《物理评论D》107, 063506，发表于2023年3月6日，DOI:10.1103/PhysRevD.107.063506

从谱形定义不明确的前景中分离CMB μ 谱畸变

D.I. Novikov*Astro-Space Center of P.N. Lebedev Physical Institute, Profsoyusnaya 84/32, Moscow, Russia 117997*

A.O. Mihalchenko
Astro-Space Center of P.N. Lebedev Physical Institute,Profsoyusnaya 84/32, Moscow, Russia 117997 andMoscow Institute of Physics and Technology, Institutskiy pereulok,d.9, Dolgoprudny, Moscow Region, 141701, Russia

arXiv:2303.07671v1 [astro-ph.CO] 14 Mar 2023

本文提出了一种新方法，用于从谱形定义不明确的前景中分离宇宙微波背景的 μ 谱畸变。其思路是寻找对观测信号的最优响应。对于参数变化可能范围处于某些特定限制内的前景，该响应的敏感度较低；同时，它对 μ 畸变振幅的敏感度则很高。本文所述算法稳定、易于实现，并能同时最大限度地降低对前景和光子噪声的响应。

关键词：宇宙微波背景、谱畸变、数据分析、前景分离

I. 引言

探测宇宙微波背景（CMB）辐射频谱中的畸变，是观测宇宙学的一项关键任务 [1–5]。CMB 光谱偏离黑体谱形，代表着一种全新的信息渠道，可用于了解早期宇宙中的基本物理过程，而这些过程有时无法通过其他观测手段探测[6–9]。

宇宙中发生 μ 谱畸变 [10]的时期，对应的红移区间为 $z = 2\times10^6$ 至$z = 10^5$。探测此类畸变可为了解这一时期等离子体中可能发生的能量注入机制提供重要信息 [2, 11–15]。在这一阶段，宇宙中的光子总数保持不变，电子与光子之间的能量交换由科姆帕涅茨方程描述 [16]。因此，任何能量释放都会导致光子升温，同时保持其总数不变，这意味着分布偏离黑体谱形，呈现为具有非零化学势的玻色–爱因斯坦谱（即 μ 畸变）。针对谱畸变的拟议任务见[17, 18]。

测量 μ 畸变是一项极具挑战性的任务，而各种来源的前景 [19]又使其更加复杂。一些前景以及望远镜光学系统产生的光谱难以准确预测。实际上，观测到的宇宙前景谱（即使只针对单条视线）也是由具有不同参数的光谱叠加而成的（例如，尘埃温度各不相同）。这种光谱“鸡尾酒”难以估算，甚至无法预测到 μ 畸变测量 [19–25]所要求的精度。此外，与观测太阳亚耶夫-泽尔多维奇（SZ）效应（或 y 畸变）不同，测量 μ 畸变时，必须找到信号的单极分量。这意味着无法利用两个不同方向上的信号差异。因此，仪器应经过良好校准，并且必须考虑光学系统发出的辐射。这种辐射几乎无法建模，它是来自主镜不均匀冷却表面不同部分、温度各异的辐射叠加而成，并且可能在飞行过程中发生变化。

通常，前景谱由依赖于参数的解析表达式描述。观测信号中的参数分布原则上可以是任意的；也就是说，前景光谱的确切形状几乎无法预测。 [26], 提出了一种巧妙的“重新思考”此类问题求解方式，即引入矩方法，但这会增加需要从μ 信号中分离出的光谱种类。此外，该方法还对参数可能发生的变化作出了严格假设。

这里描述的方法截然不同。本文提出一种基于寻找特殊算子（“响应”）的方法，并将其应用于观测信号。该响应会尽可能减小参数处于有限变化区域内的前景贡献。此类区域的大小和配置可以任意设定，但应预先确定。与此同时，该算法对归一化 μ 信号本身的响应保持恒定。下文将证明，当灵敏度足够高时，对前景的响应相较于对 μ 信号的响应会变得微不足道。因此，所述算法无需以必要的精度对前景谱进行建模和分离，即可消除任意一组此类前景的贡献。需要强调的是，这种方法可应用于

任何前景辐射光谱定义不明确的观测。

为简要展示我们方法的有效性，我们将分析范围限定为三个前景组分：星际尘埃、宇宙红外背景（CIB）以及来自望远镜光学系统的辐射。我们使用修正黑体描述这三个组分的发射 [27]。在某些灵敏度水平下，简单的修正黑体可能不适合近似星际介质尘埃谱能量分布 [28, 29]。不过，尘埃辐射可以通过修正黑体谱的线性组合进行准确拟合。例如，双组分尘埃模型能够准确再现银河系弥散星际介质中尘埃在 0.1 毫米—3 毫米波长范围内的观测发射 [30]。关于如何在不同拟合方法之间作出选择等问题，将在 [31]中讨论。

本文结构如下：第二节提出一种算法，用于从谱形定义不明确的前景中分离 μ 畸变。第三节展示应用该算法得到的数值结果：首先讨论单个前景和单参数的情况，然后讨论更一般的情况。第四节给出简要结论。

II. 谱形定义不明确时将 μ 信号与前景分离

本节提出一种将 μ 型畸变与前景分离的算法。我们需要从总观测光谱中分离出的信号形式如下 [19]:

$$I_\mu = I_0 \frac{x^4 e^x}{(e^x-1)^2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{x}\right)\mu, \tag{1}$$

其中 $x = h\nu/kT_0$ ，宇宙微波背景温度为 $T_0 = 2.72548\ K$ [32, 33]。采用与 [19] 中相同的常数估计值 b、I_0 和 μ： $I_0 = 270\ MJy/sr$、$\mu = 2\times10^{-8}$ 和 $b = 2.1923$。总观测信号可写为:

$$S(\nu) = a_\mu I_\mu(\nu) + \sum_{m=1}^{M} I_m(\nu), \tag{2}$$

其中 a_μ 是待求振幅，而 I_m（ν）是 M 个来源各异的不同前景。

为了研究诸如 μ 畸变或萨尼亚耶夫-泽尔多维奇效应等信号的光谱特性，通常会使用光谱分辨率相对较低的设备，例如傅里叶变换光谱仪（傅里叶变换光谱仪）。它可以在多个频率通道中测量从最低 ν_{min} 到最高 ν_{max}频率的光谱 ν_j, $j = 1$、.., J，每个通道的宽度为 $\Delta\nu = \nu_{j+1} - \nu_j$。因此，离散信号 S_j [或向量 $\mathbf{S} = (S_1$、$...\ S_J)$]，我们测量得到的是

$$S_j = a_\mu I^j_\mu + \sum_m I^j_m + N_j,\ \ j = 1,..,J$$
$$I^j_\mu = \int_{\nu_j-\frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_j+\frac{\Delta\nu}{2}} I_\mu(\nu)\frac{d\nu}{\Delta\nu},\quad I^j_m = \int_{\nu_j-\frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_j+\frac{\Delta\nu}{2}} I_m(\nu)\frac{d\nu}{\Delta\nu}, \tag{3}$$

其中 N_j 是第 j 个频率通道的随机噪声，其均值为零，方差为 $\langle N_i N_j\rangle = C_{ij}$。预计噪声的协方差矩阵接近对角矩阵：当 $i \neq j$ 时， $C_{jj} = \sigma_j^2$ 且 $C_{ij} = 0$ 。σ_j 的取值取决于来自天空和望远镜光学系统的光子噪声、傅里叶变换光谱仪的频率范围（ν_{min} ： ν_{max}）、光谱分辨率 $\Delta\nu$、傅里叶变换光谱仪频段数、独立波束数，以及积分时间（观测持续时间）。

一般情况下，每个 I_m 都取决于 L 个参数p_ℓ $\ell = 1$、..... L，并且每个观测到的前景都可以写成如下形式:

$$I^j_m(\nu) = \int_\Omega a_m(\mathbf{P}) f_m(\nu_j, \mathbf{P}) d\mathbf{P},$$
$$d\mathbf{P} = dp_1 dp_2 \cdot \cdot dp_L, \tag{4}$$

其中，$\mathbf{P}$ $=(p_1$、..... $p_L)$ 是参数集合， $f_m(\nu_j,$ $\mathbf{P})$ 是表示前景谱的函数（通常用解析公式描述），Ω 是参数变化区域，而 a_m 是前景辐射的振幅，是参数 $\mathbf{P}$ 的函数。因此，例如，如果 $a_m(\mathbf{P})$ 具有狄拉克δ函数的形式 a_m $(\mathbf{P})$ $= A_m \cdot \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P_m})$，那么索引为 m 的前景谱将具有一个参数明确的模板 $\mathbf{P_m}$，其振幅为 A_m:$I^j_m(\nu)$ $= A_m \cdot f_m(\nu_j,$ $\mathbf{P_m})$。由于我们希望尽可能采用模型无关的方法，因此将函数 $a_m(\mathbf{P})$ 视为性质未知的随机函数。我们对这些函数施加非常宽松的限制，具体如下:

1. 振幅的绝对值积分 a_m应小于某些（预先估计的）值 A_m:

$$\int_\Omega |\ a_m(\mathbf{P})\ | d\mathbf{P} < A_m,$$
$$a_m(\mathbf{P}) = 0 \quad for \quad \mathbf{P} \notin \Omega.$$

2. 对于来源不同的前景，随机函数a_m 彼此独立，因此，如果 $m \neq k$， a_m和 a_k 不相关。这一假设并不完全正确，进行更详细的分析时可以考虑可能存在的相关性。

The algorithm

总观测信号$\mathbf{S}$ 可以自然地分为三个部分（三个向量）：

$$\mathbf{S} = a_\mu \mathbf{I_\mu} + \mathbf{F} + \mathbf{N},$$
$$\mathbf{F} = (F_1,..,F_J),\ \ F_j = \sum_m I^j_m, \tag{5}$$
$$\mathbf{N} = (N_1,..,N_J)$$

其中，$\mathbf{I}_{\boldsymbol{\mu}}$ 是 μ 信号，$\mathbf{F}$ 是总前景，而$\mathbf{N}$表示随机噪声。该算法的任务是为频率通道找出最优权重向量 $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,..,\omega_J)$，使其具有以下性质：

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{S^T}=\sum_{j=1}^{J}\omega_j S_j\to a_\mu \quad for \quad \sigma_j\to 0,\quad j=1,..,J. \tag{6}$$

因此，对所有通道中的总观测信号施加适当的权重并求和，应尽可能接近对 μ 畸变幅度 a_μ 的估计。

我们将标量积 $\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{S^T}=R(\mathbf{S})$ 称为对信号的响应：

$$R(\mathbf{S})=a_\mu R(\mathbf{I_\mu})+R(\mathbf{F})+R(\mathbf{N}). \tag{7}$$

对权重施加的第一个条件显而易见：

$$R(\mathbf{I_\mu})=\sum_j \omega_j I_\mu^j=1. \tag{8}$$

第二个条件应使对式（7）中信号剩余部分的响应最小化。

对前景$R(\mathbf{F})$的响应的均方可写为如下形式 [见式（4）和（5）]：

$$\langle R^2(\mathbf{F})\rangle=\langle\sum_{m=1}^{M}a_m^2(\mathbf{P})\left[\sum_{j=1}^{J}f_m(\nu_j,\mathbf{P})\cdot\omega_j\right]^2\rangle. \tag{9}$$

根据上述关于 $a_m(\mathbf{P})$的假设，可以写出以下不等式：

$$\begin{aligned}&\langle R^2(\mathbf{F})\rangle<\sigma^2_{F,max}=\sum_{i,j=1}^{J}\left[\sum_{m=1}^{M}A_m^2q_{ij}^m\right]\omega_i\omega_j,\\&q_{ij}^m=\tfrac{1}{V_\Omega}\int\limits_\Omega f_m(\nu_i,\mathbf{P})f_m(\nu_j,\mathbf{P})d\mathbf{P},\end{aligned} \tag{10}$$

其中，V_Ω 是Ω区域的体积。对于所有类型的前景，都可以通过数值方法预先计算积分 $q_{ij}^m m=1,\ .....M$；在某些特定情况下，还可以根据参数区域Ω的配置进行解析计算。

由于 $\langle R^2(\mathbf{N})\rangle=\sum C_{ij}\omega_i\omega_j$，通过权重 ω_j 使对前景和噪声的$_{i,\ j}$响应最小化，其中权重对应于二次型 Q的最小值：

$$\begin{aligned}&\langle(R(\mathbf{F})+R(\mathbf{N}))^2\rangle=\langle R^2(\mathbf{F})\rangle+\langle R^2(\mathbf{N})\rangle<Q,\\&Q=\sum_{i,j=1}^{J}\left[\sum_{m=1}^{M}A_m^2q_{ij}^m+C_{ij}\right]\omega_i\omega_j.\end{aligned} \tag{11}$$

最后，可以求出系数 ω_j，使函数 $Q(\omega_1、..、\omega_J)$ 达到最小值：

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial Q}{\partial\omega_j}=0,\quad j=2,..,J,\\&\omega_1=\tfrac{1}{I_\mu^1}-\sum_{m=2}^{J}\omega_j\tfrac{I_\mu^j}{I_\mu^1}.\end{aligned} \tag{12}$$

因此，根据公式 (12) 计算得到的 ω_j 是用于估计振幅 a_μ 的最优权重组。事实上，公式 (12) 的解等价于匹配滤波器 [34–40]，其协方差矩阵为 $\mathbf{Q}=[Q_{ij}]$，模板形式为 μ 信号：

$$\begin{aligned}&Q_{ij}=\sum_{m=1}^{M}A_m^2q_{ij}^m+C_{ij},\\&\boldsymbol{\omega}=\alpha\cdot\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{I}_\mu,\end{aligned} \tag{13}$$

其中，系数 α 由公式（8）中的归一化确定。注意，与其求矩阵$\mathbf{Q}$的逆，不如直接求解公式（12）中的方程组。当光子噪声较低（灵敏度较高）时，该矩阵的特征值之间可能相差许多个数量级，这会使求大型$\mathbf{Q}$ 矩阵的逆的过程变得不稳定。

为了评估算法的效率，使用以下记号较为方便：$\sigma_{_F}^2=\langle R^2(\mathbf{F})\rangle$,$\sigma_{_N}^2=\langle R^2(\mathbf{N})\rangle$。估计振幅 $\tilde{a}_\mu$ 与真实振幅 a_μ 的偏差为：

$$\tilde{a}_\mu=a_\mu\pm\sqrt{\sigma_{_F}^2+\sigma_{_N}^2}. \tag{14}$$

根据方程（1）和方程（2）中的记号，所考虑模型中的预期振幅为 $a_\mu=1$。根据方程（10），$\sigma_{F,max}>\sigma_{_F}$，而我们对总方差的估计总是偏高：$\sqrt{\sigma_{_{F,max}}^2+\sigma_{_N}^2}>\sqrt{\sigma_{_F}^2+\sigma_{_N}^2}$.

应当注意，上述两个条件（矩阵$\mathbf{Q}$的计算基于这两个条件）的选择并不能确保找到真正的最优系数。更精细的方法是通过以下方式对函数 $a_m(\mathbf{P})$施加上界：

$$\mid a_m(\mathbf{P})\mid<A_m(\mathbf{P}),\qquad \mathbf{P}\in\Omega. \tag{15}$$

然而，由于缺乏关于前景的信息，我们不得不牺牲对 μ 信号振幅的估计精度。否则，错误的前景模型仍可能导致对观测数据的误读。原则上，更详细的前景建模方法可以提供更好的系数 $\boldsymbol{\omega}$，但这超出了本文的讨论范围。还应注意，在现实中，$\langle R(\mathbf{F})\rangle\neq 0$。这意味着，在我们的假设下，$a_\mu$ 估计可能存在偏差。由于我们对参数分布一无所知，因此不尝试对偏差进行任何修正。因此，未知偏差被“隐藏”在总方差中。在下一节中，我们将给出一个前景模型示例，其参数分布或多或少贴近现实，并说明与方差相比，这种偏差很小。

III. 从含前景的信号中提取 μ 畸变（数值结果）

本节展示了该算法在各种前景存在的情况下，从观测光谱中提取 μ信号的有效性。

其中一些前景对观测光谱的贡献，可能是具有各种不确定参数的辐射之和。

为清晰起见，我们先从单参数问题入手，然后再演示一个更一般的情形。

A. 未知灰体光谱组合：以前景为例

最简单的情形是前景由灰体光谱叠加而成：

$$\begin{aligned} I_{gb}(\nu) &= \int_{T_{min}}^{T_{max}} a(T)B(\nu,T)dT, \\ B(\nu,T) &= \tfrac{2(kT)^3}{(hc)^2}\tfrac{x^3}{e^x-1},\ \ x=\tfrac{h\nu}{kT}, \end{aligned} \tag{16}$$

其中 $T_{min}:T_{max}$ 是温度变化可能范围的最小值至最大值。对于单参数（温度）的情形，这一范围相当于 Ω 区域。人们总能估算（例如，对于望远镜的主镜）温度变化范围以及最大可能的

镜面发射率函数的取值：$\int_{T_{min}}^{T_{max}} \mid a(T) \mid dT < A_{max}$。观测信号为

$$\begin{aligned} S_j &= a_\mu I_\mu^j + \int_{T_{min}}^{T_{max}} a(T)B_j(T)dT + N_j, \\ B_j(T) &= \int_{\nu_j-\frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_j+\frac{\Delta\nu}{2}} B(\nu,T)\tfrac{d\nu}{\Delta\nu}, \end{aligned} \tag{17}$$

为简单起见，我们假设协方差噪声矩阵为对角矩阵。

根据式（10）和式（11），可以写出二次型 Q 的表达式:

$$\begin{aligned} Q &= A_{max}^2 \sum_{i,j=1}^{J} q_{ij}\omega_i\omega_j + \sum_{j=1}^{J}\sigma_j^2\omega_j^2, \\ q_{ij} &= \tfrac{1}{T_{max}-T_{min}} \int_{T_{min}}^{T_{max}} B_i(T)B_j(T)dT. \end{aligned} \tag{18}$$

因此，方程（12）和（18）给出了权重 ω_j。如果噪声幅度远大于前景可能产生的贡献，那么最优权重将为 $\omega_j \sim I_\mu^j/\sigma_j^2$（这与没有前景时的预期一致）。对于均匀分布于所有频率通道上的噪声（$\sigma_j=\sigma$），权重函数将具有与信号完全相同的形状： $\omega_j \sim I_\mu^j$。随着噪声降低，我们开始显著改变权重的最优取值，从而不仅降低对噪声 R（**N**）的响应，也降低对未知前景信号 R（**F**(*T*)) 的响应。对前景的响应是 T 的函数，而对噪声的响应只是一个数值。

在这个数值实验中，函数 $a(T)$ 是随机的，且我们并不知道它，但

$$\int_{9K}^{11K} \mid a(T) \mid dT < A_{max} = 10^{-3}.$$

从 10 吉赫到 2 太赫范围内共使用了 $J=128$ 个频率通道 ν_j，通道宽度$\Delta\nu$=15 吉赫。图1展示了针对两种不同光子噪声值（ σ=3 Jy/sr 和 σ=1 Jy/sr），对前景 $\mid R$（$10^{-3}\cdot$**B**（*T*））$\mid > \mid R$（**F**（*T*））$\mid$ 所能达到的最大响应。显然，当 $\sigma = \langle N_j^2\rangle$ 足够小时，经过最优选择的系数 ω_j 对前景的响应可忽略不计，与对信号的响应 R（**I**μ）$=1$ 相比微不足道。

下面我们展示一个将该算法应用于由望远镜光学系统产生的真实仪器前景的示例。图2（左侧面板）展示了实验 [18] 中望远镜主镜的简化模型。该模型是一面直径为 10 米、冷却至 10 K、由 96 个面板组成的反射镜。由于角分辨率并非研究 μ 畸变的决定性因素，因此无需使用如此大的反射镜。不过，该实验还涉及对 y 畸变以及遗迹光子在星系团等离子体中散射相关效应（SZ效应）的研究；在这些研究中，高分辨率十分理想。这幅图显示了冷却不均匀的反射镜表面上的温度分布。假设每个表面元都以温度为 T、发射率低于 10^{-3} 的灰体形式辐射。该反射镜的表面温度模型包含若干项:

- 平均温度 T=10 K;
- 从中心到外围的温度梯度（这是因为内部面板冷却效率更高）；
- 望远镜一侧受太阳加热而形成的热点;
- 随机高斯温度分布，其中冷热点的特征尺度约与面板尺寸相对应;
- 面板间隙的温度明显高于表面其余部分。

图 2 右侧面板显示了振幅 $a(T)$ 随温度的实际分布，以及当振幅呈狄拉克δ函数形式时前景的响应： $a(T')=10^{-3}\cdot\delta(T'-T)$，$R$(**F**) $= R(10^{-3}\cdot$**B**$(T))$（与图 1 相同）。因此，反射镜产生的实际前景的响应

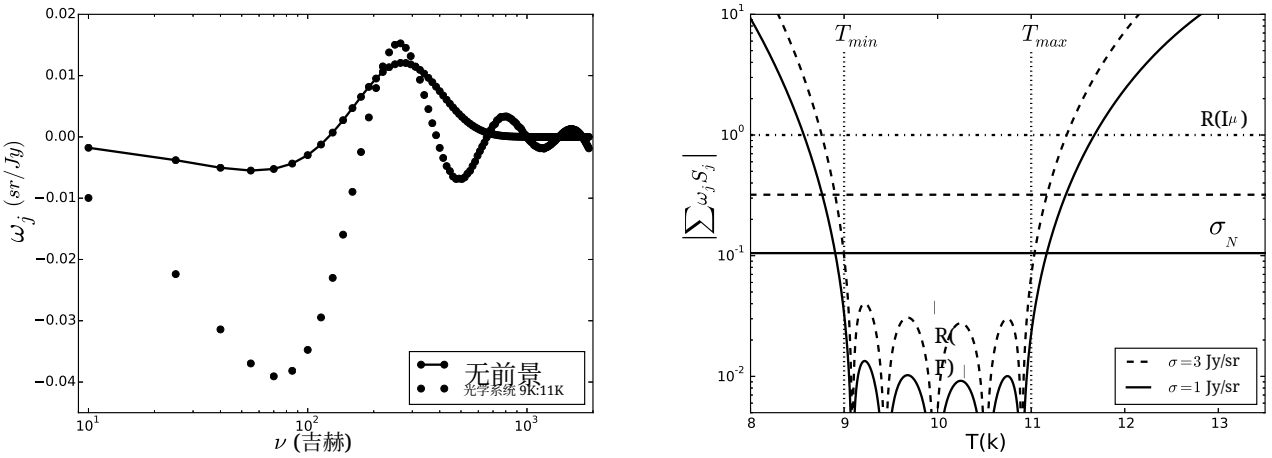


图 1：当前景为灰体光谱未知叠加、且温度以任意方式分布在 9 K 至 11 K 之间时，算法的应用结果。我们假设发射率为 $\int_{}^{11K} |a(T)| dT < 10^{-3}$。左图：$\sigma = 3\ Jy/sr$的$_{9K}$ 最优权重 ω_j。实线连接的点表示没有前景时的 ω_j。右图：假设所有辐射都集中在单一温度 T，$\sigma = 3\ Jy/sr$ 和$\sigma = 1\ Jy/sr$对应的前景响应绝对值可能达到的最大值，随温度变化的函数，分别以虚线和实线表示：$F(\nu) = 10^{-3}_{T_{max}} B(\nu, T)$。对于温度分布在 9 K 至 11 K 之间、且满足对 $a(T)$ 的限制的任意不同温度源组合，其响应均小于 $^{1}_{(T_{max}-T_{min})} \int_{T_{min}} |R(\mathbf{F})| dT$。水平虚线和实线表示对噪声的响应。水平点划线表示对 μ 信号的响应。竖线标示温度变化区域的边界。

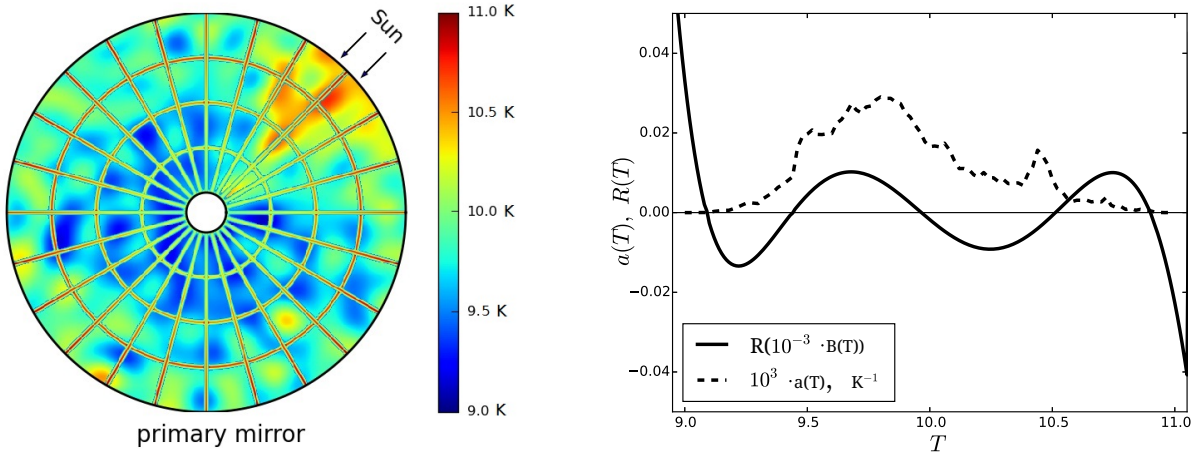


图 2：由望远镜主镜产生的前景的简化模型。左图：实验 [18] 中模拟的镜面温度分布。反射面板之间的缝隙温度略高于面板本身。由于制冷机靠近中心，主镜内部比外围面板冷却得更有效。约位于 2 点钟方向的热点，是望远镜相对于太阳的方向所致。该热点随时间移动，每年绕镜面完整旋转一周。右图：温度 $a(T)$ 的振幅分布，以虚线表示。约在 10.5 K 处的窄峰对应于面板之间缝隙对辐射的贡献。实线表示所有辐射都集中在温度 T 时对灰体前景的响应；即 $a(T)$ 具有狄拉克δ函数的形式：$a(T') = 10^{-3} \cdot \delta(T' - T)$（与图 1 中光子噪声的情况相同 $\sigma = 1\ Jy/sr$）。

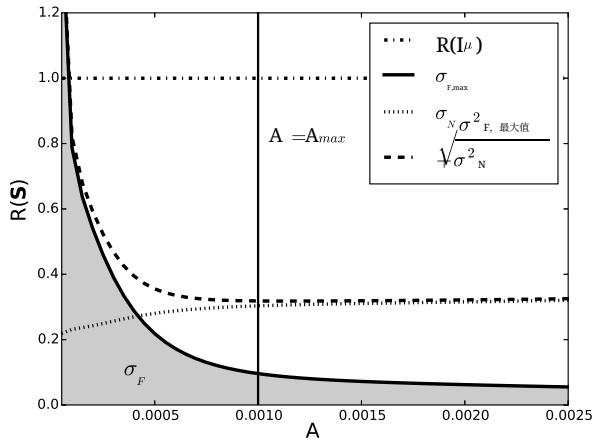


图3： σ_F 和 σ_N 对振幅估计上限 $A = \int |\, a(T)\, | \, dT$ 的依赖关系。任何由灰体形式的辐射源组合而成、温度在 9 K 至 11 K 范围内且总积分振幅小于 A 的组合，其响应 $|\, R(\mathbf{F})\, |$ 都将落在直线 $\sigma_{F,max}$ 下方的灰色区域内。当对 A 的估计正确时，总偏差 $\sqrt{\sigma^2_{F,max} + \sigma^2_N}$ 达到最小值： $A = A_{max} = 10^{-3}$

is

$$R(\mathbf{F}) = \int_{9K}^{11K} a(T) R(\mathbf{B}(T)) dT. \tag{19}$$

在这个特定情况下，响应 $R(\mathbf{F}) = 0.091\sigma_{F,max}$ 与估计的最大可能变化相比非常小。如上所述，前景响应的平均值不等于零。要确定它，我们需要知道平均分布 $\langle a(T) \rangle$:

$$\langle R(\mathbf{F}) \rangle = \int_{9K}^{11K} \langle a(T) \rangle R(\mathbf{B}(T)) dT. \tag{20}$$

在我们的特定模型中，可以假设该平均分布与图2所示的计算结果$a(T)$相差不大。因此，在实际参数分布中，偏差不仅小于$\sigma_{F,\ max}$ 而且通常远小于这一高估的变化量。由于一般情况下我们不知道函数 $a(T)$的性质，因此不尝试对偏差进行任何修正。

在这个简化示例中，不难看出，对望远镜光学系统发射的光谱进行建模是一项极其困难（甚至可能无法完成）的任务。任何试图计算这种光谱（它会随观测过程而变化）的做法，都因必须考虑众多因素而变得复杂。我们的方法克服了这些困难。我们只需知道三个量：镜面的最低和最高可能温度，以及其最大可能发射率。我们还强调，光学系统辐射必须用修正黑体辐射的组合来建模（为简单起见，这里考虑灰体光谱的组合）。

图3展示了正确估计振幅 A_{max}上限的重要性。图中显示了 σ_N 和$\sigma_{F,\ max}$ 随振幅 A上限估计值的变化关系。低估该振幅可能导致对前景的响应增大，并造成对数据的错误解读。与此同时，在这种情况下，高估该振幅的风险并不大。然而，在更一般的情况下，高估前景振幅可能导致对光子噪声的响应急剧增加，从而降低a_μ 估计的准确性。当$A = A_{max}$时，响应于真实振幅a_μ 的信号的总偏差 $\sqrt{\sigma^2_N + \sigma^2_{F\ ,\ max}}$ 达到最小值。

B. 尘埃和宇宙红外背景前景

如引言中所述，尘埃和宇宙红外背景对总信号的贡献都可以写成以下形式：

$$I_{dust,CIB}(\nu, T, \beta) = \tau(\nu/\nu_0)^\beta B(\nu, T), \tag{21}$$

其中使用了 353 GHz 的参考频率 ν_0 。与公式 (3) 和 (17) 类似，总信号 $\mathbf{S} = S_1, \ldots\ldots, S_J$为

$$\begin{aligned} S_j &= I^j_\mu + \int_\Omega a(T,\beta) f(\nu_j, T, \beta) dT d\beta + N_j, \\ f(\nu_j, T, \beta) &= \int_{\nu_j - \frac{\Delta\nu}{2}}^{\nu_j + \frac{\Delta\nu}{2}} (\nu/\nu_0)^\beta B(\nu, T) \frac{d\nu}{\Delta\nu}. \end{aligned} \tag{22}$$

为了确定参数（T、β）的取值范围，使用了普朗克数据 [41, 42] 。利用以 $l = 13.731^o$, $b = -73.946^o$ 为中心、半径为 10 度的圆形天空区域，计算了这些参数的概率分布函数；参见图4（左下方面板）。黑色等值线限定了参数区域 Ω(T、β）。（请注意，尘埃和宇宙红外背景区域原则上可能重叠。这不会影响我们的分析，因为在这种情况下，我们将它们视为单一前景。）参数落在此区域之外的概率小于 0.0002。同时，对于我们使用的数据，发射率 τ 的最大允许值不超过 10^{-6}:$\int |\, a(T、\beta)\, | \, dTd\beta < A_{max} = 10^{-6}$。与第三节 ΩA 中一样，使用了 128 个通道，通道宽度为 15 吉赫，覆盖从 10 吉赫到 2 太赫的范围。为了比较不同傅里叶变换光谱仪配置的效果，展示了两种不同情形的结果：单波段傅里叶变换光谱仪和五波段傅里叶变换光谱仪。

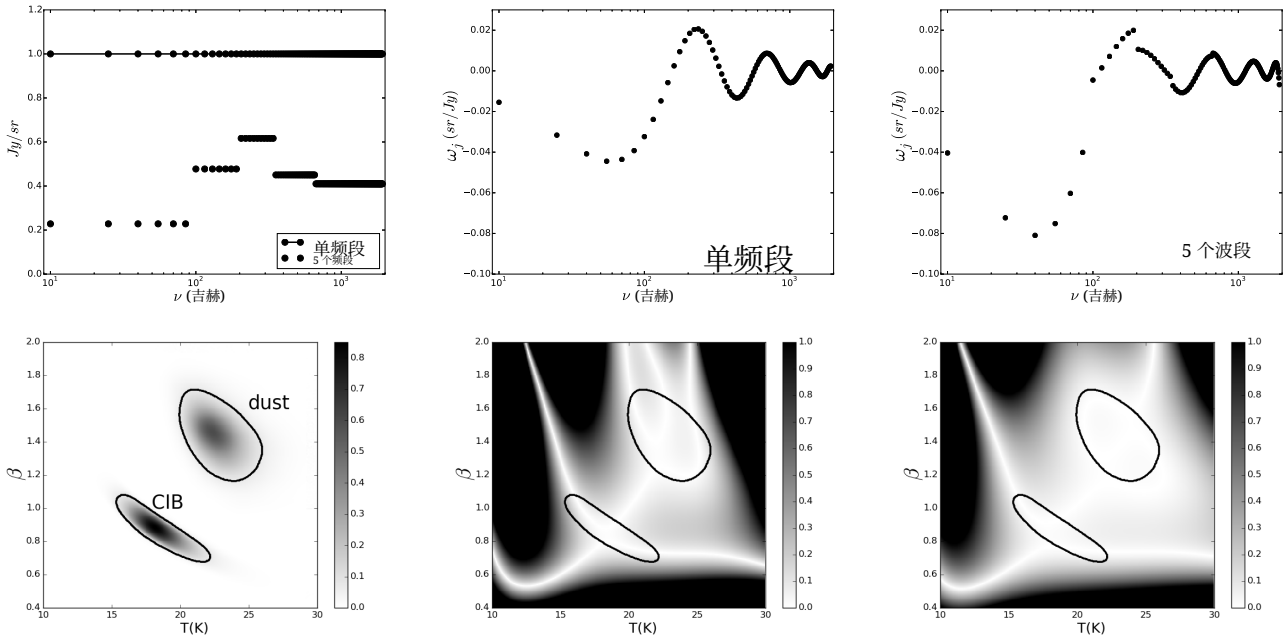


图4：从尘埃和宇宙红外背景污染中分离出 μ 信号。左上：单波段和五波段傅里叶变换光谱仪的频率通道灵敏度。左下：尘埃和红外背景的参数 **T** 与 β 的联合概率分布函数。中上和右上：分别对应单波段和五波段灵敏度的权重 ω_j 。中下和右下：单波段和五波段傅里叶变换光谱仪中尘埃+宇宙红外背景对$\mathbf{F}(T,\ \beta)$ 的最大可能前景响应 $|R|$。黑色区域表示前景响应大于信号响应： $|R(\mathbf{F}(T,\ \beta))|>R(\mathbf{I}\mu)=1$。明亮的白色丝状线对应于 $T,\ \beta$ 坐标平面上的几何点，在这些点处 $R(\mathbf{F}(T,\ \beta))=0$。单波段和五波段的噪声响应分别为 $\sigma_N=0.124$ 和 $\sigma_N=0.046$ 。

两种配置的灵敏度（噪声 $\langle N_j^2\rangle$）均使用 [43, 44] 在相同积分时间下计算（左上方面板）。五波段傅里叶变换光谱仪将频率范围划分为五个互不相连的区间，因此它能提供更高的灵敏度也就不足为奇了。上方中间面板和右方面板分别展示了单波段和五波段情况下最优权重 ω_j 的计算结果。与单波段权重不同，五波段的权重函数在各波段的最低和最高频率处存在不连续。下方中间面板和右方面板展示了这两种情况下前景响应的最大可能值。显然，五波段配置不仅能提供更好的噪声响应，还能降低前景响应，使其更加安全。

C. 其他前景

在上一小节中，算法应用于包含尘埃和宇宙红外背景的情形。现在我们来看看如何纳入其他前景。首先，应加入望远镜光学系统产生的辐射，因为它可用相同的修正黑体公式描述，且取决于相同的参数。在这种情况下，在$\mathbf{P}=(T,\beta)$平面中图4所示的两个区域之外，还要再增加一个区域

。该区域对应于光学系统温度和谱斜率的变化。其大小和配置取决于主镜的特性：平均温度、冷却系统特性、表面研磨质量等。接下来要加入的前景，是与宇宙微波背景辐射相关的谱畸变：宇宙微波背景各向异性（CMBA）、SZ效应（y畸变）及其一阶相对论修正 [45]。（宇宙微波背景单极谱已广为人知，可从总信号中扣除。）其中最“有害”的是CMBA：

$$\begin{aligned} I_{CMBA} &= \frac{2(kT_0)^3}{(hc)^2}\frac{x^4}{(e^x-1)^2}\cdot\frac{\Delta T}{T_0}, \\ x &= h\nu/kT_0, \end{aligned} \tag{23}$$

因为其形状与公式（1）中 μ 畸变的第一项完全成正比。这并不令人意外，因为 CMBA 和 μ 畸变具有相似的物理起源。因此，尤其是公式（1）中的第二项，为我们提供了测量化学势的机会。这一项主要在 $\nu<200$ 吉赫频段显现。因此，在相对较低的频率下实现良好的灵敏度十分重要。至于 CMBA 振幅可能达到的最大值，一个稳妥的估计是$|\frac{\Delta T}{T_0}|<A_{CMBA}=10^{-4}$。$I_{CMBA}$ 的形状不依赖于任何参数$\mathbf{P}$，但形式上，我们将这种依赖视为一个

常数。同样，还需要加入 SZ效应及其第一阶相对论修正。它们振幅的上限取决于天空中的具体位置以及是否存在强 SZ源。逐一加入其他前景（同步辐射、自由—自由辐射等）及其可变参数后，最终便得到一套完整的分量，在解决 μ 信号分离问题时必须将其纳入考虑。

IV. 结论

本文提出了一种方法，用于在测量 μ畸变时消除光谱特征定义不明确的宇宙前景。该方法的基础是寻找频率通道特殊权重的算法。在灵敏度足够高的情况下，按这些权重对信号测量值求和（称为响应），对前景的存在不太敏感前景的参数处于预先估定的某个可能变化范围内。因此，相较于对 μ 信号的响应，对前景的响应可以忽略不计。本文仅考虑了若干类型的前景。将该算法应用于所有可能的前景，是一项需要另行深入研究的课题。

值得注意的是，这种方法可应用于研究与 SZ 效应相关现象的实验，例如文献 [46–51], ，也可应用于任何前景谱定义不明确的物理实验。

我们感谢审稿人提出的宝贵意见以及富有成效的讨论。

本研究得到 LPI 新科研团队项目（编号 41-2020）以及理论物理与数学促进基金会“BASIS”项目（资助编号 19-1-1-46-1）的支持。

[1] J. Chluba, M. H. Abitbol, N. Aghanim, Y. Ali-Ha¨ımoud, M. Alvarez, K. Basu, B. Bolliet, C. Burigana, P. de Bernardis, J. Delabrouille, 等, 《实验天文学》51, 1515 (2021)。[2] J. Chluba and R. A. Sunyaev, 《皇家天文学会月刊》419, 1294 (2012)。[3] J. Silk and J. Chluba, 《科学》344, 586 (2014)。[4] G. De Zotti, M. Negrello, G. Castex, A. Lapi, and M. Bonato, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》047 (2016)。[5] H. Tashiro, 《理论与实验物理进展》2014, 06B107 (2014)。[6] Y. B. Zeldovich and R. A. Sunyaev, 《天体物理与空间科学》4, 301 (1969)。[7] C. Burigana, L. Danese, and G. de Zotti, 《天文学与天体物理学》246, 49 (1991)。[8] J. Chluba, A. Kogut, S. P. Patil, M. H. Abitbol, N. Aghanim, Y. Ali-Haïmoud, M. A. Amin, J. Aumont, N. Bartolo, K. Basu, 等, 《美国天文学会通报》51, 184 2019( )。[9] T. Nakama, B. Carr, and J. Silk, 《物理评论 D 》 97, 043525 2018( )。[10] R. A. Sunyaev and Y. B. Zeldovich, 《天体物理与空间科学》7, 20 (1970)。[11] R. A. Sunyaev and Y. B. Zeldovich, 《天体物理与空间科学》9, 368 (1970)。[12] R. A. Daly, 《天体物理学杂志》 371, 14 (1991)。[13] W. Hu, D. Scott, and J. Silk, 《天体物理学杂志·快报》430, L5 (1994)。[14] J. Chluba, R. Khatri, and R. A. Sunyaev, 《皇家天文学会月刊》425, 1129 (2012)。[15] A. Ota, T. Takahashi, H. Tashiro, and M. Yamaguchi, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》2014, 029 (2014)。[16] A. S. Kompaneets, 《苏联实验与理论物理学杂志》4, 730 (1957)。[17] A. Kogut, J. Chluba, D. J. Fixsen, S. Meyer, and D. Spergel, 载于 *Space Telescopes and Instrumentation 2016: Optical, Infrared, and Millimeter Wave*, 由 H. A. MacEwen, G. G. Fazio, M. Lystrup, N. Batalha, N. Siegler, and E. C. Tong 编 (2016)，第 9904 卷， *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series* 99040 ，p. W. [18] I. D. Novikov, S. F. Likhachev, Y. A. Shchekinov, A. S. Andrianov, A. M. Baryshev, A. I. Vasyunin, D. Z. Wiebe, T. d. Graauw, A. G. Doroshkevich, I. I. Zinchenko 等, 《物理学进展》**64**, 386 (2021). [19] M. H. Abitbol, J. Chluba, J. C. Hill 和 B. R. Johnson, 《皇家天文学会月刊》**471**, 1126 (2017). [20] J. Chluba, 《皇家天文学会月刊》**460**, 227 (2016). [21] S. Mukherjee, J. Silk 和 B. D. Wandelt, 《物理评论D》**100**, 103508 (2019). [22] K. Miyamoto, T. Sekiguchi, H. Tashiro 和 S. Yokoyama, 《物理评论D》**89**, 063508 (2014). [23] A. Kogut, D. J. Fixsen, D. T. Chuss, J. Dotson, E. Dwek, M. Halpern, G. F. Hinshaw, S. M. Meyer, S. H. Moseley, M. D. Seiffert 等, 《宇宙学与天体粒子物理学杂志》**2011**, 025 2011( ). [24] E. Pajer 和 M. Zaldarriaga, 《物理评论快报》 **109**, 021302 2012( ). [25] J. Ganc 和 E. Komatsu, 《物理评论D》 **86**, 023518 (2012). [26] J. Chluba, J. C. Hill 和 M. H. Abitbol, 《皇家天文学会月刊》**472**, 1195 (2017). [27] B. T. Draine 和 H. M. Lee, 《天体物理学杂志》**285**, 89 (1984). [28] I. A. Zelko 和 D. P. Finkbeiner, 《天体物理学杂志》**914**, 68 (2021). [29] A. Kogut 和 D. J. Fixsen, 《天体物理学杂志》**826**, 101 (2016). [30] D. P. Finkbeiner, M. Davis 和 D. J. Schlegel, 《天体物理学杂志》**524**, 867 (1999). [31] A. Kirkpatrick, A. Pope, A. Sajina, E. Roebuck, L. Yan, L. Armus, T. D´ıaz-Santos 和 S. Stierwalt, 《天体物理学杂志》**814**, 9 (2015). [32] J. C. Mather, E. S. Cheng, J. Eplee, R. E., R. B. Isaacman, S. S. Meyer, R. A. Shafer, R. Weiss, E. L. Wright, C. L. Bennett, N. W. Boggess 等, 《天体物理学杂志》, 快报**354**, L37 (1990). [33] D. J. Fixsen, 《天体物理学杂志》**707**, 916 (2009). [34] B. F. Schutz, 《经典与量子引力》**16**, A131 (1999).

[35] B. J. Owen 和 B. S. Sathyaprakash，《物理评论D》**60**, 022002 1999( ). [36] M. Pitkin, S. Reid, S. Rowan 和 J. Hough，《相对论评论》**14**, 5 (2011).[37] ´I. Zubeldia, A. Rotti, J. Chluba 和 R. Battye，《皇家天文学会月刊》**507**, 4852 (2021). [38] D. Herranz, J. L. Sanz, M. P. Hobson, R. B. Barreiro, J. M. Diego, E. Mart´ınez-Gonz´alez 和 A. N. Lasenby，《皇家天文学会月刊》**336**, 1057 (2002). [39] M. White 和 N. Padmanabhan，《皇家天文学会月刊》**471**, 1167 (2017).[40] ´I. Zubeldia 和 A. Challinor，《皇家天文学会月刊》**489**, 401 (2019). [41] 普朗克合作组, A. Abergel, P. A. R. Ade, N. Aghanim, M. I. R. Alves, G. Aniano, C. Armitage-Caplan, M. Arnaud, M. Ashdown, F. Atrio-Barandela 等，《天文学与天体物理学》**571**, A11 (2014). [42] 普朗克合作组, N. Aghanim, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak 等，《天文学与天体物理学》**596**，A109（2016）。[43] D. J. Benford、T. R. Hunter 和 T. G. Phillips，《国际红外与毫米波杂志》**19**，931（1998）。[44] J. M. Lamarre，《应用光学》**25**，870（1986）。[45] A. Challinor 和 A. Lasenby，《天体物理学杂志》**499**，1（1998）。[46] D. I. Novikov、S. V. Pilipenko、M. De Petris、G. Luzzi 和 A. O. Mihalchenko，《物理评论D》**101**，123510（2020）。[47] I. G. Edigaryev、D. I. Novikov 和 S. V. Pilipenko，《物理评论D》**98**，123513（2018）。[48] A. D. Challinor、M. T. Ford 和 A. N. Lasenby，《皇家天文学会月刊》**312**，159（2000）。[49] S. Yasini 和 E. Pierpaoli，《物理评论D》**94**，023513（2016）。[50] M. Shehzad Emritte、S. Colafrancesco 和 P. Marchegiani，《宇宙学与天体粒子物理学杂志》031（2016）。[51] N. Itoh、S. Nozawa 和 Y. Kohyama，《天体物理学杂志》**533**，588（2000）。