arXiv:2303.07645v1 [cs.CG] 14 Mar 2023

在圆盘图中寻找最大团

JaredEspenant ！

D计算机科学系，萨斯喀彻温大学，萨斯卡通，萨斯喀彻温省，加拿大

J. MarkKeil ！
计算机科学系，萨斯喀彻温大学，萨斯卡通，萨斯喀彻温省，加拿大

DebajyotiMondal[1] ！

萨斯喀彻温省萨斯卡通市萨斯喀彻温大学计算机科学系，加拿大 ada

摘要

圆盘图是欧几里得平面中圆盘的交图，其中图的顶点对应于这些圆盘，且当且仅当一对顶点对应的圆盘相交时，这两个顶点才相邻。计算圆盘图中最大团的时间复杂度问题长期以来一直是未决问题，并在文献中得到了广泛研究。即使所有圆盘的半径都处于区间 $[1,(1+\varepsilon)]$, where$\varepsilon > 0$ 内，该问题仍未解决。如果所有圆盘都是单位圆盘，则存在一个 $O(n^3 \log n)$ 时间算法来计算最大团；十多年来，这是已知的最佳运行时间。尽管圆盘图中最大团的计算问题仍未解决，但已知对于许多其他凸物体的交图，该问题是 APX-困难的，例如椭圆、三角形以及单位圆盘与轴平行矩形的组合的交图。本文得到了以下结果。

- 我们给出一种算法，可在 $O(n^{2.5} \log n)$ 时间内求出单位圆盘图中的最大团，改进了此前已知的最佳运行时间 $O(n^3 \log n)$ [Eppstein '09]。 - 我们将广泛使用的"余 2-细分方法"加以扩展，证明在单位圆盘与轴平行矩形的组合中，求最大团是 NP 困难的，且无法在 $4448/4449 \approx 0.9997$ 以内近似。此前人们认为，在这种情况下使用"余 2-细分方法"不太可能 [Bonnet 等人 '20]。我们的结果改进了此前已知的不可近似因子 $7633010347/7633010348 \approx 0.9999$。 - 我们证明，当圆盘半径属于 $[1,(1+\varepsilon)]$ 时，可利用圆盘排列的参数"最小透镜宽度"取得进展。例如，如果最小透镜宽度至少为 0.265 且 $\varepsilon \leq 0.0001$, 即使排列中仍允许存在非 Helly 三元组，也可以在多项式时间内求出最大团。

2012 年 ACM 学科分类 计算理论 → 计算几何

关键词与短语 最大团、圆盘图、时间复杂度、APX-困难性

数字对象标识符 10.4230/LIPIcs...32

资助 本研究部分由加拿大自然科学与工程研究委员会（NSERC）资助。

1 引言

一组几何对象的交图是这样一种图：其中每个对象 S对应一个顶点 G，且当且仅当两个顶点 G 对应的对象相交时，这两个顶点相邻。若一组顶点 $C \subseteq V$ 两两相邻，则称其为团。本文关注寻找最大团的问题，即寻找规模最大的两两相邻顶点集。我们主要研究圆盘图，即 $\mathbb{R}^2$ 中圆盘的交图（图1）。圆盘图常用于对自组织无线网络 [21]进行建模。

[1] 通讯作者

© Jared Espenant、J. Mark Keil 和 Debajyoti Mondal；依据知识共享署名 4.0 国际许可协议授权。初步结果发表于第 39 届计算几何国际研讨会（SoCG 2023）。莱布尼茨国际信息学论文集 Schloss Dagstuhl – 莱布尼茨信息学中心，Dagstuhl 出版社，德国

LIPICS

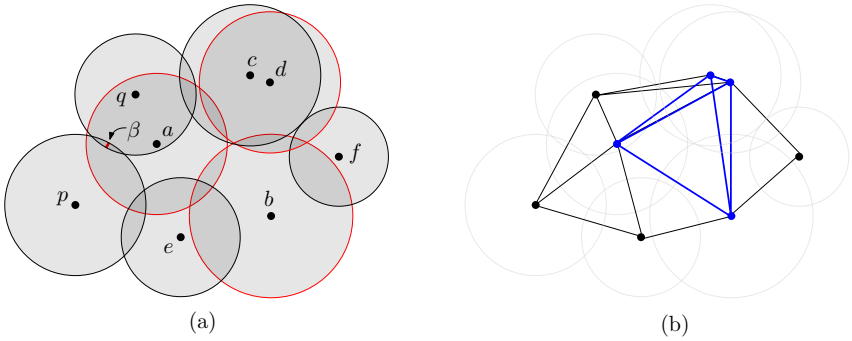

图1 (a) 圆盘的一个排列 $\mathcal{A}$。所有透镜中的最小宽度 β 由以 p 和 q为中心的圆盘决定。图中以红色标出了一个非 Helly 三元组。(b) 与 $\mathcal{A}$ 对应的圆盘图，其中最大团以蓝色标出。

在圆盘图中寻找最大团的时间复杂度问题，二十多年来一直悬而未决 [3, 4, 16]。即使在严格受限的情形下，该问题仍未解决，例如圆盘半径只有两种取值 [9] ，或圆盘半径属于区间 $[1, 1+\varepsilon]$ 且 $\varepsilon > 0$ [5]为固定值时。不过，对于任意圆盘图，已有随机化 EPTAS、确定性 PTAS 和亚指数时间算法可用于求最大团 [5, 6]。对于单位圆盘图，即所有圆盘半径相同的情形，Clark 等人 [13]证明，可以在 $O(n^{4.5})$时间内找到最大团。他们的算法通过遍历所有两两相交圆盘构成的透镜来搜索最大团。随后，Eppstein [14]证明，通过按照精心设计的透镜次序进行搜索，并使用大小为 [2] 的数据结构在搜索过程中维护最大团，可以将该算法实现为 $O(n^3 \log n)$时间。若圆盘中心位于狭窄的水平条带内 [8]，则存在更快的算法。在许多其他交图类中也存在多项式时间算法，例如圆图 [28], 、梯形图 [15],、圆梯形图 [15],、轴平行矩形的交图 [22],等。

尽管圆盘图中的最大团问题尚未解决，但文献中已针对其他几何对象的交图给出了许多 APX-困难性结果。证明某个交图类 $\mathcal{I}$ 中计算最大团的 NP 困难性，常用的方法是采用余 $2k$细分方法，具体如下。对图 G 进行 k 次 $2k$细分（其中 k 是正整数），是指将 G的每条边 (u, v) 替换为一条包含 $2k$ 个细分顶点的路径 $(u, d_1, \ldots, d_{2k}, v)$。余-$2k$细分方法选取一个图类，该类中寻找最大独立集是 NP 困难的，并证明其 $2k$次细分所得图的补图在类 $\mathcal{I}$中具有交表示。由于计算最大独立集的 NP 困难性在偶数细分 [12] 下仍然成立，且图中的最大独立集对应于补图中的最大团，因此这就证明了在类 $\mathcal{I}$中计算最大团是 NP 困难的。使用余-$2k$细分方法已证明最大团问题为 APX-困难的一些交图类包括椭圆的交图 [3], 、三角形的交图 [3], 、弦图 [26], 、有根弦图 [24],等。Cabello [10] 使用余-$2k$细分方法证明了射线交图中计算最大团的 NP 困难性，从而解决了 Kratochvíl 和 Nešetřil [25]提出的一个已有 21 年历史的公开问题。据我们所知，尚无针对这一图类的近似困难性结果。

由于有充分证据表明，余 $2k$ 细分方法可能不足以证明在圆盘图中计算最大团的 NP 困难性， [6], Bonnet 等人

等人 [7] 尝试探索其他方法。尽管他们未能证明圆盘图问题是 NP 困难的，但他们证明，除非 P=NP，否则在多项式时间内，无法以小于 7633010347/7633010348 的近似比计算同时包含单位圆盘和轴平行矩形的交图中的最大团。这一结果很有意思，因为当所有对象均为单位圆盘 [13] 或轴平行矩形 [22]时，最大团问题可以在多项式时间内求解。为得到这一结果，Bonnet 等人 [7] 提出了一个名为“最大区间排列避让问题”的新问题，证明该问题是 APX-困难的，并将其归约到在单位圆盘与轴平行矩形的组合中计算最大团的问题。此外，他们指出，单位圆盘与轴平行矩形的交图“属于一类似乎无法使用余 2 细分方法处理的图”。

我们的贡献

本文在单位圆盘图、圆盘半径位于区间 $[1, 1+\varepsilon]$ 内的圆盘图，以及单位圆盘与轴平行矩形的交图的最大团问题上取得了重大进展。

单位圆盘图： 我们提出了一种算法，可在 $O(n^{2.5}\log n)$ 时间内计算单位圆盘图中的最大团，改进了此前已知的最佳运行时间 $O(n^3 \log n)$ [14]。我们的算法基于一种分治方法。与先前在所有透镜中搜索团的算法不同，该方法展示了如何高效地合并子问题的解，从而降低时间复杂度。此类技术此前已用于加速其他计算几何问题的求解，例如在点集中寻找最近点对 [27], ；但将其应用于单位圆盘图情形却颇具挑战。

单位圆盘与轴平行矩形的交图：我们将余 2-细分方法加以扩展，证明了：对于同时包含单位圆盘和轴平行矩形的交图，计算最大团是 $(4448/4449 \approx 0.9997)$-不可近似的，从而改进了此前已知的不可近似因子$7633010347/7633010348 \approx 0.9999$ [7]。值得注意的是，Bonnet 等人 [7]此前认为，在这种情形下不太可能使用余 2-细分方法。我们 NP 困难性归约的核心思路是证明，每个哈密顿三次图都存在一种性质良好的边定向和顶点标记；也就是说，可以对其顶点进行标记并对边进行定向，使得每个顶点都有两条出边或两条入边，且这些对应邻居的标记连续。尽管这种定向和标记本身也值得关注，但它们使我们能够用单位圆盘与轴平行矩形的组合来表示哈密顿三次图的二次细分的补图。

(ε, β)-圆盘图：为了推进圆盘半径处于区间 $[1, 1+\varepsilon]$ 时的情况，我们引入 (ε, β)-圆盘图。(ε, β)-圆盘图是指满足以下条件的圆盘图，其中 ε 和 β是正常数：圆盘半径处于区间 $[1, 1+\varepsilon]$，且每个透镜的宽度至少为 β。参数 β 可以理解为圆盘排列中所有透镜的最小宽度，其中透镜 是两个圆盘的凸交集区域（图1(a)）。我们证明，参数 β，即圆盘排列的最小透镜宽度，可用于推进圆盘半径处于 $[1,(1+\varepsilon)]$ 时的情况。例如，如果最小透镜宽度至少为 0.265，则可以在多项式时间内求出 $\varepsilon \leq 0.0001$ 的最大团。

圆盘排列中存在非 *Helly* 三元组，即三个两两相交但没有共同交点的圆盘（图1(a)），通常会使寻找团的问题变得棘手（见第 5.1 节）。由于 β 是每个

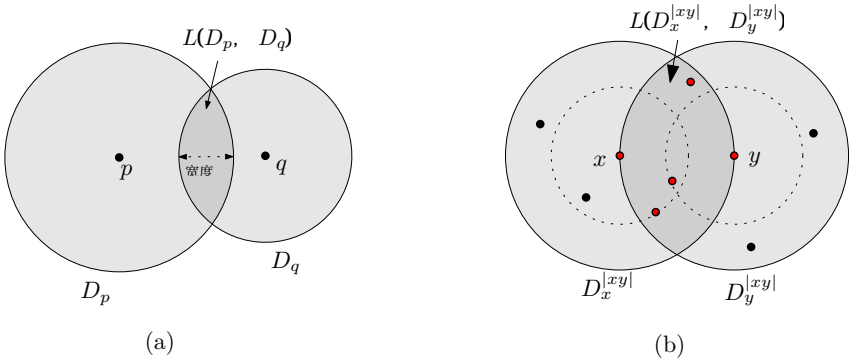

图 2 (a) 透镜示意图。(b) 最大团的计算，其中圆盘中心以点表示。以 x 和 y 为中心的单位圆盘以虚线圆表示。 $L(D_x^{|xy|},\ D_y^{|xy|})$ 内的中心以红色表示。

透镜宽度的下界，自然会产生一个问题：我们对 $\beta \geq 0.265$ 的选择是否已经排除了非 Helly 三元组的存在。值得注意的是，我们对 β 的选择仍允许非 Helly 三元组存在，因此该结果并非平凡。我们证明，可以利用 β 的下界，为每个非 Helly 三元组找到一个包含该三元组的最大团。这将先前在单位圆盘图中寻找最大团的方法——搜索所有两两相交的圆盘 [13] ——扩展到了更一般的情形，即圆盘半径属于 $[1, 1.0001]$。我们认为，尽管 β 的下界很大、ε 上的收益很小，但从探索如何超越单位圆盘的角度来看，我们提出的方法仍然很有意义。

2 预备知识

用 D_q^r 表示半径为 r 、中心为 q的圆盘。为使表述简洁，有时我们省略半径，直接用 D_q 表示中心为 q的圆盘。设 D_p和 D_q 是一对圆盘。用 $L(D_p,\ D_q)$ 表示这两个圆盘的透镜（即交集区域）（图 2(a)）。对于线段 ab，用 $|ab|$ 表示该线段的长度，或点 a 和 b之间的欧几里得距离。透镜 $L(D_p,\ D_q)$ 的宽度 是由 pq 与 $L(D_p,\ D_q)$ 的交集所确定的线段的长度。

设 G 是一个图。 G 的补图 $\overline{G}$ 是一个顶点集相同的图，其中当且仅当一条边未出现在 G中时， G 才包含这条边。若图 G中的顶点集 S 中任意两个顶点在 G中都不相邻，则称该顶点集为独立集 。最大独立集 $\alpha(G)$是基数最大的独立集。若 G 的顶点可以划分为两个独立集，则称 G 为二分图 。若 G 的补图是二分图，则称 G 为余二分图 。若 G 中的每个顶点的度均为三，则称 G 为三次 。若 G 包含一个恰好经过其每个顶点一次的环，则称 G 为哈密顿 。

3 单位圆盘图（UDG）

在本节中，我们将给出一种 $O(n^{2.5}\log n)$ 时间算法，用于计算单位圆盘图中的最大团，其中图的几何表示作为输入给出。

Clark 等人 [13] 提出了一种 $O(n^{4.5})$ 时间算法，用于计算单位圆盘图中的最大团。该算法的思路如下：对于图中的每条边 $(x,\ y)$，考虑两个圆盘 D_x 和 D_y ，使它们的边界分别经过 y 和 x。令 S 为

以 $L(D_x^{|xy|}, D_y^{|xy|})$ 为中心的单位圆盘集合。Clark 等人证明，由对应于 S 的顶点所诱导的 G 子图是一个余二分图 $G(S)$。因此，可以通过求二分图$G(S)$中的最大独立集，在 $G(S)$ 中找到最大团。如果 (x, y) 是 G中最大团 M 的最长边，那么 S 必定包含 M 中所有圆盘的中心，而 $G(S)$将包含 G中的最大团。因此，可以对所有边尝试上述策略，从而在 G中找到最大团。由于 G 包含$O(n^2)$条边，并且利用最大匹配可以在 $O(n^{2.5})$ 时间内求出二分图中的最大独立集 [20], ，运行时间因此为 $O(n^{4.5})$。

Breu [8] 指出，Clark 等人 [13] 提出的求最大团方法，利用 Aggarwal 等人 [2]的一个结果，可以在 $O(n^{3.5} \log n)$ 时间内实现。具体而言，Aggarwal 等人 [2] 展示了如何利用 [19, 23], 的数据结构，在 $G(S)$ 中于 $O(n^{1.5} \log n)$ 时间内求出最大独立集，因此，对于 $O(n^2)$ 个透镜，运行时间变为 $O(n^{3.5} \log n)$。

Eppstein [14] 指出，在搜索透镜时，不必从头计算最大独立集，而是可以利用几何性质高效地更新并维护最大独立集，方法如下。对于一个单位圆盘中心 p，设 q 是平面上的一点，满足 $|pq| = 2$。考虑两个圆盘 D_p 和 D_q ，其边界分别经过 q 和 p。现在可以绕 p 旋转透镜 $L(D_p^{|pq|}, D_q^{|pq|})$，并在每次有一个点（即单位圆盘的中心）进入或离开透镜时，更新与 $L(D_p^{|pq|}, D_q^{|pq|})$ 对应的图中的最大独立集。通过交错路径搜索，可以在 $O(n\log n)$ 时间内完成一次更新 [2]。由于对 $L(D_p^{|pq|}, D_q^{|pq|})$ 的改变次数至多为 $O(n)$，因此 p所耗费的时间为 $O(n^2 \log n)$。因此，总运行时间为 $O(n^3 \log n)$。

3.1 我们算法的思路

设 G 是一个含有 n 个顶点的圆盘图，其中每个圆盘的半径均为 r。设 P 为与 G 的顶点对应的圆盘中心集合。为求最大团，我们采用如下分治方法。

我们旋转平面，使任意两点都不在同一条垂直线或水平线上。可以在 $O(n^2)$ 时间内轻松完成这样的旋转。我们按照点的横坐标对 P 中的点排序，并找到一条经过中位数横坐标的垂直直线 V，使得 P 中位于 V 任一半平面内的点至多有 $\lceil n/2 \rceil$ 个。分别设 P_l 和 P_r 为位于 V 左侧闭半平面和右侧闭半平面内的点。我们将递归地在 P_l 和 P_r 中求最大团。

设 M 为 G 中的一个最大团。如果与 M 对应的圆盘中心集合是 P_l 或 P_r 的子集，那么这样的团必定会作为这两个子问题之一的解返回。否则， P_l 和 P_r 中都包含 M 中的一些点。要处理这种情况，只需在两条垂直直线 V_l 和 V_r 之间的垂直带中求最大团，其中 V_l 和 V_r 分别位于 V 左侧和右侧半平面内，且与其相距 $2r$ 个单位。设 $Q \subseteq P$ 为垂直带内的点集。那么， G 的最大团就是在与集合 P_l、 P_r 和 Q 对应的圆盘中找到的最大团。

令 $T(n)$ 表示在 G 中计算最大团所需的时间。令 $F(n)$ 表示在垂直带中计算最大团所需的时间。则 $T(n)$ 定义如下。

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + F(n). \tag{1}$$

现在，我们按照 Q中各点的纵坐标进行排序，并找出一条经过纵坐标中位数的水平线 H ，使得 Q 的每个$\lceil |Q|/2 \rceil$ 半平面内至多包含这些点中的一半

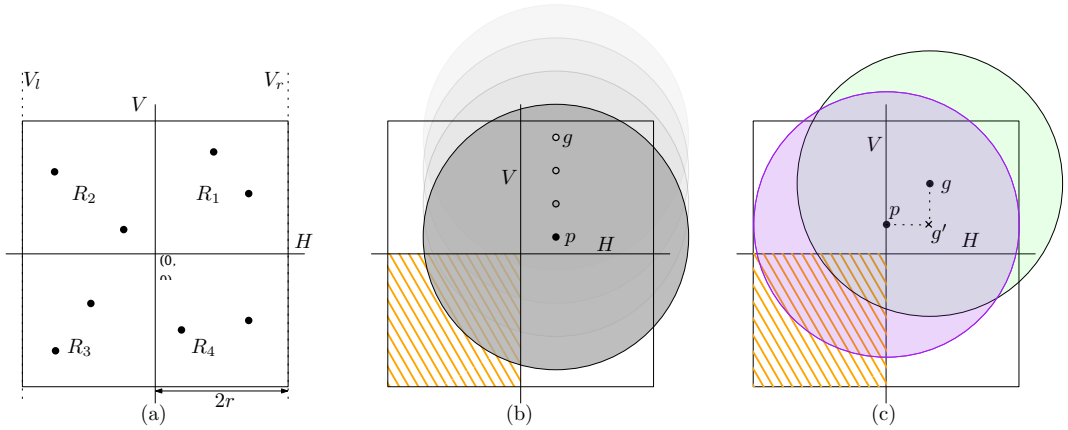

图3 (a) 正方形 S，其中圆盘中心以黑点表示。(b)–(c) 注2的示意图。

。令 Q_t 和 Q_b 分别为 H的闭上半平面和闭下半平面内的点。现在，我们递归地在 Q_t 和 Q_b 中寻找最大团。如果与 M 对应的圆盘中心集合是 Q_t 或 Q_b 的子集，那么这样的团必定会作为这两个子问题之一的解返回。否则， Q_t 和Q_b 各自都包含 M中的一些点。此时，只需在正方形 S 中寻找最大团；该正方形的边长为 $4r$，中心位于 V和 H 的交点处（图3(a)）。令B（n）表示在 S中计算最大团所需的时间。那么， F（n）定义如下。

$$F(n) = 2F\left(\frac{n}{2}\right) + B(n). \tag{2}$$

接下来，我们将证明，可以在 $O(n^{2.5}\log n)$ 时间内计算出 S中的最大团。因此，

B n $\in O$ n 2 F n $\in$ ( ) (O $n^{2.5}$ n 1 O $n^{2.5}$ n $n^{2.5}$ log)；根据方程和主定理，( ) (log)。因此，由方程确定的时间复杂度为 (log)。注意，在边长为 $4r$ 的正方形 S 中计算最大团，似乎是我们算法的瓶颈。

3.2 在正方形 S中计算最大团

设 M 是 G 中的最大团， C 是 M中圆盘的中心。假设$C \not\subseteq P_l$、 $C \not\subseteq P_r$、 $C \not\subseteq Q_t$ 和 $C \not\subseteq Q_b$，即 C 是 S中点的子集。现在我们说明如何找到 M。设 o 是 S的中心，即 H 与 V 的交点。不失一般性，假设 o 位于 (0，0)。令 R_i 为由第 $1 \le i \le 4$ 象限与 S 的交集所确定的区域（图3(a)），其中 i。下面给出两条注记。注1直接由我们的假设 $C \not\subseteq P_l$、 $C \not\subseteq P_r$、 $C \not\subseteq Q_t$ 和 $C \not\subseteq Q_b$得出。

▶ 注1. C 必须满足以下两个条件中的至少一个。(a) R_1 和 R_3 各包含 C中的一个点。(b) R_2 和 R_4 各包含 C中的一个点。

▶ 注2. 设 p 和 g 是 R_1 内的两个点，其中 g 的横坐标和纵坐标均不小于 p的相应坐标。设 D_p^{2r}和 D_g^{2r}是两个半径相同的圆盘 $2r$，其中心分别为 p和 g。则$(R_3 \cap D_g^{2r}) \subseteq (R_3 \cap D_p^{2r})$。

证明。 首先考虑 g 和 p 位于同一条垂直线上的情形（图3(b)）。注意，区间 $(H \cap D_g^{2r})$ 随着中心 g 垂直向下移动而增大，并在 g 碰到 H时达到最大值。因此，$(H \cap D_g^{2r}) \subseteq (H \cap D_p^{2r})$。由于 g 是

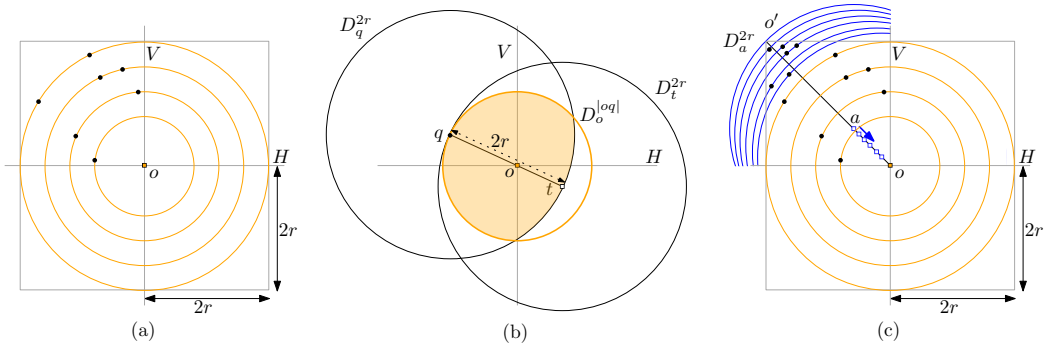

图4 (a) 情况1中 R_2 点排序的示意图。(b) D_q^{2r}和 D_t^{2r}的示意图。(c) 情况2中的点排序。

垂直位于 p 上方，且二者半径相同，$(R_3 \cap D_g^{2r}) \subseteq (R_3 \cap D_p^{2r})$。当 g 和 p 位于同一条水平线上时，论证过程是对称的。

现在考虑这样的情况： g 的 x 坐标和 y 坐标都大于 p 的坐标（图3(c)）。我们可以将 D_g^{2r}垂直向下移动，直到到达一点 g'，使其 y 坐标与 p的 y 坐标相同。因此，$(R_3 \cap D_g^{2r}) \subseteq (R_3 \cap D_{g'}^{2r})$。最后，我们将 $D_{g'}^{2r}$朝 p移动。因此得到$(R_3 \cap D_{g'}^{2r}) \subseteq (R_3 \cap D_p^{2r})$。◀

现在我们可以描述该算法了。该算法根据 C 中的每个圆盘中心是否都位于距 o $2r$ 以内，分两种情况进行处理。它分别在$O(n^{2.5} \log n)$时间内处理每种情况，然后返回整个过程中找到的最大团。

寻找最大团的总体思路如下。对于第一种情况，我们假设 C 中的每个圆盘中心到 o的距离都不超过 $2r$ 。算法猜测 C 中距离 o 最远的圆盘中心 q，然后通过定义一个透镜来找到最大团中的其他圆盘，该透镜包含 C中的所有圆盘中心。对于第二种情况，我们假设 C 中至少有一个圆盘中心到 o的距离大于 $2r$ 。算法猜测某种特定点排序中的第一个点 $p \in C$，然后通过定义一个透镜来找到最大团中的其他圆盘，该透镜包含 C中的所有圆盘中心。下面我们将详细介绍。

情况1（ C 中的每个圆盘中心到 o的距离都不超过 $2r$ ）

设 q 是 C 中距离 o最远的点。不失一般性，假设 q 位于 R_2中。现在，我们按照 R_2 中距 o 不超过 $2r$ 的点到 o 的距离递减排序（距离相同的点可任意排列）。图4(a)用橙色同心圆示意了这一排序。设 σ 为所得的点排序。我们依次将 σ 中的每个点视为 q，然后按如下方式寻找最大团。

设 $D_o^{|oq|}$是一个以 $o = (0,0)$ 为中心的圆盘，其边界经过 q（图4(b)）。由于 q 是 C 上距离 o 最远的点，因此 C 上的每个点都包含在 $D_o^{|oq|}$ 中。设 t 是 R_4 上的一个点，它位于经过 o 和 q 的直线上，且与 q的距离为 $2r$ 。

现在证明 C 中的每个点都属于 $L(D_q^{2r}, D_t^{2r})$。反设存在一个点 $e \in C$ 不属于 $L(D_q^{2r}, D_t^{2r})$。若 e 属于 $S \setminus D_q^{2r}$，则 D_e无法与 D_q相交。因此， e 必定位于区域 $D_o^{|oq|} \cap (D_q^{2r} \setminus D_t^{2r})$中。注意， q, o和 t 位于同一直线上。由于 $D_o^{|oq|}$和 D_t^{2r}的边界都经过 q 和 $|qt| \geq |qo|$，可得 $D_o^{|oq|} \subseteq D_t^{2r}$，因此点 e 不可能存在。

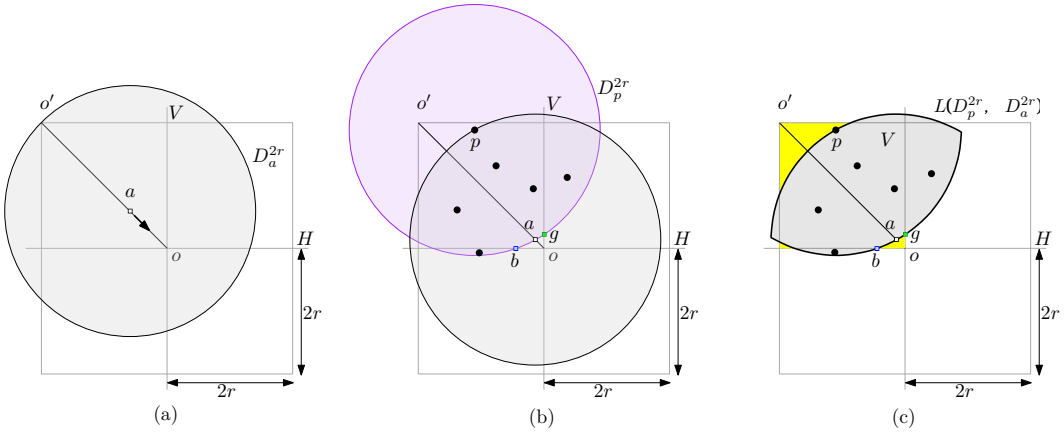

图5 (a)–(b) 展示对 D_a^{2r} 进行扫描。(c) 展示引理3的情形 A。

由圆心位于 $L(D_q^{2r}, D_t^{2r})$中的圆盘所诱导的交图是一个余二分图 [13],，因此可以在 $O(n^{1.5}\log n)$ 时间 [2]内求出该图的最大团。对 σ中 q的所有取值进行计算后，运行时间为 $O(n^{2.5}\log n)$。

情况2（ C 中存在一个圆盘中心，它到 o的距离大于 $2r$ ）

不失一般性，假设 R_2 包含一个属于 C 的圆盘中心，且该中心到 o的距离大于 $2r$ 。现在，我们考虑 R_2 中到 o 的距离大于 $2r$ 的点，并按照下文所述通过扫描一个圆盘对它们排序。令 o' 为 R_2的左上角。令 D_a^{2r}为半径为 $2r$ 的圆盘，使其边界经过o' ，且其中心 a 位于直线 oo' 上（图5(a)）。现在，我们沿直线 $o'o$移动 D_a^{2r}，使中心 a 朝 o移动。随着 a 朝 o 移动，我们按照 D_a^{2r}在其边界处碰到这些点的先后顺序对点进行排序（若顺序相同则任意处理）。图4(c)用蓝色圆弧展示了这一顺序。令 σ' 为所得的点排序。

令 p 为 C 在 R_2 中的第一个点，该点被 D_a^{2r}在其边界处触及。于是， D_p^{2r}的边界经过 a （图5(b)）。令 b 为 D_p^{2r}与 H的交点中离 o较近的一个。令 g 为 D_p^{2r}与 V 的交点中离 o较近的一个。

在下面的引理（引理3）中，我们证明 C 的每个点都属于透镜 L（D_p^{2r},D_a^{2r}）。由于相应的交图是一个余二分图 [13],，因此可以在 $O(n^{1.5}\log n)$时间内计算出该图的最大团 [2]。对于p在 σ'中的所有取值，运行时间变为 $O(n^{2.5}\log n)$。

▶**引理3**。 令 p 为 C 在 R_2 中的第一个点，该点被 D_a^{2r}在其边界处触及。于是， C 的每个点都属于透镜 $L(D_p^{2r}, D_a^{2r})$。

证明。 反设存在一个点 $e \in C$ 不属于$L(D_p^{2r}, D_a^{2r})$。现在我们考虑以下三种子情形，并在每种情形下证明这样的点 e 都不可能存在。

情形 A ($e \in R_2$)： 图 5(c)用黄色标出了 e 可能的位置。如果$e \in (D_a^{2r} \setminus D_p^{2r})$，那么 e 与 p不相交。如果 $e \in (D_p^{2r} \setminus D_a^{2r})$，那么 $e \in C$ 必须是 R_2 中被 D_a^{2r}击中的第一个点（而不是 p），这会导致矛盾。

情形 B ($e \in R_4$)： 由于 D_p^r 与 D_e^r 相交， e 必须位于 D_p^{2r}内部。注意， $|po| > 2r$。由于 p 属于 C，因此有 $C \subseteq D_p^{2r}$，进而 R_4 不可能包含 C中的任何点。

情形 C（$e \in R_1$ 或 $e \in R_3$）： 不失一般性，假设 $e \in R_3$。当 $e \in R_1$ 时，论证是对称的。我们在情形 B 中已经说明， R_4 不能包含 {

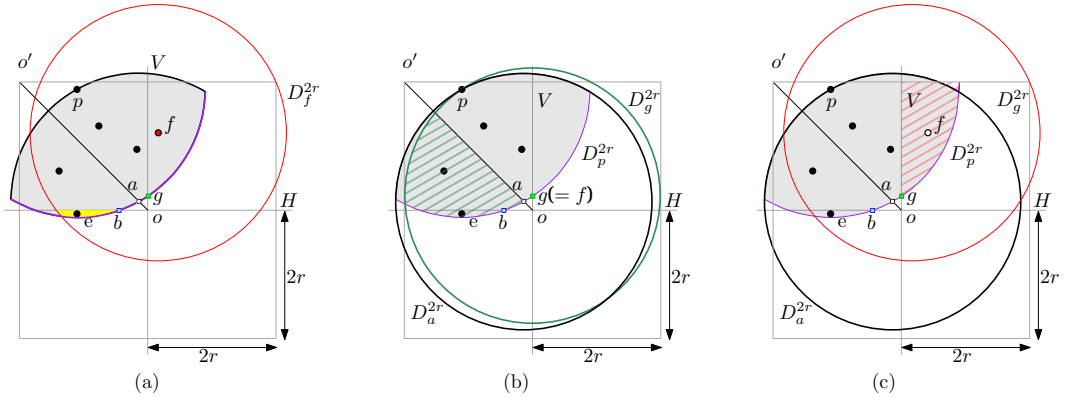

图6 引理3中情形 C 的示意图。(a) D_f^{2r}和 D_p^{2r}的边界分别以红色和紫色标出。(b) f 与 g重合时的情形。(c) $f \neq g$时的情形。

C中的任何点。因此，根据注1，R_1 和 R_3 各自都包含 C中的一个点。设 $f \in C$ 是 R_1中的一个点。那么 D_e^r 必定与 D_f^r相交。换言之，e 必定属于 D_f^{2r}（图6(a)）。现在只需证明，区域 $R_3 \cap L$（$D_f^{2r} \cap D_p^{2r}$）是 L（D_p^{2r}，D_a^{2r}）的子集；该区域是 e（以黄色显示）可能所在的位置。

首先考虑 f 与 g重合的情况。由于 g 位于 D_p^{2r}的边界上，D_g^{2r}的边界经过 p。注意，若从 g 出发沿 D_p^{2r}的边界顺时针行走，我们会先遇到 g，然后遇到 a。继续行走，则必定先遇到 D_g^{2r}的边界，再遇到 D_a^{2r}的边界。因此，$L(D_p^{2r}, D_g^{2r})$中位于直线 oo' 左半平面内的区域（如图6(b)中斜线所示）是 $L(D_p^{2r}, D_a^{2r})$的子集。因此，$R_3 \cap L(D_p^{2r}, D_g^{2r})$是 $L(D_p^{2r}, D_a^{2r})$的子集。

现在考虑 $f \neq g$ 和 $f \in (R_1 \cap D_p^{2r})$ 的情形（图6(c)）。根据注2，可得 $(R_3 \cap D_f^{2r}) \subseteq (R_3 \cap D_g^{2r})$。结合 $R_3 \cap L(D_p^{2r}, D_g^{2r})$ 是 $L(D_p^{2r}, D_a^{2r})$ 的子集这一论证，可以看出 $R_3 \cap L(D_p^{2r}, D_f^{2r})$ 是 $L(D_p^{2r}, D_a^{2r})$ 的子集。◀

由于可以在 $O(n^{2.5} \log n)$ 时间内计算出 S中的最大团，因此第 3.1 节中的策略可将运行时间降至 $O(n^{2.5} \log n)$。

▶ **定理 4。** 给定欧几里得平面中的 n 个单位圆盘，可以在 $O(n^{2.5} \log n)$ 时间内计算出相应圆盘图中的最大团。

4 单位圆盘与轴平行矩形的组合

本节将证明，对于单位圆盘与轴平行矩形的交图，其最大团问题在近似因子为 $\frac{4448}{4449} \approx 0.9997$ 的范围内是 NP 困难的。我们首先给出计算最大独立集的不可近似性结果，然后利用这一结果证明计算最大团的 APX-困难性。

4.1 计算最大独立集的不可近似性

以下定理的证明运用了 [11] 的不可近似性结果和 [17] 的图变换技术。

▶**定理 5.** 即使输入中给出了哈密顿回路，在哈密顿三次图的二次细分中计算最大独立集的问题仍然是 *NP* 困难的，且无法在 $\frac{4448}{4449} \approx 0.9997$ 以内近似。 ◀

证明。 我们使用 Chlebík 和 Chlebíková 的一个 NP 困难间隙结果 [11]。他们证明，对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，判定一个具有 G 个 n 顶点的三次图是否存在大小至少为 $\frac{n}{2}(1 - 2\delta + \varepsilon)$ 或至多为 $\frac{n}{2}(1 - 3\delta - \varepsilon)$的独立集是 NP 困难的，其中 $\delta = 0.0103365$。

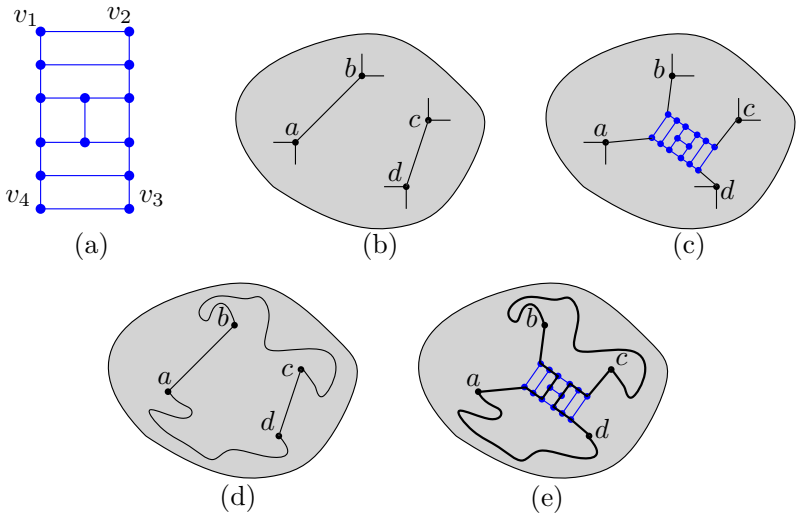

图 7 (a) 梯子图。(b)–(c) 梯子插入。(d)–(e) 在一对哈密顿边上插入梯子，以及插入梯子后得到的哈密顿回路。

现在，我们按如下方式将 G 转换为哈密顿三次图。梯子图 是这样一种图：取一个 6×2 网格图，将对应于中间行的边细分，最后用一条边连接细分顶点，如图 7(a) 所示。在 G 的一对边 $(a,\ b)$ 和 $(c,\ d)$ 上进行梯子插入，即移除这两条边，并将它们的端点分别连接到梯子图的 4 个角上，如图 7(b)–(c) 所示。Fleischner 等人 [17] 证明，可以通过至多 n 次梯子插入操作将 G 转换为哈密顿三次图 H，并且该构造可在多项式时间内得到一个哈密顿回路。我们向 H 添加额外的梯子，使其恰好包含 n 个梯子。这些额外的梯子通过在哈密顿边上插入得到。这样便能在梯子插入过程中保持哈密顿回路，如图 7(d)–(e) 所示。Fleischner 等人 [17] 证明，每次梯子插入都会使所得图的最大独立集大小恰好增加 6。因此，$\alpha(H) = \alpha(G) + 6n$。令 H' 为 H 的二次细分。已知 $\alpha(H') = \alpha(H) + m$ [12]，其中 $m = 3(n+14n)\ 2$ 是 H 中边的数量。因此，$\alpha(H') = \alpha(G) + \frac{45n}{2}$。

根据 [11]，的 NP 困难间隙结果，对于每个固定的 $\varepsilon > 0$，判定 H' 是否存在大小至少为 $\frac{n}{2}$（$46 - 2\delta + \varepsilon$）或至多为 $\frac{n}{2}$（$46 - 3\delta - \varepsilon$）的独立集是 NP 困难的。因此，我们得到一个不可近似因子 $1 - \frac{\delta}{46-3\delta} \approx 1 - \frac{1}{4449.83^{\circ}}$ ◀

设 G 是一个有 n 个顶点的哈密顿三次图，并设 H 是 G 的二次细分。在第 4.2 节中，我们将证明，给定 G 的一个哈密顿回路，可以在多项式时间内将 H 表示为单位圆盘和轴平行矩形的交图。由于 H 中的最大独立集与 H 中的最大团相对应，反之亦然，因此可得不可近似性结果定理 5。

4.2 用单位圆盘和轴平行矩形表示 H

G 中的边数为 $m = 3n/2$。我们首先证明，可以为 G 的边指定方向，并用从 1 到 $3n/2$ 的互不相同的正整数进行标记，使得每个顶点恰有两条关联边方向相同，且标记的数字连续。我们将这种标记称为成对定向标记。图8(i) 展示了一个三次图的成对定向标记，例如，v_5 有两条入边，标记为 2 和 3； v_7 有两条出边，标记为 8 和 9。我们将使用这种标记为 H 构造所需的交表示。

—

▶**引理 6.** 设 G 是一个具有 n 个顶点的哈密顿三次图。那么 G 存在一种成对定向标记。此外，给定 G 中的一个哈密顿回路 C，可以在多项式时间内计算出 G 的成对定向标记。

证明。我们首先按如下方式为 G 的边定向。设 $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ 是 G 在 C 上的顶点次序。对于每条边 (v_i, v_j)，其中 $i < j$，我们按照图8(a)所示，将该边从 v_i 定向至 v_j。我们将 C 上的边称为哈密顿边，其余边称为非哈密顿边。对于一条非哈密顿边 (v_i, v_j)，我们将哈密顿边 (v_i, v_{i+1}) 和 (v_{j-1}, v_j) 称为 (v_i, v_j) 的嵌套边。

现在我们给出一种用于边标号的增量构造。首先，找到最小的索引 k，使得 v_k 有一对尚未标记的出边。接着，我们找到一个极大边序列 S_k，由非哈密顿边 e_1、e_2、…、e_q 组成，且对于从 1 到 $q-1$的每个 i，都存在一条哈密顿边，将 e_{i+1} 的源顶点与 e_i的目标顶点连接起来。图中展示了这样一个极大边序列 e_1、e_2，其中 $e_1 =$（v_1、v_5），且 $e_2 =$（v_4、v_6），而边（v_4、v_5）是一条哈密顿边。令 ℓ 为目前用于边标号的最大编号。然后，我们用 $\ell+2$、$\ell+4$、…、$\ell+2q$标记边 e_1、e_2、…、e_q，并用 $\ell+1$、$\ell+3$、…、$\ell+$（$2q+1$）标记它们所嵌套的哈密顿边。令 V_k为出现在 S_k的边上的顶点集合。现在很容易验证， V_k 的每个顶点都有两条方向相同的边，且这两条边标记的编号连续。我们反复寻找这样的极大边序列，每次都从索引最小且有两条尚未标记出边的顶点开始。图8(a)–(g)展示了这一标号过程：第一个极大边序列（从 v_1开始）用蓝色表示，第二个极大边序列（从 v_2 开始）用红色表示，依此类推。

下面我们证明，上述过程确保对于每个顶点，都有一对方向相同且标记为连续编号的边。因此，剩余未标记的边可以按任意顺序使用可用编号进行标记（图 8(h)）。

注意，对于两个极大边序列 S_p 和 S_q，非哈密顿边根据构造互不相交。由于 G 是一个三次图，被 S_p 的边嵌套的哈密顿边也与被 S_q的边嵌套的哈密顿边互不相交。因此，用于 S_p 及其嵌套边的标号不会与用于 S_q 及其嵌套边的标号冲突。现在只需证明，对于 G中的每个顶点v，都存在一个包含 v的极大边序列。

假设出现矛盾，令 j 是最小的索引，使得 v_j 没有出现在任何极大边序列中。那么 v_j 必定有两条未标记的边 e 和 e'。现在我们考虑以下几种情况。

情况1（e，e' 是 v_j 的出边）： 如果 e，e' 是 v_j 的出边，那么在反复查找具有两条未标记出边且索引最小的顶点时，一定会找到它。

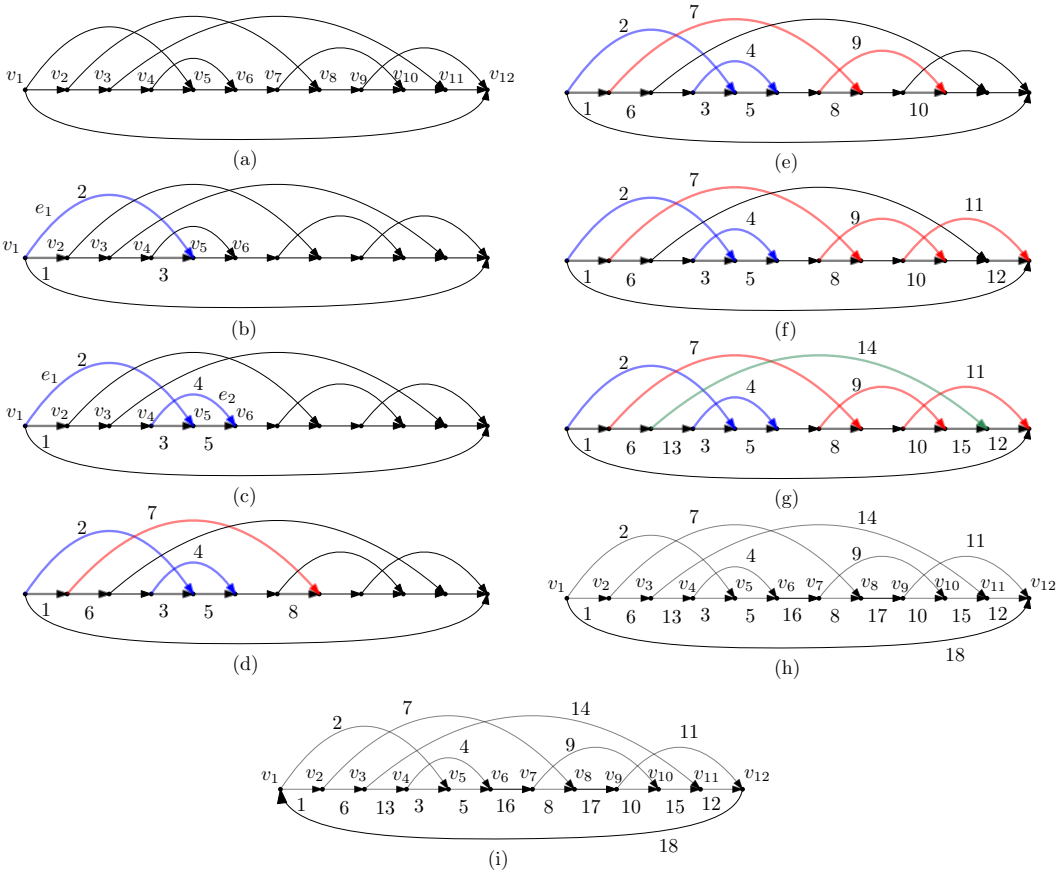

图8 哈密顿三次图的成对定向标记构造。第一条极大边序列 S_1 以蓝色显示。 S_1 由非哈密顿边 e_1, e_2构成，而集合 V_1由它们的端点组成，即$\{v_1, v_4, v_5, v_6\}$。第二条和第三条极大边序列分别以红色和绿色显示。

情况2（ e， e' 中有一条是 v_j 的入边，另一条是 v_j 的出边）： 不失一般性，假设 e 是入边， e' 是出边。令 e'' 为 v_j的第三条边。

情形2.1： 如果 e'' 是一条出向非哈密顿边，那么它必须被标记；否则，我们会得到两条未标记的出边，并可应用情况1。由于 e'' 嵌套了 e, e'中的一条边，而其中一条必须被标记，因此会导致矛盾。

情形 2.2： 如果 e'' 是一条入向非哈密顿边 $e = (v_i, v_j)$，那么我们有 $i < j$。如果 e''已标记，那么由于 e'' 嵌套了 e, e'中的一条边，我们必然已经将 e, e' 中的一条边标记。现在考虑 e'' 未标记的情况。由于极大边序列彼此不相交，嵌套边(v_i, v_{i+1})不可能属于任何极大边序列。因此，(v_i, v_{i+1})未标记。由于 v_i 有两条未标记的出边，并且由于 $i < j$，这与我们最初对 v_j 的选择矛盾。

情形 2.3： 如果 e'' 是一条入向哈密顿边，那么 e 是一条入向非哈密顿边。不失一般性，假设 $e = (v_i, v_j)$，其余论证与情形 2.2 类似。

情形 2.4： 如果 e'' 是一条出向哈密顿边，那么 e' 就是一条出向非哈密顿边。此处 e'' 必须被标记；否则，我们会得到两条未标记的出边，并且可以

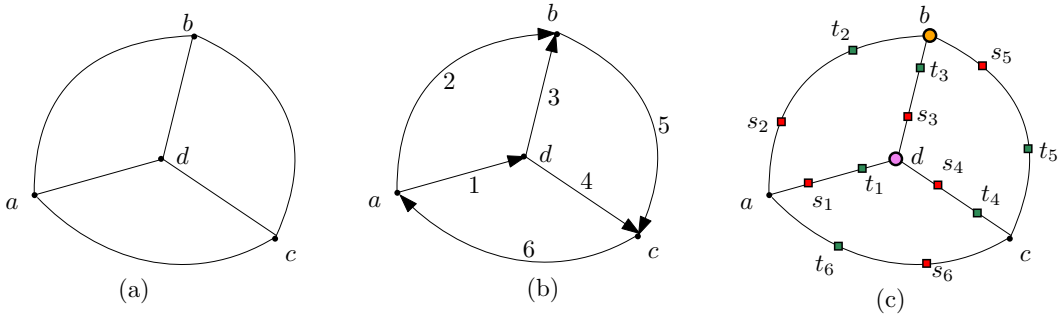

图9 (a)–(b) G及其成对定向标记。(c) H的细分顶点标记。

应用情况1。因此，为 e'' 添加标记的极大边序列必须包含 e'，所以 e' 不能是未标记的。

情况3（e，e'是 v_j的入边）： 如果 e，e'是 v_j 的入边，那么我们根据它们是否都是哈密顿边来考虑两种情况。

情形 3.1： 如果 e 和 e' 中有一条是非哈密顿边，那么不失一般性，假设 $e = (v_i, v_j)$ 是非哈密顿边。现在我们可以用与情形 2.2 中相同的论证得出矛盾。

情形 3.2： 如果 e，e' 都是哈密顿边，那么 v_j 与 v_n 重合。因此，v_j 的剩余关联边 e'' 是一条入的非哈密顿边。这里我们可以用与情形 2.2 中相同的论证得出矛盾。

注意，上述分类讨论确保每个顶点都关联着一对方向相同且标有连续编号的边。根据边的初始方向，除 v_1 和 v_n 之外的每个顶点都恰好有两条方向相同的边。为了得到所需的成对定向标记，现在只需反转 (v_1, v_n) 的方向，如图8(i)所示。◀

设 γ 是 G 的成对定向标记（图9(a)–(b)）。我们用 $\gamma(e)$ 表示边 e 的标记。设 e 是 G 中一条边，其源点为 s，目标点为 t。现在，我们为 H 的二次细分中对应于 e 的两个细分顶点标记。与 s 相邻的细分顶点标记为 $s_{\gamma(e)}$，与 t 相邻的细分顶点标记为 $t_{\gamma(e)}$。我们分别将 $s_{\gamma(e)}$ 和 $t_{\gamma(e)}$ 称为类型-s 标记和类型-t 标记。根据 γ 的性质（引理 6），H 中的每个原始顶点 v 现在都恰好与两个类型相同、编号连续的细分顶点相邻。例如，在图9(c)中，顶点 d 和 b 分别与 s_3, s_4 和 t_2, t_3 相邻。

H 的交表示现在可由 [7]的构造得出。为完整起见，我们简要介绍该构造的整体思路。考虑一组单位圆盘 C_s，它们对应于中心位于第二象限的类型-s 顶点，且与负x轴和正y轴相交，但不与正x轴或负y轴相交。此外，从 (0，0) 沿着圆盘行进至 $(-\infty$，0) 所得到的圆盘次序，与从 (0，0) 行进至 (0，∞) 时的次序相反（图10(a)）。令 $\mathcal{I}_s$ 为所有类型-s 圆盘的交所确定的凸区域。对应于类型-t 顶点的单位圆盘 C_t 对称地放置在第四象限。令 $\mathcal{I}_t$ 为所有类型-t圆盘的交所确定的凸区域。当半径足够大时，圆盘边界看起来类似一组半平面（图10(b)），并且 C_s 中的每个圆盘都与 C_t 中的所有圆盘相交，除了标签相同的那个圆盘。因此，H 中细分顶点之间的所有交点都得以实现。注意

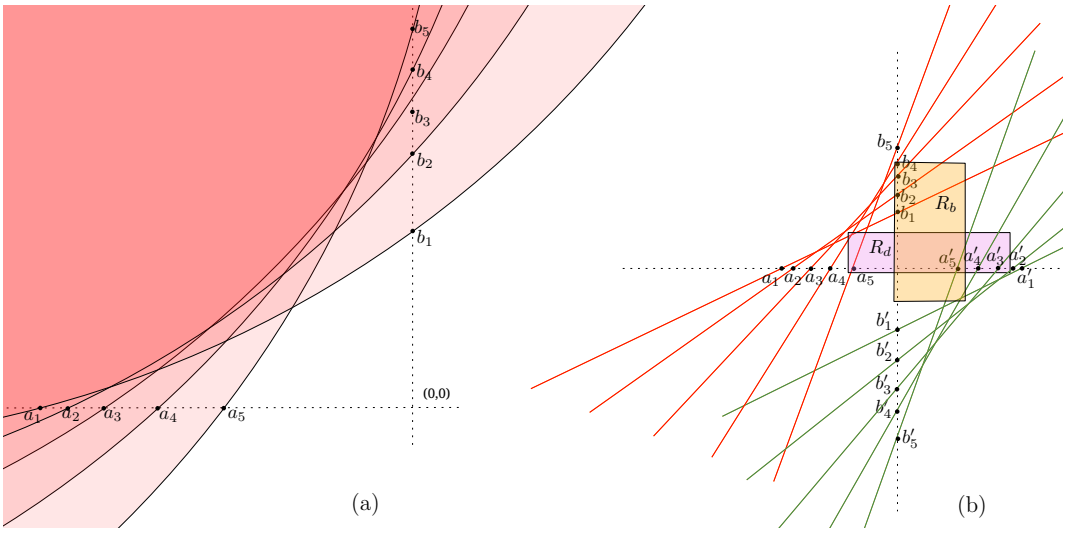

图10 (a) 与类型-s 细分顶点相对应的单位圆盘排列。(b) H的交表示示意图。为便于阅读，仅显示了部分单位圆盘，以及与 b 和 d 相对应的矩形。

H 在 H 中的原始顶点在 H 中构成一个团，且每个原始顶点都与 H中除三个细分顶点之外的所有顶点相邻。现在，我们用矩形表示 H 的原始顶点，使所有矩形都包含点 $(0, 0)$。设 b 是 H的一个原始顶点。不失一般性，假设 b 有两个类型-t 邻点和一个类型 s 邻点（图 9(c)）。根据成对定向标记的性质，类型-t 邻点的标签连续。令 t_i， t_{i+1}， s_j 为 b的邻点。现在我们创建一个矩形 R_b 来表示b。我们将 R_b 的左上角放在靠近 t_i， t_{i+1} 对应圆盘边界交点的位置，使得 R_b 不与这些圆盘相交，但与其他所有类型-t圆盘相交。我们将 R_b 的右下角放在靠近$\mathcal{I}_t$ 上由 s_j 对应圆盘确定的圆弓形的位置，使得 R_b 不与 s_j 对应的圆盘相交，但与其他所有类型-s圆盘相交。形式化归约见 [7] 。Bonnet 等人 [7] 认为采用余 2-细分方法进行此类归约不太可能成功，原因在于，如果没有成对定向标记，表示 R_b 的矩形可能需要避开三个任意圆盘。然而，如果没有精心安排圆盘的次序，这种表示方式未必能适用于所有矩形。我们的主要贡献在于证明存在一种合适的圆盘次序，使余 2-细分方法得以奏效，同时也改进了 [7]的不可近似因子。

▶**定理7**。 在单位圆盘和轴平行矩形的交图中计算最大团的问题，在因子为 $\frac{4448}{4449} \approx 0.9997$的近似范围内是 *NP* 困难的。

5 在(ε, β)-圆盘图中寻找最大团

本节中，我们给出一种多项式时间算法，用于计算一个(ε, β)-圆盘图中的最大团。根据定义，圆盘的半径属于 $[1, 1+\varepsilon]$，且每个透镜的宽度至少为 β。当 $\beta \geq 0.265$ 且 $\varepsilon \leq 0.0001$ 时，我们给出一种 $O(n^4)$-时间算法。虽然 β可以表示为 ε的函数，但为使表述简洁，我们为 β 和 ε 设定了具体取值，并常用粗略界来简化论证。因此，我们认为通过繁琐的分类讨论，可以选取稍好的参数。

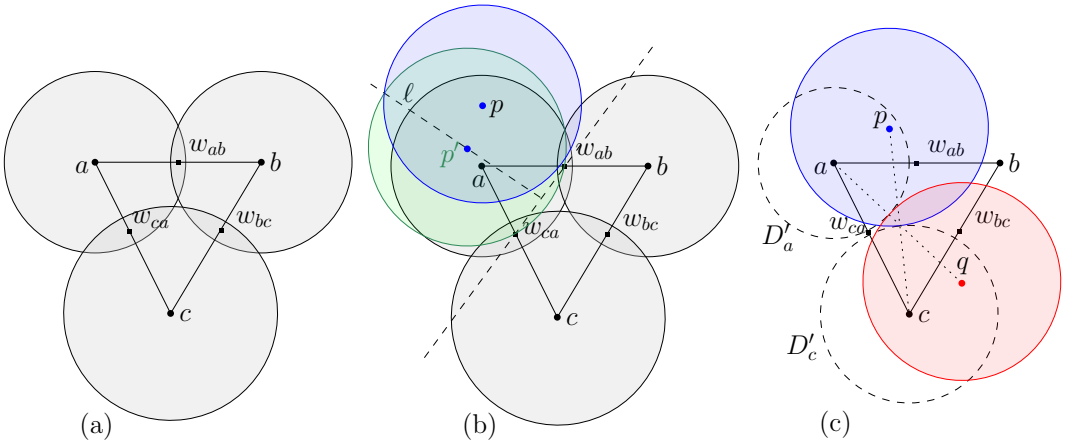

图11 (a) 一个非 Helly 三元组 $\{D_a,\ D_b,\ D_c\}$。(b) 情况1和(c)情况2的示意图。

设 G 是一个$(\varepsilon,\ \beta)$-圆盘图。设 M 是一组确定G中最大团的圆盘。下文将用到赫尔利定理 [18], , 即对于 $\mathbb{R}^d$中的一组凸集，如果其中任意 $(d+1)$ 个集合的交集都非空，那么这组集合必有非空交集。回顾一下，对于三个圆盘 $\{D_a,\ D_b,\ D_c\}$，如果 $(D_a \cap D_b \cap D_c) = \emptyset$, 那么称它们为非 *Helly* 三元组。否则，称它们为*Helly* 三元组。

考虑三个单位圆盘，其中心分别位于一个等边三角形的顶点。如果这些圆盘恰好交于一点，那么每个透镜的宽度为$(2 - 2\cos\ 30°) \approx 0.2679$，大于 β。因此，在$(\varepsilon,\ \beta)$-圆盘图中，可能存在非 Helly 三元组。现在，我们根据 M 是否包含非 Helly 三元组，考虑两种情况。

5.1 M 不包含任何非 Helly 三元组

如果 M 不包含任何非 Helly 三元组，那么根据赫尔利定理， [18], 中的圆盘有非空交集。令$\mathcal{R}$ 表示由圆盘边界的排列确定的连通区域或单元的集合。对于$\mathcal{R}$中的每个单元 r ，我们考察包含 r的圆盘数量，并找出一组两两相交的最大圆盘集合。计算 O个圆盘的排列所需时间为n^3（甚至还有更快的算法 [1]），这是显而易见的；而检查每个单元需要 O时间。因此，寻找最大团需要 O时间。

5.2 M 包含一个非 Helly 三元组

如果 M 包含一个非 Helly 三元组，那么令$\{D_a, D_b, D_c\}$ 为 M中的这样一个非 Helly 三元组（图11(a)）。令 w_{ab}、 w_{bc}、 w_{ca} 分别为透镜 $L(D_a, D_b)$ $L(D_b, D_c)$和$L(D_c, D_a)$的中点。以下两个引理给出了与该非 Helly 三元组相关的一些性质。

▶ **引理8**。 如果$\{D_a, D_b, D_c\}$是一个非 *Helly* 三元组， $\beta \geq 0.265$和 $\varepsilon \leq 0.0001$，那么透镜 $L(D_a, D_b)$ $L(D_b, D_c)$ 以及 $L(D_c, D_a)$ 的宽度小于*0.275*。此外， Δabc 的内角位于区间 $[58.024°, 60.988°]$内。

证明。 不失一般性，假设 $L(D_a, D_b)$ 的宽度至少为 0.275。于是$|ab| \leq (2 + 2\varepsilon - 0.275)$ $= (1.725 + 2\varepsilon)$，且距离 $|bc|$ 和 $|ca|$ 的上界为$(2 + 2\varepsilon - 0.265)$ $= (1.735 + 2\varepsilon)$。当等号成立时，我们可以将讨论范围限制在三角形 Δabc。任何其他构型都可以通过将圆盘彼此靠近来实现，从而增大透镜的宽度。

32:16 在圆盘图中寻找最大团

现在我们证明 Δabc 的外接半径至多为 1，这将与$\{D_a, D_b, D_c\}$是一个非 Helly 三元组相矛盾，因此透镜的宽度必须小于 0.275。 Δabc的外接圆的外接半径为 $\frac{|ab|\ |bc|\ |ca|}{4\ Area\ \Delta abc}\cdots()$，其上界为

$$\frac{(1.725+2\varepsilon)(1.735+2\varepsilon)^2}{\sqrt{(|ab|+|bc|+|ca|)(-|ab|+|bc|+|ca|)(|ab|-|bc|+|ca|)(|ab|+|bc|-|ca|)}}$$
$$\leq \frac{(1.725+2\varepsilon)(1.735+2\varepsilon)^2}{\sqrt{(5.195+6\varepsilon)(1.745+2\varepsilon)(1.725+2\varepsilon)(1.725+2\varepsilon)}} \leq 1, \text{when } \varepsilon \leq 0.0001.$$

现在考虑 $\angle abc$。这里，$\cos\angle abc = \frac{|ab|^2+|bc|^2-|ca|^2}{2|ab||bc|}$。由于 $1.725 \leq |ab|,\ |bc|,\ |ca| \leq (1.735+2\varepsilon)$，现在有 $\cos\angle abc \geq \frac{^2(1.725)\ \ ^2-1.735+2\varepsilon\ ^2()()_2}{2\ 1.735+2\varepsilon} \geq 0.485$。因此有 $\angle abc \leq 60.988°$。由此，我们可以得到关于 $\angle abc$ 的 $180°-2\cdot 60.988° \geq 58.024°$ 下界。◀

▶ **引理 9**。 若 $\{D_a, D_b, D_c\}$ 是一个非 *Helly* 三元组， $\beta \geq 0.265$，且 $\varepsilon \leq 0.0001$，那么 Δabc 和$\Delta w_{ab}w_{bc}w_{ca}$ 满足以下性质。*(a)* $1.725 \leq |ab|, |bc|, |ca| \leq (1.735+2\varepsilon)$。*(b)* 对于 $\{w_{ab}, w_{bc}, w_{ca}\}$ 中的每个点 q， q 到包含q 的两个圆盘中心的距离位于区间 $[0.8625,(0.8675+\varepsilon)]$ 内。*(c)* $\Delta w_{ab}w_{bc}w_{ca}$ 每条边的长度都位于区间 $[0.883, 0.887]$内。

证明。 （a）考虑圆盘 D_a 和 D_b。它们的半径之和位于区间$[2, 2+2\varepsilon]$内。由于它们的透镜宽度至多为 0。275 （引理8），且至少为 β，因此有$2-0.275=1.725 \leq |ab| \leq$ （$2+2\varepsilon-\beta$） $\leq$ （$1.735+2\varepsilon$）。

（b）考虑距离 $|aw_{ab}|$ 和 $|bw_{ab}|$。根据引理8， $|aw_{ab}|$ 和 $|bw_{ab}|$ 至少为$1-$ （$0.275/2$）$=0.8625$。因此， $0.8625 \leq |aw_{ab}|,\ |bw_{ab}| \leq$ （$1+\varepsilon-\beta/2$） $=$ （$0.8675+\varepsilon$）。

（c）不失一般性，假设三角形$\Delta w_{ab}w_{bc}w_{ca}$的最大边长为 $|w_{ab}w_{bc}|$。那么 $|w_{ab}w_{bc}| = \sqrt{|bw_{ab}|^2+|bw_{bc}|^2-2|bw_{ab}||bw_{bc}|\cos\angle abc} \leq \sqrt{2}$（$0.8675+\varepsilon$）$^2-2$（$0.8625^2$）$\cos 61° \leq 0.887$。类似地，最小边长至少为 $\sqrt{|bw_{ab}|^2+|bw_{be}|^2-2|bw_{ab}||bw_{be}|\cos\angle abc} \geq \sqrt{2}(0。8625)^2-2$（$0.8675+\varepsilon$）$^2\cos 58° \geq 0。883$。◀

令 O 为圆盘图表示中的圆盘，并令 O' 为 $O\setminus\{D_a, D_b, D_c\}$。我们将 O' 中包含 $\{w_{ab}, w_{bc}, w_{ca}\}$ 中恰好 k 个点的圆盘称为 0 型，其中 $0 \leq k \leq 3$。接下来我们证明，对于一对圆盘 D_p, D_q，如果它们各自都与 $\{D_a, D_b, D_c\}$ 中的所有圆盘相交，那么它们必定彼此相交。因此，我们可以在 O 中用 n 时间找到一个包含 $\{D_a, D_b, D_c\}$ 的最大团，并在 O 中用 n^4 时间找到遍历所有可能的 $O(n^3)$ 个非 Helly 三元组选择后的最大团。

情况1（至少有一个 D_p 和 D_q 是 0 型）： 我们证明这种情况是平凡的，因为不存在一个与非 Helly 三元组中的所有圆盘相交、但避开$\{w_{ab},\ w_{bc},\ w_{ca}\}$ 的 0 型圆盘。

考虑圆盘 D_p。我们首先证明，如果 p 位于 $\Delta w_{ab}w_{bc}w_{ca}$内部，那么 D_p 必须包含 $\Delta w_{ab}w_{bc}w_{ca}$的一个角。根据引理 9， $\Delta w_{ab}w_{bc}w_{ca}$ 的最大边长至多为 0.887。因此，$\Delta w_{ab}w_{bc}w_{ca}$ 的外接半径不超过 $\frac{0.887}{\sqrt{3}} \leq 1$。由此，$D_p$ 必须包含 $\Delta w_{ab}w_{bc}\overline{w_{ca}}$的一个角。

现在证明，如果 p 位于 $\Delta w_{ab}w_{bc}w_{ca}$外部，那么 D_p 无法与 D_a, D_b, D_c 形成宽度为 β 的透镜。不失一般性，假设经过 $w_{ab}w_{ca}$ 的直线的左半平面包含 p，而右半平面包含中心 b, c （图 11(b)）。

考虑一个圆盘 $D_{p'}$，其半径与 D_p 相同，且其中心 p' 位于 Δabc 外部，边界经过 w_{ab} 和 w_{ca}。以下引理给出了 $|ap'|$ 和 $\angle acp'$的上界。

▶**引理 10.** 设 $D_{p'}$ 是一个圆盘，$D_{p'}$ 的边界经过 w_{ab} 和 w_{ca}，且 p' 的中心位于 Δabc 外部。那么 $|ap'| < (0.25 + \varepsilon)$ 以及 $\angle acp' \leq 17.5°$。

证明。 为了计算 $|ap'|$ 的上界，我们将使用$|aw_{bc}|$的上界和下界，$|aw_{ab}|$以及 $\angle abc$。注意 $0.8625 \leq |aw_{bc}|$，$|aw_{ab}| \leq (0.8725 + \varepsilon)$，并且根据引理8，$\angle abc \in [58.024°, 60.988°]$。因此，$a$ 可能位于两个环带的交集区域内，其中一个环带以 w_{ab} 为中心，另一个以 w_{ca}为中心。图 12 用灰色阴影示出了该区域。

设 t 是一个满足 $|tw_{ca}| = |tw_{ab}| = 0.8625$ 的点。设 h 和 u（$= w_{ab}w_{ca}$）分别是 $\Delta tw_{ab}w_{ca}$ 的高和底边。设 h' 和 u 是 $\Delta p'w_{ab}w_{ca}$ 的底边。由于 $D_{p'}$ 的边界经过 w_{ab} 和 w_{ca}，因此有 $|tp'| = h' - h \leq \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - (|w_{ab}w_{ca}|^2/4)} - \sqrt{0.8625^2 - (|w_{ab}w_{ca}|^2/4)}$，该值随着 $|w_{ab}w_{ca}|$ 的增加而增大。因此，$|tp'| \leq 0.1835$。

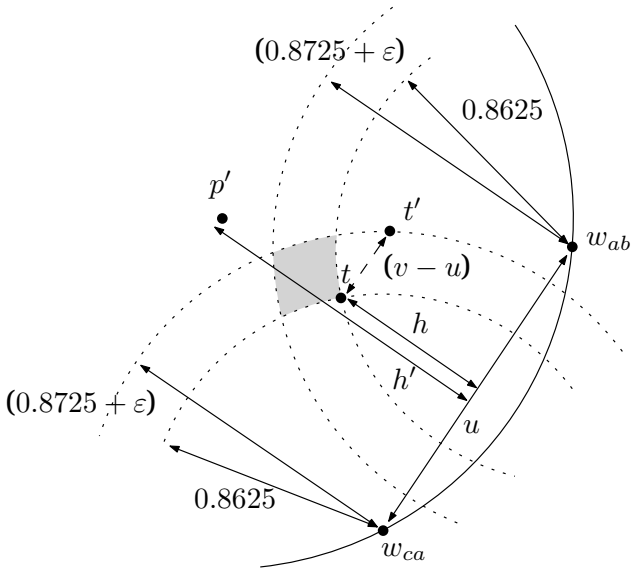

图 12 引理 10 的示意图。a 可能所在的位置以灰色阴影标出。

现在考虑另一个三角形，其高为 h、底边为 v、边长为 $|t'w_{ca}| = (0.8725+\varepsilon)$，则 $v = \sqrt{4(|t'w_{ca}|^2 - h^2)}$。底边长度之差如下：$(v-u) = \sqrt{4((0.8725+\varepsilon)^2 - (0.8625^2 - |w_{ab}w_{ca}|^2/4))} - |w_{ab}w_{ca}| \leq \sqrt{4((0.8725+\varepsilon)^2 - 0.8625^2 + 0.887^2/4)} - 0.883 < 0.0427$。根据三角不等式，$|ap'| \leq (v-u) + |p't| \leq (0.1835 + \varepsilon) + 0.0427 = (0.2261 + \varepsilon)$。

现在我们计算 $\angle acp'$ 的上界。根据引理 9，$1.725 \leq |bc| \leq (1.735 + 2\varepsilon)$。由于 $|ap'| < (0.25 + \varepsilon)$，且由于 $|cw_{ca}|$，$|bw_{ab}| \leq (0.8675 + \varepsilon)$，我们有 $1.725 - (0.25 + \varepsilon) \leq |p'b| \; |p'c| \leq 1 + \varepsilon + 0.8675 + \varepsilon$。$\angle p'cb = \frac{|p'c|^2 + |bc|^2 - |p'b|^2}{2|p'c||bc|} \geq (\quad)(\quad)$。因此，$\cos()\frac{1.475^2 + 1.725^2 - (1.8675 + 2\varepsilon)^2}{2\,(1.8675 + 2\varepsilon)\,(1.735 + 2\varepsilon)}() \geq 0.25$。由此可得 $\angle p'cb \leq 75.52°$ 且 $\angle acp' \leq (75.52° - 58.024°) \leq 17.5°$。

◀

现在我们证明，$D_{p'}$ 无法与 D_c形成宽度为 β 的透镜。由于 $|p'w_{ca}|$ 固定，距离 $|p'c|$ 会随着 $\angle p'cw_{ca}$ 增大和 $|cw_{ca}|$减小而减小。由于$\angle p'cw_{ca} < 17.5°$ 和 $|cw_{ca}| \geq 0.8625$，利用 $\Delta p'cw_{ca}$ 上的基本三角学可以观察到 $|p'c| \geq 1.78 > (2 - \beta)$。因此，$D_{p'}$ 无法与 D_c形成宽度为 β 的透镜。

由于 D_p 不包含 w_{ab} 和 w_{bc}， p 位于 $w_{ab}w_{ca}$的垂直平分线 ℓ 上方或下方。考虑将 p' 移动到 p。由于将 p' 移到 ℓ 上方或下方会减小L（$D_{p'}$， D_b）或 L（$D_{p'}$， D_c）的宽度，因此 D_p 无法同时与 D_b 和 D_c 形成宽度为 β 的透镜。情况2（D_p 和 D_q 属于类型 1）：不失一般性，假设 D_p 和D_q 分别包含 w_{ab} 和 w_{bc}（图 11(c)）。令 a_r、 c_r、 p_r、 q_r 分别为 D_a、D_c、 D_p、 D_q的半径。现在只需证明 $|pq| \le p_r + q_r$，即 D_p 和 D_q 必相交。注意，根据（ε， β）-图的性质，若二者相交，则会形成宽度至少为 β的透镜，因此我们只需证明 $|pq| \le p_r + q_r$。

将 D_a 和 D_c 的半径缩小 β 后，得到圆盘 D'_a 和 D'_c。由于非 Helly 三元组所形成的透镜宽度小于 0.275，点 w_{ab}, w_{bc}, w_{ca}位于 D'_a 和 D'_c 之外。由于每个透镜的宽度至少为 β， D_p 必须与 D'_c 相交。考虑一条经过 ac 的直线 ℓ，使 b 位于其右半平面。

首先考虑 p 和 q 位于 ℓ 的右半平面的情形。如果 p 位于经过 bc 的直线上方，而 q 位于经过 ab 的直线下方，那么 aq 和 pc 相交（图 13(a)）。因此， $|pq| \le |aq| + |pc| - |ac| \le (a_r + q_r - 0.265) + (p_r + c_r - 0.265) - (a_r + c_r - 0.275) < (p_r + q_r)$。否则， p, q 位于经过 $w_{ab}w_{bc}$ 的直线的右半平面内，且处于由 $\angle abc$ 及其对顶角确定的楔形区域中，如图 13(b) 中橙色阴影所示。由于 $\max\{|w_{ab}w_{bc}|, |bw_{ab}|, |bw_{bc}|\} \le 1+\varepsilon$，不难看出 D_p 和 D_q 相交。

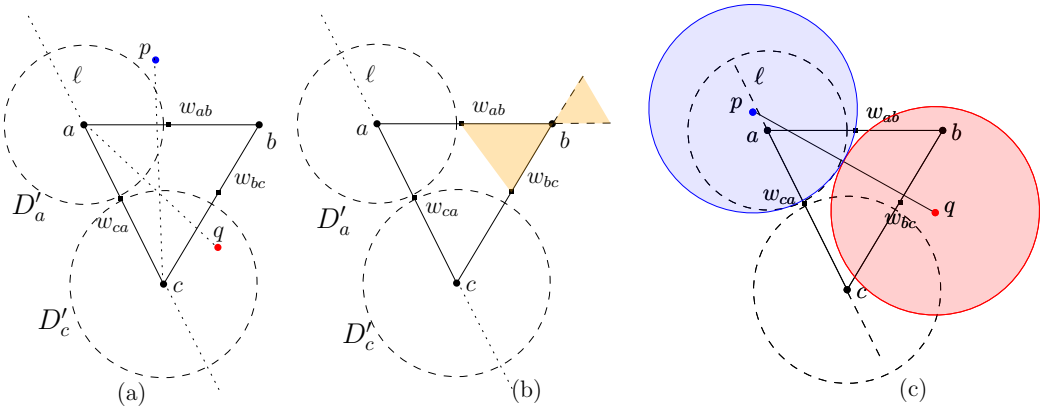

图 13 p 和 q的位置示意图。(a)–(b) 情况1。(c) 情况2。

如果 p 和 q 位于 ℓ 的两侧（图 13(c)），那么不失一般性，假设 p 位于左半平面， q 位于右半平面。接下来，我们将证明 $|ap| \le (0.25 - \varepsilon)$。因此， $|pq| \le |ap| + |aq| \le (0.25 - \varepsilon) + (a_r + q_r - 0.265) = (p_r + q_r) + (a_r - p_r) - \varepsilon - 0.015 < (p_r + q_r)$。

现在我们证明 $|ap| \le (0.25 - \varepsilon)$。对于一个固定角度 $\angle w_{ab}aw_{ca}$，当 D_p 的边界经过 w_{ab} 时，距离 $|ap|$达到最大值（图 13(c)）。注意，D_p必须避开 w_{ca}。现在有 $|ap| = \sqrt{|pw_{ab}|^2 + |aw_{ab}|^2 - 2|pw_{ab}||aw_{ab}|\cos\angle pw_{ab}a} \le \sqrt{(1+\epsilon)^2 + |aw_{ab}|^2 - 2|aw_{ab}|\cos\angle pw_{ab}a}$。当 $\angle pw_{ab}a \le 12.61°$且 $0.85 \le |aw_{ab}| \le 1.09$时，我们得到 $|ap| \le (0.25 - \epsilon)$。由引理 9，我们已有 $0.8625 \le |aw_{ab}| \le (0.8675 + \epsilon)$，因此只需证明 $\angle pw_{ab}a \le 12.61°$。

对于固定的 $|aw_{ab}|$，当 $\angle bac$ 最大且 $|pw_{ab}| = (1+\epsilon)$ 时， $\angle pw_{ab}a$ 达到最大值。根据引理8，$\angle bac \le 60.988°$。此外，将 w_{ab} 向 a 移动会增大角 $\angle pw_{ab}a$。因此，当 $|aw_{ab}| = 0.8625$ 且 $\angle paw_{ab} = 180° - 60.988° = 119.012°$ 时， $\angle pw_{ab}a$ 达到最大值。既然现在已知 $\Delta pw_{ab}a$ 的两条边的长度以及 $\angle paw_{ab}$，便可轻松计算出 $\angle pw_{ab}a$；它小于 $12.61°$，符合要求。

情形 3（D_p 和 D_q 属于类型 2 或类型 3）： 由于 D_p 和 D_q 各自至少包含来自 $\{w_{ab}, w_{bc}, w_{ca}\}$ 的两个点，因此它们必定相交。

情况4（其中一个 D_p 和 D_q 属于类型 1，另一个属于类型 2 或类型 3）： </style>**当 和 包含来自 {**w_{ab}，w_{bc}，$w_{ca}\}$ 的一个公共点时，情况显然成立。因此，不失一般性，假设 D_p 属于类型 1 且包含 w_{ab}，而 D_q 属于类型 2 且包含 w_{bc} 和 w_{ca}。我们采用与情况2相同的设定，即 ℓ 是经过 ac的直线，且 b 位于右半平面。现在，我们逆时针移动 D_q，同时保持 $|pq|$ 之间的距离不变，并在 w_{ca} 碰到 D_q的边界时停止。通过与情况2类似的分析，我们可以观察到 $|pq| \leq p_r + q_r$，因此 D_p 和 D_q 必相交。

▶**定理 11**。给定欧几里得平面上的一组 n 个圆盘，其中每个透镜的宽度至少为 0.265，且半径均位于区间 $[1, 1.0001]$内，则可以在 $O(n^4)$ 时间内计算相应圆盘图中的最大团。

6 结论与未来工作方向

我们给出了一种 $O(n^{2.5} \log n)$ 时间算法，用于计算单位圆盘图中的最大团。未来研究的一个自然方向是降低该算法的时间复杂度。我们证明，对于单位圆盘与轴平行矩形的组合，最大团在 $4448/4449$ 的因子范围内是 NP 困难的，无法近似。我们采用余 2-细分方法得到了这一结果，并在此过程中证明，每个哈密顿三次图都存在成对定向标记。若能提高不可近似因子，将会很有意义；一种可能的途径是考察非哈密顿三次图是否也存在成对定向标记。我们证明，在一个更一般的设定中，如果每个透镜的宽度至少为 0.265，且圆盘半径属于 $[1, 1.0001]$，那么就能在多项式时间内找到最大团。我们认为，通过繁琐的分类讨论，这些数值或许还能略有改善；不过，采用当前技术要将 β 降至 0.2 将颇具挑战。

参考文献

1 Pankaj K. Agarwal 和 Micha Sharir。排列及其应用。载于 Jörg-Rüdiger Sack 和 Jorge Urrutia 编，计算几何手册，第 49–119 页。爱思唯尔，2000 年。 doi:10.1016/b978-0-444-82537-7.x5000-1。2 Alok Aggarwal、Hiroshi Imai、Naoki Katoh 和 Subhash Suri。求解具有最小直径的 k 点及相关问题。《算法杂志》，12(1)：38–56，1991 年。 doi:10.1016/0196-6774(91)90022-Q。3 Christoph Ambühl 和 Uli Wagner。椭圆和三角形交图中的团问题。《计算系统理论》，38(3)：279–292，2005 年。 doi:10.1007/s00224-005-1141-6。4 J. Bang-Jensen、B. Reed、M. Schacht、R. Šámal、B. Toft 和 U. Wagner。离散数学专题：献给 *Jarik Nešetřil*，庆祝其 *60* 岁生日，第 26 卷，算法与组合数学，第 613–627 页。施普林格，2006 年。5 Marthe Bonamy、Édouard Bonnet、Nicolas Bousquet、Pierre Charbit、Panos Giannopoulos、Eun Jung Kim、Pawel Rzazewski、Florian Sikora 和 Stéphan Thomassé。圆盘图和单位球图最大团问题的 EPTAS 与亚指数算法。《*ACM* 杂志》，68(2)：9:1–9:38，2021 年。 doi:10.1145/3433160。6 Édouard Bonnet、Panos Giannopoulos、Eun Jung Kim、Pawel Rzazewski 和 Florian Sikora。圆盘图最大团问题的 QPTAS 与亚指数算法。载于 Bettina Speckmann 和 Csaba D. Tóth 编，《第 *34* 届计算几何国际研讨会论文集

（SoCG），LIPIcs 第 99 卷，第 12:1–12:15 页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2018 年。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2018.12。7 Édouard Bonnet、Nicolas Grelier 和 Tillmann Miltzow。圆盘类相交图中的最大团。载于 Nitin Saxena 和 Sunil Simon 编，《第 40 届 IARCS 软件技术与理论计算机科学基础年会论文集》（FSTTCS 2020），LIPIcs 第 182 卷，第 17:1–17:18 页。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum für Informatik，2020 年。 doi:10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2020.17。8 Heinz Breu。受约束单位圆盘图的算法方面。博士论文，1996 年。9 Sergio Cabello。两种尺寸圆盘的最大团。摘自《几何相交图：问题与方向》中的未决问题，CG Week 研讨会，2015 年。10 Sergio Cabello、Jean Cardinal 和 Stefan Langerman。射线相交图中的团问题。《离散计算几何》，50(3)：771–783，2013 年。 doi:10.1007/s00454-013-9538-5。11 Miroslav Chlebík 和 Janka Chlebíková。优化问题有界变体的近似复杂度。《理论计算机科学》，354(3)：320–338，2006 年。 doi:10.1016/j.tcs.2005.11.029。12 Miroslav Chlebík 和 Janka Chlebíková。 d维盒上组合优化问题的复杂度。《SIAM 离散数学杂志》，21(1)：158–169，2007 年。 doi:10.1137/050629276。13 Brent N. Clark、Charles J. Colbourn 和 David S. Johnson。单位圆盘图。《离散数学》，86(1-3)：165–177，1990 年。 doi:10.1016/0012-365X(90)90358-O。14 David Eppstein。计算几何问题的图论解法。载于 Christophe Paul 和 Michel Habib 编，《第 35 届图论概念与计算机科学国际研讨会论文集》（WG），第 1–16 页，2009 年。 doi:10.1007/978-3-642-11409-0_1。15 Stefan Felsner、Rudolf Müller 和 Lorenz Wernisch。梯形图及其推广：几何与算法。《离散应用数学》，74(1)：13–32，1997 年。 doi:10.1016/S0166-218X(96)00013-3。16 Aleksei V. Fishkin。圆盘图：简要综述。载于 Klaus Jansen 和 Roberto Solis-Oba 编，《近似与在线算法》，第一届国际研讨会（WAOA 2003），匈牙利布达佩斯，2003 年 9 月 16–18 日，修订论文，计算机科学讲义第 2909 卷，第 260–264 页。施普林格，2003 年。 doi:10.1007/978-3-540-24592-6_23。17 Herbert Fleischner、Gert Sabidussi 和 Vladimir I. Sarvanov。3-正则和 4-正则哈密顿图中的最大独立集。《离散数学》，310(20)：2742–2749，2010 年。 doi:10.1016/j.disc.2010.05.028。18 E. Helly。关于具有公共点的凸体集合。《德国数学家协会年报》，32：175–176，1923 年。19 John Hershberger 和 Subhash Suri。求解定制划分。《算法杂志》，12(3)：431–463，1991 年。 doi:10.1016/0196-6774(91)90013-O。20 John E. Hopcroft 和 Richard M. Karp。一种求二分图最大匹配的 $n^{5/2}$ 算法。《SIAM 计算杂志》，2(4)：225–231，1973 年。 doi:10.1137/0202019。21 Mark L. Huson 和 Arunabha Sen。无线电网络的广播调度算法。载于 MILCOM’95 论文集，第 2 卷，第 647–651 页。IEEE，1995 年。22 Hiroshi Imai 和 Takao Asano。求解平面中矩形交图的连通分量和最大团。《算法杂志》，4(4)：310–323，1983 年。 doi:10.1016/0196-6774(83)90012-3。23 Hiroshi Imai 和 Takao Asano。几何图搜索问题的高效算法。《SIAM 计算杂志》，15(2)：478–494，1986 年。 doi:10.1137/0215033。24 J. Mark Keil、Debajyoti Mondal、Ehsan Moradi 和 Yakov Nekrich。求解基于地面的单弯曲字符串图中的最大团。《图算法与应用期刊》，26(4)，2022 年。 doi:10.7155/jgaa.00608。

25 Jan Kratochvíl 和 Jaroslav Nešetřil。图的交定义类中的独立集和团问题。*Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*，31(1):85–93，1990。**26** Matthias Middendorf 和 Frank Pfeiffer。字符串图类中的最大团问题。离散数学，108(1-3):365–372，1992。 doi:10.1016/0012-365X(92)90688-C。**27** Michael Ian Shamos 和 Dan Hoey。最近点问题。载于第*16*届计算机科学基础年会（*FOCS*）论文集，第151–162页，1975年。 doi:10.1109/SFCS.1975.8。**28** Alexander Tiskin。单位 Monge 矩阵的快速距离乘法。*Algorithmica*，71(4):859–888，2015年。 doi:10.1007/s00453-013-9830-z。