arXiv:2303.07656v1 [math.CV] 14 Mar 2023

关于多复变数全纯函数空间的格罗滕迪克型对偶

YULIA KHORYAKOVA 和 Alexander Shlapu NOV

Abstract. 我们描述有界 Lipschitz 域 D （其边界连通）上的多复变数全纯函数空间 $\mathcal{O}(D)$ 的强对偶空间 $(\mathcal{O}(D))^*$ （通常， $\mathcal{O}(D)$ 赋予在 D 的紧子集上一致收敛的拓扑）。我们将该对偶空间识别为闭集 $\mathbb{C}^n \setminus D$, $n > 1$ 上调和函数空间的一个闭子空间，其中的元素在无穷远处趋于零，并在 ∂D 上满足切向柯西—黎曼方程。特别地，我们以一种方式将经典的格罗滕迪克—科特—塞巴斯蒂昂·席尔瓦对偶性从单复变全纯函数空间推广到多维情形。我们在 $\mathbb{C}^n$, $n > 1$ 中使用博赫纳-马丁内利核 $\mathfrak{U}_n$ ，而非复平面 $\mathbb{C}$ 上的柯西核，并证明当且仅当 D 上的 Sobolev 全纯函数空间 $\mathcal{O}(D) \cap H^1(D)$ 在 $\mathcal{O}(D)$ 中稠密时，对偶性成立。

Introduction

全纯函数空间中的一种早期对偶性于 20 世纪 50 年代由 A. 格罗滕迪克 [9], G. K¨othe [12] 和 J. Sebasti˜ao e Silva [27], 各自独立发现。他们描述了有界单连通区域 $D \subset \mathbb{C}$ 中全纯函数空间 $\mathcal{O}(D)$（赋予标准的弗雷歇拓扑）的强对偶 $(\mathcal{O}(D))^*$ ：

$$(\mathcal{O}(D))^* \cong \mathcal{O}(\hat{\mathbb{C}} \setminus D) \tag{0.1}$$

其中， $\mathcal{O}(\hat{\mathbb{C}} \setminus D)$ 是定义在闭集 $\mathbb{C} \setminus D$ 的邻域上、在无穷远处消失的全纯函数空间，并赋予标准的归纳极限拓扑。遗憾的是，关于不存在紧奇点的 Hartogs 定理和经典 Liouville 定理，使得这种对偶性无法直接推广到多复变数全纯函数的情形（不过，针对线性凸多维区域的一些推广已见于 [1], [15]）。

另一种对偶性由 L.A. Айзенберг 和 S. G. Gindikin [2], L.A. Айзенберг 和 B.S. 米佳金 [3] 以及 E.L. Stout [32]分别独立得到：

$$(\mathcal{O}(D))^* \cong \mathcal{O}(\overline{D}) \tag{0.2}$$

若 $D \subset \mathbb{C}^n$ 是边界实解析的有界域（对 $n > 1$ 而言是伪凸的）；实际上，他们的对偶的核心采用了不同的配对（即分别由 Bergmann 空间和 Hardy 空间中的内积所生成的配对，其他可能性见 [20], [36] ）。

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 32A10；次要分类号 46E10、32C37。
Key words and phrases. 对偶性、全纯函数空间、多复变数。

上述对偶的许多推广源自 Dolbeault 上同调理论，见 [16], [26], ，以及椭圆偏微分方程组理论，见 [4], [10], [20], [21], [22], [28], [30]。

对于紧集上一致收敛拓扑下椭圆微分算子解空间的对偶性，最一般的结果之一归功于 A. Grothendieck，参见 [10, 定理 3 和 4]；它在某种程度上与 (0.1) 类似。遗憾的是，对偶空间的完整描述仅针对具有双边正则基本解的椭圆算子得出，参见[10, 定理 4]，而该定理不适用于多维柯西-黎曼算子这类超定椭圆算子。尽管 [10, 定理 3] 仍适用于具有左正则基本解的超定椭圆算子的解空间，但它给出的答案是以相关欠定伴随算子的解来表述的。后一类空间过于庞大，无法在相应空间之间建立拓扑同构（该定理仅定义了一个线性连续满射映射）。

文献 [30] 提出了一种为椭圆系统（包括定解和超定系统）构造对偶的通用方案。该方案涉及再生核希尔伯特空间这一概念，所构造的配对与所用希尔伯特空间的内积密切相关。然而，该方案的应用取决于有关再生核性质的极其精细的信息，而这些信息并非总能获得。

为表述本文的主要结果，设 D 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的一个有界域，$n>1$，并设 $\mathcal{H}(\hat{\mathbb{R}}^{2n}\setminus D)$ 是闭集 $\mathbb{R}^{2n}\setminus D$ 上在无穷远处正则的调和复值函数空间，即满足

$$\lim_{|x|\to+\infty}|u(x)|=0. \tag{0.3}$$

我们赋予该空间闭集上调和函数的标准归纳极限拓扑。

现在令 $\Sigma(\hat{\mathbb{R}}^{2n}\setminus D)$ 的闭子空间，其中的函数 $v\in\mathcal{H}(\hat{\mathbb{R}}^{2n}\setminus D)$ 在∂D上满足切向柯西–黎曼方程。关于空间 $\Sigma(\hat{\mathbb{C}}^{n}\setminus D)$ 的其他描述，见下文推论 1.3。

Теорема 0.1. Пусть $n>1$ и пусть D будет ограниченной областью в $\mathbb{C}^n$ с связной границей Липшица, такой, что пространство $H^1(D)\cap\mathcal{O}(D)$ голоморфных функций вD из класса Соболева $H^1(D)$ плотно в $\mathcal{O}(D)$. Тогда (топологически)

$$(\mathcal{O}(D))^*\cong\Sigma(\hat{\mathbb{C}}^n\setminus D). \tag{0.4}$$

配对与对偶性 (0.4) 相关，将在第 §2 节中说明，见 (2.1)。我们还指出，对于具有实解析边界的有界域 $D\Subset\mathbb{C}^n$，若空间 $\mathcal{O}(\overline{D})$ 在 $\mathcal{O}(D)$ 中稠密，则定理 0.1 可从 [20], 的结果中推出；在该结果中，对偶性 (0.2) 是针对一种非常特殊的配对证明的。

当然，由于 $\mathcal{O}(\overline{D})\subset H^1(D)\cap\mathcal{O}(D)$，著名的冈萨-魏尔定理表明，对于 $\mathbb{C}^n$，$n>1$ 中的严格伪凸域，定理 0.1 中假设的逼近性质总是成立；例如参见 [7, 第 1 章，§§F、G]。我们将在 §3 中证明，逼近性质也是定理 0.1 所述对偶性成立的必要条件。还值得注意的是，对于单变量全纯函数，原始对偶关系 (0.1) 不需要对曲线 ∂D 的光滑性或区域 D 的凸性作任何限制。

1. Preliminaries

设 $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ 为带坐标 $x = (x_1, x_2, \dots x_n)$ 的欧几里得空间，设 $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ 为相关的 n 维复空间，其坐标为 $z = (z_1, z_2, \dots z_n)$，$z_j = x_j + \imath\, x_{n+j}$，其中虚数单位为 $\imath$。再设 D 表示 $\mathbb{C}^n$ 中一个具有利普希茨边界 ∂D的有界域（开连通集）。我们考虑定义在 $\mathbb{C}^n$ 子集上的复值函数。按照惯例，对于 $s \in \mathbb{Z}_+$，我们用 $C^s(D)$ 和 $C^s(\overline{D})$ 分别表示定义在 D 和 $\overline{D}$ 上的 s 次连续可微函数空间。定义在 D 上的勒贝格空间和索伯列夫希尔伯特空间分别记为 $L^2(D)$ 和 $H^s(D)$。此外，令 $H^s(\partial D)$，$0 < s < 1$ 表示定义在 ∂D 上的标准索伯列夫–斯洛博杰茨基空间。

给定 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个开集 U，记 $\mathcal{H}(U)$ 为 U 中调和函数构成的空间，其拓扑由 U 的紧子集上的一致收敛所诱导。众所周知，$\mathcal{H}(U)$ 是一个 Fr´echet-Schwartz 拓扑向量空间（F-空间），例如参见 [25, 第 II 章，§4]。此外，椭圆方程解的先验估计（例如参见 [8], ）表明，$\mathcal{H}(U) \subset C^\infty(U)$ 是空间 $C(U)$ 的一个闭子空间；也就是说，该空间的拓扑既可以由半范数系 $p_\nu(u) = \max\limits_{x \in K_\nu} |u(x)|$ 定义，这些半范数与满足 $\cup_\nu K_\nu = U$ 的递增紧集系 $\{K_\nu\} \subset U$ 相关联；也可以由半范数系$p_\nu^{(\alpha)}(u) = \max\limits_{z \in K_\nu} |\partial^\alpha u(z)|$ 定义，$\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$，并且还假设每个 K_ν 都是 U 中某个开集的闭包。

开集 $U \subset \mathbb{C}^n$ 上的任意全纯函数都是调和函数，因此我们将 U中的全纯函数空间 $\mathcal{O}(U)$视为 $\mathcal{H}(U)$的闭子空间。

接下来，对于闭集 $\sigma \subset \mathbb{R}^n$，记 $\mathcal{H}(\sigma)$为定义在 σ 的各种邻域上的调和函数集合，具体邻域取决于函数。实际上，$\mathcal{H}(\sigma)$可以视为 σ上的调和函数（等价类）空间；如果两个这样的解在 σ 的某个邻域上相等，则称它们等价。在 $\mathcal{H}(\sigma)$中，若存在 $\mathcal{V}$ 的一个邻域，使得序列 $\{u_\nu\}$ 中的所有函数至少在 $\mathcal{V}$ 上有定义，并且在 $\mathcal{V}$的紧子集上一致收敛，则称该序列收敛。或者，拓扑空间 $\mathcal{H}(\sigma)$也可描述为下列空间的归纳极限：$\mathcal{H}(U_\nu)$，其中 $\{U_\nu\}$ 是包含 σ的任意递减开集序列，满足 σ 的每个邻域都包含其中某个 U_ν，并且每个 U_ν 的连通分支都与 σ相交。因此，$\mathcal{H}(U_\nu)$与 $\to \mathcal{H}(\sigma)$一一对应。于是，$\mathcal{H}(\sigma)$必为豪斯多夫空间。实际上，$\mathcal{H}(\sigma)$就是所谓的 DF-空间，参见 [25, 第 II 章 §6]。

对于有界域 $D \subset \mathbb{R}^{2n}$，我们将空间 $\mathcal{H}(\hat{}\mathbb{R}^{2n} \setminus D)$，$n > 1$，定义为满足 (0.3) 的 $\mathcal{H}(\mathbb{R}^{2n} \setminus D)$ 的闭子空间。

接下来，我们回顾一下，若函数 $w_0 \in L^1(\partial D)$ 在超曲面 ∂D 上满足弱切向柯西-黎曼方程，则称其为 CR-函数，即在∂D上满足

$$\int_{\partial D} w_0\, \overline{\partial}\psi = 0 \tag{1.1}$$

对于所有系数属于类 $C^1(\overline{D})$ 的 $(n, n-2)$-微分形式 ψ，例如参见 [13, 第 2 章，§6]。上文定义的空间 $\Sigma(\hat{}\mathbb{C}^n \setminus D)$ 是由满足 $\hat{}\partial D$ 上的切向柯西—黎曼方程的元素 $v \in \mathcal{H}(\hat{}\mathbb{R}^{2n} \setminus D)$ 构成的集合；它是空间 $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n \setminus D)$ 的闭子空间，因为任何在 $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n \setminus D)$ 中 $\hat{}$收敛的序列，都会在紧集 $\partial D \subset \mathbb{C}^n$ 上一致收敛。

下面给出 Lipschitz 域上空间 $\Sigma(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D)$ 的一种刻画。

为此，记 Δ_n 为欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$中的通常拉普拉斯算子 $\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$。众所周知，拉普拉斯算子存在一个卷积型基本解 Φ_n：

$$\Phi_n(y-x) = \begin{cases} \frac{|y-x|^{2-n}}{(2-n)\sigma_n} & n \geq 3, \\ \frac{\ln|y-x|}{2\pi} & n = 2, \end{cases}$$

其中 σ_n 是 $\mathbb{R}^n$中的单位球面的平方。

记 $\overline{\partial}$ 为 $\mathbb{C}^n$中的柯西-黎曼算子，即它是一个 n列向量，其分量为 $\overline{\partial}_j = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} + \iota\frac{\partial}{\partial x_{j+n}}\Big)$。

接下来，记

$$\mathfrak{U}_n(z,\zeta) = \frac{(n-1)}{(2\pi\iota)^n}\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}(\overline{\zeta}_j - \overline{z}_j)}{|\zeta - z|^{2n}} d\overline{\zeta}[j] \wedge d\zeta,\ z,\zeta \in \mathbb{C}^n,\ z \neq \zeta,$$

$\mathbb{C}^n$复空间中的博赫纳-马丁内利核，参见例如 [13]。众所周知，博赫纳-马丁内利核 $\mathfrak{U}_n$ 可表示为

$$\mathfrak{U}_n(\zeta,z) = \sum_{j=1}^n \Big(\overline{\partial}^*_{j,\zeta}\Phi_{2n}(\zeta,z)\Big)(-1)^{j-1} d\overline{\zeta}[j] \wedge d\zeta \tag{1.2}$$

其中，$\zeta = (\zeta_1, \dots \zeta_n)$、$\zeta_j = y_j + \iota y_{j+n}$和 $\overline{\partial}^*_j = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial y_j} - \iota\frac{\partial}{\partial y_{j+n}}\Big)$ 是柯西-黎曼算子$\overline{\partial}$的形式伴随算子 $\overline{\partial}^* = (\overline{\partial}^*_1, \dots \overline{\partial}^*_n)$的分量，参见 [13, §1]。特别地，当 $\zeta \neq z$ 且 $n > 1$时，博赫纳-马丁内利核关于 ζ 是调和的。当然，对于 $n = 1$，核 $\mathfrak{U}_n(\zeta, z)$ 与柯西核 $\mathfrak{K}(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi\iota}\frac{1}{\zeta - z}$重合；此时，当 $\zeta \neq z$时，它关于 ζ 是全纯的。

显然，若 D 是具有利普希茨边界的区域，那么给定定义在 ∂D上的充分正则函数 u_0，记

$$M_{\partial D}u_0(z) = \int_{\partial D} \mathfrak{U}_n(z,\zeta)u_0(\zeta),\ z \notin \partial D,$$

其博赫纳-马丁内利积分。当然，对于任意 $u_0 \in H^{1/2}(\partial D)$，只要 $z \notin \partial D$，博赫纳-马丁内利积分 $M_{\partial D}u_0(z)$ 就是一个定义良好的参数依赖积分。我们用 $M^-_{\partial D}u_0$ 表示它在 D 上的限制，用 $M^+_{\partial D}u_0$ 表示它在 $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ 上的限制。事实上，它是双层位势的一种形式，因此诱导出连续线性算子

$$M^-_{\partial D} : H^{1/2}(\partial D) \to H^1(D), \tag{1.3}$$

例如，光滑区域可参见 [13, §16], [24, §2.3.2.5], ，Lipschitz 域可参见 [5] 。另一方面，对于任意包含 $\overline{D}$ 的 Lipschitz 域 $G \subset \mathbb{C}^n$，同样的论证表明，博赫纳-马丁内利积分 $M_{\partial D}$ 诱导出连续线性映射

$$M^+_{\partial D} : H^{1/2}(\partial D) \to H^1(G \setminus \overline{D}) \cap \mathcal{H}(G \setminus \overline{D}).$$

接下来，根据核的结构 $\mathfrak{U}_n$ 我们有

$$|M^+_{\partial D}u_0(z)| \leq c(\partial D)\|u_0\|_{H^{1/2}(\partial D)}|z|^{1-2n} \tag{1.4}$$

因此， $M_{\partial D}$ 诱导出连续线性映射

$$M^{+}_{\partial D} : H^{1/2}(\partial D) \to H^{1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}^n \setminus D) \cap \mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus \overline{D}). \tag{1.5}$$

在下述陈述中，t^- 和 t^+ 表示连续迹映射

$$\mathrm{t}^- : H^1(D) \to H^{1/2}(\partial D),\ \mathrm{t}^+ : H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}^n \setminus D) \to H^{1/2}(\partial D).$$

对于边界光滑的区域，下述陈述可由 [13, 定理 7.1 和推论 15.5] 直接推出。

定理 1.1. 设 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为一个有界 Lipschitz 域。则下列条件等价:

(1) 函数 $w_0 \in H^{1/2}(\partial D)$ 是 CR上的一个函数；(2) 存在函数 $w \in H^1(D) \cap \mathcal{O}(D)$，使得 $\mathrm{t}^-(w) = w_0$ 在 ∂D 上成立；(3) $M^{+}_{\partial D} w_0 \equiv 0$ 在 $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$ 中。

证明。证明基于以下一个众所周知的陈述，该陈述适用于 $C^1(\partial D)$-函数和 C^1-光滑区域 D，参见 [13, 推论 15.5]。

引理 1.2. 设 $D \subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界 Lipschitz 域。给定 $w_0 \in H^{1/2}(\partial D)$，存在一个函数 $w \in H^1(D) \cap \mathcal{O}(D)$，满足 $\mathrm{t}^-(w) = v$ 在 ∂D 上，当且仅当 $M^{+}_{\partial D} w_0 \equiv 0$。

证明。由于算子 $M^{\pm}_{\partial D}$（由 (1.3)、(1.5) 给出）是连续的，因此根据 Sobolev 全纯函数的 Bochner-Martinelli 公式，见 [13, 第 166] 页，我们有

$$M_{\partial D} \mathrm{t}^- w(z) = \begin{cases} w(z) & x \in D, \\ 0, & z \notin \overline{D}, \end{cases} \tag{1.6}$$

对任意 $w \in H^1(D) \cap \mathcal{O}(D)$。

特别地，这意味着对于函数 $w_0 \in H^{1/2}(\partial D)$，若存在函数 $w \in H^1(D) \cap \mathcal{O}(D)$ 满足 $\mathrm{t}^-(w) = w_0$ 在 ∂D 上，则有 $M^{+}_{\partial D} w_0 \equiv 0$ 属于 $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$。

回过头来，选取一个函数 $w_0 \in H^{1/2}(\partial D)$，满足 $M^{+}_{\partial D} w_0 \equiv 0$ 属于 $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$。

用 $\overline{\partial}_\nu$ 表示关于 ∂D 的所谓“复法向导数”:

$$\overline{\partial}_\nu w = \sum_{j=1}^{n} (\nu_j - \iota \nu_{j+n}) \overline{\partial}_j w$$

其中， $\nu(z) = (\nu_1(\zeta) \ldots, \nu_{2n}(\zeta))$ 是点 $\zeta \in \partial D$处 ∂D 的单位外法向量，参见 [13, 第 39] 页。因此，根据 Martinelli-Bochner 积分（针对双层位势）的跳跃公式，我们有

$$M^{-}_{\partial D} w_0 - M^{+}_{\partial D} w_0 = w_0 \text{ on } \partial D,$$

$$\overline{\partial}_\nu (M^{-}_{\partial D} w_0) - \overline{\partial}_\nu (M^{+}_{\partial D} w_0) = 0 \text{ on } \partial D,$$

光滑域的情形参见 [13, 推论 4.9] ，Lipschitz 域的情形参见 [5] 。

特别地，由于 $M^{+}_{\partial D} w_0 \equiv 0$ 属于 $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$，我们得到

$$\mathrm{t}^- M^{-}_{\partial D} w_0 = w_0 \text{ on } \partial D,\ \overline{\partial}_\nu (M^{-}_{\partial D} w_0)^- = 0 \text{ on } \partial D.$$

根据其构造，Bocnher-Martinelli 积分 $M^{-}_{\partial D} w_0$ 在D中是调和函数。此外，由 (1.3) 可得 $M^{-}_{\partial D} w_0 \in H^1(D)$，因此函数 $w = M^{-}_{\partial D} w_0$是

柯西问题的一个 $H^1(D)$-解

$$\begin{cases} \Delta_{2n} w = 0 \text{ in } D, \\ w = w_0 \text{ on } \partial D, \\ \overline{\partial}_\nu w = 0 \text{ on } \partial D. \end{cases}$$

由于 D 是利普希茨域，因此存在一个序列 $\{w_k\} \subset C^1(\overline{D})$，在 $H^1(D)$ 中逼近 w。然后，分部积分可得

$$\sum_{j=1}^{n} \|\overline{\partial}_j w\|^2_{L^2(D)} = \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} (\overline{\partial}_j w, \overline{\partial}_j w_k)_{L^2(D)} = \lim_{k\to+\infty} \int_{\partial D} \overline{w}_k \overline{\partial}_\nu w ds(y) = 0$$

因为 $\overline{\partial}_\nu w = 0$ 在 ∂D 上。因此，$\overline{\partial} w = 0$ 在 D 中弱收敛，进而由 [35, §24.7], 可知，它在 D 中是全纯的，即 $w \in H^1(D) \cap \mathcal{O}(D)$ 在 ∂D 上满足 $\mathrm{t}^- w = w_0$，证毕。□

由引理 1.2 可立即得出，定理 1.1 的条件 (2) 和 (3) 等价。

此外，利用斯托克斯公式可知，(2) 推出 (1)：

$$\int_{\partial D} w_0 \, \overline{\partial}\psi = \int_{\partial D} \mathrm{t}^- w \, \overline{\partial}\psi = \int_D \Big(\overline{\partial} w \wedge \overline{\partial}\psi + w \, \overline{\partial}(\overline{\partial}\psi) \Big) = 0$$

对所有系数属于类 $C^1(\overline{D})$ 的 $(n, n-2)$-微分形式 ψ 均成立。

最后，设 $w_0 \in H^{1/2}(\partial D)$ 是 ∂D 上的一个 CR 函数。由于 D 有界，因此存在一个包含 $\overline{D}$ 的球 $B(0, R)$。于是，对于 $z \notin \overline{B}(0, R)$，博赫纳-马丁内利核满足

$$\overline{\partial}_\zeta \mathfrak{U}(\zeta, z) = 0 \text{ in } \overline{B}(0, R).$$

由于多尔博复形在凸域上的光滑形式上是正合的，对于任意 $z \notin \overline{B}(0, R)$，存在一个 $(n, n-2)$-形式 $\psi_z(\zeta)$，其在 $\overline{B}(0, R)$ 中的系数光滑，并且满足

$$\overline{\partial}_\zeta \psi_z(\zeta) = \mathfrak{U}(\zeta, z) \text{ in } B(0, R),$$

见 [11]。因此，根据 (1.1),

$$(M_{\partial D} w_0)(z) = \int_{\partial D} w_0(\zeta) \, \overline{\partial}_\zeta \psi_z(\zeta) = 0 \text{ for all } z \notin \overline{B}(0, R).$$

特别地，由于 $(M_{\partial D} w_0)(z)$ 在 $\overline{D}$ 外是调和的，调和函数唯一性定理推出 $M^+_{\partial D} w_0 \equiv 0$ 属于 $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$。因此，(1) 等价于 (2) 和 (3)（关于具有光滑边界的区域，也可参见 [13, 定理 7.1] ），至此证明完毕。□

推论 1.3. 设 $D \subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界 Lipschitz 域。那么以下条件等价：

(1) 元素 $v \in \mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D)$ 属于空间 $\Sigma(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D)$；(2) 存在一个函数 $w \in H^1(D) \cap \mathcal{O}(D)$，满足 $\mathrm{t}^-(w) = \mathrm{t}^+(v)$ 于 ∂D 上；(3) $M^+_{\partial D} \mathrm{t}^+ v \equiv 0$ 属于 $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$。

接下来，用 $(\mathcal{O}(D))^*$ 表示 $\mathcal{O}(D)$ 的对偶空间，即 $\mathcal{O}(D)$ 上所有连续线性泛函组成的空间。按照惯例，我们在 $(\mathcal{O}(D))^*$ 上赋予强拓扑，也就是泛函在 $\mathcal{O}(D)$ 的有界子集上一致收敛所对应的拓扑，参见 [25, 第 IV 章，第 6] 节。

那么，对于单连通有界平面域 D， $n=1$ 的经典结果 [9], [12] , [27] 表明，对偶性 (0.1) 成立，且相关配对

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_1 : \mathcal{O}(D)\times\mathcal{O}(\hat{\mathbb{C}}\setminus D)\to\mathbb{R} \tag{1.7}$$

由曲线积分给出

$$\langle u,h\rangle_1 = \int_{\partial G} v(z)u(z)dz \tag{1.8}$$

对于 $u\in\mathcal{O}(D)$ 和 $h\in\mathcal{O}(\hat{\mathbb{C}}\setminus D)$，其中 $G\Subset D$，且分段光滑曲线 ∂G 属于 u 和 h 的定义域的交集（当然，该配对不依赖于具有上述规定性质的 G ）。

为运用偏微分方程一般理论的工具，记 $S_{\overline{\partial}^*}(U)$ 为开集 $U\subset\mathbb{C}^n$ 上方程 $\overline{\partial}^* g = 0$ 的光滑解空间；实际上，这些解是函数 $g_j\in C^\infty(U)$ 的 n 行 $g=(g_1,\dots,g_n)$，满足

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{\partial}_j^* g_j = 0 \text{ in } U.$$

若 $n=1$ ，则空间 $S_{\overline{\partial}^*}(U)$ 就是反全纯函数空间，而空间 $S_{\overline{\partial}^*}(\mathbb{C}\setminus D)$ 具有与空间 $\mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus D)$ 类似的性质。显然，复共轭诱导出一个拓扑反线性同构

$$\mathcal{O}(\hat{\mathbb{C}}\setminus D)\ni h\to\overline{h}=g\in S_{\overline{\partial}^*}(\hat{\mathbb{C}}\setminus D).$$

特别是在这种情况下，配对

$$\langle u,g\rangle_2 = \int_{\partial G}\overline{g}(z)\,u(z)\,dz \tag{1.9}$$

ˆ定义在 $u\in\mathcal{O}(D)$和$g\in S_{\overline{\partial}^*}(\mathbb{C}\setminus D)$上，并诱导出拓扑（反线性）同构，参见 [10],

$$(\mathcal{O}(D))^*\cong S_{\overline{\partial}^*}(\hat{\mathbb{C}}\setminus D). \tag{1.10}$$

A. Grothendieck 证明，对于具有正则双侧基本解的光滑流形X 上的任意椭圆算子 A ，存在一个拓扑同构

$$(S_A(D))^*\cong S_{A^*}(\hat{X}\setminus D) \tag{1.11}$$

ˆ成立，其中 X 表示应考虑相对于所选基本解在“无穷远处”正则的解，详情参见 [10, 定理 4] 。

遗憾的是，由于哈托格斯关于紧奇点可去性的定理， $n>1$ 柯西-黎曼算子 $\overline{\partial}$ 不存在双边基本解，因此 [10, 定理 4] 在这种情况下并不适用。不过，算子 $\overline{\partial}$ 存在正则左基本解，例如，博赫纳-马丁内利核 $\mathfrak{U}_n(\zeta,z)$ 给出了其中一个 $n>1$。那么[10, 定理 3] 指出，配对

$$\langle u,g\rangle_3 = \int_{\partial G}\sum_{j=1}^{n}\overline{g}_j(z)\,u(z)\,(-1)^{j-1}\,d\overline{z}[j]\wedge dz \tag{1.12}$$

定义在 $u \in \mathcal{O}(D)$ 和 $g \in S_{\overline{\partial}^*}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D)$ 上，其中 $G \Subset D$和分片光滑曲面 ∂G分别属于 u 和 g 的区域之交，并诱导出一个连续满射映射

$$S_{\overline{\partial}^*}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D) \to (\mathcal{O}(D))^* \tag{1.13}$$

（同样，配对不依赖于具有上述指定性质的 G ）。

但是，算子 $\overline{\partial}^*$ 对于 $n>1$ 并非椭圆算子，因此空间 $S_{\overline{\partial}^*}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D)$ 对于映射 (1.13) 来说过于宽泛，因而无法使其成为双射，见下例。

例 1.4. 设 $n \geq 1$ ，并令 $D = B(0,1)$ 为以原点为中心的单位球。为了证明映射 (1.13) 对于 $n>1$ 不是单射，我们使用调和齐次函数。

具体来说，设 $\{h_r^{(j)}\}$， $r \geq 0$ 是勒贝格空间$L^2(\partial B(0,1))$ 中的一组标准正交基，它定义在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的球面 $\partial B(0,1)$ 上，由次数为 r 的球谐函数组成，参见例如 [31, 第 XI 章], ，其中 j 是基中多项式的编号， $1 \leq j \leq J(r,2n)$，$J_{0,2}=1$, $J_{r,2}=2$, $r \in \mathbb{N}$, 以及$J_{r,2n} = \frac{(2n+2r-2)(r+2n-3)!}{r!(2n-2)!}$， $n>1$。对每个 r，将 h_r 调和延拓至 D，得到调和齐次多项式，我们仍将其记作 h_r。将 h_r 调和延拓至 $\mathbb{R}^{2n} \setminus \overline{D}$ 可得

$$\frac{h_r(x)}{|x|^{2n+2r-2}}. \tag{1.14}$$

若 $n \geq 1$，则任意向量值函数 $\overline{\partial}\Big(h_r\big(\frac{x}{|x|^{2n+2r-2}}\big)\Big)$， $r \in \mathbb{Z}_+$，满足

$$\overline{\partial}^*\Big(\overline{\partial}\Big(\frac{h_r(x)}{|x|^{2n+2r-2}}\Big)\Big) = 0 \text{ in } \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \tag{1.15}$$

因此 $\overline{\partial}\ \frac{h_r(x)}{|x|^{2n+2r-2}}$ 对所有 $r \in \mathbb{Z}_+$ 都属于空间 $S_{\overline{\partial}^*}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D)$。

利用复结构，可以将调和齐次多项式 h_r 改写为

$$h_{p,q}(z,\overline{z}) = \sum_{|p+q|=r} a_{p,q} z^p \overline{z}^q$$

其中 $p=(p_1,\dots p_n)$ $q=(p_1,\dots q_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $z^p = z_1^{p_1}\dots z_n^{p_n}$, $\overline{z}^p = \overline{z}_1^{q_1}\dots\overline{z}_n^{q_n}$， 而$a_{p,q}$ 是适当的复系数，从而保证调和性，参见 [13, 第 1 章，第 5] 节。

现在，公式 (1.15) 表明，空间 $S_{\overline{\partial}^*}(\mathbb{C}^n \setminus B(0,1))$ 包含在 $\mathbb{C}^n \setminus B(0,1)$ 的邻域内收敛的如下形式的级数

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{|p+q|=r} a_{p,q}^{(j)} \sum_{j=1}^{J(r)} \overline{\partial}\Big(\frac{z^p\overline{z}^q}{|z|^{2n+2r-2}}\Big) \tag{1.16}$$

具有适当的复系数 $a_{p,q}^{(j)}$ 而且，其中包含非零元素g，它们对所有 $u \in \mathcal{O}(B(0,1))$ 都使 Grothendieck 配对 (1.12) 消失，若 $n>1$。

Indeed, take the vector $g^{(p,q)} = \overline{\partial}\Big(\frac{2\overline{z}^q z^p}{|z|^{2n+2|q|-2}}\Big) \in S_{\overline{\partial}^*}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D)$.

If $n=1$ then

$$\frac{2\overline{z}^q z^p}{|z|^{2n+2|q|-2}} = \frac{2\overline{z}^q z^p}{|z|^{2|q|}} = \frac{2z^p}{z^q}$$

因此，在这种情况下， $g^{(p,q)} \equiv 0$ 属于 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$。于是，我们继续讨论 $n>1$。

众所周知，对于任意光滑区域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ ，我们有

$$(-1)^{j-1} dx[j] = \nu_j(x) ds(x) \text{ on } \partial\mathcal{D},$$

其中， $\nu(x) = (\nu_1(x) \dots \nu_n(x))$ 是 $\partial\mathcal{D}$ 在点 x 处的外单位法向量，而 ds 是 ∂D 上的体积形式。显然，对于任何以原点为中心、半径为 R 的球面 S_R ，我们有 $\nu(x) = x/R$。因此

$$(-1)^{j-1} d\overline{z}[j] \wedge dz = 2^{n-1} \imath^n \frac{z_j}{2R}\, ds(z, \overline{z})$$

在 S 上，参见引理 3.5] [13, 。

然后，利用正齐次函数的欧拉公式，我们得到

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{g}_j^{(p,q)}(z)\,(-1)^{j-1}\, d\overline{z}[j] \wedge dz = 2^{n-1}\imath^n \sum_{j=1}^{n} \frac{z_j}{R} \overline{\overline{\partial}_j \Big(\frac{\overline{z}^q z^p}{|z|^{2n+2|q|+2|p|-2}} \Big)}\, ds =$$

$$(1.17)\quad \frac{2^{n-1}\imath^n}{R} \overline{\sum_{j=1}^{n} \overline{z}_j \overline{\partial}_j \Big(\frac{\overline{z}^q z^p}{|z|^{2n+2|q|+2|p|-2}} \Big)}\, ds = 2^{n-1}\imath^n (1-|p|-n) \frac{z^q \overline{z}^p ds}{R^{2n+2|q|+2|p|-1}}$$

在球面 S_R 上。

最后，由于格罗滕迪克配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle_3$ 不依赖于区域 G 的选取，我们可以取以原点为中心、半径为 R 的球 $G = B(0, R)$。于是 $S_R \subset B(0, 1)$，公式 (1.17) 对所有满足 $|q| \geq 1$ 的 $q \in \mathbb{Z}_+$ 给出：

$$\langle z^s, g^{(0,q)} \rangle_3 = 2^{n-1}\imath^n (1-n) \int_{S_R} \frac{z^{q+s} ds}{R^{2n+2|q|-1}} = 0 \text{ for all } s \in \mathbb{Z}_+^n$$

根据全纯函数的著名性质。因此，

$$\langle u, g^{(0,q)} \rangle_3 = 0 \text{ for all } u \in \mathcal{O}(B(0,1)),$$

对于无穷多个元素 $g^{(0,q)}$ ，满足 $|q| \geq 1$ ，这正是需要证明的。

最后我们指出，根据公式 (1.14) 和推论 1.3，空间 $\Sigma(\hat{}\mathbb{C}^n \setminus B(0,1))$ 与所有在 $\mathbb{C}^n \setminus B(0,1)$的邻域内收敛的下列形式级数所成的集合相同：

$$\sum_{|p| \geq 0} \frac{a_p^{(j)} z^p}{|z|^{2n+2|p|-2}}$$

其中复系数 $a_p^{(j)}$ 取适当的值。当然，向量

$$g^{(p)}(z) = \overline{\partial} \Big(\frac{z^p}{|z|^{2n+2|p|-2}} \Big)$$

属于空间 $S_{\overline{\partial}^*}(\hat{}\mathbb{C}^n \setminus D)$。然而，根据 (1.17)，

$$\langle z^p, g^{(p)} \rangle_3 = 2^{n-1}\imath^n (1-|p|-n) \int_{S_R} \frac{|z|^{2p_1} \dots |z|^{2p_n} ds}{R^{2n+2|p|-1}} \neq 0 \text{ for all } p \in \mathbb{Z}_+^n,$$

即 $g^{(p)}$ 不消去空间 $\mathcal{O}(B(0,1))$。

2. The proof of Theorem 0.1

事实上，证明与对偶（0.1）和（1.11）的经典方案是并行的。

2.1. 配对与映射。首先，我们回顾一下，对于任意开集 $U \subset \mathbb{R}^n$，空间 $\mathcal{H}(U)$ 的元素实际上都是无穷可微的（它们在每一点 $y \in U$ 甚至都是实解析的）。特别地，对于闭集 $\sigma \subset \mathbb{C}^n$，空间 $\mathcal{H}(\sigma)$ 的任意元素实际上在开集 $U \ni \sigma$上都是无穷可微的。

取函数 $u \in \mathcal{O}(D)$ 和 $v \in \Sigma($ $\hat{\ }$ $\mathbb{C}^n \setminus D)$。根据上述讨论，存在一个包含 $\mathbb{C}^n \setminus D$ 的（无界）区域 U_v，使得 $v \in \mathcal{H}(U_v) \cap C^\infty(U_v)$。因此，$V_v = U_v \cap D$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个开集。此外，由于 ∂D 是连通的，存在一个光滑闭曲面 $\Gamma \subset V_v$，它是某个有界域 $G \Subset D$ 的边界。

于是，我们可以定义空间 $\mathcal{O}(D)$ 与 $\Sigma($ $\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D)$ 之间的配对：

$$\langle u, v\rangle = \int_\Gamma \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \overline{(\overline{\partial}_j v_j)(z)}\, u(z)\, d\overline{z}[j] \wedge dz \Big) \tag{2.1}$$

$\hat{\ }$ 适用于 $u \in \mathcal{O}(D)$ 和 $v \in \Sigma(\mathbb{C}^n \setminus D)$。注意，向量 $w = \overline{\partial} v$ 属于 $\hat{\ }\hat{\ }S_{\overline{\partial}^*}($ $\mathbb{C}^n \setminus D)$，如果 $v \in \Sigma(\mathbb{C}^n \setminus D)$，因此配对 (2.1) 仍与格罗滕迪克配对 (1.12) 密切相关。

接下来，根据斯托克斯公式，对于任意两个具有上述性质的曲面 Γ_1, Γ_2，有

$$\int_{\Gamma_1} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \overline{(\overline{\partial}_j v_j)(z)}\, u(z)\, d\overline{z}[j] \wedge dz \Big) - \int_{\Gamma_2} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \overline{(\overline{\partial}_j v_j)(z)}\, u(z)\, d\overline{z}[j] \wedge dz \Big) =$$

$$\int_\Omega \Big(\sum_{j=1}^n \overline{(\overline{\partial}_j v)}\, \overline{\partial}_j u - \frac{1}{4} \Delta_{2n} u \Big) d\overline{z} \wedge dz = 0$$

$\hat{\ }$ 对所有 $u \in \mathcal{O}(D)$ 和所有 $v \in \Sigma(\mathbb{C}^n \setminus D)$ 均成立，其中 Ω 是由曲面 Γ_1, Γ_2 围成的开集。因此，配对 (2.1) 不依赖于$\Gamma \subset V_v$的特定选择。

显然，

$$|\langle u, v\rangle| \le C_\Gamma \max_{z \in \Gamma} |\nabla v(z)| \max_{x \in \Gamma} |u(z)| \tag{2.2}$$

$\hat{\ }$ 存在一个与 $u \in \mathcal{O}(D)$ 及所有 $v \in \Sigma(\mathbb{C}^n \setminus D)$ 无关的常数 C_Γ。因此，考虑所讨论空间的拓扑，配对 (2.1) 诱导出一个分别连续的半双线性映射

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{O}(D) \times \Sigma(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D) \to \mathbb{C} \tag{2.3}$$

特别地，对于任意固定的 $v \in \Sigma($ $\hat{\ }\mathbb{C}^n \setminus D)$，泛函

$$f_v(u) = \langle u, v\rangle,\ u \in \mathcal{O}(D), \tag{2.4}$$

有界且线性，即 $f_v \in (\mathcal{O}(D))^*$。此外，由 (2.2)，映射

$$\Sigma(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D) \ni v \to f_v \in (\mathcal{O}(D))^* \tag{2.5}$$

是反线性且连续的。

2.2. 映射的单射性。我们来证明映射 (2.5) 是单射的。事实上，设

$$\langle u, v\rangle = 0 \text{ for all } u \in \mathcal{O}(D).$$

根据推论 1.3，存在一个函数 $w \in H^1(D) \cap \mathcal{O}(D)$，满足 $\mathsf{t}^-(w) = v$ 在 ∂D 上。特别地，

$$\langle w, v\rangle = 0.$$

另一方面，由于 $w \in H^1(D) \cap \mathcal{O}(D)$，斯托克斯公式给出

$$0 = \langle w, v\rangle = \int_\Gamma \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \overline{(\overline{\partial}_j v_j)(z)}\, w(z)\, d\overline{z}[j] \wedge dz\Big) = \tag{2.6}$$

$$\int_{\partial D} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \overline{(\overline{\partial}_j v_j)(z)}\, v(z)\, d\overline{z}[j] \wedge dz\Big) =$$

$$\lim_{R\to+\infty} \Big(\int_{B(0,R)\setminus\overline{D}} |\overline{\partial} v(z)|^2 dx - \int_{|z|=R} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \overline{(\overline{\partial}_j v_j)(z)}\, v(z)\, d\overline{z}[j] \wedge dz\Big).$$

由于 v 在 $\mathbb{R}^{2n} \setminus D$ 中调和且在无穷远处趋于零，我们有

$$|\partial^\alpha v(z)| \le c_1 |z|^{2-2n-|\alpha|}, \text{ if } n \ge 2, \alpha \in \mathbb{Z}_+^{2n},$$

例如，参见 [35, §24.10，公式 (33)–(35)]。特别地，

$$\lim_{R\to+\infty} \Big(\int_{|z|=R} \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \overline{(\overline{\partial}_j v_j)(z)}\, v(z)\, d\overline{z}[j] \wedge dz\Big) = 0. \tag{2.7}$$

因此，由 (2.6)、(2.7) 可得

$$0 = \langle w, v\rangle = \sum_{j=1}^n \|\overline{\partial}_j v\|^2_{L^2(\mathbb{C}^n\setminus\overline{D})},$$

^^ 即 $v \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n \setminus \overline{D})$。此外，它属于 $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n \setminus D)$，因为它在 $\mathbb{C}^n \setminus D$ 的一个邻域内调和。由于 $n > 1$，关于多复变全纯函数紧致奇点可去性的哈托格斯定理立即推出，v 可延拓为在整个 $\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数。

特别地，由于 $v \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ 在无穷远处趋于零，根据 Liouville 定理，它恒等于零；也就是说，映射 (2.5) 是反线性、连续且单射的。

2.3. 映射的满射性。我们来证明 (2.5) 是满射的。

事实上，根据 Khan-Banach 定理，存在一个泛函 $f \in C(D)'$，它在 $\mathcal{O}(D)$ 上与 f 一致。然后，根据空间 $C(D)$ 上经典的 Riesz 对偶，存在一个在 D 中具有紧支集的测度 μ，使得

$$f(u) = \int_K u(z) d\mu(z) \text{ for all } u \in \mathcal{O}(D), \tag{2.8}$$

其中，紧集 $K \Subset D$ 包含 μ 的支集 $\operatorname{supp}(\mu)$，例如参见 [6,§4.10]。

由于 $K \Subset D$，存在一个具有光滑边界的区域 G，使得 $K \Subset G \Subset D$。特别地，由 Bochner-Martinelli 公式 (1.6)，我们有

$$(M_{\partial G} u)(z) = \begin{cases} u(z) & z \in G, \\ 0, & z \notin \overline{G}, \end{cases} \tag{2.9}$$

对任意 $u \in \mathcal{O}(D)$。

现在，由公式 (1.2)、(2.8)、(2.9) 和 Fubini 定理可得

$$f(u) = \int_K \Big(\int_{\partial G} \mathfrak{U}_n(\zeta, z) u(\zeta)\Big) d\mu(z) = \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} \int_{\partial G} h(\zeta)\, u(\zeta)\, d\zeta, & n = 1, \\ \int_{\partial G} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \overline{(\overline{\partial}_j \hat{v})(\zeta)}\, u(\zeta)\, d\overline{\zeta}[j] \wedge d\zeta, & n > 1, \end{cases}$$

对所有满足下列条件的 $u \in \mathcal{O}(D)$

$$h(\zeta) = \frac{1}{2\pi\iota} \int_K \frac{d\mu(z)}{\zeta - z},\ \hat{v}(\zeta) = \int_K \Phi_{2n}(\zeta, z) d\overline{\mu}(z).$$

若 $n = 1$，则函数 h 在 $\mathbb{C} \setminus K$ 中是全纯的，并且由于柯西核的行为，在无穷远处 $\hat{}$ 处消失，即 $h \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus D)$，因为 $K \Subset D$。这便得到了 A. 格罗滕迪克 [9], G. K¨othe [12], 和 J. Sebasti˜ao e Silva [27] 关于配对 (1.8) 所给出的经典对偶性 (0.1)。随后，替换 $g = \overline{h}$ 导出了 A. 格罗滕迪克 [10] 关于配对 (1.9) 所给出的经典对偶性 (1.12)。

对于 $n > 1$，由于核 $\Phi_{2n}(\zeta, z)$ 关于变量 ζ 是拉普拉斯算子的右基本解，我们可知 $\hat{v}$ 在 $\hat{\mathbb{C}}^n \setminus K$ 中是调和的，并且在无穷远处消失。特别地，$\hat{v} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n \setminus D)$，因为 $K \Subset D$。

然而，我们不能轻易断定 $\hat{v} \in \Sigma(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D)$。

为解决这一困难，固定 $u \in \mathcal{O}(D)$ 以及一个序列 $\{u_\nu\} \subset \mathcal{O}(D) \cap H^1(D)$，使其在 $C(D)$ 中逼近 u ；根据定理的假设，这样的序列存在。于是，由 (2.10) 和斯托克斯公式，

$$f(u) = \lim_{\nu\to\infty} f(u_\nu) = \tag{2.11}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\partial G} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \overline{(\overline{\partial}_j \hat{v})(\zeta)}\, u_\nu(\zeta)\, d\overline{\zeta}[j] \wedge d\zeta =$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\partial D} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \overline{(\overline{\partial}_j \hat{v})(\zeta)}\, u_\nu(\zeta)\, d\overline{\zeta}[j] \wedge d\zeta.$$

另一方面，我们回顾 [23] 的以下结果。对于函数 $w_0 \in H^{1/2}(\partial D)$，记 $\mathcal{P}_D(w_0)$ 为内狄利克雷问题的唯一解 $w \in H^1(D)$，该问题对应于拉普拉斯方程：

$$\begin{cases} \Delta_{2n} \mathcal{P}_D(w_0) = 0 & \text{in} \quad D, \\ \mathcal{P}_D(w_0) = w_0 & \text{on} \quad \partial D. \end{cases} \tag{2.12}$$

˜类似地，记 $\mathcal{P}_D(w_0)$ 为外部狄利克雷问题的唯一解，该问题对应于拉普拉斯方程：

$$\begin{cases} \Delta_{2n} \tilde{\mathcal{P}}_D(w_0) = 0 & \text{in} \quad \mathbb{C}^n \setminus \overline{D}, \\ \tilde{\mathcal{P}}_D(w_0) = w_0 & \text{on} \quad \partial D, \end{cases} \tag{2.13}$$

满足 (0.3)，并且 $\overline{\partial} \tilde{\mathcal{P}}_D(w_0) \in L^2(\mathbb{C}^n \setminus \overline{D})$。

引理 2.1。厄米形式

$$h_D(w, \tilde{w}) = \sum_{j=1}^{n} \int_D \overline{(\overline{\partial}_j w)}\, \overline{\partial}_j \tilde{w}\, dx + \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}} \overline{(\overline{\partial}_j \tilde{\mathcal{P}}_D(w))}\, \overline{\partial}_j \tilde{\mathcal{P}}_D(\tilde{w})\, dx$$

在 $H^1(D)$ 上定义了一个内积，并且由 $h_D(w, \tilde{w})$ 和标准内积在 $H^1(D)$ 上诱导的拓扑是等价的。

证明。参见 [23] （或参见 [19] 了解更深入的性质）。 □

于是斯托克斯公式表明，

$$-\int_{\partial D}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\overline{(\overline{\partial}_j\hat{v})(\zeta)}\,h(\zeta)\,d\overline{\zeta}[j]\wedge d\zeta = h_D(h,\mathcal{P}_D\hat{v})$$

对每个 $h\in H^1(D)\cap\mathcal{O}(D)$。特别地，(2.11) 得出

$$f(u)=-\lim_{\nu\to\infty}h_D(u_\nu,\mathcal{P}_D\hat{v})=-\lim_{\nu\to\infty}h_D(u_\nu,\Pi_D\mathcal{P}_D\hat{v}) \tag{2.14}$$

其中 $\Pi_D\colon H^1(D)\to H^1(D)\cap\mathcal{O}(D)$ 是与厄米形式 $h_D(\cdot,\cdot)$ 相关的正交投影。

~ ^ 我们将证明，当 $w\in\mathcal{H}(\mathbb{C}^n\setminus D)$ 时，函数 $\mathcal{P}_D(\Pi_D\mathcal{P}_Dw)$ 属于空间 $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n\setminus\hat{}\,\hat{}D)$。事实上，固定 $w\in\mathcal{H}(\mathbb{C}^n\setminus D)$。根据定义，存在一个具有 Lipschitz $w\in\mathcal{H}(\mathbb{C}^n\setminus G)$ 的区域 $G\Subset D$。由于配对不依赖于G，我们选择它，使集合 $D\setminus G$ 在D中没有紧分支。我们分别赋予空间 $H^1(D)$、$H^1(G)$ 内积 $h_D(\cdot,\cdot)$、 $h_G(\cdot,\cdot)$。

接下来我们指出，外部狄利克雷问题适定，并且厄米形式

$$\tilde{h}_D(W,\tilde{W})=\sum_{j=1}^{n}\int_D\overline{(\overline{\partial}_j\mathcal{P}_DW)}\overline{\partial}_j\mathcal{P}_D(\tilde{W})dx+\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}}\overline{(\overline{\partial}_jW)}\overline{\partial}_j\tilde{W}dx$$

是在由 $\mathcal{H}(\hat{}\,\mathbb{C}^n\setminus\overline{D})\cap H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{C}^n\setminus D)$ 中满足对所有 $1\le j\le n$ 均有 $\overline{\partial}_jW\in L^2(\mathbb{C}^n\setminus\overline{D})$ 的此类元素构成的空间 $\tilde{H}^1(\mathbb{C}^n\setminus\overline{D})\cap\mathcal{H}(\hat{}\,\mathbb{C}^n\setminus\overline{D})$ 上的内积。此外，根据构造，

$$h_D(\mathcal{P}_DW,h)=\tilde{h}_{\mathbb{C}^n\setminus\overline{D}}(W,\tilde{\mathcal{P}}_Dh) \tag{2.15}$$

对所有 $h\in H^1(D)\cap\mathcal{H}(D)$ 和 $W\in\tilde{H}^1(\mathbb{C}^n\setminus\overline{D})\cap\mathcal{H}(\hat{}\,\mathbb{C}^n\setminus\overline{D})$ 均成立。换言之，映射 $\tilde{\mathcal{P}}_D$ 在巴拿赫空间 $H^1(D)\cap\mathcal{H}(D)$ 与 $\tilde{H}^1(\mathbb{C}^n\setminus\overline{D})\cap\mathcal{H}(\hat{}\,\mathbb{C}^n\setminus\overline{D})$ 之间定义了一个同构，类似地

$$h_G(\mathcal{P}_GW,h)=\tilde{h}_G(W,\tilde{\mathcal{P}}_Gh) \tag{2.16}$$

对所有 $h\in H^1(G)\cap\mathcal{H}(G)$ 和 $W\in\tilde{H}^1(\mathbb{C}^n\setminus\overline{G})\cap\mathcal{H}(\hat{}\,\mathbb{C}^n\setminus\overline{G})$ 均成立。

我们还用 $Y^1(G)$ 表示 $H^1(D)\cap\mathcal{O}(D)$ 在 $H^1(G)\cap\mathcal{O}(G)$ 中的闭包。由斯蒂尔切斯-维塔利定理，嵌入 $R\colon H^1(D)\cap\mathcal{H}(D)\to H^1(G)\cap\mathcal{H}(G)$ 是紧的。于是，根据紧自伴算子的谱的希尔伯特定理可知，空间 $H^1(D)\cap\mathcal{H}(D)$ 中存在一组关于 $h_D(\cdot,\cdot)$ 正交归一的基 $\{b_m\}_{m\in\mathbb{N}}$，它们在 $H^1(G)\cap\mathcal{H}(G)$ 中构成关于 $h_G(\cdot,\cdot)$ 的正交系，并满足

$$\Pi_DR^*R\Pi_Db_m=\lambda_mb_m.$$

此外，由于集合 $D\setminus G$ 在 D 中没有紧致分支，根据梅尔格良定理，空间 $H^1(D)\cap\mathcal{H}(D)$ 在 $H^1(G)\cap\mathcal{H}(G)$ 中处处稠密，即系统 $\{Rb_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是空间 $H^1(G)\cap\mathcal{H}(G)$ 的正交基，见 [29]。特别地，特征值 $\lambda_m\neq0$ 对应于子空间 $H^1(D)\cap\mathcal{O}(D)$，系统 $\{b_m\}_{\lambda_m\neq0}$ 是该空间的标准正交基，而系统$\{Rb_m\}_{\lambda_m\neq0}$ 是空间 $Y^1(G)$ 的正交基。因此，投影 Π_D 可表示为

$$\Pi_Dh=\sum_{\lambda_m\neq0}h_D(h,b_m)b_m\ \text{for all}\ h\in H^1(D)\cap\mathcal{H}(D).$$

然而，根据 (2.15)，我们实际上可以将算子 $\Pi_D\mathcal{P}_D$ 视为从 $\tilde{H}^1(\mathbb{R}^n \setminus \overline{D}) \cap \mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus \overline{D})$ 到由满足 $\overline{\partial}P_D W = 0$ 属于 D 的函数 W 构成的闭子空间的正交投影，即

$$\tilde{\mathcal{P}}_D\Pi_D h = \sum_{\lambda_m \neq 0} h_D(h, b_m)\tilde{\mathcal{P}}_D b_m \text{ for all } h \in H^1(D) \cap \mathcal{H}(D).$$

若将连续嵌入算子记为 $\tilde{R}$ $\tilde{R}\colon \mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus \overline{G}) \cap \tilde{H}^1(\mathbb{C}^n \setminus \overline{G}) \to \mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus \overline{D}) \cap \tilde{H}^1(\mathbb{C}^n \setminus \overline{D})$，则对于任意 $w \in \mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D)$，有

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} h_G(\mathcal{P}_G w, Rb_m)\frac{\tilde{\mathcal{P}}_G Rb_m}{h_G(Rb_m, Rb_m)},\ \tilde{R}w = \sum_{m=1}^{\infty} h_D(\mathcal{P}_D w, b_m)\tilde{\mathcal{P}}_D b_m,$$

$$\tilde{\mathcal{P}}_D\Pi_D\mathcal{P}_D\tilde{R}w = \sum_{\lambda_m \neq 0} h_D(\mathcal{P}_D\tilde{R}w, b_m)\tilde{\mathcal{P}}_D b_m. \tag{2.17}$$

当然，根据调和函数唯一性定理，w 是 Rw 从 $\mathbb{C}^n \setminus D$ 到 $\mathbb{C}^n \setminus G$的唯一调和延拓。此外，若 $\lambda_m \neq 0$，则

$$h_G(Rb_m, Rb_m) = h_D(\Pi_D R^* R\Pi_D b_m, b_m) = \lambda_m$$

因为 $h_D(b_m, b_m) = 1$，于是级数

$$\sum_{\lambda_m \neq 0} h_G(\mathcal{P}_G w, Rb_m)\frac{\tilde{\mathcal{P}}_G Rb_m}{h_G(Rb_m, Rb_m)} = \sum_{\lambda_m \neq 0} h_G(\mathcal{P}_G w, Rb_m)\frac{\tilde{\mathcal{P}}_G Rb_m}{\lambda_m} \tag{2.18}$$

在空间 $\mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus \overline{G}) \cap \tilde{H}^1(\mathbb{C}^n \setminus \overline{G})$ 中收敛。

另一方面，若 $w \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^n \setminus D)$，则根据斯托克斯公式，

$$h_D(\mathcal{P}_D\tilde{R}w, \Pi_D h) = -\int_{\partial D}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\overline{(\overline{\partial}_j w)(\zeta)}\,\Pi_D h(\zeta)\,d\overline{\zeta}[j] \wedge d\zeta = \tag{2.19}$$

$$-\int_{\partial G}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\overline{(\overline{\partial}_j w)(\zeta)}\,\Pi_D h(\zeta)\,d\overline{\zeta}[j] \wedge d\zeta = h_G(\mathcal{P}_G w, R\Pi_D h).$$

对所有 $h \in H^1(D) \cap \mathcal{H}(D)$ 均成立。特别地，

$$\tilde{\mathcal{P}}_D\Pi_D\mathcal{P}_D\tilde{R}w = \sum_{\lambda_m \neq 0} h_G(\mathcal{P}_G w, Rb_m)\tilde{\mathcal{P}}_D b_m. \tag{2.20}$$

此外，由于 $\mathcal{P}_G\mathcal{P}_G = I$，公式 (2.19) 推出

$$h_D(\mathcal{P}_D\tilde{R}\tilde{\mathcal{P}}_G Rb_m, \Pi_D h) = h_G(Rb_m, RR\Pi_D h) = \lambda_m h_D(b_m, \Pi_D h),$$

若 $\lambda_m \neq 0$，则对所有 $h \in H^1(D) \cap \mathcal{H}(D)$ 均成立。因此，由于 $H^1(D) \cap \mathcal{O}(D)$ 稠密嵌入于 $Y^1(G)$，且映射 $\tilde{\mathcal{P}}_G$ 在巴拿赫空间 $H^1(G) \cap \mathcal{H}(G)$ 与 $\tilde{H}^1(\mathbb{C}^n \setminus \overline{G}) \cap \mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus \overline{G})$ 之间定义了一个同构，公式 (2.17)、(2.18)、(2.20) 得出

$$\tilde{\mathcal{P}}_D\Pi_D\mathcal{P}_D\tilde{R}w = \sum_{\lambda_m \neq 0} h_G(\mathcal{P}_G w, Rb_m)\frac{\tilde{\mathcal{P}}_G Rb_m}{h_G(Rb_m, Rb_m)}.$$

特别是，这意味着 $\tilde{\mathcal{P}}_D\Pi_D\mathcal{P}_D w \in \mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D)$ 和

$$\overline{\partial}\mathcal{P}_D\tilde{\mathcal{P}}_D\Pi_D\mathcal{P}_D w = 0 \text{ in } D \text{ for all } w \in \mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D).$$

因此， $v = \tilde{\mathcal{P}}_D \Pi_D \mathcal{P}_D \hat{} v$ 属于 $\Sigma(\hat{}\mathbb{C}^n \setminus D)$，并且根据 (2.11)、(2.14)，

$$f(u) = -\lim_{\nu\to\infty} h_D(u_\nu, v) =$$

$$\int_{\partial G} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \overline{(\overline{\partial}_j v(\zeta))}\, u(\zeta)\, d\overline{\zeta}[j] \wedge d\zeta = \langle u, v\rangle,$$

即映射 (2.5) 是满射。

最后， DF空间的闭图定理（见 [6, 第 6] 章或 [18,推论 A.64], ）表明，(2.5) 的逆映射也是连续的，即映射 (2.5) 是一个拓扑（反线性）同构。

定理 0.1 的证明至此完成。

3. Miscellaneous

正如我们在引言中所指出的，对于具有实解析边界的有界域 $D \Subset \mathbb{C}^n$ ，若空间 $\mathcal{O}(\overline{D})$ 在 $\mathcal{O}(D)$ 中稠密，则定理 0.1 可由 [20], 的结果推出；该文针对与 (2.1) 相关的一种非常特殊的配对证明了对偶性 (0.2)（关于有界域中具有实解析边界时，对应其他一些配对类型的 (0.2)，另见 [2], [3], [32], 和 [30] ）。在这一特殊情形下，关于 D 的假设之所以存在本质差异，是因为 [20] 中的证明使用了格罗滕迪克对偶

$$(\mathcal{H}(D))^* \cong \mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D)$$

由此可得，对于任意有界域以及连续映射 [10, 定理 4]

$$\tilde{\mathcal{P}}_D : \mathcal{O}(\overline{D}) \to \mathcal{H}(\hat{\mathbb{C}}^n \setminus D)$$

该映射适用于具有实解析边界的区域（当然，即使边界为 C^∞-光滑，也不可能对所有有界域都成立）。

由 [20, 定理 8.1] 可知， [20] 中定义的配对诱导出拓扑同构 (0.2)，当且仅当空间 $\mathcal{O}(\overline{D})$ 在 $\mathcal{O}(D)$ 中稠密。最后这一观察促使我们寻找与映射 (2.5) 相关的类似结论。

推论3.1. 设 $D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$ 是具有连通 Lipschitz 边界的有界域。那么，配对 (2.1) 诱导出拓扑同构 (0.4)，当且仅当空间 $H^1(D) \cap \mathcal{O}(D)$ 在 $\mathcal{O}(D)$ 中稠密。

证明. 考虑到定理 0.1，我们需要证明 $H^1(D) \cap \mathcal{O}(D)$ 在 $\mathcal{O}(D)$ 中稠密。为此，设 F 是 $\mathcal{O}(D)$ 上一个在 $H^1(D) \cap \mathcal{O}(D)$ 上消失的连续线性泛函。根据哈恩–巴拿赫定理，只要证明 $F \equiv 0$，即可得证。由假设，存在一个 $v \in \Sigma(\hat{}\mathbb{C}^n \setminus D)$，使得对所有 $u \in H^1(D) \cap \mathcal{O}(D)$，都有 $\langle v, u\rangle = 0$ 。由推论 1.3 可知，$\mathcal{P}_D v \in H^1(D) \cap \mathcal{O}(D)$，因而 $\langle v, \mathcal{P}_D v\rangle = 0$。因此，类似于定理 0.1 中单射性证明的论证表明，$v = 0$ 属于 D。于是 $F = 0$，得证。□

致谢 本研究得到克拉斯诺亚尔斯克数学中心的支持，该中心由俄罗斯联邦教育与科学部资助（协议编号 075-02-2022-876）。

References

[1] Айзенберг Л. А., *The general form of a continuous linear functional in spaces of functions holomorphic in convex domains in* $\mathbb{C}^n$ **166** 1966 , 苏联科学院学报 ( ), no. 5, 1015–1018.[2] Айзенберг Л. А., 金迪金 С. Г., *On the general form of a linear continuous functional in spaces of holomorphic functions* **137** , 莫斯科州师范学院学报 (1964), 7–15. [3] Айзенберг Л. А., 米佳金 В. С., *Spaces of functions analytic in multi-circular domains* 1 2 1960 153 170 , 西伯利亚数学杂志, : ( ), – . [4] 布朗谢 P., *A duality theorem for solutions of elliptic equations*, 国际数学与数学科学杂志 V. 13, no. (1990), 73–86. [5] 科斯塔贝尔, M., Lipschitz 域上的边界积分算子：基本结果, 工业与应用数学学会数学分析杂志, Vol. 19, No. 3, 1988, 613–626.[6] 爱德华兹, R.E. 泛函分析：理论与应用。伦敦，霍尔特、莱因哈特和温斯顿公司，1965.[7] 冈宁 R.C., 罗西, H., 多复变数解析函数，恩格尔伍德克利夫斯, N.J., 普伦蒂斯霍尔公司，1965.[8] 吉尔巴格, D., 特鲁丁格, N., *Elliptic Partial Differential Equations of second order*, 柏林，施普林格出版社，1983.[9] 格罗滕迪克 A., *Sur certain espaces de fonctions holomorphes. I*, 《纯粹与应用数学杂志》, 192 (1953) pp. 35–64. [10] 格罗滕迪克 A., *Sur les espaces de solutions d'une classe generale d'equations aux derivees partielles* **2** 1953 243 280 , 《数学分析杂志》 (): – .[11] 科恩 J. J., *Subellipticity of the ∂-Neumann problem on pseudo-convex domains: sufficient conditions* 142 1 2 1979 79 122 , 《数学学报》 – ( ), – . [12] K¨othe G., *Dualität in der Funktionentheorie*, 《纯粹与应用数学杂志》, 191 (1953), 30–39.[13] 克特曼诺夫 A.M., 博赫纳-马丁内利积分及其应用，Birkh¨auser, 巴塞尔, 1995.[14] 曼托瓦尼 F., 斯帕尼奥洛 S., *Funzionali analitici e funzioni armoniche*. 比萨高等师范学院年刊, 18 (1964), 475–512. [15] 马蒂诺 A., *Sur la topologies des espaces de fonctions holomorphes*, Math. Ann., 163 (1966), 62–88. [16] 马蒂诺 A., *Sur les fonctionelles analytiques et le transformation de Fourier-Borel*, 《数学分析杂志》 9 (1963), 1–164. [17] 莫里 C. B., 尼伦伯格 L., *On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations* **10** 1957 , 《纯粹与应用数学通讯》 ( ), 271–290.[18] 森本, M.《佐藤超函数导论》。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1993.[19] 纳奇诺维奇 M., Shlapunov A.A., *On iterations of Green integrals and their applications to elliptic differential complexes* 180 1996 243 , 《数学通讯》, ( ), – 284.[20] 纳奇诺维奇 M., Shlapunov A., Tarkhanov N., *Duality in the spaces of solutions of elliptic systems* 1998 4, 207 232 , 比萨高等师范学院年刊, XXVI ( ), no. – . [21] 中井 M., 萨里奥 L. *Harmonic Functionals on Open Riemann Surfaces*, 《太平洋数学杂志》93 (1981), 147–161. [22] 纳帕尔科夫 V. V. (Jr.), *Various representation of the space of analytic functions and the problem of the dual space description* 66, 3 2002 , 《数学报告》, V. no. ( ), 335–337.[23] 罗曼诺夫 A.V., *Convergence of iterates of the Bochner–Martinelli operator, and the Cauchy–Riemann equation* 19 5 1978 1211 1215 , 《苏联数学报告》, : ( ), – . [24] 舒尔策 B.-W., 伦佩尔 S., 椭圆边值问题指标理论，Akademie-Verlag, 柏林, 1982. [25] 舍费尔 H.H., 沃尔夫 M.P., 拓扑向量空间，第2版，施普林格出版社，柏林，1999.[26] 塞尔 J.P., *Une theoréme de dualité*, 《瑞士数学评论》, 29 (1955), 9–26

[27] Sebasti˜ao e Silva J., *Analytic functions in functional analysis*, Portug. Math., 9 (1950), 1–130. [28] Shlapunov A.A., *Duality in spaces of solutions to elliptic systems*, Siberian Math. Journal, V. 43, N. 4 (2002), 948–958. [29] Shlapunov A.A., Tarkhanov N.N., *On the Cauchy problem for holomorphic functions of Lebesgue class L^2 in domains.* 33, 5 1992 914 922

Siberian Math. Journal, V. N. ( ), – . [30] Shlapunov A.A., Tarkhanov N., *Duality by reproducing kernels*. International Journal of Math. and Math. Sciences, 6 (2003), 78pp. [31] Sobolev S.L.《求积公式理论导论》, Nauka, 莫斯科, 1974 年。[32] Stout E. L., *Harmonic duality, hyperfunctions and removable singularities*, Izv. RAN, Ser. math. 59 (1995), no. 6, 133–170. [33] Tarkhanov N., *Complexes of Differential Operators*, Kluwer Academic Publishers, 荷兰多德雷赫特, 1995 年。[34] Tarkhanov N., *The Analysis of Solutions of Elliptic Equations*, Kluwer Academic Publishers, 荷兰多德雷赫特, 1997 年。[35] Vladimirov V.S.《数理物理方程》, Nauka, 莫斯科, 1988 年。[36] Zorn P., *Analytic Functionals and Bergman spaces*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa IX (1982), 365–404.*Email address*: ykhoryakova@sfu-kras.ru*Email address*: ashlapunov@sfu-kras

.ru

Siberian Federal University, Institute of Mathematics and Computer Science, pr. Svobodnyi 79, 660041 Krasnoyarsk, Russia