城市交通流的全局效率与网络结构：基于渗流的实证分析

Yungi Kwon，[1,2,3]Jung-Hoon Jung 和 Young-Ho Eom[1]自然科学研究所，首尔市立大学，首尔 *02504*，大韩民国[2]物理系，首尔市立大学，首尔 *02504*，大韩民国[3]城市大数据与人工智能研究所，首尔市立大学，首尔 *02504*，大韩民国

（*电子邮箱：yheom@uos.ac.kr）

（日期：2023年11月7日）

在复杂系统和网络科学中，建立网络系统功能与结构之间的联系是一个基本问题。城市交通流与城市中的各种问题相关，可表示为由局部交通流构成的网络。为确定城市交通流的功能与网络结构之间的实证关系，我们构建了特大城市首尔的时变交通流网络，并采用基于渗流的方法分析其全局效率。通过将现实交通流网络与具有随机化结构的相应零模型网络进行比较，我们发现，高峰时段现实网络的效率低于零模型网络，而非高峰时段则更高。我们观察到，在现实网络中，高峰时段介数最高的链路质量往往低于介数较低的链路，而非高峰时段则质量较高。由于介数最高的链路往往是连接网络的桥，其拥堵对网络全局效率的影响更大。我们的结果表明，交通流网络的空间结构对于理解其功能十分重要。

arXiv:2303.07633v2 [physics.soc-ph] 5 Nov 2023

城市中的交通流可以表示为单条道路上的局部交通流网络。高效与低效的交通流网络在结构上有何不同？为回答这一问题，我们将一个时变真实世界交通流网络与具有随机化结构的网络进行比较。我们发现，现实世界网络在高峰时段的效率较低，但在其他时段比随机化网络更高。我们表明，跨越现实世界网络的链路在高峰时段更容易发生拥堵，而在其他时段则速度更快。由于跨越性连接维持了网络的全局连通性，因此才会出现所观测到的效率差异。我们的研究结果表明，这类跨越性连接可以作为检测城市交通拥堵的有效目标，而城市交通流的网络结构与功能之间的关系有助于人们理解城市交通拥堵。

I. 引言

复杂系统与网络科学中的一个基本问题，是理解网络化系统的结构与功能之间的关系[1–3]。例如，众所周知，给定网络的度分布可以告诉我们流行病如何在网络中传播[4,5]，以及网络对于节点或链路移除的鲁棒性如何[6,7]。

城市交通流是一种涌现现象，与城市中的拥堵[8–13]、污染[14,15]，和福祉[16–18]等诸多问题息息相关。理解一座城市交通流的有效方法，是将其表示为道路网络（即交通流的通道）上各交叉口之间的局部交通流网络。在这一交通流网络中，每条链路的特征由与之对应的局部交通流质量决定。与其他研究[19–23]一样，我们将交通流的相对速度作为其质量。详情请见第 II A 节。因此，交通流网络的结构通常不同于其底层道路网络的结构。我们关注现实世界中的交通流网络具有怎样的结构[24,25]、网络结构如何随时间变化，以及网络结构与功能之间的关系[26–30]。

基于渗流的方法[19–23,31,32]近期受到关注，因为它根据网络的结构特性量化网络的全局效率。其基本思想是，车辆能够多快到达给定交通流网络中的大多数区域，体现了该网络的全局效率。在这种方法中，从网络中移除质量低于或等于渗流阈值的所有链路后，给定的交通流网络会分裂成多个部分。渗流阈值表示车辆能够在网络主体部分通行的最高质量，因此可以作为网络全局效率的替代指标。这种方法揭示了瓶颈链路[19,31]，临界状态下稳定的断裂模式[32]，天气对城市交通的影响[22]，以及交通流网络中的多种功能状态[21]，这里只列举了其中一些。近期一项研究[20]还报告称，高峰时段真实交通流网络中得到的渗流临界指数与二维晶格中观察到的指数相似，而非高峰时段的指数则与小世界网络中观察到的指数相似。

然而，现有的渗流方法存在分辨率限制，难以揭示网络结构对交通流网络全局效率的作用，因为其渗流阈值（全局效率的替代指标）不仅取决于网络的空间结构，也取决于链路质量分布。例如，考虑图1所示的一个假想时变交通流网络，其中面板(a)、(b)和(c)分别表示时间t、t'和t''时的交通流网络。时间t 时网络的渗流阈值q_c为0.5（图1(a)）。换言之，

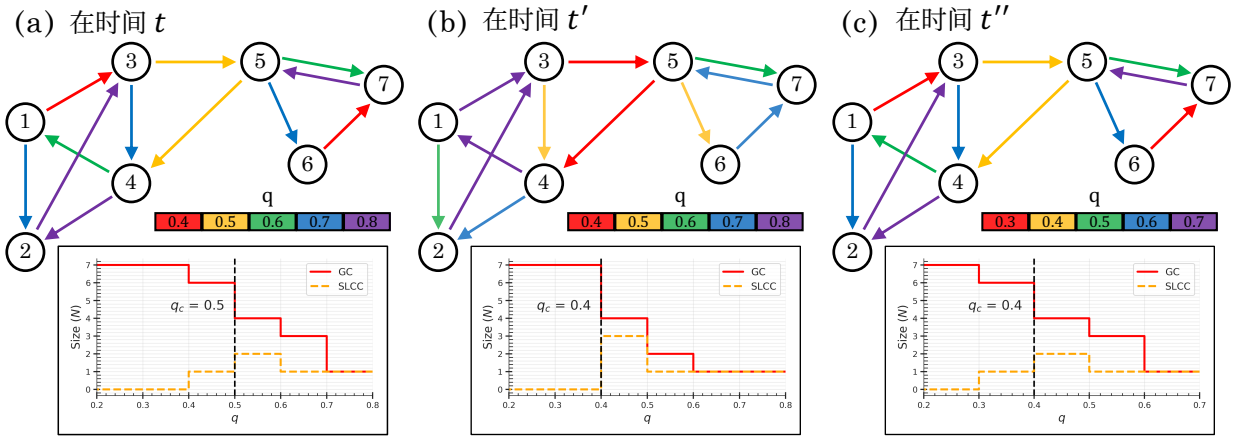

图1. **简化交通流网络上的渗流过程。(a)** 一个包含$N = 7$ 个节点和$L = 12$ 条链路的交通流网络，时间为t，其中每条链路都有其质量q，并按下方的颜色编码方案表示。渗流阈值q_c确定为0.5，此时网络断开，且第二大连通分量的规模达到最大值。**(b)** 时间为t'的网络具有与(a)相同的q 分布，但空间结构不同。当移除所有$q \leq 0.4$ 的链路时，网络断开，因此阈值q_c 为0.4。**(c)** 时间为t'' 的网络中，(a)中的所有链路质量仅降低了0.1。与(b)中一样，$q_c = 0.4$。

如果移除质量小于或等于0.5的链路，网络便会断开。然而，尽管时间t 和t'时网络具有相同的链路质量分布，时间t' 时网络的$q_c = 0.4$ 却不同。另一方面，尽管时间t 和t'' 时网络的空间结构相同——也就是说，如图1(a)和(c)所示，时间t 时质量较高（较低）的链路在时间t'' 时质量仍较高（较低）——时间t''时网络的$q_c = 0.4$ 却不同。请注意，网络中的每条链路在时间t 和t''时的质量相差0.1。这些例子表明，交通流网络的全局效率取决于两个结构特征：空间结构和链路质量分布。为了更深入地理解这一点，我们需要将这两个特征区分开来。尤其是，与链路质量分布的作用相比，空间结构的作用尚不明确。

本文将真实世界交通流网络与其零模型网络进行比较。两者具有相同的链接质量分布，但空间结构经过随机化，以识别全局效率与城市交通流网络空间结构之间的经验关系。我们观察到，高峰时段真实世界网络的效率低于其零模型网络，而非高峰时段则高于零模型网络。这表明，高峰时段城市交通流网络的空间结构在性质上不同于非高峰时段的空间结构。我们发现，高峰时段介数最高的链路[33–35] 往往比介数较低的链路质量更低，而在非高峰时段则质量更高。由于介数最高的链路通常是连接整个网络的桥，这些链路的拥堵对网络效率的影响更大。我们的结果表明，现实中的城市交通拥堵可能是由介数最高的链路严重拥堵引起的，而非整个系统都在减速；交通流网络的结构与功能之间的关系有助于理解城市交通拥堵。

II. 数据集与方法

A. 首尔交通流网络的构建

首先，我们基于首尔的道路网络构建了一个有向网络，该道路网络由1756个交叉口和4924条道路路段组成。这些交叉口和道路路段分别对应于交通流网络中的节点和链路。我们根据首尔道路交通的实时速度数据，为每条链路赋予权重，以表示流经该链路的交通流的功能质量。该数据记录于2020年12月1日至2021年2月28日期间（57个工作日和30个休息日），时间分辨率为5分钟。我们采用了以往研究中的链路质量量化方法[19,20]，如下所述。对于从节点i 到j的有向链路，我们首先确定其速度v_{ij}^{95th}在每天的第95百分位数，并将其作为有效的最大流量表现。然后，以该速度为基准，对同一天t 时刻各交通流的瞬时速度进行归一化，并将链路的流质量$q^{ij}(t)$定义为$q^{ij}(t) = v^{ij}(t)/v_{ij}^{95th}$。通过这种方式，我们构建了一系列加权网络，用于分析每个记录时刻的局部交通流。请注意，本研究中的所有分析均分别针对工作日和休息日进行。除非另有说明，本文呈现的所有结果均针对工作日。

B. 渗流分析与零模型网络

参照以往研究[19,20]，，我们按如下方式对交通流网络进行基于渗流的分析。对于给定的阈值q，我们移除所有质量等于或低于该阈值的链路。从 0 开始，持续提高阈值，并记录巨型连通分量（GC）的规模（在本研究中即最大的

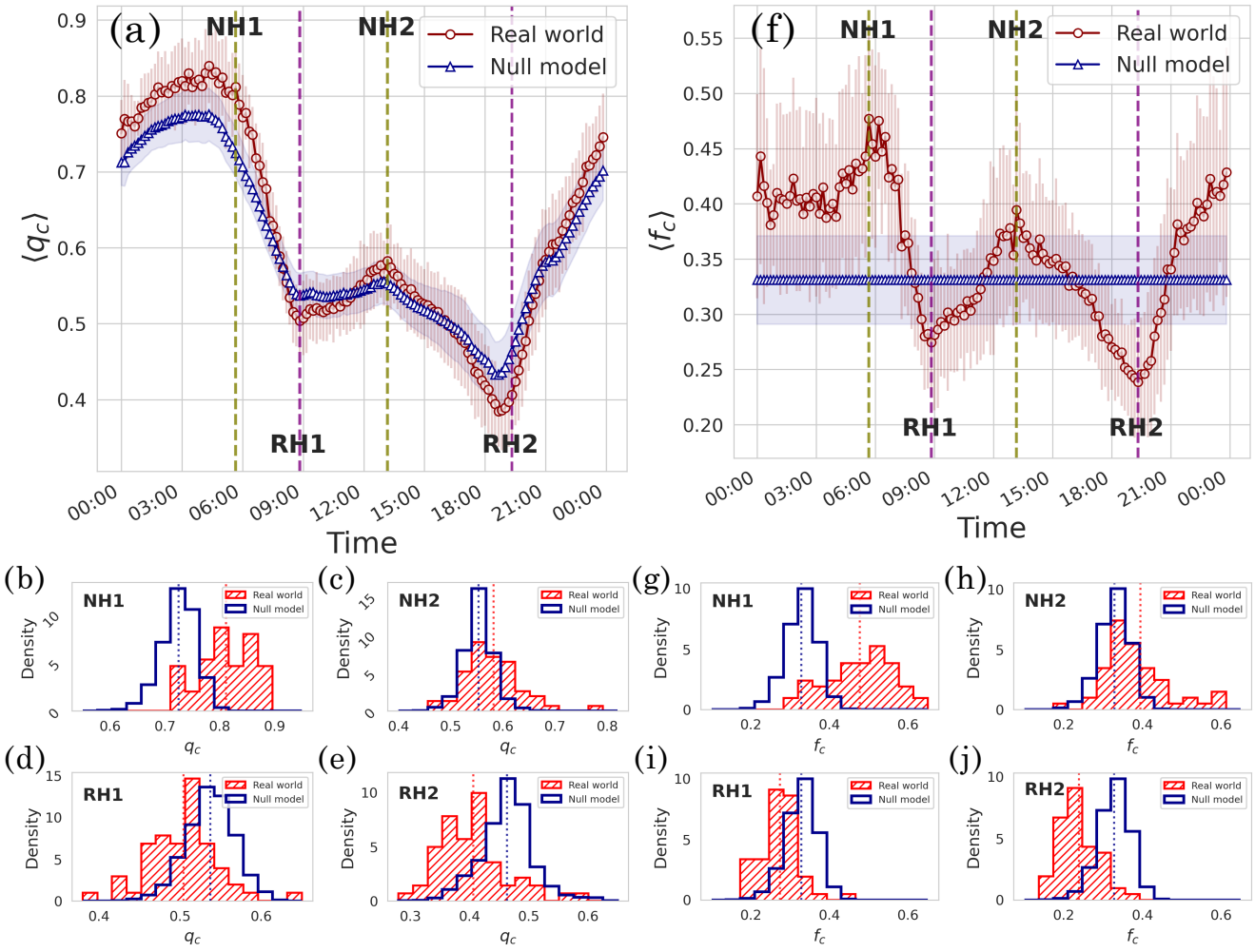

图 2. 现实交通流网络和零模型交通流网络的渗流阈值（q_c）与临界移除比例（f_c）。(a) 现实交通流网络及其零模型网络的平均渗流阈值 $\langle q_c(t)\rangle$。对于现实网络，$\langle q_c(t)\rangle$ 是对 57 个工作日取平均得到的，每个时刻的误差棒表示工作日间的标准差（SD）。对于零模型网络，$\langle q_c(t)\rangle$是对每个时刻的 50,000 个随机打乱的实现取平均得到的，阴影区域表示所有实现的标准差。这里，我们选取非高峰时段（NH1(05:40)、NH2(13:10)）和高峰时段（RH1(08:50)、RH2(19:20)）中，现实网络与零模型网络的 $\langle q_c(t)\rangle$ 差异最大的四个代表性时刻，分别用橄榄色和紫色虚线标出。(b)–(e) 所有工作日在 NH1、NH2、RH1 和 RH2 测得的 q_c 分布，其中每条点线表示该分布的均值。(f) 现实网络及其零模型网络的平均临界比例 $\langle f_c(t)\rangle$。(g)–(j) 所有工作日在 NH1、NH2、RH1 和 RH2 测得的 f_c 分布，其中每条点线表示该分布的均值。

连通分量）和第二大连通分量（SLCC）的规模。请注意，在本研究中，GC 和 SLCC 均为强连通分量。当 SLCC 达到最大值时，确定渗流阈值q_c [19,31,36]。在渗流阈值处，GC 的规模预计会出现最大幅度的下降，但 SLCC 的规模通常会形成更清晰、更明显的峰值[37]。图1的插图展示了渗流分析的一些示例。给定网络的渗流阈值q_c 是能够遍历该网络大部分区域的最大相对速度，因此可将其视为全局效率的替代指标，因为任何交通网络的可达性和通达性都是其功能[6,7,38]。

为了揭示现实交通流网络的空间结构在其全局效率中所起的作用，我们需要将其与一个具有相同链路质量分布、但空间结构经过随机化的零模型网络进行比较，正如第 I 节所述。构建此类零模型网络的一种简单方法，是随机打乱真实世界网络中的链路质量，因为打乱操作不会改变链路质量分布，却会使网络的空间结构随机化。在本研究中，我们将这样一个权重随机打乱后的网络用作零模型，同时保留真实世界网络中的节点和边信息。

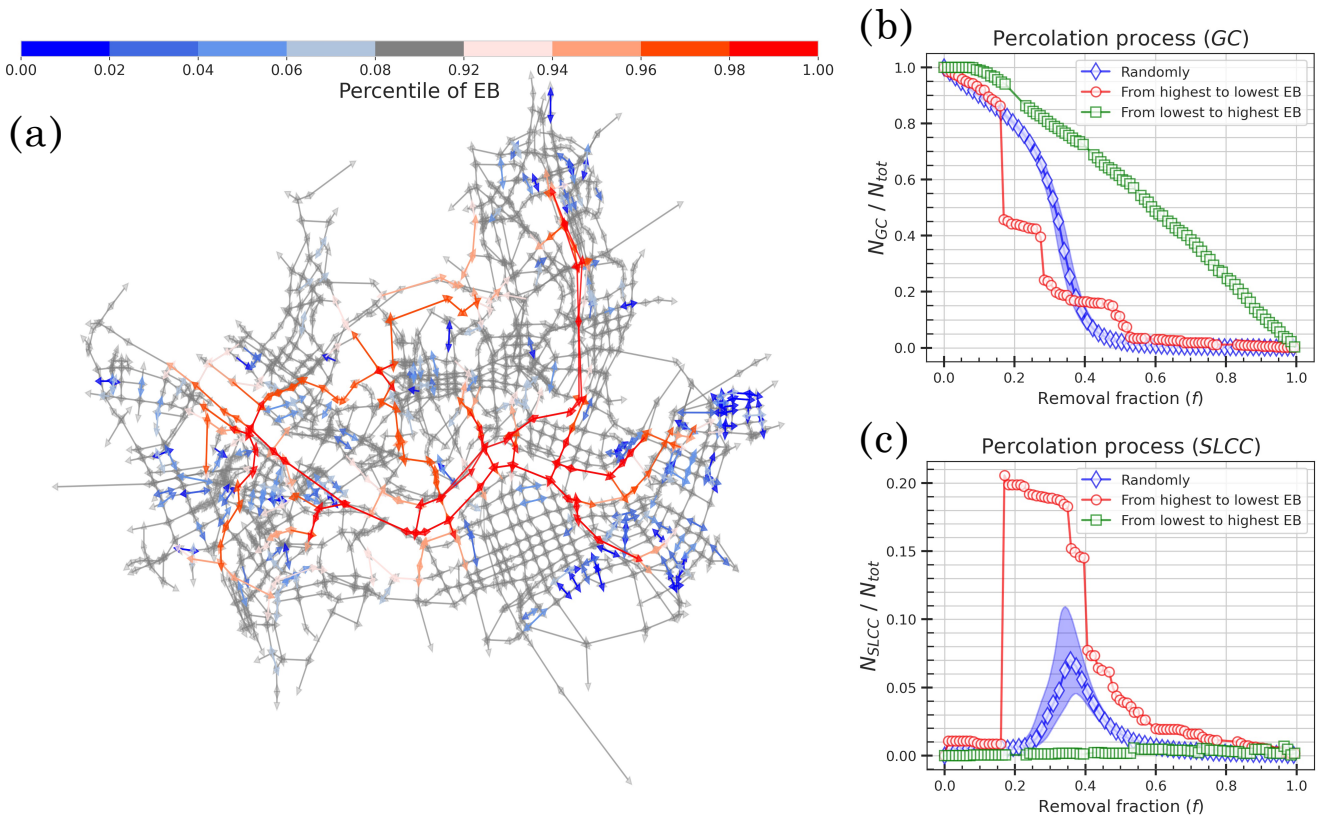

图 3. **边介数及其对渗流过程的影响。(a)** 首尔交通流网络上的边介数分布。**(b)** 不同渗流过程中，f所表示的链路移除比例与巨型连通分量归一化规模的关系。**(c)** 不同渗流过程中，链路移除比例f与第二大连通分量归一化规模的关系。(b) 和 (c) 中所示的随机渗流过程由 50000 次实现得出。对于每个f，标记表示中位数，阴影区域表示分布的第 25 至第 75 百分位数范围。

III. 结果

在给定时间t，我们根据链路质量从网络中移除链路，由此得到渗流阈值 $q_c(t)$，该阈值量化了首尔交通流网络在该时刻的全局效率。渗流过程的详细步骤见第 II B 节。图 2(a) 展示了首尔交通流网络平均渗流阈值 $\langle q_c(t)\rangle$ 的日内波动（空心圆符号）。给定时间t 的平均值 $\langle q_c(t)\rangle$ 是对 57 个工作日的渗流阈值取平均得到的。大致而言，$\langle q_c(t)\rangle$ 的值从凌晨 0:00 到早上 6:00 很高，但从早上 6:00 到 9:00 迅速下降。该值从早上 9:00 到下午 1:00 略有回升，从下午 1:00 到晚上 7:00 下降，并在晚上 7:00 后迅速回升。北京也观察到类似的模式，不过在北京，早高峰时段的$q_c(t)$值往往低于晚高峰时段的值[19]。然而，尚不清楚是什么导致了首尔和北京真实世界交通流网络全局效率中观察到的波动模式。

为确定交通流网络的空间结构对其全局效率的影响，我们将首尔交通流网络与其对应的零模型网络进行比较。后者具有相同的链路质量分布，但其结构在每个时刻都经过随机打乱。生成零模型网络的详细过程见第 II 节 B。如图 2(a) 所示，高峰时段（例如上午 8:00 至 11:25，以及下午 4:10 至晚上 8:45），首尔交通流网络的平均临界阈值 $\langle q_c(t)\rangle$低于其零模型；而在非高峰时段（例如上午 11:25 至下午 4:10，以及晚上 8:45 至次日上午 8:00），则高于其零模型。由于平均阈值的标准差较大，我们估计了凌晨 5:40（图 2(b)）、下午 1:10（图 2(c)）、上午 8:50 （图 2(d) ）和晚上 7:20 （图 2(e) ）的渗流阈值分布 $_cq(t)$。这些分布支持了如下观察：高峰时段，首尔交通流网络的全局效率往往低于其零模型网络；而非高峰时段则更高。这表明，首尔交通流网络会因其空间结构而呈现出性质迥异的效率状态。

为了解真实世界网络在高峰时段与非高峰时段空间结构上的差异，我们首先考察临界移除比例 $f_c(t)$，它表示基于链路质量的渗流过程达到

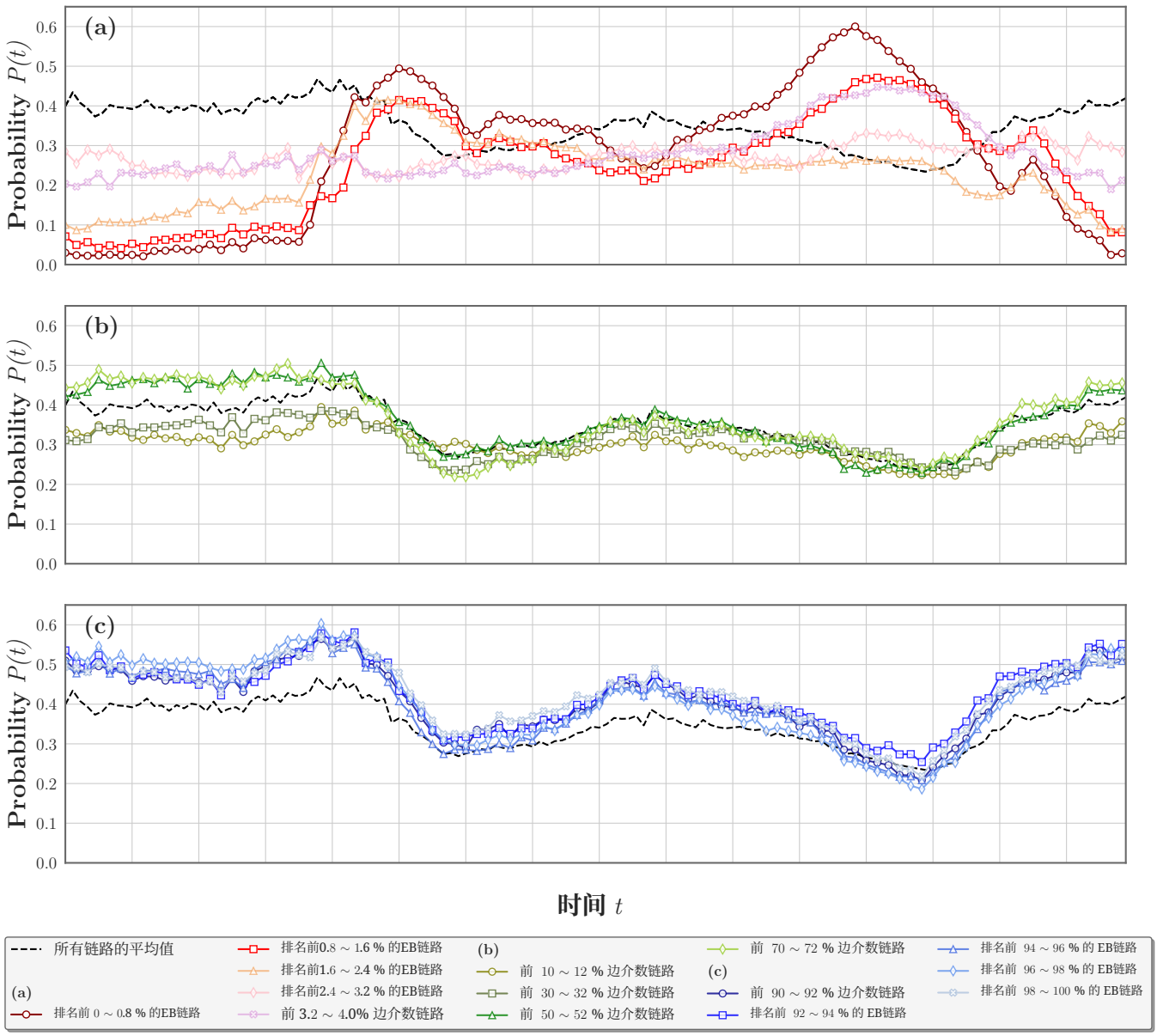

图 4. **概率$P(t)$链路质量低于渗流阈值$q_c(t)$。**（**a**）按组统计的平均概率，按 0% 至 4% 范围内每 0.8% 为一个增量划分。（**b**）不属于最高和最低 EB 组的平均概率。（**c**）最低 EB 组的平均概率。

时间t的渗流阈值时，已移除链路所占的比例。换言之，临界移除比例 $f_c(t)$ 是网络中质量等于或低于 $q_c(t)$ 的链路所占的比例。平均临界移除比例的时间序列 $\langle f_c(t)\rangle$ 如图 2(f) 所示。请注意，零模型网络的 $\langle f_c(t)\rangle$ 似乎是恒定的，因为网络中的链路质量呈随机分布，因此该渗流过程等同于随机渗流。高峰时段，首尔交通流网络的平均移除比例 $\langle f_c(t)\rangle$ 低于其零模型，而非高峰时段则高于零模型。我们还估算了凌晨 5:40（图 2(g)）、下午 1:10（图 2(h)）、上午 8:50（图 2(i)）以及 7:20 时临界移除比例 $f_c(t)$ 的分布

下午（图 2(j)）。这些结果表明，在从真实世界网络中移除低质量链路时，与零模型相比，高峰时段只需移除较小比例的链路就足以使网络崩溃，而非高峰时段则需要移除较大比例的链路。这说明，高峰时段对维持真实世界网络连通性至关重要的链路，其质量往往低于其他链路；而非高峰时段则往往高于其他链路。

那么，对于给定的网络而言，哪些链路对维持其整体连通性更为重要？一种可能的答案是边介数（EB）较高的链路[39,40]。由于链路的 EB 量化了沿该边经过的最短路径数量[34]，，因此，给定网络中 EB 较高的链路预计会充当连接整个网络的桥。

首尔交通流网络中具有 EB 的链路如图3(a)所示。请注意，我们根据首尔交通流网络的无权版本计算了每条链路的 EB，该版本的拓扑结构与底层道路网络的拓扑结构等价。高 EB 链路往往位于网络中心，其结构横跨整个网络；而低 EB 链路则集中分布于网络边缘，具有局部性。因此，我们可以假设，这些高 EB 链路对于维持整个网络的连通性至关重要。为验证上述假设，我们进行了数值实验，按照三种特定顺序从首尔交通流网络中移除链路：(i) 按 EB 升序（即从最低到最高）；(ii) 随机顺序；(iii) 按 EB 降序（即从最高到最低）。图3(b)和(c)显示，按 EB 降序移除链路时，临界移除比例为 $f_c = 0.164$，远低于随机移除链路情况下的临界移除比例 $f_c = 0.33$ 。另一方面，若按 EB 升序移除链路，临界比例估计值极高，达到 $f_c = 0.958$，这表明巨型连通分量几乎不会发生剧烈碎裂。数值实验表明，高（低）EB 链路对于维持真实世界网络连通性更（不）重要。

为检验高 EB 链路在高峰时段是否比其他链路更容易发生拥堵，我们针对每条链路，测量了在每天各个时间t，该链路的质量低于临界渗流阈值$q_c(t)$的概率$P(t)$；统计覆盖了 57 个工作日（因此，在渗流过程中，网络发生断裂之前，该链路就会被移除）。图 4 展示了按 EB 范围划分的链路在一天中各时段的平均概率。如图 4(a) 所示，高峰时段，排名前 $0-1.6\%$ 的 EB 链路的质量低于$q_c(t)$的可能性远高于其他链路。例如，下午 6 点时，排名前 $0-0.8\%$ 的 EB 链路的$P(t)$接近 0.6，而$f_c = 0.2702$，这表明排名前 $0-0.8\%$ 的 EB 链路的质量低于q_c的可能性是所有其他链路的两倍多。此外，我们对排名前 $0-1.6\%$ 的 EB 链路的质量进行了随机打乱，发现q_c 和f_c均未发生变化，这表明，即使并非所有排名靠前的 EB 链路都发生拥堵，它们的拥堵仍会对网络效率产生显著影响。排名前 $1.6-2.4\%$ 的 EB 链路在早高峰时段的$P(t)$较高，但在晚高峰时段并未明显升高。排名前 $2.4-4.0\%$ 的 EB 链路在晚高峰时段的$P(t)$较高，但在早高峰时段的$P(t)$甚至更低。这些结果表明，与 EB 较低的链路相比，EB 最高的链路在高峰时段往往质量较低，而在非高峰时段质量较高。图 4(b) 和 (c) 分别展示了中等 EB 链路和最低 EB 链路的$P(t)$。最低 EB 链路在高峰时段的$P(t)$往往与平均值相近，但在非高峰时段$P(t)$显著较高（即其质量相对较低）。空间结构上的这种差异导致了现实交通流网络全局效率的差异。

最后，我们考察链路的另外两种拓扑属性，以探究是否存在优于边介数的拓扑属性——边度[41] 和连接范围[42]。请注意，本文中链路、边和连接是同义词。连接节点i 和j 的边度可定义为：(i) $k_i k_j$或 (ii) $k_i + k_j$，其中k_i是节点i的入度与出度之和。连接范围定义为次短路径长度，即移除两个节点之间的直接连接后，从一个节点到达其邻居所需经过的中间连接数量。我们考察这些属性，是因为它们可以量化给定链路对网络连通性的贡献程度。然而，在我们的数据中，这两种属性的表现都不如边介数。尽管这一结果并未排除其他所有可能性，我们认为边介数是适用于本研究的有效拓扑属性。

IV. 结论

为了确定城市交通流的网络结构与功能之间的经验关系，我们采用基于质量的渗流方法，分析了一个随时间变化的现实交通流网络及其零模型网络，并观察到：高峰时段，现实网络的效率低于零模型；而在非高峰时段，现实网络的效率更高。我们发现，现实网络在高峰时段与非高峰时段的空间结构差异在于：高峰时段，最高边介数链路的质量低于其他链路；而非高峰时段则高于其他链路，这导致了全局效率的差异。

我们的结果表明，城市交通拥堵未必是道路网络上的所有交通流都同等拥堵所致，而可能是道路网络中负责将整个流网络连接起来的关键部分发生拥堵所致。这意味着，在规划城市交通拥堵治理措施时，应优先考虑这些骨干流及其底层道路。在首尔交通流网络中，边介数最高的链路往往是高速公路上的交通流，但也存在一些例外。近期一项研究也指出，高速公路是决定城市交通网络渗流相变性质的关键因素[20]。目前，包括首尔[43,44], 在内的许多城市，都使用全市或市中心平均车速来衡量城市交通流的运行状况[45–47]，但我们的研究表明，这可能会造成误导，因为此类平均车速忽略了局部交通流的空间结构。我们认为，我们的网络方法能够提供关于城市交通流运行状况的更丰富信息。

致谢

J.-H.J 和 Y.-H.E. 感谢韩国政府（科学技术信息通信部）资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目提供的经费支持（项目编号：2020R1G1A1101950）。Y.K 和 Y.-H.E. 感谢教育部资助的韩国国家研究基金会（NRF）基础科学研究计划提供的经费支持（项目编号：2018R1A6A1A06024977）。

所有作者感谢首尔特别市政府分享首尔交通速度数据，供本研究使用。

作者声明

利益冲突

作者声明不存在任何利益冲突。

作者贡献

Yungi Kwon: 概念构思（同等贡献）；数据整理（主要贡献）；正式分析（主要贡献）；调查（主要贡献）；方法学（同等贡献）；软件（主要贡献）；验证（同等贡献）；可视化（主要贡献）；撰写初稿（同等贡献）；审阅与编辑（同等贡献）。**Jung-Hoon Jung:** 概念构思（辅助贡献）；数据整理（辅助贡献）；正式分析（辅助贡献）；方法学（辅助贡献）；软件（辅助贡献）；验证（同等贡献）；可视化（辅助贡献）；审阅与编辑（同等贡献）。**Young-HoEom:** 概念构思（同等贡献）；正式分析（辅助贡献）；经费获取（主要贡献）；方法学（同等贡献）；项目管理（主要贡献）；资源提供（主要贡献）；监督（主要贡献）；验证（同等贡献）；可视化（辅助贡献）；撰写初稿（同等贡献）；审阅与编辑（同等贡献）。

数据可用性声明

支持本研究结论的数据可向首尔特别市政府获取。由于本研究使用这些数据需遵守许可规定，因此数据可用性受到限制。经合理请求并获得首尔特别市政府许可后，作者可提供这些数据。

[1]M. E. J. Newman，《网络》，第2版（牛津大学出版社，牛津，英国；纽约，纽约州，美利坚合众国，2018年）。[2]A.-L. Barabási 和 M. Pósfai，《网络科学》（剑桥大学出版社，剑桥，2016年）。[3]Y. Holovatch、R. Kenna 和 S. Thurner，“复杂系统：超越物理学的物理学”，《欧洲物理学杂志》**38**，023002（2017年）。[4]R. Pastor-Satorras 和 A. Vespignani，“无标度网络中的流行病传播”，《物理评论快报》**86**，3200（2001年）。[5]R. Pastor-Satorras、C. Castellano、P. Van Mieghem 和 A. Vespignani，“复杂网络中的流行病过程”，《现代物理评论》**87**，925（2015年）。[6]R. Albert、H. Jeong 和 A.-L. Barabasi，“复杂网络的错误与攻击容忍度”，《自然》**406**，378–382（2000年）。[7]D. S. Callaway、M. E. J. Newman、S. H. Strogatz 和 D. J. Watts，“网络鲁棒性与脆弱性：随机图上的渗流”，《物理评论快报》**85**，5468（2000年）。[8]D. De Martino、L. Dall’Asta、G. Bianconi 和 M. Marsili，“复杂网络上的拥塞现象”，《物理评论E》**79**，015101（2009年）。[9]L. Zhao、Y.-C. Lai、K. Park 和 N. Ye，“复杂网络中交通拥堵的出现”，《物理评论E》**71**，026125（2005年）。[10]F. Tan、J. Wu、Y. Xia 和 K. T. Chi，“互连复杂网络中的交通拥堵”，《物理评论E》**89**，062813（2014年）。[11]A. Solé-Ribalta、S. Gómez 和 A. Arenas，“多层网络结构引发的拥堵”，《物理评论快报》116，108701（2016年）。[12]S. Çolak、A. Lima 和 M. C. González，“理解城市区域中的拥堵出行”，《自然·通讯》7，10793（2016年）。[13]L. E. Olmos、S. Çolak、S. Shafiei、M. Saberi 和 M. C. González，“宏观动力学与城市交通的崩溃”，《美国国家科学院院刊》115，12654–12661（2018年）。[14]M. Rosenlund、F. Forastiere、M. Stafoggia、D. Porta、M. Perucci、A. Ranzi、F. Nussio 和 C. A. Perucci，“利用土地利用和排放数据的回归模型比较：预测罗马交通相关空气污染的空间分布”，《暴露科学与环境流行病学杂志》18，192–199（2008年）。[15]K. Zhang 和 S. Batterman，“车辆交通造成的空气污染与健康风险”，《整体环境科学》450，307–316（2013年）。[16]G. Weisbrod、D. Vary 和 G. Treyz，“衡量城市交通拥堵给商业带来的经济成本”，《交通研究记录》1839，98–106（2003年）。[17]M. Sweet，“交通拥堵的经济影响：来自美国大都市地区的证据”，《城市研究》51，2088–2110（2014年）。[18]D. A. Hennessy 和 D. L. Wiesenthal，“交通拥堵、驾驶员压力与驾驶员攻击行为”，《攻击性行为：国际攻击行为研究学会官方期刊》25，409–423（1999年）。[19]D. Li、B. Fu、Y. Wang、G. Lu、Y. Berezin、H. E. Stanley 和 S. Havlin，“具有演化临界瓶颈的动态交通网络中的渗流相变”，《美国国家科学院院刊》112，669–672（2015年）。[20]G. Zeng、D. Li、S. Guo、L. Gao、Z. Gao、H. E. Stanley 和 S. Havlin，“城市交通动力学中临界渗流模式的转换”，《美国国家科学院院刊》116，23–28（2019年）。[21]G. Zeng、J. Gao、L. Shekhtman、S. Guo、W. Lv、J. Wu、H. Liu、O. Levy、D. Li、Z. Gao 等，“城市交通中的多个亚稳网络状态”，《美国国家科学院院刊》117，17528–17534（2020年）。[22]Z. Ruan、C. Song、X.-H. Yang、G. Shen 和 Z. Liu，“城市道路交通网络的实证分析：以中国杭州为例”，《物理学A：统计力学及其应用》527，121287（2019年）。[23]L. Zhang、G. Zeng、S. Guo、D. Li 和 Z. Gao，“交通可靠性指数与真实交通数据的比较”，《EPJ数据科学》6，1–15（2017年）。[24]H. Hamedmoghadam-Rafati、I. Steponavice、M. Ramezani 和 M. Saberi，“出租车行程宏观结构的复杂网络分析”，IFAC-PapersOnLine 50，9432–9437（2017年）。[25]E. Taillanter 和 M. Barthelemy，“城市交通中发生堵塞相变的实证证据”，《英国皇家学会界面》18，20210391（2021年）。[26]Y. Berezin、A. Bashan、M. M. Danziger、D. Li 和 S. Havlin，“对具有依赖关系的空间嵌入网络实施局部攻击”，《科学报告》5，1–5（2015年）。[27]H. Hamedmoghadam、N. Zheng、D. Li 和 H. L. Vu，“基于渗流的动态边界控制，以缓解城市道路网络中的拥堵传播”，《交通研究C辑：新兴技术》145，103922（2022年）。[28]S. Gao、D. Li、N. Zheng、R. Hu 和 Z. She，“具有宏观基本图动力学的超拥堵双区域网络的韧性边界控制”，《交通研究B辑：方法论》156，50–75（2022年）。[29]R. Louf 和 M. Barthelemy，“城市多中心化转变的建模”，《物理评论快报》111，198702（2013年）。[30]R. Louf 和 M. Barthelemy，“拥堵如何塑造城市：从出行模式到尺度律”，《科学报告》4，5561（2014年）。[31]H. Hamedmoghadam、M. Jalili、H. L. Vu 和 L. Stone，“异质流的渗流揭示基础设施网络的瓶颈”，《自然·通讯》12，1–10（2021年）。[32]M. Cogoni 和 G. Busonera，“城市网络中交通断裂模式的稳定性”，《物理评论E》104，L012301（2021年）。[33]L. C. Freeman，“一组基于介数的中心性测度”，《社会计量学》，35–41（1977年）。[34]M. Girvan 和 M. E. Newman，“社会与生物网络中的社群结构”，《美国国家科学院院刊》99，7821 7826 2002–（）。

[35]M. E. Newman，“网络中的社群、模块与大尺度结构”，自然物理**8**，25–31（2012年）。[36]F. Wang、G. Dong、L. Tian 和 H. E. Stanley，“复杂网络上有限连通分量的渗流行为”，新物理学杂志**24**，043027（2022年）。[37]L. Hébert-Dufresne 和 A. Allard，“真实复杂网络渗流中的弥散相变”，物理评论研究**1**，013009（2019年）。[38]M. Li、R.-R. Liu、L. Lü、M.-B. Hu、S. Xu 和 Y.-C. Zhang，“复杂网络上的渗流：理论与应用”，《物理学报告》**907**，1–68（2021年）。[39]M. Akbarzadeh、S. Memarmontazerin、S. Derrible 和 S. F. Salehi Reihani，“出行需求与网络中心性对城市街道系统连通性和韧性的作用”，交通运输**46**，1127–1141（2019年）。[40]M. Akbarzadeh 和 E. Estrada，“可通信性几何捕捉城市中的交通流”，自然·人类行为**2**，645–652（2018年）。[41]P. Holme、B. J. Kim、C. N. Yoon 和 S. K. Han，“复杂网络的攻击脆弱性”，物理评论E**65**，056109（2002年）。[42]P. S. Park、J. E. Blumenstock 和 M. W.Macy，“人口规模社交网络中长程联系的强度”，科学 **362**，1410–1413（2018年）。[43]“首尔特别市政府”，https://data.seoul.go.kr/，2020年。[44]“首尔交通运营与信息服务”，https://topis. seoul.go.kr/，2020年。[45]D. F. Llorca、M. Sotelo、S. Sánchez、M. Ocaña、J. Rodríguez-Ascariz 和 M. García-Garrido，“用于增强车联网中浮动车数据的交通数据采集”，EURASIP 信号处理进展杂志 **2010**，1–13（2010年）。[46]F. He、X. Yan、Y. Liu 和 L. Ma，“基于速度性能指数的城市道路网络交通拥堵评估方法”，Procedia Engineering **137**，425–433（2016年）。[47]M. M. Rahman、P. Najaf、M. G. Fields 和 J.-C. Thill，“交通拥堵及其城市尺度因素：来自美国城市地区的实证证据”，国际可持续交通杂志 **16**，406–421（2022年）。