arXiv:2303.07635v3 [quant-ph] 26 Apr 2024

时间旅行悖论与纠缠时间线

Barak Shoshany# bshoshany@brocku.ca 0000-0003-2222-127X €
https://baraksh.com/ › 布鲁克大学物理系 1812 加拿大安大略省圣凯瑟琳斯市艾萨克·布罗克爵士路，L2S 3A1

Zipora Stober

zipora@ad.unc.edu 0000-0001-5552-6593 › 北卡罗来纳大学教堂山分校物理与天文学系 120 美国北卡罗来纳州教堂山，东卡梅伦大道，菲利普斯楼 CB3255，27599

摘要

若要使时间旅行符合已知的物理定律，就必须解决由此产生的悖论。有人提出，平行时间线（又称多重历史）或许可以消解这些悖论。然而，迄今为止，人们始终未能令人信服地提出一种能够产生平行时间线的具体机制。本文在未经修改的量子力学框架内提出了这样一种机制；这种框架也被称为埃弗雷特诠释或“多世界”诠释。我们模型中的时间线是涌现的，类似于埃弗雷特诠释中的“世界”；它们由时间机器与环境之间的量子纠缠产生。因此，我们称之为“纠缠时间线”或 E-CTCs。随着纠缠逐渐扩展到更多系统，时间线也随之扩展，从而为文献中常见的朴素“分支时间线”图景提供了一种局域且定义明确的替代方案。E-CTC模型与人们熟知的 Deutsch D-CTC模型相似，但主要区别在于它明确呈现了纠缠，因此我们能够更清晰、实用地定义由此产生的平行时间线。

目录

1 引言 **2**
1.1 时间旅行及其悖论.2 1.2 悖论的拟议解决方案.3 1.3 量子力学与纠缠时间线.4

2 悖论模型 **5**
2.1 一般悖论.5 2.2 宏观示例：爱丽丝与炸弹.7 2.3 微观示例：粒子湮灭.8 2.4 使用经典平行时间线解决悖论.9 2.5 使用量子叠加解决悖论.10 2.6 与坍缩诠释的相容性.11

3 多世界与纠缠时间线 **12**
3.1 无坍缩量子力学.12 3.2 一些微妙之处.13 3.3 分支的扩展.14

3.4 以纠缠时间线化解悖论.15 3.5 概率的作用.16 3.6 时间线的扩展.17 3.7 自举悖论.18 3.8 更多时间线.19

4 我们的模型与 Deutsch 模型的比较 20

4.1 D-CTC模型回顾.20 4.2 平行时间线的作用.22 4.3 一致性条件.24 4.4 时间旅行态.26 4.5 输出态.27 4.6 总结：D-CTC 与 E-CTC.27

5 结论 **28**

6 致谢 **29**

参考文献 **29**

1 引言

1.1 时间旅行及其悖论

广义相对论 [1, 2, 3] 是我们关于时空和因果关系最成功、最精确的理论。该理论允许爱因斯坦方程存在包含**闭合类时曲线（CTCs）**[1], 的解，这些曲线理论上可用于前往过去并违反因果关系。原则上，可以通过允许超光速旅行的时空度规构造此类曲线，例如虫洞 [4] 和曲速引擎 [5]。目前尚不清楚此类时空几何是否能存在于我们的宇宙 [6, 7, 8]中。

如果可以创造闭合类时曲线，且时间旅行成为可能，就会导致时间旅行悖论，这些悖论必须得到解决 [4, 9, 10, 11, 12, 13]。理论物理学文献中常见两种主要的时间旅行悖论。第一种是**一致性悖论**：时间旅行到过去会引发一连串事件，最终导致这趟时间旅行从一开始就无法发生。

例如，如果爱丽丝把一枚炸弹放进时间机器，并将它送回几分钟前，那么炸弹抵达时就会杀死爱丽丝，甚至摧毁时间机器本身；但这样一来，爱丽丝终究就无法通过时间机器送出炸弹。这一事件链自相矛盾，因此构成了悖论。

第二种时间旅行悖论是**自举悖论**：某个事件导致了它自身——更准确地说，事件链构成了一个闭合环路，没有来自环路之外的原因。例如，设想 Bob 正在写一本新书，却苦于写作瓶颈。他造了一台时间机器，打开后发现里面有一本已完成的书。

Bob 出版了这本书，并成为一位畅销书作家。几年后，他利用时间机器把这本书寄给了过去的自己。在这种情况下，一切都完全一致，因此我们并没有

[1]**闭合因果曲线（CCCs）**的概念提供了一种比闭合类时曲线更广义的时间旅行概念，其中“因果”指非类空。尽管观察者无法利用闭合类光曲线亲自前往过去，但仍可借此向过去发送信息并制造悖论。不过，在文献中，闭合类时曲线已成为时间旅行的代名词，因此我们在这里也沿用这一术语。

一致性悖论；然而，整个事件链都没有外部原因，这本书似乎是凭空创造出来的。

有人可能会认为，自举悖论并不值得真正担忧，因为缺少外部原因意味着事件的闭合环路一开始就没有存在的理由 [7]。然而，在 [4] 中，我们提出了一些理由，说明为什么应当更认真地看待自举悖论，例如“密码悖论”：仅仅要求自洽，本身就可能充当外部原因，引发这个闭合环路。

另一方面，人们普遍认为，一致性悖论构成了重大难题。在科幻小说中，这类悖论通常被描绘成角色必须避免的行为；但在现实中，物理学中的悖论通常意味着理论本身存在不一致。因此，要构建一种自洽的基础物理理论，关键是做到以下任一项：

1. 毫无疑问地证明时间旅行是不可能的；或者
2. 为时间旅行所造成的悖论提供恰当的解决方案。

选项 (1) 即**霍金年代保护猜想** [14, 15, 16, 17, 18, 19]。证明这一猜想的尝试通常会运用弯曲时空量子场论，试图表明，由于量子效应 [20, 21]，在存在时间机器时，某些物理量会变得定义不明或发散。然而，到目前为止，这类证明似乎只在某些情况下成立，而在另一些情况下则不成立[22, 23]。

此外，没有理由相信，以弯曲时空量子场论作为量子引力近似的现有技术在闭合类时曲线存在时仍然有效。因此，任何依赖于此类情形下所出现问题的证明，揭示的可能只是这些技术本身的问题，而非时间旅行本身的问题。因此，若没有一种一致且经过实验验证的量子引力理论，或许无法对霍金猜想作出确凿的证明。

目前，霍金猜想尚未得到证明，时间旅行仍有可能实现。即使这一猜想最终得到证明，我们仍认为，即便时间旅行本身不可能，通过研究时间旅行悖论，也能加深我们对时间和因果关系的一般认识。因此，本文将聚焦于选项（2）。

1.2 悖论的拟议解决方案

一种解决时间旅行悖论的设想，被称为**诺维科夫自洽性猜想**，认为人们根本无法改变过去。任何改变过去的尝试都必然会失败，甚至可能促成他们试图阻止的那个未来。如果过去无法改变，那么悖论也就不可能出现。

更技术性地说，诺维科夫猜想[2] 提出，运动方程的局部解也必须在整体上自洽。换言之，尽管根据所有**局部**物理定律，制造矛盾似乎是可行的，但任何此类尝试都不会成功，因为它会违背**整体**一致性。这意味着，任何会导致悖论的事件，其发生概率都必须恰好为零，并且只允许那些能够导向自洽演化的初始条件。

在上文所述的一致性悖论中，爱丽丝试图把一颗炸弹送回过去，杀死过去的自己。自洽猜想意味着，这个目标根本不可能实现。也许炸弹没有爆炸；也许炸弹爆炸了，但过去的 Alice 幸存了下来。自举

[2]以物理学家伊戈尔·诺维科夫命名的诺维科夫自洽猜想，不应与另一个以数学家谢尔盖·诺维科夫命名的“诺维科夫猜想”混淆；后者与前者无关。

悖论却无法通过自洽猜想来解决，因为它与自洽猜想完全相容——其中不存在任何不一致之处。

事实证明，在某些情况下，这一猜想确实可以用来解决悖论 [24, 25,26, 27]。然而，在此前的三篇论文中 [6, 9, 4], ，我们提出了若干论据，质疑自洽猜想的有效性。最重要的是，我们证明了一些具体的时间旅行悖论模型根本无法实现自洽，因为无论初始条件如何，它们产生不一致的概率都是 1。

文献中讨论的另一种可能的时间旅行悖论解决方案是**平行时间线**，也称为**多重历史**。在这种情形下，时间旅行必然会产生一条新的时间线，或者说，将一条时间线分裂为两条。在 [9] 和 [4], 中，我们假设平行时间线的存在，并证明它们能够解决诺维科夫猜想无法解决的悖论。

让我们来看看平行时间线方法如何解决一致性悖论。爱丽丝在时间线 0 中活着，因此她能够把一枚炸弹送回过去。炸弹抵达一条独立的时间线——时间线 1，并在那里杀死了爱丽丝。然而，爱丽丝在时间线 1 中死亡这一事实并不会造成不一致，因为炸弹是由时间线 0 中仍然安然无恙的爱丽丝送出的。

自举悖论也可以通过平行时间线轻松解决。在时间线 0 中，Bob 努力工作，最终写完了他的书。然后，他把书送回过去。这本书抵达另一条独立的时间线——时间线 1，在那里，Bob 无须付出劳动便从中受益。然而，这本书显然并非凭空产生；它是由时间线 0 中的 Bob 创作的。

1.3 量子力学与纠缠时间线

通过平行时间线来解决时间旅行悖论，主要问题在于，尚缺乏一种具体且严谨的模型，能够将平行时间线纳入广义相对论和量子力学。
在广义相对论方面，有人提出，非豪斯多夫流形 [28, 29, 30,31, 32] 或非局部欧几里得流形 [33] 可能会使时空在发生时间旅行时“分支”成多个物理上不同的未来。然而，这类模型面临相当大的数学难题。即使这些难题得到解决，究竟是什么物理机制会导致时空发生分支，或者构成新分支的空间和物质究竟从何而来，仍不清楚。

在量子力学方面，Deutsch [34] 著名地指出，以量子比特和量子门表述的某些时间旅行悖论，可以通过对量子态中时间旅行的部分取偏迹，并要求其满足一致性条件来解决。这如今被称为**D-CTC模型**。

Deutsch认为，解释这一模型最合理的方式是采用未经修改的量子力学，也称为**埃弗雷特诠释或“多世界”诠释（MWI）** [35, 36, 37, 38]。因此，D-CTC模型可以被视为一种描述平行时间线的量子模型 [39]。然而，正如我们将在第4节中详细讨论的那样，以这种方式解释该模型存在几个显著缺陷。具体而言，D-CTC模型所施加的一致性条件过于严格，最终掩盖了有关这些时间线的重要细节。

在本文中，我们提出了一种利用平行时间线解决时间旅行悖论的新模型。我们的模型同样基于多世界诠释，但不同于 D-CTC 模型，并且避免了上述问题。在我们的模型中，平行时间线由时间机器与环境之间的纠缠明确地产生，就像多世界诠释中的“世界”是由观察者与被观察系统之间的纠缠产生的。正因如此，我们将该模型命名为**“纠缠时间线”** ，或**E-CTC模型**。

纠缠时间线是一个**涌现** 概念。每条时间线都不是一个独立的宇宙，而是单个宇宙整体量子态叠加态中的一个独立项。可以通过演化算符的作用，连续追踪每条时间线中的事件链；而每条时间线也可以通过关联算符的作用与下一条时间线关联起来。

我们将 D-CTC模型中的混合态理解为类似于 E-CTC模型中纯纠缠态相对于时间机器的约化态；这会破坏关于纠缠的信息，因而也会破坏关于时间线本身的信息。因此，我们认为，我们的模型更适合用于理解时间线如何从多世界诠释中自然涌现。

纠缠时间线在时间机器处局部产生，随后随着越来越多的系统彼此纠缠，逐渐扩展到宇宙的其余部分。这为理解具有平行时间线的时空的拓扑和几何提供了一种全新而简单的思路。与上文提到的分支时空图景不同，在那种图景中，整个时空分裂为多个自身的物理副本，以容纳不同的时间线；纠缠时间线图景则将时间线定义为单一**非分支**时空内各系统通过局部相互作用涌现出的实体。

2 悖论模型

2.1 一般悖论

在先前的发表成果中， [9, 4], 我们使用了包含特定时空几何中的特定物理对象的悖论模型，并利用对象的属性（例如电荷或温度）来构造悖论。然而，在这里，我们希望尽可能保持一般性。因此，我们不能将自身局限于某一种时空几何或某一个特定的物理系统。

我们的模型的一般设定如下。时间机器由一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\mathrm{CTC}}$ 表示，它编码了时间机器可能的量子态，以及有哪些物体（如果有的话）曾穿过时间机器。例如，时间机器可以是时空中两个区域的识别，同时采取适当的预防措施，以避免奇点、视界及其他问题。可以使用莫里斯-索恩虫洞或其他可穿越虫洞模型 [40, 10]对此进行精确描述。

不过，时间机器的具体实现并不重要；我们只关心某处存在一条闭合类时曲线。包含这条闭合类时曲线的时空的拓扑与几何，以及闭合类时曲线本身的形状，对我们的讨论都无关紧要。我们只需假设存在一种方法，能让物体沿着闭合类时曲线回到较早的时间点。

除了时间机器之外，我们还有一个位于时间机器外部的希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\mathrm{ex}}$ 。它可以是粒子、台球、人，或任何我们想用来制造悖论的其他物理系统。我们假设这个外部系统正从过去无穷远处接近时间机器，因此 $\mathcal{H}_{\mathrm{ex}}$ 的初始态独立于时间机器的初始态。然而，一旦这两个系统发生相互作用，它们的状态就可能（也将会）产生关联。

我们用计算基中的量子比特来表示两个希尔伯特空间：

- 对于 $\mathcal{H}$闭合类时曲线（CTC）， $|0\rangle$ 表示时间机器是**空的** ，而 $|1\rangle$ 表示时间机器**非空**。这个量子比特可以解释为占据数，即一个物体（粒子、球、人）要么不存在于时间机器中，要么存在于时间机器中。

- 例如， $\mathcal{H}$， $|0\rangle$ 表示**不会发生时间旅行**，而 $|1\rangle$ 表示**会发生时间旅行**。这个量子比特可以解释为一个控制位，用来决定时间机器是否运行，而不受所涉及的具体物理系统影响。

我们强调，不应将这些量子比特态解释为任何物理二态系统的状态。相反，它们应被理解为抽象的**逻辑**（真或假）状态。在接下来的两节中，我们将给出更具体的例子，并用信息量更丰富的标签替换量子比特标签。

整体系统的状态将表示为复合希尔伯特空间中的张量积 $\mathcal{H}_{\text{CTC}} \otimes \mathcal{H}_{\text{ex}}$，记作 $|\Psi(t)\rangle$，其中 t 表示时间。在 $t = 0$ 时，规范初始态为

$$|\Psi(0)\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle, \tag{2.1}$$

其中 $|0\rangle \in \mathcal{H}_{\text{CTC}}$ 是时间机器为空时的状态，也就是说，还没有人穿越过它； $|1\rangle \in \mathcal{H}_{\text{ex}}$ 是外部系统的初始态，表示默认情况下会发生时间旅行，除非某种相互作用阻止它发生。

在 $t = 1$ 时，系统仍处于相同的状态，因为没有任何事情发生：

$$|\Psi(1)\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle.$$

由于在 $t = 1$ 时， $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 仍处于状态 $|1\rangle$，时间旅行确实会发生。从物理上说，这可能意味着由 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 表示的实际物体（粒子、球、人等）进入时间机器；也可能是另一个物体因 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 的状态而穿越时间（例如，如果爱丽丝仍然活着，她可以把一枚炸弹送进时间机器，正如下面的宏观示例所示）。

无论情况 如何，时间旅行已经发生，因此在t =时，时间机器不会是空的
因此，状 态在时间旅行发生后的$t = 0$ 时将会是

$$|\Psi(0)\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle.$$

$\mathcal{H}_{\text{CTC}}$ 的状态现在是 $|1\rangle$，这表明时间机器并非空的。然而， $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ **总是**以相同的状态 $|1\rangle$开始，这表明除非有什么事情阻止时间旅行在$t = 1$之前发生，否则时间旅行**可能** 会发生。

要构造一个悖论，我们要求只要时间机器不是空的，也就是说，$\mathcal{H}_{\text{CTC}}$ 的状态是 $|1\rangle$，时间旅行就会被阻止。例如，粒子湮灭了过去的自己，或者炸弹杀死了原本应该进入时间机器的人。无论如何，系统在$t = 1$时的状态现在将会是

$$|\Psi(1)\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle,$$

其中 $|0\rangle \in \mathcal{H}_{\text{ex}}$ 表示阻止时间旅行发生的状态；请注意，我们将在讨论作为量子系统的悖论时，于第2.5节中更精确地表述从$t = 0$ 到$t = 1$ 的时间演化。最后，由于时间旅行并未发生，时间机器在 $t = 0$时必定是空的，因此我们回到（2.1）。

整个（不一致的）事件链可以写成如下形式：

Time	状态/事件
$t = 0$	$\|0\rangle \otimes \|1\rangle$
$\downarrow$	**什么也没发生**
$t = 1$	$\|0\rangle \otimes \|1\rangle$
$\circlearrowleft$	**发生时间旅行**
$t = 0$	$\|1\rangle \otimes \|1\rangle$
$\downarrow$	**时间旅行无法实现**
$t = 1$	$\|1\rangle \otimes \|0\rangle$
$\circlearrowleft$	**时间旅行不会发生**
$t = 0$	$\|0\rangle \otimes \|1\rangle$

这里，$\downarrow$ 表示向未来的正常时间演化，$\circlearrowleft$ 表示系统在$t = 1$ 时的状态与其下方写出的$t = 0$ 时的状态相关联（例如，如果在$t = 1$ 时发生时间旅行，那么对应的$t = 0$ 时的状态就是时间机器不为空的状态）。在这条事件链的末尾，我们回到$t = 0$时的原始状态，因此这条链是**循环的**。

如果我们将这条事件链视为**经典的**，这里显然存在一个一致性悖论。这个悖论源于这样一个事实：如果发生了时间旅行，那么它就会阻止自身发生。我们可以注意到，在$t = 0$时，时间机器必须同时处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 两种状态，而外部系统在$t = 1$时也必须同时处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 两种状态，由此看出其中的不一致。

此外，试图援引诺维科夫自洽性猜想也无济于事，因为这种演化无法变得一致；例如，无法像在 [24] 中那样，通过关联台球的轨迹来实现一致。系统的具体物理细节在此并不重要；**按设计**，只要时间机器非空，就必然导致时间旅行无法发生。因此，这是**一个真正的一致性悖论**：一个根本不存在一致的经典演化的系统。

这里提出的一般悖论，明确以尽可能简单为目标。它描述的不是一个具体的物理系统，而是包含时间机器的系统可能具有的最一般属性。我们根据一般条件（时间机器是否为空、是否发生时间旅行），定义每个希尔伯特空间中的量子比特态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$，而忽略每个系统内部可能发生的其他事情，只要这些事情不会直接影响悖论本身。

我们之所以能这样做，理由与将电子表示为量子比特相同，其中 $|0\rangle$ 对应于沿z 方向自旋向上，$|1\rangle$ 对应于自旋向下；电子还有位置和动量等其他属性，但这些属性与将其表示为量子比特无关，因此，由状态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 张成的二维希尔伯特空间就足够了。

要用我们的一般悖论描述具体的物理系统，可以将每个希尔伯特空间中的量子比特态 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 映射到任意我们想要的微观或宏观系统。不过，一旦我们解决了量子比特态的悖论，就可以直接将这一解决方案映射到具体系统。在接下来的两节中，我们将介绍两个这样的系统，一个是宏观系统，另一个是微观系统。

2.2 一个宏观示例：爱丽丝和炸弹

我们先从一个宏观示例入手，因为它更容易凭直觉理解。不过，处理宏观系统会带来许多微妙之处和复杂问题，我们将在第 3 节中详细讨论。我们并不声称接下来要介绍的模型完全严谨，但仍在此呈现它，只是因为它在概念上颇有趣味，也能带来启发。

在这个宏观模型中，身为时间旅行物理学家的爱丽丝拥有一台时间机器。在$t = 1$时，爱丽丝把一枚炸弹放进时间机器，并将它送回$t = 0$时。炸弹经过设置，只要时间机器的门打开[3]，就会立即引爆。过去的 Alice 打开门时，炸弹爆炸，将她炸死。既然爱丽丝已经死了，她就无法在$t = 1$时把炸弹送回过去；但这意味着她会活着，因此她就能送出炸弹。这显然是一个一致性悖论。

只需将量子比特的标签替换为更具描述性的名称，就可以用一般悖论的形式来表述这个例子。对于 $\mathcal{H}_{\mathrm{CTC}}$，我们定义：

- $|0\rangle \equiv |$空置$\rangle$，即时间机器是空的、里面没有炸弹的状态。
- $|1\rangle \equiv |$炸弹$\rangle$，即时间机器内部装有炸弹的状态。

[3]在构思 这个例子时，我们决定让爱丽丝送出一枚炸弹，而不是亲自带着计划回到过去。 s 杀死过去的自己 ，以避免自由意志方面的哲学问题。

对于 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$，我们定义：

- $|0\rangle \equiv |$死亡$\rangle$，爱丽丝被炸弹炸死的状态。
- $|1\rangle \equiv |$存活$\rangle$，爱丽丝仍然活着的状态。

那么，事件链如下：

Time	状态/事件
$t = 0$	$\|$空$\rangle \otimes \|$存活$\rangle$
$\downarrow$	**什么也没发生**
$t = 1$	$\|$空$\rangle \otimes \|$存活$\rangle$
$\circlearrowleft$	**爱丽丝把一枚炸弹送回过去**
$t = 0$	$\|$炸弹$\rangle \otimes \|$存活$\rangle$
$\downarrow$	**炸弹爆炸了，爱丽丝死了**
$t = 1$	$\|$炸弹$\rangle \otimes \|$死亡$\rangle$
$\circlearrowleft$	**死去的爱丽丝无法发送炸弹**
$t = 0$	$\|$空$\rangle \otimes \|$存活$\rangle$

2.3 微观示例：粒子湮灭

为了进一步说明这一悖论，我们现在举一个微观示例。这样做的好处是，可以避免处理宏观系统时可能出现的问题。
我们来考虑一种亚原子粒子，它们具有这样的性质：每当两个粒子相撞时，就会彼此湮灭。在这个简化示例中，我们不关心湮灭的确切性质或最终结果；例如，为了守恒能量，这种湮灭可能会释放出两个光子，但这不会影响这个悖论。

一个粒子正朝时间机器靠近。在$t = 1$，它进入时间机器，并在$t = 0$出来。随后，它与过去的自己相撞并一同湮灭，从而阻止自己在$t = 1$进入时间机器。由于该粒子没有进入时间机器，湮灭便永远不会发生。因此，我们得到了一个一致性悖论。

对于 $\mathcal{H}_{\text{CTC}}$，我们定义：

- $|0\rangle \equiv |$空$\rangle$，即没有粒子穿过时间机器的状态。
- $|1\rangle \equiv |$粒子$\rangle$，即有粒子穿过时间机器的状态。

对于 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$，我们定义：

- $|0\rangle \equiv |$已湮灭$\rangle$，即过去粒子与未来粒子碰撞后湮灭的状态。
- $|1\rangle \equiv |$未湮灭$\rangle$，即过去粒子未湮灭的状态，因为没有粒子穿过时间机器。

那么，事件链如下：

Time	状态/事件
$t = 0$	$\|$空$\rangle \otimes \|$未湮灭$\rangle$
$\downarrow$	**什么也没发生**
$t = 1$	$\|$空$\rangle \otimes \|$未湮灭$\rangle$
$\circlearrowleft$	**粒子进入时间机器**
$t = 0$	$\|$粒子$\rangle \otimes \|$未湮灭$\rangle$
$\downarrow$	**过去与未来的粒子湮灭**
$t = 1$	$\|$粒子$\rangle \otimes \|$已湮灭$\rangle$
$\circlearrowleft$	**粒子没有进入时间机器**
$t = 0$	$\|$空$\rangle \otimes \|$未湮灭$\rangle$

请注意，在第二个$t = 1$状态下，$\mathcal{H}_{\text{CTC}}$的状态为$|$粒子$\rangle$，**并不**意味着该粒子本身在$t = 1$时仍然存在；事实上，它并不存在，因为它已经湮灭。请记住，$\mathcal{H}_{\text{CTC}}$是时间机器本身的状态，而$|$粒子$\rangle$仅仅意味着有一个粒子穿过了时间机器，并不保证该粒子离开时间机器后仍然存在。

2.4 使用经典平行时间线解决

如 [9, 4], 所示，平行时间线可以用来解决时间旅行悖论，即使采用纯粹的经典演化也是如此。让我们看看这在一般模型以及上文给出的具体例子中如何运作。

我们用h表示时间线索引（取自"历史"一词）。按照惯例，我们总是令$h = 0$表示时间机器为空的那条时间线，也就是时间旅行"尚未"发生的时间线。然后，事件链可由下表描述：

Time	时间线小时 $= 0$	时间线小时 $= 1$
$t = 0$	$\|0\rangle \otimes \|1\rangle$	$\|1\rangle \otimes \|1\rangle$
$\downarrow$	**什么也没发生**	**时间旅行被阻止**
$t = 1$	$\|0\rangle \otimes \|1\rangle$	$\|1\rangle \otimes \|0\rangle$
$\circlearrowleft$	**发生时间旅行**	**不发生时间旅行**

请注意，时间线$h = 1$在$t = 1$连接回原始时间线$h = 0$在$t = 0$，因此事件链仍然是**循环的**，与上文的单时间线情景一样。不过，现在我们不存在任何矛盾。时间旅行不必既发生又不发生；它可以只在时间线$h = 0$中发生，而在时间线$h = 1$中不发生。

在这个宏观示例中，我们有：

Time	时间线$h = 0$	时间线$h = 1$
$t = 0$	$\|$空$\rangle \otimes \|$存活$\rangle$	$\|$炸弹$\rangle \otimes \|$存活$\rangle$
$\downarrow$	**什么也没发生**	**炸弹爆炸了，爱丽丝死了**
$t = 1$	$\|$空$\rangle \otimes \|$存活$\rangle$	$\|$炸弹$\rangle \otimes \|$死亡$\rangle$
$\circlearrowleft$	**爱丽丝把一颗炸弹送回过去**	**死去的爱丽丝无法发送炸弹**

同样，在微观示例中，我们有：

Time	时间线小时 $= 0$	时间线小时 $= 1$
$t = 0$	$\|$空$\rangle \otimes \|$未湮灭$\rangle$	$\|$粒子$\rangle \otimes \|$未湮灭$\rangle$
$\downarrow$	**什么也没发生**	**过去与未来的粒子湮灭**
$t = 1$	$\|$空$\rangle \otimes \|$未湮灭$\rangle$	$\|$粒子$\rangle \otimes \|$湮灭$\rangle$
$\circlearrowleft$	**粒子进入时间机器**	**粒子未进入时间机器**

这显然解决了悖论，但究竟是什么机制使这些平行时间线得以存在？在本文余下部分中，我们将说明，经过恰当诠释的量子力学自然会提供这样一种机制，并且我们将发现，这会带来一些有趣的结果，而这些结果在朴素的经典时间线图景中并不存在（或者至少并不明显）。

2.5 使用量子叠加态解决

我们的宇宙并非经典的，而是量子的——在量子力学中，两件不同的事情实际上可以同时发生。我们只需引入**叠加态**这一概念。通过研究一般悖论的事件链，我们可以看出，应该允许：

- 在$t = 0$时的两种不同状态：$|0\rangle \otimes |1\rangle$ 和 $|1\rangle \otimes |1\rangle$。
- 在$t = 1$时的两种不同状态：$|0\rangle \otimes |1\rangle$ 和 $|1\rangle \otimes |0\rangle$。

$\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 按构造，总是从初始条件 $|1\rangle$开始。因此，在$t = 0$时，我们不认为$\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 处于叠加态。不过， $\mathcal{H}_{\text{CTC}}$ 当然可以处于 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$的叠加态：

$$|\Psi(0)\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |1\rangle,$$

其中， α 和 β 是任意复振幅，且满足$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$。展开张量积后，我们得到可分（非纠缠）状态

$$|\Psi(0)\rangle = \alpha|0\rangle \otimes |1\rangle + \beta|1\rangle \otimes |1\rangle. \tag{2.2}$$

为了描述时间演化，我们来考虑一个简单的**幺正演化算符** U，它描述外部系统与时间机器之间的相互作用。如果在$t = 0$时，时间机器是空的，也就是说，系统的状态是 $|0\rangle \otimes |1\rangle$，那么演化算符不会改变该状态：

$$U(|0\rangle \otimes |1\rangle) = |0\rangle \otimes |1\rangle.$$

然而，如果在$t = 0$时，时间机器不是空的，也就是说，系统的状态是 $|1\rangle \otimes |1\rangle$，那么离开时间机器的物体会与外部系统相互作用（粒子湮灭、炸弹爆炸等），使得演化算符将状态改变为 $|1\rangle \otimes |0\rangle$：

$$U(|1\rangle \otimes |1\rangle) = |1\rangle \otimes |0\rangle.$$

构造合适的算符并不难——它其实就是一个受控非门，当且仅当控制量子比特（时间机器的状态）为 $|1\rangle$时，它会翻转第二个量子比特（外部系统的状态）：

$$U(|x\rangle \otimes |y\rangle) = |x\rangle \otimes |x \dot{+} y\rangle, \tag{2.3}$$

其中x、$y \in \mathbb{Z}_2$ 和 $\dot{+}$ 表示模2加法。

当我们使用这个算符演化状态 $|\Psi(0)\rangle$ 时，线性性决定了它会分别作用于每一项。因此，$t = 1$ 时的状态将为：

$$|\Psi(1)\rangle = \alpha|0\rangle \otimes |1\rangle + \beta|1\rangle \otimes |0\rangle. \tag{2.4}$$

请注意，外部系统的状态现在已经与时间机器的状态**纠缠**在一起。

接下来，时间旅行发生了。我们可以用如下的**时间线关联算符** T 来描述：

$$T(|x\rangle \otimes |y\rangle) = |y\rangle \otimes |1\rangle. \tag{2.5}$$

换句话说，如果外部系统在t $|1\rangle = 1$（发生了时间旅行）时的状态是，那么时间机器在t $|1\rangle = 0$（时间机器不为空）时的对应状态就是；而如果外部系统在t $|0\rangle = 1$（没有发生时间旅行）时的状态是，那么时间机器在t $|0\rangle = 0$（时间机器为空）时的对应状态就是。

请注意，T 不是酉算符，因为它丢失了有关第一个量子比特 $|x\rangle$的信息。不过，这是意料之中的，因为第一个量子比特仅仅告诉我们在$t = 0$时从时间机器中出来的是什么，并且不会因相互作用（2.3）而改变，因此它不会影响$t = 1$时是否会发生时间旅行。根据构造，只有第二个量子比特 $|y\rangle$ 会影响时间旅行的结果，因为只有它能告诉我们外部系统是否处于会导致时间旅行的状态。

重要的是要理解，T 并不描述整个联合系统的演化，因为整个系统不会回到过去。因此，T **不是演化算符**，它只是一个辅助算符，用于描述时间机器的存在所强加的系统在$t = 1$ 和$t = 0$时状态之间的**关联**，因此它可以是非酉的[4]。

将这个算符作用于（2.4），得到：

$$|\Psi(0)\rangle = \alpha|1\rangle \otimes |1\rangle + \beta|0\rangle \otimes |1\rangle .$$

将此结果与初始态（2.2）进行比较，我们看到，当且仅当 $\alpha = \beta$ 时，才存在一致的幺正演化。这意味着两个系数都必须为 $1/\sqrt{2}$，相差一个整体相位，而整体相位没有物理意义[5]。

总而言之，允许系统处于叠加态，就能化解时间旅行悖论；此时系统在每个时间点的状态为

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle ,$$

$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle) .$$

2.6 与坍缩诠释的兼容性

我们构建了一个涉及时间机器的物理系统，并证明它在经典处理下本质上是不一致的，因此会产生悖论；但在量子力学处理下则完全一致。然而，我们现在必须追问：这一结果是否具有普遍性，还是取决于以某种特定方式诠释量子力学?

让我们来考虑这样一种情况：如果允许量子态发生坍缩，会出现什么结果？无论是采用哥本哈根诠释这类朴素的诠释，还是采用 GRW 这类更精密的模型。

[4]如果我们愿意，可以令 T 为

$$T(|x\rangle \otimes |y\rangle) = |y\rangle \otimes |x \dot{+} y\rangle ,$$

这完全满足幺正性。然而，这意味着时间机器在未来的状态会影响外部系统在过去的初始条件，这与我们的假设相矛盾：外部系统从过去无穷远处到来，其初始态独立于之后发生的一切。换句话说，关联算符 T 只能告诉我们 $\mathcal{H}_{\mathrm{CTC}}$ 在$t = 0$时的状态，而此时 $\mathcal{H}_{\mathrm{ex}}$ 的状态则由实验设计决定。此外，就平行时间线而言（我们将在第 3.4 节讨论），两条时间线会从同一条时间线分支而出，而外部系统在那条时间线上只能处于一种状态。

[5]实际上，只要注意到 $|\Psi(0)\rangle$ 的两个版本本身可以相差一个整体相位，这个条件就可以有所放宽，也就是说，

$$\alpha|0\rangle \otimes |1\rangle + \beta|1\rangle \otimes |1\rangle = e^{i\phi}(\alpha|1\rangle \otimes |1\rangle + \beta|0\rangle \otimes |1\rangle) ,$$

其中 $\phi \in [0, 2\pi)$。因此，我们无需要求 $\alpha = \beta$，只需要求 $\alpha = e^{\phi}\beta$和 $\beta = e^{\phi}\alpha$即可。这意味着 $\dot{\alpha} = e^{2i\phi}\alpha$，所以 ϕ可以是 0 或 π；取 $\phi = 0$ 可得条件 $\alpha = \beta$，而取 $\phi = \pi$ 则意味着 $\beta = -\alpha$，因此这两项之间有一个相对负号。不过，为了简便起见，我们在此假设 $\alpha = \beta$。

理论 [41]。$t = 1$ 时的状态是

$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle).$$

如果此时我们对 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 进行测量，预计会以各 1/2 的概率发现 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 。这些状态的实际表现取决于具体的系统；在宏观示例中，我们会发现爱丽丝要么死了，要么活着；在微观示例中，我们则会发现粒子存在，或者不存在。

由于这两个系统彼此纠缠，对 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 的测量会导致整个系统 $\mathcal{H}_{\text{CTC}} \otimes \mathcal{H}_{\text{ex}}$发生坍缩。如果系统坍缩到 $|0\rangle \otimes |1\rangle$，那么时间机器就是空的，爱丽丝还活着，或者粒子尚未湮灭。但如果爱丽丝把一枚炸弹放进时间机器，或者粒子进入其中，就会立刻产生矛盾。由于发生了坍缩，我们可以确定时间机器有 100% 的概率是空的，那么炸弹或粒子究竟去了哪里?

同样地，如果系统坍缩到 $|1\rangle \otimes |0\rangle$，那么时间机器里就有东西，而爱丽丝已经死了，或者粒子已经湮灭。但如果爱丽丝死了，那么时间机器里的炸弹是从哪里来的？如果粒子已经湮灭，那么与它湮灭的那个粒子又是从哪里来的?

我们得出结论：使用量子叠加态对悖论所作的直观解答，与涉及坍缩的诠释或模型**并不**一致。我们尝试运用叠加原理来解决悖论，但坍缩会破坏这种叠加态，实质上使我们回到经典情境，推翻我们精心构建的解答。

3 多世界与纠缠时间线

上一节中，我们展示了如何通过经典的平行时间线来解决时间旅行悖论。不过，我们没有说明产生这些时间线的机制。我们还展示了量子叠加态可以解决悖论，但这与坍缩诠释并不兼容。幸运的是，采用量子力学的**埃弗雷特或"多世界"诠释（多世界诠释）** [35, 36, 37, 38, 39]，我们就能同时解决这两个问题。首先，让我们回顾这种诠释的运作方式，并澄清其中的一些细微之处和误解。

3.1 无坍缩的量子力学

设想爱丽丝有一个处于某种叠加态的量子比特，其状态为 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$:

$$|\text{qubit}\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \qquad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

在计算基 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$中测量量子比特时，爱丽丝测得 0 的概率为$|a|^2$ ，测得 1 的概率为 $|b|^2$。量子力学的坍缩诠释接着假设，存在某种**非幺正**演化，使状态根据测量结果"坍缩"为 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 。这与量子力学中的时间演化总是由**幺正** 算符 [42]描述这一事实相矛盾。

为了解决这个问题，多世界诠释认为，我们不仅要考虑量子比特的状态，也要考虑爱丽丝的状态。测量之前，爱丽丝处于初始态 $|\text{Alice}\rangle$，可以粗略地将其定义为在那个时间点构成爱丽丝的各种量子系统的复合态。测量前、时间 $t = 0$ 时，联合量子比特与爱丽丝系统的复合态 $|\Psi(0)\rangle$ 为

$$|\Psi(0)\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes |\text{Alice}\rangle.$$

请注意，这是一个可分态。测量之后，在时间 $t = 1$，系统发生如下幺正演化：

$$|\Psi(1)\rangle = a|0\rangle \otimes |\text{Alice measured } 0\rangle + b|1\rangle \otimes |\text{Alice measured } 1\rangle . \tag{3.1}$$

执行这一演化的算符类似于受控非门 [43]：它本质上会检查量子比特的状态，并相应地改变爱丽丝的状态。它是幺正的，因此可逆且能保持概率不变。这与坍缩操作不同，后者不是幺正的。因此，多世界诠释有时被称为**未修改的量子力学**；它只是采用纯幺正演化的量子力学，不额外假设存在非幺正坍缩。

重要的是，量子比特和爱丽丝的状态现在彼此纠缠。我们将此解读为**分支**：量子比特与爱丽丝的整体量子态，已从分别描述各个系统的可分态，转变为描述两个系统不可分割地相关联的纠缠态。

状态 $|$爱丽丝测量了 0$\rangle$ 和 $|$爱丽丝测量了 1$\rangle$ 是两个物理上不同的状态，因为爱丽丝的大脑（它是构成爱丽丝的量子系统的一部分）在每种状态下都记录了不同的测量结果。我们将此解读为爱丽丝本人分支成两个版本：一个测得 0，另一个测得 1。随后，这两个版本各自继续生活，仿佛身处两个不同的“世界”。

然而，这些“世界”并非彼此独立的物理宇宙，而只是整体系统叠加态中的两个不同项。在多世界诠释中，像（3.1）这样的叠加态并不表示可能的测量结果，也不代表观察者对系统缺乏了解；它被解释为代表多个“世界”，这些世界是根据整体量子态推断出的涌现结构 [37]。

那么，这种方法如何与实验事实相容——测量时，系统**似乎**确实会坍缩为单一状态？答案很简单：对每个分支中的观察者而言，其他分支都是不可见的。处于与项 $|0\rangle \otimes |$爱丽丝测量 0$\rangle$ 相对应分支中的爱丽丝，会得出结论，认为量子比特坍缩到了状态 $|0\rangle$ **从她的角度来看**，因为她无法接触到量子比特处于状态 $|1\rangle$ 的那个分支，反之亦然。

3.2 一些细微之处

在这个例子中，我们把爱丽丝当作一个有 3 种状态的简单量子系统： $|$爱丽丝$\rangle$、$|$爱丽丝测量了 0$\rangle$，以及 $|$爱丽丝测量了 1$\rangle$；它们是某个厄米“爱丽丝测量”算符 A 的本征态。不过，必须强调，这种说法显然不够精确。更精确一点地说，这些本征态中的每一个实际上都是一组具有相似宏观解释的状态所构成的**等价类** 。

例如，状态 $|$爱丽丝测量了 0$\rangle$ 告诉我们，爱丽丝测得量子比特的值为 0，但实际上，有数量极其庞大——甚至可能无限多——的状态都可以作这样的解释。爱丽丝是坐着还是站着？她是在吸气还是呼气？她鼻子里某个碳原子的量子态是什么？

这些问题可能的答案对应着爱丽丝的希尔伯特空间中的不同状态，但这些状态之间的区别对我们的目的而言并不重要，因此我们将它们全部归入一个等价类，并用 $|$爱丽丝测量了 0$\rangle$ 来表示。只要爱丽丝大脑中的神经元记录下量子比特的值为 0，爱丽丝的状态就属于这个等价类。

更精确地说，我们必须假设，任何“中间”状态的概率都足够低，可以忽略不计。例如，我们也可以设想测量装置发生故障并显示数值 2 的情形。这不属于等价类 $|$爱丽丝测得 0$\rangle$ 或 $|$爱丽丝测得 1$\rangle$中的状态，但我们在讨论中忽略这种情况，正如我们考虑抛硬币时忽略硬币侧立的可能性一样。

因此，应当更精确地将状态 (3.1) 理解为并非由两个不同分支构成的状态，而是由许多（可能是无限多个）分支构成的状态。这些分支属于两个主要等价类 $|$爱丽丝测得 $0\rangle$ 和 $|$爱丽丝测得 $1\rangle$，此外还包括概率极低的“中间”状态。就我们的目的而言，系统实际处于等价类中的哪个具体状态并不重要，因为我们只关心一个具体细节：爱丽丝测得的是 0 还是 1。

3.3 分支的扩散

仅由两个纠缠系统构成的叠加态中的一个项，如何成为它自己的“世界”？让我们来看看爱丽丝的朋友 Bob，他问爱丽丝测量结果是什么。在询问这一信息之前，Bob 处于初始态 $|\text{Bob}\rangle$。测量前，联合量子比特 $+$爱丽丝 $+$ Bob 系统在时间 $t = 0$ 的复合态 $|\Phi(0)\rangle$ 为

$$|\Phi(0)\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes |\text{Alice}\rangle \otimes |\text{Bob}\rangle .$$

测量后，在时间 $t = 1$，它变为

$$|\Phi(1)\rangle = (a|0\rangle \otimes |\text{Alice measured } 0\rangle + b|1\rangle \otimes |\text{Alice measured } 1\rangle) \otimes |\text{Bob}\rangle .$$

请注意，此时量子比特和爱丽丝已经纠缠，但 Bob 仍是一个独立系统。然而，Bob 在时间 $t = 2$ 从爱丽丝那里得知测量结果后，系统演化为

$$\begin{aligned}|\Phi(2)\rangle =& a|0\rangle \otimes |\text{Alice measured } 0\rangle \otimes |\text{Bob received } 0\rangle + \\ &+ b|1\rangle \otimes |\text{Alice measured } 1\rangle \otimes |\text{Bob received } 1\rangle .\end{aligned}$$

现在，**全部三个系统**都已纠缠。这意味着分支已从量子比特 $+$爱丽丝系统**扩散**到更大的量子比特 $+$ 爱丽丝 $+$ Bob 系统。以同样的方式，纠缠将通过纯粹的幺正演化继续扩散到宇宙的其余部分。在 $t \to \infty$ 时，整个宇宙[6] 都将处于两个纠缠态的叠加态中：其中一个态里量子比特的值为 0，另一个态里量子比特的值为 1。

因此，世界的分支并非全局事件，而是**局部分支**，它从初始测量或相互作用发生的时空位置开始，依因果关系向外扩散。值得强调这一点，因为在对多世界诠释的随意讨论中，人们常常会误解它。由此产生的两种最常见误解如下。

首先，分支并非只在发生测量时才出现；任何两个系统发生相互作用时都会出现。在我们的例子中，爱丽丝对量子比特的状态进行了“测量”，但实际上，爱丽丝只是与量子比特发生相互作用，或者与某种设备发生相互作用，而该设备又与量子比特相互作用（例如，为测量电子自旋而进行的斯特恩-盖拉赫实验）；“测量”并不具备其他类型的相互作用所没有的特殊属性。

事实上，在我们设想的第二步中，当 Bob 询问爱丽丝测量结果时，并没有发生传统意义上的“测量”，而只是进行了简单的信息交换。然而，如果我们把量子比特 $+$ 爱丽丝系统视为处于叠加态的单一系统，那么这一步与第一步完全相同。

其次，更重要的是，测量或相互作用本身并不会“创造”任何分支，更不会创造整个宇宙。它只会使两个系统发生纠缠；随着更多系统与初始系统相互作用，并依次与之纠缠，这种纠缠便会扩散开来。

[6]为简化起见，我们在此忽略宇宙膨胀。

在这一过程中，始终只有一**个** 宇宙，而非多个宇宙，因此“多世界”或“多重宇宙”这些术语并不适用。我们所讨论的只是在一个非常大的（可能是无限大的）张量积中各子系统之间的纠缠，而这种纠缠被诠释为多个彼此独立的“世界”；因为纠缠态中的每一项都描述了一个“世界”的状态，在那里，初始测量得出了某个特定值。

与其称为“多世界”或“多重宇宙”，或许更准确的说法是“纠缠世界”或“纠缠历史”。正如我们将要展示的，在我们的模型中，“世界”会变成不同的时间线，并可用于解决时间旅行悖论。因此，我们决定将模型命名为**纠缠时间线**，以强调这些时间线并非凭空产生的全新宇宙（如朴素的“分支时间线”图景所示），而是与时间机器发生纠缠的结果。其含义将在下一节中更加明晰。

3.4 用纠缠时间线解决悖论

将多世界诠释应用于我们的时间旅行悖论模型后，我们现在可以看出，叠加态中的每一项都代表一条不同的时间线。回想一下第2.5节中，系统在$t = 0$和$t = 1$时的状态：

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle, \tag{3.2}$$

$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle). \tag{3.3}$$

还要回想一下，在每个张量积中，左侧的状态代表时间机器 $\mathcal{H}_{\text{CTC}}$，右侧的状态代表外部系统 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$。

$t = 0$时的状态是可分的。此时，时间旅行尚未发生，外部系统也尚未与时间机器发生相互作用。爱丽丝还没有打开门查看里面是否有炸弹，或者粒子还没有到达可能与其未来的自身湮灭的时刻。因此，这种状态类似于我们在第3.1节的示例中，爱丽丝测量（即与量子比特发生相互作用）之前的状态。

$t = 0$时存在多少条时间线？这取决于你问的是谁。从时间机器的角度来看，存在两条时间线：一条是机器内部为空（$|0\rangle$），另一条是机器内部不为空（$|1\rangle$）。然而，从外部系统的角度来看，只存在一条时间线，此时系统处于初始态 $|1\rangle$。这两个系统尚未纠缠，因此时间线还没有从时间机器中延展开来。

在$t = 1$时，相互作用之后，时间机器和外部系统的状态变得纠缠在一起。这再次类似于爱丽丝与第3.1节中量子比特的状态发生纠缠。于是，外部系统中的观察者会分裂成两个版本。一个版本看到时间机器是空的，没有发生任何相互作用；另一个版本则看到时间机器并非空无一物，而且发生了相互作用，阻止了时间旅行的发生。

在多世界诠释的语境下，分支对应测量中可能出现的本征值，我们将每个分支理解为该分支内观察者所感知到的一次“坍缩”。然而，在时间旅行的语境下，我们将每个分支理解为一条独立的时间线：第一条分支中没有发生时间旅行，而第二条分支中则发生了时间旅行，历史也因此被改写。

每条时间线都从$t = 0$演化到$t = 1$，所用的幺正演化算符U由 (2.3) 给出。请注意，这个算符的形式与受控非门相同，它会使状态纠缠；这体现了时间机器 $\mathcal{H}_{\text{CTC}}$ 与外部系统 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 之间的相互作用会使两个系统发生纠缠，并将时间线“扩展”到外部系统。

由 (2.5) 给出的时间线关联算符T 在$t = 1$处作用时，会告诉我们如何从一条时间线转到下一条：它会将我们从$t = 1$ 处叠加态中的第一项带到$t = 0$处叠加态中的第二项，然后再从$t = 1$ 处叠加态中的第二项带回$t = 0$处叠加态中的第一项。因此，这两个算符U 和T 让我们既能追踪每条独立时间线内部的演化（使用U），也能追踪时间线之间的关系（使用T）。

我们在第 3.2 节讨论过的那些注意事项在此仍然适用：更准确地说，我们应将状态 (3.3) 理解为描述的不只是两条时间线，而是许多（可能有无穷多条）时间线，它们属于两个主要等价类 $|0\rangle \otimes |1\rangle$ 和 $|1\rangle \otimes |0\rangle$，此外还有概率极低的“中间”状态（例如时间机器发生故障）。就我们而言，系统实际处于该等价类中的哪一种具体状态并不重要，因为我们只关心时间机器是否为空，以及是否会发生时间旅行。

这些注意事项当然也适用于第 2.2 节的宏观悖论。显然，例如，爱丽丝的状态 $|\text{存活}\rangle$ 和 $|\text{死亡}\rangle$ 实际上是无数种不同状态的等价类，分别对应爱丽丝存活或死亡。不过，这些注意事项也适用于第 2.3 节的微观悖论，因为例如，粒子的状态 $|\text{湮灭}\rangle$ 和 $|\text{未湮灭}\rangle$ 是描述该粒子的量子场的无数种状态的等价类，分别对应粒子湮灭或未湮灭。

3.5 概率的作用

现在让我们来考虑叠加态（3.2）和（3.3）中系数作为概率振幅的解释。在第2.5节中，我们从两个任意系数 α 和 β 出发，并证明只有在 $\alpha = \beta$时，演化才是一致的（悖论也才能得到解决）。这意味着“测量”每条时间线的概率都是 1/2。但为什么会这样呢?

从逻辑上说，很容易看出这为何是唯一一致的选择。以第2.3节的微观悖论为例，假设粒子以 1/3 的概率湮灭，以 2/3 的概率不湮灭。但不发生湮灭，就会导致一个粒子从时间机器中出来并引发湮灭，因此湮灭也 应该以 2/3 的概率发生，从而造成矛盾。

不过，我们也来谈谈另一种论证。对多世界诠释最常见的反对意见之一是**概率问题**。如果每种结果都只是对应宇宙量子态的一个不同分支，那么，当观察者测量状态 $\sqrt{1/3}\,|0\rangle \pm \sqrt{2/3}\,|1\rangle$ 时，为什么会有三分之一的时间测得 0、三分之二的时间测得 1 呢？毕竟每种结果都恰好对应一个分支。

一种针对该问题的解决方案认为，概率与相同分支的数量有关 [44]。例如，在状态 $\sqrt{1/3}\,|0\rangle + \sqrt{2/3}\,|1\rangle$ 中，分支不是两个，而是三**个**，其中一个分支对应 0，另外两个对应 1。遗憾的是，这种方案存在缺陷，因为它只是“转移了目标”，并未解释叠加态的系数如何与分支数量相关，也没有说明为什么两个相同分支应当算作两个，而不是一个。

然而，这种解决方案似乎完全适用于纠缠时间线的情况。显然，在我们的模型中，恰好有两条不同的时间线：一条中时间机器是空的，另一条中时间机器不是空的，因此也就有两个分支。如果我们认真看待“概率源于分支数量”这一说法，就会立即发现，相应的概率**必然**是 1/2。更一般地，在一个包含 n 条时间线的模型中，每条时间线的概率都必然是 $1/n$，正如我们将在第 3.8 节中明确展示的那样。

3.6 时间线的扩散

在我们的模型中，量子纠缠与叠加导致了两条时间线的产生。与多世界诠释的分支一样，这些时间线并不会瞬间在各处出现。最初的分裂只发生在时间机器的希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\text{CTC}}$ 内。当外部系统 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 与时间机器相互作用时，可以说，它也“感染”了时间线分裂。随着其他系统与该系统相互作用，时间线将逐渐扩展到宇宙的其余部分，正如第 3.3 节对多世界诠释的描述。

为说明这一点，请考虑第 2.3 节中的微观示例。我们将整个 $\mathcal{H}_{\text{CTC}} \otimes \mathcal{H}_{\text{ex}}$系统放入一个盒子中，并在盒子外放置一个粒子探测器。在时间线$h = 0$中，湮灭没有发生，粒子进入了时间机器，因此探测器不会探测到盒子外的任何粒子。然而，在时间线$h = 1$中，湮灭确实发生了，探测器会记录到湮灭的最终产物。为便于说明，我们假设这些产物是盒子外的一个或多个光子。

现在我们来考虑由盒子和探测器组成的复合系统，这与第 3.3 节中讨论的复合系统量子比特 + 爱丽丝 + Bob 类似。探测器可以处于两种状态之一：$|0\rangle$ 如果未探测到光子，或 $|1\rangle$ 如果探测到了光子。在时间$t = 0$，这个扩展后的系统将处于以下状态

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\text{empty}\rangle + |\text{particle}\rangle\right) \otimes |\text{not annihilated}\rangle \otimes |0\rangle\,,$$

它完全可分；没有任何两个系统相互纠缠。在时间$t = 1$，时间机器与外部系统相互作用之后（可能导致粒子湮灭），复合系统将处于以下状态

$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\text{empty}\rangle \otimes |\text{not annihilated}\rangle + |\text{particle}\rangle \otimes |\text{annihilated}\rangle\right) \otimes |0\rangle\,.$$

此时，时间机器与外部系统已相互纠缠，这意味着盒子**内部局部**存在两条时间线。然而，探测器尚未与另外两个系统纠缠，因此它还没有分裂成两条时间线。

At $t = 2$，光子通过或未通过探测器之后，状态将会 b e

$$|\Psi(2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\text{empty}\rangle \otimes |\text{not annihilated}\rangle \otimes |0\rangle + |\text{particle}\rangle \otimes |\text{annihilated}\rangle \otimes |1\rangle\right).$$

现在，探测器已与时间机器和外部系统纠缠，因此我们可以得出结论：探测器现在**也**分裂成了两条时间线——一条时间线上没有探测到光子，另一条时间线上则探测到了光子。时间线不再局限于盒子内，而是扩展到了探测器。接下来，只需考虑时间线进一步扩展到读取探测器屏幕上结果的人，依此类推。

类似地，在第 2.2 节的宏观示例中，我们现在考虑爱丽丝的朋友 Bob 在 |开心⟩的初始态下走近实验室（里面有爱丽丝和时间机器）。在$t = 0$时，也就是爱丽丝打开时间机器之前，系统（包括 Bob）的状态将是

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\text{empty}\rangle + |\text{bomb}\rangle\right) \otimes |\text{alive}\rangle \otimes |\text{happy}\rangle\,.$$

在时间 $= 1$时，爱丽丝打开时间机器之后、但在 Bob 打开通往实验室的门之前，状态将是

$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\text{empty}\rangle \otimes |\text{alive}\rangle + |\text{bomb}\rangle \otimes |\text{dead}\rangle\right) \otimes |\text{happy}\rangle\,.$$

爱丽丝现在已经分裂成两条时间线，但 Bob 尚未与实验室纠缠，因此他还没有分裂。最后，在时间 $= 2$时，Bob 打开通往实验室的门。在一条时间线上，Bob 发现爱丽丝还活着，于是仍然很开心；但在另一条时间线上，他发现她已经死了，因而震惊不已：

$$|\Psi(2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\text{empty}\rangle \otimes |\text{alive}\rangle \otimes |\text{happy}\rangle + |\text{bomb}\rangle \otimes |\text{dead}\rangle \otimes |\text{shocked}\rangle\right).$$

Bob 现在也与实验室纠缠在一起，因此时间线也延伸到了他身上。接下来，Bob 可以给爱丽丝的父母打电话，告诉他们发生了什么；这样一来，时间线就会进一步扩展到她的父母那里，依此类推。我们看到，时间机器在局部造成了两条时间线的分裂，随后随着信息被分享给越来越多的观察者，这种分裂便在空间中扩散开来。

3.7 自举悖论

现在让我们说明，我们的模型也能解释自举悖论。例如，设想以下情景，它最初在引言中有所描述：

- 在 $t = 0$ 年时，Bob 苦于写作瓶颈，打开了时间机器的门，然 d
  却发现里面有一本已完成的书。他出版了这本书，并成为一位畅销书作家。
- 在 $t = 1$时，Bob 把书放进时间机器，以避免出现一致性悖论。

虽然这一情景完全自洽，但人们可能会担心这本书似乎是凭空出现的。不过，利用平行时间线就能轻松消除这种担忧。

在时间线$h = 0$中，Bob于$t = 0$ 打开通往时间机器的门，发现里面空无一物。他失望之余，继续埋头写书，最终完成了这本书。到了$t = 1$，他把书放进时间机器，送往一年前。书于$t = 0$ 抵达时间线$h = 1$，并被欣喜的 Bob 收到。于是，他不费吹灰之力，便从$h = 0$中自己克隆体的劳动成果中获利。

让我们用纠缠时间线模型更精确地描述这一情景。Bob打开通往时间机器的门之前，$t = 0$时刻的初始态为

$$|\Psi(0)\rangle = (\alpha|\text{empty}\rangle + \beta|\text{book}\rangle) \otimes |\text{writing}\rangle,$$

其中，状态 $|\text{writing}\rangle$ 表示 Bob 此刻正在埋头写书。此时，时间线尚未分裂到 Bob 身上。随后，他打开门，与时间机器中的内容发生纠缠，并在类似于 (2.3) 的幺正演化算符U 作用下分裂为两条时间线：

$$|\Psi(1)\rangle = \alpha|\text{empty}\rangle \otimes |\text{writing}\rangle + \beta|\text{book}\rangle \otimes |\text{not writing}\rangle.$$

这里，$|$写作$\rangle$ 意味着 Bob 没有找到书，因此继续写作（正如爱丽丝没有找到炸弹就继续活着，或者如果没有另一颗粒子从时间机器中出现，该粒子就继续处于未湮灭状态一样）。另一方面，状态 $|$不写作$\rangle$意味着 Bob 找到了书，从此无需辛苦写作，就能享受它带来的收益。

我们仍需证明一致性。在第一条时间线（系数为 α）中，Bob 将书放进时间机器。因此，借助类似于式（2.5）的时间线关联算符 T，这条时间线会导向 $t = 0$ 时的状态 $|$书$\rangle$。然而，在另一条时间线（系数为 β）中，Bob 没有把书放进时间机器。因此，同样借助 T，这条时间线会导向 $t = 0$ 时的状态 $|$空$\rangle$。与此同时，$t = 0$ 时 Bob 的状态必须始终是初始态 $|$写作$\rangle$。因此，我们得到：

$$|\Psi(0)\rangle = \alpha|\text{book}\rangle \otimes |\text{writing}\rangle + \beta|\text{empty}\rangle \otimes |\text{writing}\rangle.$$

和往常一样，要使其保持一致，唯一的办法就是将 $\alpha = \beta = 1/\sqrt{2}$ 视为相差一个相位。

3.8 更多时间线

到目前为止，为了简化起见，我们只考虑了包含两条时间线的情形。不过，增加更多时间线并不难。让我们再次考虑一般悖论，它包含以下状态

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle, \tag{3.4}$$

$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle). \tag{3.5}$$

请记住，时间线总是源自时间机器。因此，要创建更多时间线，我们应允许时间机器 $\mathcal{H}_{\text{CTC}}$ 的叠加态中包含更多状态。我们将代表 n 条不同时间线的状态表示为 $|i\rangle$，其中 $i \in \{0, ...n-1\}$，对应的振幅为 α_i。那么，时间机器的初始态为

$$|\Psi_{\text{CTC}}(0)\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i |i\rangle,$$

由 n 个状态构成的叠加态，每个状态对应一条可能的时间线。

还请记住，时间线的存在源于外部系统与时间机器相互作用所产生的纠缠。因此，外部系统 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 也必须有 n 个可能的状态 $|i\rangle$，其中 $i \in \{0, ...n-1\}$，以使这两个系统之间达到最大纠缠。

照例，我们取 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 的初始态为 $|1\rangle$，且这一状态在所有时间线中都相同，因为它是在时间旅行发生之前确定的初始条件，因此也早于时间线分裂。所以在 $t = 0$ 时，我们有

$$|\Psi(0)\rangle = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i |i\rangle\right) \otimes |1\rangle. \tag{3.6}$$

注意，当 $n = 2$ 时，这会简化为 (3.4)。

(2.3) 中定义的演化算符 U 可以直接推广到 n 条时间线的情况 :

$$U(|x\rangle \otimes |y\rangle) = |x\rangle \otimes |x \dot{+} y\rangle,$$

此时 $\dot{+}$ 表示模n加法。应用此算符后，我们得到$t = 1$时刻的状态:

$$|\Psi(1)\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i |i\rangle \otimes |i \dot{+} 1\rangle.$$

如预期，状态现在处于最大纠缠态，我们将每一项解释为对应一条不同的时间线。同样，当 $n = 2$ 时，这会简化为 (3.5)。

在第一条时间线（$i = 0$）中，外部系统保持在其初始态 $|1\rangle$，因为这条时间线上没有发生相互作用。然而，在之后的时间线（$0 < i < n-1$）中，由于与时间机器相互作用，它演化到状态 $|i \dot{+} 1\rangle$。最后，在最后一条时间线（$i = n-1$）中，外部系统演化到状态 $|0\rangle$，这使得无法再发生任何时间旅行。

式（2.5）中定义的时间线关联算符 T 也可用于 n 条时间线的情况:

$$T(|x\rangle \otimes |y\rangle) = |y\rangle \otimes |1\rangle.$$

应用这个算符，我们发现，在$t = 0$ 时对应的状态为

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i |i \dot{+} 1\rangle \otimes |1\rangle.$$

只有当 $\alpha_i = \alpha_{i+1}$ 对所有i都成立时，这才等于 (3.6)，这意味着所有系数的相位相同，且均为 $1/\sqrt{n}$。

到目前为止，讨论一直完全停留在抽象层面。我们可以借助第 2.2 节宏观示例的一个变体，让讨论变得更具体：在这个变体中，炸弹的效果非常有限，爱丽丝在每条时间线上都不断尝试投入越来越多的炸弹，直到终于成功杀死过去的自己。

状态 $|i\rangle$ of $\mathcal{H}_{\text{CTC}}$ 对应于时间机器里的i 枚炸弹（$|0\rangle$ 表示时间机器是空的，一如往常），而状态 $|i\rangle$ of $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 对应于爱丽丝把i 枚炸弹放进时间机器。爱丽丝一开始处于状态 $|1\rangle$，因为她最初（在所有时间线上）**打算**只使用一枚炸弹。当她打开通往时间机器的门时，发现里面有i 枚炸弹。

如果$i = 0$，什么也没发生，她便如自己所打算的那样，继续向过去送去一枚炸弹。

如果 $0 < i < n - 1$，i 枚炸弹就会爆炸，但爱丽丝幸存了下来。于是她推断，在上一条时间线上，她曾把i 枚炸弹放进时间机器，但这还不够。因此，这一次她决定使用$i + 1$ 枚炸弹，以便更有效地杀死下一条时间线上的爱丽丝。

如果 $i = n - 1$，炸弹的数量最终足以杀死爱丽丝，她因此死亡；这意味着爱丽丝的状态变为 $|0\rangle$，因为她已经死亡，因此不会向过去发送炸弹。读者可以验证，这个故事与上述抽象状态和算符相容。

请注意，在这个例子中，与前几节较简单的双时间线例子一样，时间线始终是**循环的**：最后一条时间线（例如，爱丽丝最终死亡的那条）总会回到第一条时间线（时间机器为空的那条）。此外，我们只考虑了有限条时间线。关于非循环时间线和／或无限多条时间线中的悖论，我们留待未来工作探讨。

4 我们的模型与 Deutsch 模型的比较

4.1 D-CTC模型回顾

Deutsch 于 1991年发表的开创性论文 [34] 提出了一种在量子力学框架内解决时间旅行悖论的方法，此方法后来被称为**D-CTC模型**，而闭合类时曲线本身则被称为 Deutsch 型闭合类时曲线，或简称“D-CTC”。

Deutsch 模型与我们的纠缠时间线模型有一些相似之处。下文中，我们将其称为**E-CTC模型**或“E-CTCs”。不过，两者也存在显著差异。我们认为，E-CTC模型解决了D-CTC模型的一些问题，具体讨论如下。

Deutsch考察了4种不同的悖论，并以量子比特对其进行表述。这里我们将特别关注Deutsch的“悖论1”，因为它在设计上与我们的一般悖论模型在数学上等价——但悖论的物理解释和解决方式有所不同。

在Deutsch悖论中，我们考虑一个量子比特进入相互作用区域，进入时间机器，在过去现身，随后与过去的自己相互作用，最后离开相互作用区域。年轻（过去）与年老（未来）量子比特之间的相互作用由我们在模型中使用的同一个幺正演化算符U 控制，定义见（2.3）：

$$U\left(|x\rangle \otimes |y\rangle\right) = |x\rangle \otimes |x \dot{+} y\rangle\,, \tag{4.1}$$

其中，与前文一样，x、$y \in \mathbb{Z}_2$ 和 $\dot{+}$ 表示模2加法。张量积左侧的状态[7] 表示年长（来自未来）的量子比特，也就是从时间机器中出来的那个。

[7]请注意，在 Deutsch的原始论文 [34], 中，张量积里的系统顺序是反过来的，时间旅行量子比特的状态位于右侧。为了符合我们的记号约定，我们将其移到了左侧；按照这一约定，时间线从张量积中最左侧的状态开始，并逐步向右传播（如第 3.6 节所述）。

张量积右侧的状态表示年轻（来自过去）的量子比特，也就是从外部进入、尚未进行时间旅行的那个。

现在，我们注意到：如果老量子比特以状态 $|x\rangle$ 从时间机器中出现，那么经过相互作用（4.1）后，年轻量子比特将以状态 $|x \dot{+} y\rangle$ 进入时间机器，由此便得到一致性悖论。如果我们假设量子比特穿过时间机器时状态不会改变，那么这两个状态必须相同。这意味着**从经典角度看**，我们必须有

$$x \dot{+} y = x. \tag{4.2}$$

满足这一一致性条件的唯一解是 $y = 0$，这意味着量子比特以初始态 $|0\rangle$ 进入相互作用区域，之后始终保持同一状态。然而，如果我们要求量子比特以初始态 $|1\rangle$ 开始，对应于 $y = 1$，那么经典一致性条件（4.2）就不成立，因此会出现一致性悖论。

在量子理论中，悖论以下列方式得到化解。令 $|\psi\rangle$ 为年轻量子比特进入相互作用区域时的初始态，并令 ρ 为描述老量子比特从时间机器中出现时状态的密度算符，该状态可能是混合态。于是，这两个量子比特的初始联合态为

$$\rho \otimes |\psi\rangle \langle\psi| ,$$

相互作用后的状态为

$$U (\rho \otimes |\psi\rangle \langle\psi|) U^{\dagger}. \tag{4.3}$$

为了保持一致性并解决悖论，Deutsch 要求量子比特从过去的时间机器中出来时的状态，必须与它在未来进入时间机器时的状态完全相同。根据定义，前者由 ρ 给出，而后者则通过对联合态（4.3）中的旧量子比特取偏迹得到。因此，一致性条件为

$$\mathrm{tr}_1 \left(U (\rho \otimes |\psi\rangle \langle\psi|) U^{\dagger} \right) = \rho, \tag{4.4}$$

其中，tr_1 是对旧量子比特取偏迹，因此只留下年轻量子比特的状态。我们将此称为 **D-CTC条件**。

现在来看 $|\psi\rangle = |1\rangle$，它是在经典情形下会导致悖论的初始态。负责相互作用（4.1）的酉算符 U 可以明确地写成外积表示：

$$U = \sum_{x,y \in \mathbb{Z}_2} |x\rangle \otimes |x \dot{+} y\rangle \langle x| \otimes \langle y| . \tag{4.5}$$

显然，对于纯态，

$$U (|x\rangle \langle x| \otimes |y\rangle \langle y|) U^{\dagger} = |x\rangle \langle x| \otimes |x \dot{+} y\rangle \langle x \dot{+} y| .$$

因此，如果我们取

$$\rho = \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) , \tag{4.6}$$

给定初始条件 $|\psi\rangle = 1$，我们将得到相互作用之后的结果，

$$\begin{aligned} U (\rho \otimes |\psi\rangle \langle\psi|) U^{\dagger} &= \frac{1}{2} \left(U (|0\rangle \langle 0| \otimes |1\rangle \langle 1|) U^{\dagger} + U (|1\rangle \langle 1| \otimes |1\rangle \langle 1|) U^{\dagger} \right) \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle \langle 0| \otimes |1\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 1| \otimes |0\rangle \langle 0|) . \end{aligned}$$

对第一个量子比特取偏迹，我们得到

$$\mathrm{tr}_1 \left(U (\rho \otimes |\psi\rangle \langle\psi|) U^{\dagger} \right) = \frac{1}{2} (|1\rangle \langle 1| + |0\rangle \langle 0|) = \rho,$$

因此，满足 D-CTC条件 (4.4)。这意味着，如果时间旅行量子比特处于**最大混合态**，以相等的概率 1/2 分别为 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$，那么这个悖论就得到了解决。该量子比特以这种状态进入并离开时间机器，并通过量子门 (4.5) 与自身相互作用，但这并不会造成任何不一致，因为它始终保持在相同的混合态。

相互作用之后，年轻的量子比特进入时间机器，因此消失了。要找出输出态，也就是老量子比特离开相互作用区域时的状态，我们需要对年轻的量子比特进行偏迹：

$$\mathrm{tr}_2\left(U\left(\rho\otimes|\psi\rangle\langle\psi|\right)U^\dagger\right)=\frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|\right). \tag{4.7}$$

我们可以看到，量子比特的最终状态与相互作用之前相同，是由 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$组成的混合态，两者的概率各为 1/2。

4.2 平行时间线的作用

在这一悖论的解法中得到的混合态 (4.6) 和 (4.7)，可以解释为代表两条不同的时间线。一个量子比特接近时间机器，并与它年长的自己相互作用。接下来：

- 在第一条时间线中，对应于 (4.6) 里的项 $|0\rangle\langle 0|$，年轻的量子比特最初处于状态 $|1\rangle$，老量子比特则处于状态 $|0\rangle$。它们通过 (4.1) 发生相互作用，但在这次相互作用中，两者的状态都没有改变。随后，年轻的量子比特仍处于状态 $|1\rangle$，进入时间机器并消失。老量子比特以状态 $|0\rangle$离开相互作用区域，这对应于 (4.7) 里的项 $|0\rangle\langle 0|$。
- 在第二条时间线中，对应于（4.6）中的项 $|1\rangle\langle 1|$，年轻的量子比特最初仍处于状态 $|1\rangle$，但年老的量子比特现在处于状态 $|1\rangle$；注意，这个量子比特**来自第一条时间线**。它们通过（4.1）相互作用，这一次，年轻的量子比特将其状态翻转为 $|0\rangle$。随后，年轻的量子比特以状态 $|0\rangle$ 进入时间机器并消失；实际上，它**出现在第一条时间线中**。年老的量子比特以状态 $|1\rangle$离开相互作用区域，这对应于（4.7）中的项 $|1\rangle\langle 1|$。

这完全自洽，但仍然存在一个问题，因为不存在一条时间旅行“尚未”发生的时间线；时间旅行在两条时间线上都会发生，只是量子比特所处的状态不同。这使得我们难以用分支时间线来解释这一悖论，因为必须有一条“原始”时间线，供“新”时间线从中分支出来。此外，如果两条时间线上都有一个物体处于时间机器中，那么人们就会想知道它是从哪里来的；这是一个**自举悖论**，尚未得到解决。

Deutsch本人很可能意识到了这个问题，因为在讨论平行时间线解释时，他选择聚焦于另一个悖论“悖论3”。在这个悖论中，量子比特被解释为占据数，表示粒子是否存在。此外，还加入了另一个量子比特，相互作用由[8]给出

$$U\left(|x\rangle\otimes|y\rangle\otimes|y\dot{+}1\rangle\right)=|x\rangle\otimes|x\dot{+}y\rangle\,|x\dot{+}y+1\rangle\,.$$

这里，左侧的占据数表示粒子是否经过了时间机器，而中间和右侧的占据数则表示粒子是否沿着两条可能轨迹中的一条运动。我们将中间的那条称为**轨迹 A**，而右侧的那条

[8]再次提醒读者注意，我们采用了不同的记号约定：时间旅行量子比特的状态写在右侧，而在Deutsch的原始论文中则写在左侧。

称为右侧的**轨迹B**。只有轨迹 B 会实际进入时间机器，这意味着经典一致性条件是

$$x \dot{+} y + 1 = x,$$

因此，我们必须有 $y = 1$，对应于初始态 $|0\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle$，此时粒子处于轨迹 A 上，并**不** 进入时间机器。由于没有发生时间旅行，也就没有悖论。然而，对于$y = 0$，对应于初始态 $|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |1\rangle$，此时粒子处于轨迹 B 上，并**会** 进入时间机器，因此存在不一致性。

与悖论 1 一样，通过要求对 D-CTC 条件 (4.4) 作适当修改，可以解决这一不一致性：

$$\mathrm{tr}_{1,2}\left(U\left(\rho \otimes |\psi\rangle\langle\psi|\right)U^{\dagger}\right) = \rho,$$

其中，$|\psi\rangle$ 是轨迹 A 和轨迹 B 的联合态，ρ 是时间机器的状态。请注意，此处 $\mathrm{tr}_{1,2}$ 对时间机器和轨迹 A 求偏迹，因此只留下轨迹 B，因为该轨迹进入时间机器并以 ρ的形式出现。对应于轨迹 B 上粒子的初始态$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$的解，与悖论 1 的解 (4.6) 相同：

$$\rho = \frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|\right). \tag{4.8}$$

此外，输出态可表示为

$$\mathrm{tr}_3\left(U\left(\rho \otimes |\psi\rangle\langle\psi|\right)U^{\dagger}\right) = \frac{1}{2}\left(|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|\right), \tag{4.9}$$

这里我们对轨迹 B 求了偏迹，因为它进入时间机器后消失了。

Deutsch 悖论 3 更适合用平行时间线来解释。一个粒子沿轨迹 B 接近时间机器，然后：

- 在第一条时间线中，对应于式 (4.8) 中的项 $|0\rangle\langle 0|$，没有粒子从时间机器中出现。入射粒子只是沿轨迹 B 继续前进并进入时间机器。没有剩下任何粒子，这对应于式 (4.9) 中的项 $|00\rangle\langle 00|$。

- 在第二条时间线中，对应于式 (4.8) 中的项 $|1\rangle\langle 1|$，有一个粒子从时间机器中出现；请注意，这个粒子**来自第一条时间线**。入射粒子与这个粒子相互作用，使其转移到轨迹 A。因此，它没有进入时间机器。最后剩下两个粒子，即入射粒子和那个来自第一条时间线的粒子，这对应于式 (4.9) 中的项 $|11\rangle\langle 11|$。

添加额外量子比特的原因是，Deutsch 希望能够描述某种类似于熟悉的 Polchinski悖论的情形：一颗台球与年长时的自己相撞，结果改变了轨迹，从 B 转向 A，因而没有进入时间机器。更技术性的原因是，要用同一个希尔伯特空间恰当地描述输入态和输出态，总共需要 4 种不同状态：

1. $|10\rangle$ 对应轨迹 A 中的一个粒子，2. $|01\rangle$ 对应轨迹 B 中的一个粒子，3. $|00\rangle$ 对应两条轨迹中都没有粒子，4. $|11\rangle$ 对应每条轨迹中各有一个粒子。

在 E-CTC模型的一般悖论中，如第 2.1 节所述，我们通过采用一种在数学上等价于 Deutsch 悖论 1 的表述，避开了这一复杂情况；不同之处在于，我们不再让单个物理量子比特与自身相互作用，而是将量子比特态解释为代表更抽象的**逻辑**（真或假）状态：时间机器是否为空，以及外部系统是否会启动时间旅行。因此，在 E-CTC模型中，出现与 Deutsch 悖论3 基本相同的情况，却只用 2 个量子比特来描述，完全没有问题。

4.3 一致性条件

关于 D-CTC 一致性条件 (4.4) 已有大量精彩的文献，探讨其后果并指出潜在问题。然而，据我们所知，D-CTC条件本身很少受到质疑。

本节的核心论点是，D-CTC 一致性条件 (4.4) 是满足一致性的**充分**要求，但并非**必要**要求。事实上，我们认为它**过于严格**，最终在一定程度上掩盖了实际发生的事情。在 E-CTC模型中，我们要求一个较弱的条件：$t = 1$ 时刻的状态通过 (2.5) 中定义的时间线关联算符T 与$t = 0$ 时刻的状态相关联。

Thi这是 D-CTC 和 E-CTC模型之间的一个关键区别，因此我们来强调一下：　　：

- Deutsch 通过要求时间旅行粒子的**约化态**在$t = 1$ 和$t = 0$时刻相同来实现一致性，最终得到一个由 $|0\rangle$和 $|1\rangle$构成的统计混合态。

- 相反，我们通过要求联合系统在t =1时的**整体状态** 与在$t = 0$时的联合系统整体状态以适当的方式关联，来实现一致性；这里的联合系统不仅包括时间机器本身，还包括与其纠缠的任何外部系统。我们使用时间线关联算符（2.5）来描述这种关联。

这一较弱的条件使我们能够用平行时间线来描述的不仅是时间旅行量子比特，还包括**整个系统**（实际上，最终还包括整个宇宙）。叠加态中的每一项都代表一条不同的时间线，正如我们在第 3.8 节所见，可能的时间线数量没有上限。

在 D-CTC模型中，我们可以使用演化算符（4.1）来找出每条时间线各自如何演化。然而，我们没有明确的方法来确定每条时间线与下一条时间线之间的联系。混合态（4.6）并未包含全部信息，因此在第 4.2 节开头描述每条时间线上发生的情况时，我们只能做出有根据的猜测。只有两条时间线时，这一点无关紧要；但当时间线增多时，情况就变得更重要了，例如第 3.8 节所述。

在 E-CTC 模型中，我们使用等效演化算符（2.3）来演化每条时间线。此外，通过让时间线关联算符（2.5）作用于叠加态中的单个项，而非整体状态，我们可以找到时间线在$t = 1$ 时刻与下一条时间线在$t = 0$时刻的状态之间的关联。

因此，时间线关联算符为我们提供了一种从“源”时间线找到“目标”时间线的方法，而这在 Deutsch 模型中并不存在。该算符作用于时间旅行开始前纠缠系统的联合态，并返回抵达过去时刻的解纠缠态。

此外，在 D-CTC 模型中，两条时间线的分裂如何传播到宇宙的其余部分尚不清楚。在 E-CTC 模型中，我们可以清楚地看到，时间线如何通过与其他系统的纠缠，以明确的方式逐渐传播，如第 3.6 节所述。

要理解为什么 D-CTC条件并非一致性的必要条件，请再次考虑一般模型中系统在$t = 0$ 和$t = 1$ 时的状态：

$$|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle,$$
$$|\Psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle). \tag{4.10}$$

我们**可以** 要求满足 D-CTC 条件，在这种情况下，我们会发现 $\mathcal{H}_{\text{CTC}}$ 的状态是混合态

$$\rho = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|). \tag{4.11}$$

这实际上告诉我们，对纠缠态 (4.10) 求迹并消去 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$后，其**约化密度算符** 由混合态 (4.11) 给出——这完全正确，但掩盖了整个系统的状态是纯纠缠态这一事实。

对纯态取约化态时，当且仅当原始状态是纠缠态，约化态才会是混合态，这解释了为什么 D-CTC 条件总是会得到混合态。但对纠缠态取约化态会**丢失有关纠缠的信息**；它只会告诉我们一个系统处于各种可能状态的概率，却无法告诉我们关于另一个被迹掉的系统所对应的相关状态的任何信息。

例如，考虑贝尔态

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \qquad |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle).$$

很容易看出，在这两种情况下，第一个量子比特的约化密度算符都是 (4.11)。然而，在 $|\Phi^+\rangle$的情况下，第二个量子比特将与第一个量子比特取相同的值；而在 $|\Psi^+\rangle$的情况下，第二个量子比特将取相反的值；对第二个量子比特求迹时，关于纠缠的信息会被彻底丢弃，且无法恢复。

同样，D-CTC条件会舍弃时间机器 $\mathcal{H}_{\text{CTC}}$ 与外部系统 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$之间纠缠的信息，而我们认为，在多世界诠释的框架中，要将时间线定义为彼此独立的“世界”，这类信息至关重要。E-CTC模型只需满足较弱的一致性条件，便能得到系统完整的纠缠态，其中包含有关时间线的全部信息，因此，与D-CTC模型相比，它能为平行时间线提供更精确、定义更清晰的图景。

在D-CTC模型中取偏迹时，另一个会丢失的信息是纠缠态之间的相对相位。当然，由于两个模型中都会发生退相干，最终出现这种情况也是意料之中的，但其中有一个关键区别。

在D-CTC模型中，由于要求满足D-CTC条件，时间旅行量子比特实际上被迫独自发生退相干。另一方面，在E-CTC模型中，时间机器和外部系统会一**起**发生退相干，从而呈现出通常的多世界诠释图景：经典“世界”通过退相干从未经修改的量子力学中涌现。

最后还要提到，在 Deutsch 悖论的一些示例中，D-CTC条件的解并不唯一。为唯一选出一个解，Deutsch 猜想采用**最大熵规则**，即选取熵最大的解。在我们的模型中，一致解始终唯一[9]，因此不需要这样的规则。此外，即便在某些情况下，D-CTC条件可以由纯叠加态满足，最大熵规则也总会选出一个混合态；而在我们的模型中，状态始终是纯态。

[9]可能相差一个相对负号，但这不会产生可观测的后果；参见脚注5。

4.4 时间旅行状态

D-CTC条件还有一个更隐蔽的问题：它要求时间旅行粒子的约化态在$t = 1$和$t = 0$时相同。对于单个量子比特穿越时间的简单情形，这没有问题；但在更一般的情形下，希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\text{CTC}}$ 和 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 可能是完全不同的空间，因此D-CTC条件将无法得到明确定义。

为了简单起见，我们在描述一般悖论中的两个空间时都使用了一个量子比特，这可能会掩盖这一点。但正如我们在第 2.1 节定义一般悖论时所说，每个希尔伯特空间中的状态$|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 都与任何物理量子比特（例如电子的自旋态）毫无关系。相反，它们只是实际状态的占位符，而这两个空间可能对应着完全不同的物理系统。

例如，再来看第 2.2 节中的宏观悖论。在这个情境中， $\mathcal{H}_{\text{CTC}}$ 有两种状态： $|$空$\rangle$ 和 $|$炸弹$\rangle$；而 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 有两种状态： $|$死亡$\rangle$ 和 $|$存活$\rangle$。在这种情况下，要求$t = 1$ 时 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 的状态与$t = 0$时 $\mathcal{H}_{\text{CTC}}$的状态相同，显然毫无意义，因为它们甚至不代表同一个物理系统。

当然，这两个希尔伯特空间都是由众多原子组成的复合空间。原则上，我们可以单独选出 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 中描述将于$t = 1$ 放入时间机器的那颗炸弹的特定子空间，并要求该子空间的约化态与 $\mathcal{H}_{\text{CTC}}$ 中描述同一颗炸弹的特定子空间的约化态相同。这实质上是 D-CTC 条件的推广版本。

然而，正如我们在上一节已经论述的，这个条件过于严格。时间旅行之后，炸弹可能会有某个原子处于与旅行之前不同的能级——在这种情况下，精确状态不会相同，但事件链仍然完全一致。

因此，一个较弱的条件实际上就足以维持一致性：如果爱丽丝在$t = 1$时“活着”（处于任何可被解读为“活着”的状态，只要她能够把炸弹放入时间机器），那么$t = 0$ 时就有“一颗炸弹”（处于任何可被解读为“一颗炸弹”的状态，只要它会爆炸）。这正是我们在 E-CTC 模型中要求的条件。

诚然，宏观悖论带来了一些复杂情况（如第 3.2 节所述），因此我们不妨转而考虑第 2.3 节中的微观悖论。现在， $\mathcal{H}_{\text{CTC}}$ 具有 $|$空$\rangle$和 $|$粒子$\rangle$两种状态，而 $\mathcal{H}_{\text{ex}}$ 具有 $|$湮灭$\rangle$ 和 $|$未湮灭$\rangle$两种状态。这些状态更容易精确定义，因为它们是单个粒子的状态，例如可以用量子场来表示。

但即便在这种情况下，与宏观悖论一样， $|$湮灭$\rangle$ 和 $|$未湮灭$\rangle$这两种状态仍分别对应于无穷多个场态构成的等价类，因为我们并不关心粒子精确的位置或动量分布，只要它湮灭或未湮灭即可。

同样，要求粒子在$t = 1$ 时的约化态与$t = 0$ 时完全相同，要求过于严格，因为粒子实际上可能处于不同的状态，同时仍保持一致性——事实上，它**必须**处于不同的状态，因为至少在$t = 0$时，它的动量会朝向相反的方向，因为此时粒子正从时间机器中出来，而不是进入其中。

另一个（甚至更加微妙的）论点来自这样一个事实：在 D-CTC 和 E-CTC 模型中，时间线都是循环的——最后一条时间线会连接回第一条。在 Deutsch 悖论 1 中，施加 D-CTC条件是合理的，因为在这两条时间线上，物理量子比特都确实会穿越时间，因此它进入和离开时间机器时的状态应该相同。

然而，在量子比特的占据数解释下，例如在我们的一般悖论和 Deutsch 悖论 3 中，最后一条时间线上实际上并没有发生时间旅行。因此，在这种情况下，施加 D-CTC条件是否合理值得商榷，因为没有实际的系统经历了时间旅行

，因此也就没有可施加该条件的系统。换言之，最后一条时间线上没有粒子的状态，不必与第一条时间线上没有粒子的状态“相同”。

4.5 输出态

关于系统输出态，也有类似的考量。回想一下，在 D-CTC模型中，两个量子比特的输出态由混合态（4.7）给出：

$$\mathrm{tr}_2\left(U\left(\rho\otimes|\psi\rangle\langle\psi|\right)U^\dagger\right)=\frac{1}{2}\left(|0\rangle\langle 0|+|1\rangle\langle 1|\right). \tag{4.12}$$

这里的想法是，我们对量子比特 2 求迹，因为它进入时间机器后便“消失”了。在 E-CTC模型中，我们则将纯纠缠态（4.10）

$$|\Psi(1)\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle\otimes|1\rangle+|1\rangle\otimes|0\rangle\right), \tag{4.13}$$

视为“输出态”，**而不对任何部分求迹**。事实上，对进入时间机器的物体求迹甚至不一定有意义。例如，粒子可以用量子场来描述；但这样的实体存在于整个时空中，因此无需对它求迹。

更重要的是，正如我们在第 4.4 节讨论时间旅行量子比特时所解释的，对纠缠态的一部分求迹意味着我们得到的是一个**约化态**，这会抹去有关纠缠、进而有关时间线的信息。如果我们想确定系统的输出态，那么考察**整个状态** （4.13）会更合理；在其中，我们可以清楚地看到每条时间线上时间机器和外部系统各自的状态，以及它们之间的关联。

换一种说法来说明这一点，我们回顾一下第3.1节：根据多世界诠释，如果爱丽丝测量一个量子比特，那么爱丽丝与该量子比特的复合态可由式（3.1）给出：

$$|\Psi(1)\rangle=a|0\rangle\otimes|\text{Alice measured }0\rangle+b|1\rangle\otimes|\text{Alice measured }1\rangle. \tag{4.14}$$

有人可能会认为，量子比特的输出态可以通过对爱丽丝的状态求偏迹得到，也就是说，

$$\rho=|a|^2|0\rangle\langle 0|+|b|^2|1\rangle\langle 1|.$$

然而，这同样会抹去有关纠缠的信息，因此也会抹去有关不同“世界”的信息。描述量子比特输出态的一种更合理的方式，是使用完整的表达式（4.14）；它表明发生了分支：在一个分支中，量子比特的状态是 $|0\rangle$，爱丽丝的状态是 |，爱丽丝测得 0⟩；而在另一个分支中，量子比特的状态是 $|1\rangle$，爱丽丝的状态是|，爱丽丝测得 1⟩。一开始就问“量子比特的状态”是什么毫无意义，因为这个问题不止一个答案——它在**每个分支中都有不同的状态**。

完全同样地，我们从 D-CTC模型得到的混合态（4.12）破坏了关于纠缠的信息，因此我们知道可能有哪些状态，却不知道每个状态属于哪条时间线。因此，更恰当的说法是，输出态由（4.13）给出，它完整地告诉我们系统在每条时间线中的各个组成部分的状态信息。

4.6 总结：D-CTC 与 E-CTC

总而言之，与熟悉的 D-CTC 模型相比，我们的 E-CTC模型的主要优势在于，它明确呈现了时间机器与外部系统之间的纠缠，并由此对平行时间线本身给出了更清晰、更具实践性的定义：

- 每条时间线都对应纠缠态中的一个不同项。
- 每条时间线都通过式 (2.3) 中定义的演化算符 U 单独演化。
- 每条时间线都通过式 (2.5) 中定义的时间线关联算符 T 与下一条时间线相关联。
- 通过要求时间 $t = 1$ 的整个纠缠态与时间 $t = 0$ 的状态通过时间线关联算符 T相关联，来保证一致性。

  如第 3.6 节所示，通过纠缠，时间线逐渐扩展到越来越多的系统。

D-CTC模型中，时间线的这些特征被掩盖了，因为该模型是用约化状态定义的，而约化状态会抹去有关纠缠的信息，进而抹去有关时间线本身的信息。

关于多世界诠释（MWI）语境下 D-CTC模型的进一步分析，见 [37]（第 10.6 节及其中的参考文献）。此外，我们还请读者参阅 [45], ，该文指出，由于使用了混合态，D-CTC模型可以在经典统计系统中重现；以及 [46], ，该文讨论了 D-CTC模型中的混合态是否可以恰当地解释为多世界诠释中的独立分支。E-CTC模型中不会出现这些问题，因为它是用纯态定义的。

5 结论

本文提出了一种利用平行时间线解决时间旅行悖论的新模型，称为纠缠时间线模型或 E-CTC 模型。我们证明，该模型能够解决以抽象双量子比特系统为基础提出的一般时间旅行悖论，而这种系统可以映射到更复杂的微观或宏观系统。

文献中通常将平行时间线描绘为一个宇宙分裂成自身的两个物理副本。然而，在我们的模型中，时间线并非物理上彼此独立的宇宙，而是系统之间的纠缠所形成的涌现结构，类似于埃弗雷特或多世界诠释中的“世界”或“分支”。时间线是单一宇宙中的局部结构，随着越来越多的系统彼此纠缠而逐步延展。

与广为人知的 Deutsch D-CTC 模型不同，我们的模型只涉及纯态，并将时间线明确界定为由纠缠涌现而成。我们指出，D-CTC 条件要求时间旅行发生前后，时间旅行量子比特的约化态保持相同；这一条件过于严格，并非确保一致性所必需。我们将这一条件产生的 D-CTC 混合态解释为 E-CTC 纠缠态的约化态；它们会抹去有关纠缠的信息，从而掩盖由这种纠缠涌现的平行时间线。

纠缠时间线模型使用两个算符来构建：幺正演化算符 U 将时间机器的状态与外部系统的状态纠缠起来，从而创建时间线；时间线关联算符 T 则将未来发生时间旅行时两个系统的联合态，与抵达过去时对应的状态关联起来。

在我们的模型中，对初始联合叠加态施加U ，使其从$t = 0$演化至$t = 1$；然后施加T ，得到$t = 0$处对应的状态；最后要求后者等于初始态，由此获得一致性。这个条件比D-CTC条件弱，但仍足以维持一致性并解决悖论。

此外，每条时间线内从$t = 0$到$t = 1$的演化，由U作用于叠加态中的某个特定项来定义；而时间旅行导致从$t = 1$处的一条时间线到$t = 0$处下一条时间线的关联，则由T作用于同一项来给出。

只要时间线是循环的，我们的模型就能描述任意有限数量的时间线；也就是说，最后一条时间线通过关联算符 T 与第一条相连。此外，我们的模型主要是概念性的，其中的量子比特态只是实际物理态的占位符。

未来工作中，我们打算扩展模型，使其能够处理无限和／或非循环时间线，并使用具体的物理系统（尤其是波函数或相对论场等非离散系统）来更精确地实现该模型。我们还计划探讨诸如纠缠系统的一部分进入时间机器时会发生什么，或存在不止一台时间机器时会发生什么等问题。

6 致谢

BarakShoshany 谨向 Amos Ori 致谢，感谢他进行了富有帮助且启发性的讨论。本研究由 Mitacs Globalink Research Internship 资助。

参考资料

[1] Sean M. Carroll。《时空与几何：广义相对论导论》。培生，2004年。URL: https://www.preposterousuniverse.com/spacetimeandgeometry/.[2]R. M. Wald。《广义相对论》。芝加哥大学出版社，1984年。URL: https://www.press.uchicago.edu/ucp/books/book/chicago/G/bo5952261.html.[3] S. W. Hawking 和 G. F. R. Ellis。《时空的大尺度结构》。剑桥数学物理专著。剑桥大学出版社，1973年。doi:10.1017/CBO9780511524646.[4] Barak Shoshany 和 Jared Wogan。《虫洞时间机器与多重历史》。《广义相对论与引力》，55(44)，2023年。arXiv:2110.02448, doi:10.1007/s10714-023-03094-8.[5]Barak Shoshany 和 Ben Snodgrass。《曲速引擎与闭合类时曲线》。2024年。arXiv:2309.10072.[6] Barak Shoshany。《超光速旅行与时间旅行讲座》。《*SciPost*物理讲义》，10，2019年。arXiv:1907.04178，doi:10.21468/SciPostPhysLectNotes.10.[7] Serguei Krasnikov。《广义相对论中的回到过去与超光速旅行》。施普林格国际出版，2018年。doi:10.1007/978-3-319-72754-7.[8] Francisco S. N. Lobo，编者。《虫洞、曲速引擎与能量条件》。施普林格国际出版，2017年。doi:10.1007/978-3-319-55182-1.[9] Jacob Hauser 和 Barak Shoshany。《时间旅行悖论与多重历史》。《物理评论*D*》，102(064062)，2020年。arXiv:1911.11590，doi:10.1103/PhysRevD.102.064062.[10]Matt Visser。《洛伦兹虫洞：从爱因斯坦到霍金》。施普林格。URL: https://www.springer.com/gp/book/9781563966538.[11]R. Wasserman。《时间旅行悖论》。牛津大学出版社，2018年。URL: https://global.oup.com/academic/product/paradoxes-of-time-travel-9780198793335.

[12] S. Krasnikov。时间旅行悖论。《物理评论》，D65:064013，2002年。arXiv:gr-qc/0109029，doi:10.1103/PhysRevD.65.064013.[13]SV Krasnikov。因果性违反与悖论。《物理评论*D*》，55(6):3427，1997年。doi:10.1103/PhysRevD.55.3427.[14]S. W. Hawking。时间顺序保护猜想。《物理评论*D*》，46:603–611，1992年7月。doi:10.1103/PhysRevD.46.603.[15]Matt Visser。从虫洞到时间机器：关于Hawking的时间顺序保护猜想的评论。《物理评论》，D47:554–565，1993年。arXiv:hep-th/9202090，doi:10.1103/PhysRevD.47.554.[16] Matt Visser。时间顺序保护的量子物理学。载于《理论物理学与宇宙学的未来：庆祝*Stephen Hawking*六十岁生日。研讨会与专题讨论会论文集，英国剑桥，*2002*年*1*月*7*日至*10*日》，第161–176页，2002年。arXiv:gr-qc/0204022.[17] James D. E. Grant。宇宙弦与时间顺序保护。《物理评论》，D47:2388–2394，1993年。arXiv:hep-th/9209102，doi:10.1103/PhysRevD.47.2388.

[18] J. Richard Gott, III. 运动的宇宙弦对产生的闭合类时曲线：精确解。《物理评论快报》，66:1126–1129，1991年。doi:10.1103/PhysRevLett.66.1126。

[19] John Earman、Christopher Smeenk 和 Christian W¨uthrich。物理定律是否禁止时间机器的运行?《综合》，169(1):91–124，2009年。doi:10.1007/s11229-008-9338-2。

[20]Sung-Won Kim 和 Kip S. Thorne。真空涨落是否会阻止闭合类时曲线的创-造?《物理评论》*D*，43:3929–3947，1991年6月。URL：http://resolver.caltech.edu/CaltechAUTHORS:KIMprd91，doi:10.1103/PhysRevD.43.3929。

[21] Bernard S. Kay、MarekJ. Radzikowski 和 Robert M. Wald。具有紧生成柯西视界的时空上的量子场论。《数学物理通讯》，183:533–556，1997年。arXiv:gr-qc/9603012，doi:10.1007/s002200050042。

[22] S. V. Krasnikov。时间机器的量子稳定性。《物理评论*D*》，54:7322–7327，1996年12月。arXiv:gr-qc/9508038，doi:10.1103/PhysRevD.54.7322。

[23]S. Krasnikov。量子场论与时间机器。《物理评论》，D59:024010，1999年。arXiv:gr-qc/9802008，doi:10.1103/PhysRevD.59.024010。

[24]John Friedman、Michael S. Morris、Igor D. Novikov、Fernando Echeverria、Gunnar Klinkhammer、Kip S. Thorne 和 Ulvi Yurtsever。存在闭合类时曲线的时空中的柯西问题。《物理评论*D*》，42:1915–1930，1990年9月。URL：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.42.1915，doi:10.1103/PhysRevD.42.1915。[25] Fernando Echeverria、Gunnar Klinkhammer 和 Kip S. Thorne。存在闭合类时曲线的虫洞时空中的台球：经典理论。《物理评论*D*》，44:1077–1099，1991年8月。URL：https://authors.library.caltech.edu/6469/，doi:10.1103/PhysRevD.44.1077。[26] I. D. Novikov。存在自相互作用问题中的时间机器与自洽演化。《物理评论》，D45:1989–1994，1992年。doi:10.1103/PhysRevD.45.1989。[27] A. Carlini、Valeri P. Frolov、M. B. Mensky、I. D. Novikov 和 H. H. Soleng。时间机器：自洽性原理是最小作用量原理的结果。《国际现代物理学杂志》，D4:557–580，1995年。arXiv:gr-qc/9506087，doi:10.1142/S0218271895000399。[28] P. Hajicek。非豪斯多夫时空中的因果关系。《数学物理通讯》，21(1):75–84，1971年。doi:cmp/1103857261。

[29] Mark F. Sharlow。用于解决时间旅行悖论的新型非豪斯多夫时空模型。《物理年鉴》，263(2):179–197，1998年。doi:10.1006/aphy.1997.5772。[30] Joanna Luc 和 Tomasz Placek。广义相对论中对非豪斯多夫（广义化）流形的诠释，2019年6月。URL：http://philsci-archive.pitt.edu/16172/。[31] Joanna Luc。作为广义相对论基本物体的广义化流形。《物理学基础》，第1–23页，2019年。doi:10.1007/s10701-019-00292-w。[32] Thomas Muller。分支时空的广义流形拓扑。《科学哲学》，80(5):1089–1100，2013年。doi:10.1086/673895。[33] Gordon McCabe。分支宇宙的拓扑。《物理学基础快报》，18(7):665–676，2005年11月。arXiv:gr-qc/0505150，doi:10.1007/s10702-005-1319-9。[34] David Deutsch。闭合类时线附近的量子力学。《物理评论*D*》，44:3197–3217，1991年11月。doi:10.1103/PhysRevD.44.3197。[35] Hugh Everett。第*9*章：短论文：量子力学的相对态表述（*1957*），第173–196页。普林斯顿大学出版社，2012年。URL：https://doi.org/10.1515/9781400842742.173，doi:doi:10.1515/9781400842742.173。[36]Bryce S. DeWitt。量子力学与现实。《今日物理》，23(9):30–35，1970年。URL：https://doi.org/10.1063/1.3022331，arXiv:https://doi.org/10.1063/1.3022331，doi:doi:10.1063/1.3022331。[37]David Wallace。《涌现的多重宇宙》。牛津大学出版社，2012年。doi:doi:10.1093/acprof:oso/9780199546961.001.0001。[38]Simon Saunders、Jonathan Barrett、Adrian Kent 和 David Wallace。《多世界？埃弗雷特、量子理论与现实》。牛津大学出版社，2010年。doi:10.1093/acprof:oso/9780199560561.001.0001。[39] David Deutsch 和 Michael Lockwood。时间旅行的量子物理学。《科学美国人》，270(3):68–74，1994年。[40] Michael S. Morris 和 Kip S. Thorne。时空中的虫洞及其在星际旅行中的应用：广义相对论教学工具。《美国物理学杂志》，56(5):395–412，1988年5月。URL：http://www.cmp.caltech.edu/refael/league/thorne-morris.pdf，doi:10.1119/1.15620。[41]G. C. Ghirardi、A. Rimini 和 T. Weber。微观系统和宏观系统的统一动力学。《物理评论*D*》，34:470–491，1986年7月。URL：https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.34.470，doi:10.1103/PhysRevD.34.470。[42] Barak Shoshany。《思考量子：量子理论讲座》，2018年。arXiv:1803.07098，doi:10.48550/arXiv.1803.07098。[43] Michael A. Nielsen 和 Isaac L. Chuang。《量子计算与量子信息：十周年纪念版》，2010年。doi:10.1017/CBO9780511976667。[44] Yakir Aharonov 和 Daniel Rohrlich。*9.3* 量子串接，第127–130页。WILEY-VCH，2005年。[45]Jurgen Tolksdorf 和 Rainer Verch。经典（非量子）统计系统通常满足D-CTC条件。《物理学基础》，51(5)，2021年9月。URL：https://doi.org/10.1007%2Fs10701-021-00496-z，doi:10.1007/s10701-021-00496-z。[46] Lucas Dunlap。D-CTC的形而上学：论Deutsch关于时间旅行悖论的量子解法所依据的假设，2015年。URL：https://arxiv.org/abs/1510.02742，doi:10.48550/ARXIV.1510.02742。