K}$ 是两个双曲函数。若对于每个$\epsilon\in\mathbb{K}^+$，都存在一个 $\delta\in\mathbb{K}^+$ 使得.....，则称双曲数 $\mathcal{I}$ 为 F 关于 G的黎曼–斯蒂尔切斯积分。

$$|S_{\mathbf{k}}(\mathfrak{P},F,G)-\mathcal{I}|_{\mathbf{k}}=\left|\sum_{j=0}^{n_{\mathfrak{P}}-1}F(\gamma_j)\,|G(\rho_{j+1})-G(\rho_j)|_{\mathbf{k}}-\mathcal{I}\right|_{\mathbf{k}}\prec\epsilon,$$

对于任意满足性质 $\operatorname{diam}_{\mathbf{k}}(\mathfrak{P})\prec\delta$ 的强分割 $\mathfrak{P}\in\mathcal{P}([\alpha,\beta]_{\mathbf{k}})$，以及任意选取的 $\gamma_j\in[\rho_{j+1},\rho_j]_{\mathbf{k}}$，其中 $j\in\{0,...,n_{\mathfrak{P}}-1\}$.

量 $S_{\mathbf{k}}(\mathfrak{P},F,G)$称为黎曼–斯蒂尔切斯和。此外，当这样的$\mathcal{I}\in\mathbb{K}$ 存在时，记作 $\mathcal{I}:=\int_\alpha^\beta F\,d_{\mathbf{k}}G$。

如果 F 并且 G 在定义5.2 中的分量仅依赖于变量的相应分量，那么黎曼–斯蒂尔切斯和与式4-E6 类似，因此

$$\begin{aligned}S_{\mathbf{k}}(\mathfrak{P},F,G)=&\left(\sum_{j=0}^{n_{\mathfrak{P}}-1}F_1(y_{j,1})\,|G_1(p_{j+1,1})-G_1(p_{j,1})|\right)\mathbf{e}_1\\&+\left(\sum_{j=0}^{n_{\mathfrak{P}}-1}F_2(y_{j,2})\,|G_2(p_{j+1,2})-G_2(p_{j,2})|\right)\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

由于 F_1 和 F_2 是定义在$[\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}$相应投影上的实值函数，同样， G_1 和 G_2 是定义在整个实数轴上的实值函数，因此双曲平面上的黎曼–斯蒂尔切斯和等于在由 $\mathfrak{P}$的投影生成的划分上两个经典黎曼–斯蒂尔切斯和的幂等和:

$$S_{\mathbf{k}}(\mathfrak{P},F,G)=S(\mathfrak{P}_{\mathbf{e}_1},F_1,G_1)\mathbf{e}_1+S(\mathfrak{P}_{\mathbf{e}_2},F_2,G_2)\mathbf{e}_2.$$

这一构造推广了 [27, 第 7.3] 节中的构造。

从现在起，所有函数的分量都将视为仅依赖于变量的相应分量。

逐分量运算表明，双曲黎曼–斯蒂尔切斯积分可以通过在实数轴上进行经典黎曼–斯蒂尔切斯积分来计算。

$$\int_\alpha^\beta F\,d_{\mathbf{k}}G=\left(\int_{a_1}^{b_1}F_1\,dG_1\right)\mathbf{e}_1+\left(\int_{a_2}^{b_2}F_2\,dG_2\right)\mathbf{e}_2,\tag{5-E7}$$

上述观察引出了以下结果:

定理5.3. 双曲函数 $F:\ [\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}\to\mathbb{K}$ 关于双曲函数 $G:\ \mathbb{K}\to\mathbb{K}$ 双曲黎曼–斯蒂尔切斯可积，当且仅当其分量$F_1:\ [a_1,b_1]\to\mathbb{R}$和 $F_2:\ [a_2,b_2]\to\mathbb{R}$ 分别关于 $G_1:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 和 $G_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是实黎曼–斯蒂尔切斯可积函数。

取恒等函数 $Id_{\mathbf{k}} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$，当函数 F 关于 $Id_{\mathbf{k}}$ 计算双曲黎曼–斯蒂尔切斯积分时，即可得到 [17, 第 IV 章]中定义的黎曼积分。此外，后者等价于 [6, 节3] 中引入的、基于 $\mathbb{K}$ 中双曲值勒贝格测度的勒贝格积分。

[17]中的结果要求连续闭环不得自相交（若尔当曲线）。连接双曲区间两个端点的直线构成这种闭环。因此，对于每个强分割 $\mathfrak{P}$，连接每个子区间 $[\rho_{j+1}, \rho_j]_{\mathbf{k}}$（其中 $j \in \{0, ..., n-1\}$）的直线的并集构成一条若尔当闭曲线，并且

$$\int_{\alpha}^{\beta} F d_{\mathbf{k}} I d_{\mathbf{k}} = \int_{\alpha}^{\beta} F d_{\mathbf{k}} \xi = \left(\int_{a_1}^{b_1} F_1 dx_1 \right) \mathbf{e}_1 + \left(\int_{a_2}^{b_2} F_2 dx_2 \right) \mathbf{e}_2.$$

对于勒贝格测度 $\mu_{\mathbf{k}} := \mu_{\mathbb{R}} \mathbf{e}_1 + \mu_{\mathbb{R}} \mathbf{e}_2,$，有必要考虑到勒贝格积分是按分量定义的，并且实值勒贝格积分在闭区间上的限制可归结为黎曼积分，

$$\int_{\alpha}^{\beta} F d_{\mathbf{k}} \xi = \int_{[\alpha,\beta]_{\mathbf{k}}} F d\mu_{\mathbf{k}} = \left(\int_{[a_1,b_1]} F_1 d\mu_{\mathbb{R}} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\int_{[a_2,b_2]} F_2 d\mu_{\mathbb{R}} \right) \mathbf{e}_2$$

文献 [21] 对双曲值函数的黎曼积分进行了初步研究。本文建立了关于所引入积分概念的一些基本性质和结果。定义 5.2 对该黎曼积分作了自然的推广和加强。

我们来说明当积分器为全纯函数时，双曲黎曼–斯蒂尔切斯积分的一项重要性质。

定理 5.4. 设 $G : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ 为全纯且连续可微的函数，$F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}$ 为关于 G 的双曲黎曼–斯蒂尔切斯可积函数。则

$$\int_{\alpha}^{\beta} F d_{\mathbf{k}} G = \int_{\alpha}^{\beta} F G' d_{\mathbf{k}} \xi.$$

证明. 由于 G 是全纯双曲函数，导数 $G'(\xi) = G_1'(x)\mathbf{e}_1 + G_2'(y)\mathbf{e}_2$ 存在，其中 $\xi \in \mathbb{K}$。根据 G的连续可微性，其幂等分量具有任意阶连续导数。因此，G_1 和 G_2 是有界变差函数，并且 [27, 定理 7.8] 可轻易得出

$$\int_{a_1}^{b_1} F_1 dG_1 = \int_{a_1}^{b_1} F_1 G_1' dx_1 \quad \text{and} \quad \int_{a_2}^{b_2} F_2 dG_2 = \int_{a_2}^{b_2} F_2 G_2' dx_2.$$

结合这些等式即可得到结论。 □

注 5.5. 定理 5.4 的结论并不能在假设中省略要求 G 为连续可微函数后仍然成立。与复分析的情形不同，双曲全纯函数不一定具有各阶导数，参见 [17, 32, 33]。

定理5.4 建立了黎曼–斯蒂尔切斯积分与黎曼积分之间的直接关系，其中要求 F 相对于 G 可积。因此，考察在什么条件下这种可积性成立是很有必要的。

定理 5.6. 假设 $F : [\alpha, \beta]_{\mathbf{k}} \to \mathbb{K}$ 是连续双曲函数，且 $G : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ 是有界变差双曲函数。那么 F 关于 G 黎曼–斯蒂尔切斯可积。

证明。 连续双曲函数 F_1 和 F_2 的分量 F是实连续函数，而推论 4.5 表明 G_1 和 G_2 是实有界变差函数。因此，积分

$$\int_{a_1}^{b_1} F_1 dG_1 \quad and \quad \int_{a_2}^{b_2} F_2 dG_2$$

exist，这一点显然可由 [27, 定理 7。27]最后，根据定理 5.3，即可得到该结果。 □

声明与说明

本文是第一作者在第二作者指导下于国家理工学院撰写的博士论文的一部分。

作者贡献

各位作者对本文贡献相同，并共同打字、阅读和审定了稿件的最终版本。

资助

本研究获得了墨西哥国立理工学院的部分经费支持（资助编号 SIP20211188），以及墨西哥国家科学与技术委员会（CONACYT）研究生学习奖学金的支持（资助编号 744134）。

数据和材料可用性

本研究未使用任何数据。

代码可用性

不适用。

利益冲突

作者声明，他们对本文所报告的工作不存在任何利益冲突。

参考文献

[1] Cockle J.：关于某些类似四元数的函数及代数中的一种新虚数。伦敦-都柏林-爱丁堡哲学杂志与科学期刊。32(3), 435-439 (1848年)。[2] Alpay D., Luna-Elizarrar´az M., Shapiro M.：双曲数值概率的 Kolmogorov 公理。应用克利福德代数进展，27, 913-929 (2017)。https://doi.org/10.1007/s00006-016-0706-6[3] Gal S. G.：双曲复变量函数的逼近与插值。Rev. Un. Mat. Argentina 40(3-4), 25-35 (1997)。[4] Gal S. G.：双曲复变量和对偶复变量的星形函数、凸函数及α-凸函数。StudiaUniv. Babe。s-Bolyai Math. 46(2), 23–40 (2001)。

[5]Ghosh C., Biswas S., Yasin T.：双曲值符号测度。国际数学趋势与技术杂志 (IJMTT)。55(7), 515-522 (2018)。https://doi.org/10.14445/22315373/IJMTT-V55P567

[6] Kumar R., Sharma K.：双曲值测度与概率基本定律。《全球纯粹与应用数学杂志》，13(10)，7163-7177（2017）。

[7] Kumar R., Saini H.：拓扑双复模。应用克利福德代数进展，26，1249-1270（2016）。https://doi.org/10.1007/s00006-016-0646-1

[8] Kumar Datta S., Ghosh C., Saha J.：关于双曲值函数环。Ganita，70(2)，175-184（2020）。

[9]Luna-Elizarrar´aas M. E., Shapiro M., Struppa D. C., Vajiac A.：双复全纯函数：双复数的代数、几何与分析。第1版。Birkh¨auser/Springer，瑞士（2015）。https://doi.org/10.1007/978-3-319-24868-4

[10]Luna-Elizarrar´as M. E., P´erez-Regalado C. O., Shapiro M.: 关于双曲模和双复模上的线性泛函与哈恩-巴拿赫定理。应用克利福德代数进展。24，1105-1129（2014）。https://doi.org/10.1007/s00006-014-0503-z

[11] Sobczyk G.: 双曲数平面。《大学数学杂志》。26(4)，268-280（1995）。https://doi.org/10.1080/07468342.1995.11973712

[12] Saini H., Sharma A., Kumar R.：《双复数与双曲标量的泛函分析基本定理》。应用克利福德代数进展。30(66)（2020）。https://doi.org/10.1007/s00006-020-01092-6[13] Tellez Sanchez G. Y.：《双曲数上的分形几何基础》（硕士论文）。SEPI ESFM-IPN，墨西哥城，墨西哥（2018）。https://doi.org/10.13140/RG.2.2.35650.68805[14]T´ellez-S´anchez G. Y., Bory-Reyes J.：《关于双曲数中的康托尔类集》。分形。25(5)，1750046（2017）。https://doi.org/10.1142/S0218348X17500463[15] T´ellez-S´anchez G. Y., Bory-Reyes J.：《香农熵与混沌游戏算法向双曲数平面的推广》。分形。29(1)，2150013（2021）。https://doi.org/10.1142/S0218348X21500134[16]T´ellez-S´anchez G. Y., Bory-Reyes J.：《双曲数平面上的广义迭代函数系统》。分形。27(4)，1950045（2019）。https://doi.org/10.1142/S0218348X19500452[17] Vignaux J. C., Dura˜nona y Vieda A.：《双曲复变量函数理论》。拉普拉塔国立大学。物理数学科学学院出版物，论文集104，139–183（1935）。[18] Vignaux J. C.《双对偶复变量函数理论》。拉普拉塔国立大学，物理数学科学学院出版物，论文集118，505–542（1938）。

[19]Balankin A. S., Bory-Reyes J., Luna-Elizarrar´as M. E., Shapiro M.：双曲数中的坎托型集合。分形。24(4), 1650051（2016）。https://doi.org/10.1142/S0218348X16500511

[20] Bory Reyes J., P´erez Regalado C. O., ShapiroM.: 双复数情形下的柯西型积分及其性质. Complex Anal. Oper.Theory 13, 2541–2573 (2019).https://doi.org/10.1007/s11785-019-00918-x

[21]Luna-Elizarrar´as M. E.: 双曲变量函数的积分. Complex Anal. Oper. Theory 16. 3(35 (2022).https://doi.org/10.1007/s11785-022-01197-9

[22]Tellez-Sanchez G. Y., Bory-Reyes J.: 有界变差双曲函数与涉及双曲区间强分割的黎曼–斯蒂尔切斯积分. arXiv:2111.14019 [math.CV] (2021)https://doi.org/10.48550/arXiv.2111.14019

[23]Gosh C., Mondal S.：沿双曲曲线的双复值函数积分 arXiv:2207.08354 [math.CV] (2022). https://doi.org/10.48550/arXiv.2207.08354[24]Blacklock K.：双曲变量函数的莫雷拉定理。Int. J. Math. Anal. (Ruse) 7(29-32), 1595–1600 (2013). http://dx.doi.org/10.12988/ijma.2013.212354[25]Catoni F., Zampetti P.：双曲变量函数的类柯西积分公式。Adv. Appl. Clifford Algebr. 22(1), 23-37 (2012). https://doi.org/10.1007/s00006-011-0292-6[26]Libine M.：分裂复数的双曲柯西积分公式。ArXiv:0712.0375v1 [math-ph] (2007). https://doi.org/10.48550/arXiv.0712.0375[27] Apostol T.：数学分析。第2版。Addison Wesley，密歇根州，美国，(1974).[28] Aistleitner C., Dick J.：有界变差函数、有符号测度及一般的 Koksma-Hlawka不等式。Acta Arithmetica. 167(2), 143-171 (2015).[29] Clarkson J. A., Adams C. R.：关于二元函数有界变差的定义。Transactions of the American Mathematical Society. 35(4), 824-854 (1933). https://doi.org/10.2307/1989593[30] Fr´echet M.：将由 Stieltjes 提出的积分定义推广到多重积分的情形。Nouvelles Annales de Math´ematiques. 4(10), 241-256 (1910). [31] Vitali G.：关于点集和实变量函数。Atti della Accademia delle Scienze di Torino. 43, 75-92 (1908).[32]Khrennikov A., Segre G.：双曲分析导论。arXiv:math-ph/0507053 (2005). https://doi.org/10.48550/arXiv.math-ph/0507053[33] Motter A. E., Rosa M. A. F.：双曲微积分。应用克利福德代数进展。8(1), 109-128 (1998). https://doi.org/10.1007/BF03041929