arXiv:2303.07707v1 [math.GR] 14 Mar 2023

# 经典型球形建筑中的自同构与对立

James Parkinson Hendrik VanMaldeghem

2023年3月15日

摘要

如果球形建筑的一个自同构不将任何室映射到对置室，则称其为驯顺自同构。本文对经典型球形建筑的驯顺自同构进行分类。

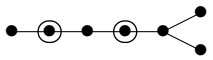
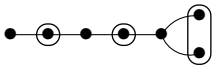
## 引言

球形建筑自同构的不动元素几何研究是一个成熟而优美的课题（见 [14]）。近期，关于“对置几何”Opp($\theta$) 的互补理论也已发展起来；它由那些在自同构作用下映射到相对元素的元素构成（见 [10, 11, 12, 13]）。一般情形下，这种对置几何相当庞大，通常包含建筑中的许多室。更为微妙且有趣的情形是，对置几何 Opp($\theta$) 不含任何室；此时，自同构 $\theta$ 称为驯顺自同构。本文属于一系列论文的一部分，旨在尽可能精确地分类球形建筑的驯顺自同构，本文重点研究经典型建筑。

研究本土性与对置几何的核心概念是自同构 $\theta$ 的对立图 Diag($\theta$)，该概念由 [10, 11] 引入。此图记录了建筑中在 $\theta$ 作用下映射到对向单形的单形类型；该理论一个令人惊讶之处在于，对于给定的球形建筑，允许出现的对立图相对较少。这使得按图分类驯顺自同构成为可能。在 [12] 和 [13] 中，我们对例外型分裂球状建筑（不包括三个对立图 $\mathrm{E}_{7;3}$、$\mathrm{E}_{7;4}$ 和 $\mathrm{E}_{8;4}$，它们将在后续研究中处理）以及所有 Moufang 六边形完成了这一工作。本文则对秩至少为 3 的经典型球形建筑（包括分裂型和非分裂型）完成这一工作。

在陈述主要结果之前，我们先简要阐述上述若干概念（其余概念见第 1 节）。设 $\Delta$ 是一个不可约型 $(W, S)$、Coxeter 图为 $\Gamma$ 的厚球面建筑，并设 $\theta$ 是 $\Delta$ 的一个自同构。令 $\pi \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ 表示由 $\theta$ 诱导的 $\Gamma$ 的自同构（因此，$\pi = \mathrm{id}$ 当且仅当 $\theta$ 保型）。令 $\pi_0 \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ 表示由最长元 $w_0$ 诱导的 $\Gamma$ 的自同构。特征轨道是 $S$ 的非平凡子集，且在被 $\pi_0 \circ \pi$ 保持的条件下极小。特别地，特征轨道全都是单元素集，当且仅当 $\pi_0 \circ \pi = \mathrm{id}$。$\theta$ 的对立图 Diag($\theta$) 的绘制方式是：圈出 $\Gamma$ 的那些特征轨道 $J \subseteq S$，使得存在一个类型为 $J$ 的单形映射到一个对置单形。若 $\pi_0 \circ \pi = \mathrm{id}$，则对立图 Diag($\theta$) 按“直线”方式绘制；否则按通常方式“弯折”绘制。

例如，对立图

(a)  (b) 

表示：(a) 一个 $D_7$ 建筑的非类型保持自同构，将类型 2 和类型 4 顶点映射到对向顶点；(b) 一个 $D_7$ 建筑的类型保持自同构，将类型 2 和 4 顶点映射到相对位置，并将类型 $\{6,7\}$ 单形映射到对向单形（回忆一下，$D_n$ 上的对向关系 $\pi_0$ 在 $n$ 为偶数时保型，而在 $n$ 为奇数时会交换类型 $n-1$ 和 $n$）。

在 [10, 11] 中，我们证明了，如果 $\theta$ 是一个厚不可约球面建筑的自同构，那么 Diag($\theta$) 必属于一份非常有限的可能图列表。这些图称为容许图，并由简单的组合规则定义。本文不需要容许图的形式化定义；表 1 和 2 中给出的经典型容许图的明确列表已足以满足本文的需要（形式化细节见 [10]）。

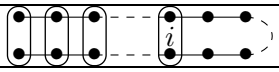
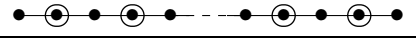
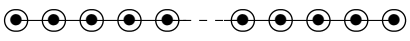
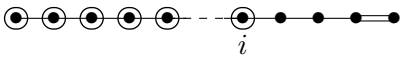
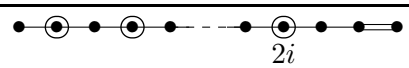
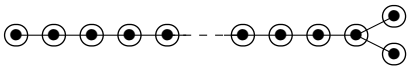
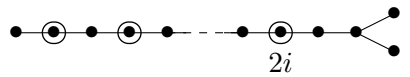
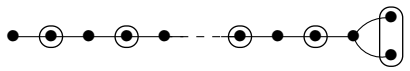
| 符号 | 图 | 条件 |
|---|---|---|
| ${}^2A^1_{n;i}$ |  | $0 \le i \le n/2$ |
| ${}^1A^2_{n;(n-1)/2}$ |  | $n$ 奇数 |
| ${}^1A^1_{n;n}$ |  | |
| ${}^1B^1_{n;i}$ 或 ${}^1C^1_{n;i}$ |  | $0 \le i \le n$ |
| ${}^1B^2_{n;i}$ 或 ${}^1C^2_{n;i}$ |  | $0 \le i \le n/2$ |
| ${}^1D^1_{n;i}$ |  | $0 \le i < n$ 且 $i = n$ 模 2 |
| ${}^1D^1_{n;n}$ |  | |
| ${}^2D^1_{n;i}$ |  | $0 \le i < n-1$ 且 $i = n+1$ 模 2 |
| ${}^2D^1_{n;\,n-1}$ |  | |
| ${}^1D^2_{n;i}$ |  | $n$ 为偶数且 $0 \le i < n/2$ |
| ${}^1D^2_{n;\,n/2}$ |  | $n$ 偶数 |
| ${}^2D^2_{n;i}$ |  | $n$ 奇数且 $0 \le i < (n-1)/2$ |
| ${}^2D^2_{n;\,(n-1)/2}$ |  | $n$ 奇数 |

表1：经典型的一般秩容许图

| 符号 | 图 | 符号图 | | 符号图 | |
|---|---|---|---|---|---|
| ${}^2\mathsf{B}^1_{2;1}$ 或 ${}^2\mathsf{C}^1_{2;1}$ |  | ${}^3\mathsf{D}^2_{4;1}$ |  | ${}^3\mathsf{D}^1_{4;2}$ |  |

表 2：经典型、特殊秩的容许图

与表中一样，每个经典型容许图都用符号 ${}^t\mathsf{X}^j_{n;i}$ 表示，其中

(1) $\mathsf{X} \in \{\mathsf{A}、\mathsf{B}、\mathsf{C}、\mathsf{D}\}$ 是 $\Gamma$ 的考克斯特类型， $n$ 是秩；(2) $t \in \{1,2,3\}$ 是 $\Gamma$ 的自同构 $\pi_0 \circ \pi$ 的阶（“扭曲”）；(3) $i$ 是图中圈出的特征轨道数；(4) $j \in \{1,2\}$ 是 $J$ 中相邻圈出特征轨道之间的（图）距离。

广义多边形（秩 2 建筑）的保持自同构在 [19, 9], 中有所研究，而 $\mathsf{D}_4$ 型建筑的国内三元对偶在 [22], 中有所研究，表 2 中的图在本文中不再讨论。对于表1中的图 ${}^t\mathsf{X}^j_{n;i}$，扭曲指标 $t \in \{1,2\}$ 由指标 $n$、$i$、$j$（以及 X）决定。如果 $\mathsf{X} \in \{\mathsf{A}、\mathsf{B}、\mathsf{C}\}$，这一点显而易见；对于 D 型，注意到 $t \in \{1,2\}$ 由条件 $t = n + ij + 1$ 模 2 决定。鉴于此，为避免混淆，通常可以在记号 ${}^t\mathsf{X}^j_{n;i}$ 中省略扭曲指标 $t$。

若在 Opp($\theta$) 中同时存在类型为 $J_1$ 和 $J_2$ 的单形，则必定存在类型为 $J_1 \cup J_2$ 的单形属于 Opp($\theta$)；满足这一条件的自同构 $\theta$ 称为有帽的。在 [10, 定理 1] 中，我们证明了大型球形建筑的每个自同构都是有帽的（若一个秩至少为 3 的厚球形建筑不含法诺平面余体，则称其为大型建筑；否则称为小型建筑）。由于 [11] 研究了小型建筑的自同构，因此在本文需要时，我们将把讨论限制在大型球形建筑上，从而可以假设所有自同构都是有帽的。在此情形下，一个自同构是驯顺的，当且仅当其对立图至少有一个未被圈出的特异轨道。

此前的工作已完全分类了 $\mathsf{A}_n$ 型大型建筑的国内自同构（概要见本文定理 1.5）。因此，本文主要关注 $\mathsf{B}_n$、$\mathsf{C}_n$ 和 $\mathsf{D}_n$ 型建筑，其情形要复杂得多。这类建筑可以自然地以标准且统一的方式视为秩为 $n$ 的极空间 $\Pi = (\mathscr{P}, \Omega)$，其中 $\mathscr{P}$ 是 $\Pi$ 的点集（即采用标准 Bourbaki 标号时建筑中类型 1 的顶点），而 $\Omega$ 是 $\Pi$ 的奇异子空间集（更多详情见第 1.6 节）。射影维数为 $n-1$ 的奇异子空间称为极大奇异子空间。

由于我们考虑的是厚建筑，因此相应的极空间具有厚直线（即每条直线至少包含 3 个点）。我们约定，$\mathsf{C}_n$ 型建筑对应于辛极空间（即 $\mathsf{C}_n$型分裂建筑），$\mathsf{D}_n$ 型建筑对应于非厚极空间（即每个奇异（$n-2$）空间恰好包含于 2 个极大奇异子空间），而与其他所有极空间相关的建筑均视为 $\mathsf{B}_n$ 型（不过请注意，这一约定并非完全标准，因为在其他地方，绝对类型为 ${}^2\mathsf{A}_n$ 的建筑通常被视为“$\mathsf{C}_n$型”）。因此，对于 $\mathsf{B}_n$ 型和 $\mathsf{C}_n$ 型建筑，类型为 $i$ 的顶点（$1 \le i \le n$）对应于射影维数为 $i-1$的奇异子空间。对于 $\mathsf{D}_n$型建筑，当 $1 \le i \le n-2$时，情况也如此；而建筑中类型为 $n-1$ 和 $n$ 的顶点则对应于两类极大奇异子空间。若极空间中的点 $x$、$y$ 彼此不同且不共线，则它们互为对径。若极空间中的奇异子空间 $X$、$Y \in \Omega$维数相同，且对于每个点 $x \in X$都存在一点 $y \in Y$，使得 $x$ 且两点 $y$ 互为对径，则这两个奇异子空间互为对径。

表1中具有对立图的球形建筑的自同构，都是相应极空间 $\Pi$ 的共线变换（不过请注意，在 $\mathsf{D}_n$ 情形下，自同构 $\theta$ 可能交换建筑中类型为 $n-1$ 和 $n$ 的顶点）。若极空间的共线变换 $\theta$ 将任何点（等价地，建筑中任何类型 1 的顶点）都不映到与其相对的点，则称其为点国内。更一般地，若 $\theta$ 不将任何射影维数为 $i$ 的奇异子空间映到与其相对的子空间，则称其为 $i$-国内（$0 \le i \le n-1$）（因此，点国内等价于 0-国内）。秩 3 极空间的驯顺自同构已在 [18, 定理 7.2],中分类，因此，在需要时，我们可以将讨论范围限制在秩至少为 4 的情形；此外，根据上述说明，还可以将范围限制在大型极空间。

将极空间的驯性共线变换分为以下三个互不相交的类别是很方便的。

定义。极空间的驯性共线变换 $\theta$ 称为:
（1）若非点国内，则属于 I 类。（2）若点国内且有不动点，
则属于 II 类。（3）若点国内且没有不动点，则属于 III 类。

注意，若 $\theta$ 属于 I 类，则由可容许图分类可知，对于某个 $1 \le i < n$（在 $\mathsf{X} = \mathsf{D}$ 的情形中，$i < n-1$ 属于该类），有 $\mathrm{Diag}(\theta) = \mathsf{X}^1_{n;i}$。类似地，若 $\theta$ 属于 II 类或 III 类，则对于某个 $0 \le i \le n/2$（其中 $\mathsf{X} \in \{\mathsf{B}、\mathsf{C}、\mathsf{D}\}$），有 $\mathrm{Diag}(\theta) = \mathsf{X}^2_{n;i}$。

本文的主要结果概述如下（未定义的概念见第 1 节）。首先，考虑极空间 $\Pi = (\mathscr{P}, \Omega)$ 的 I类共线变换。我们首先证明，这类自同构的特征是不动点集较大（见定义 1.8）。

定理 1. 若 $\theta$ 是一个大极空间 $\Pi$ 上的 I类自同构，其图为 $\mathrm{Diag}(\theta) = \mathsf{X}^1_{n;i}$（其中 $\mathsf{X} \in \{\mathsf{B}、\mathsf{C}、\mathsf{D}\}$），则 $\theta$ 逐点固定一个余秩为 $i$的子空间。特别地，$\theta$ 的不动点集是一个可能退化且可能非厚的极空间（可能包含大小为 2 的直线）。反过来，若 $\theta$ 是 $\Pi$ 上的一个共线变换，将至少一个点映射到相对点，逐点固定一个余秩为 $i$ 的子空间，且不固定任何余秩为 $j < i$的子空间，则 $\mathrm{Diag}(\theta) = \mathsf{X}^1_{n;i}$（其中 $\mathsf{X} \in \{\mathsf{B}、\mathsf{C}、\mathsf{D}\}$）。

从直观上说，定理 1 表明，不是点驯顺的驯顺自同构之所以驯顺，是因为：通过固定一个维数足够高的子空间，可以保证每个维数足够高的奇异子空间都包含一个不动点，因此不会被映射到相对奇异子空间。

在某些情况下，我们能够给出更精确的结果。例如，我们证明如下结论（中心共线变换的定义见定义 1.8）。

定理 2. 设 $\Pi = \mathsf{C}_{n,\,1}(\mathbb{K})$ 是域 $\mathbb{K}$ 上的（大）辛极空间，其中 $n \ge 3$，并设 $\theta$ 是 $\Pi$的共线变换。那么：
(1) $\mathrm{Diag}(\theta) = \mathsf{C}^1_{n;1}$ 当且仅当 $\theta$ 是一个中心射影（即长根中心共线变换）。(2) $\mathrm{Diag}(\theta) = \mathsf{C}^1_{n;2}$ 当且仅当 $\theta$ 是以下两种情况之一：($a$) 两个非平凡垂直长根 elation 的乘积；或 ($b$) 由两个相对长根群生成的群中的一个非平凡元素，且它不与长根中心共线变换共轭。

类似地，我们还对图为 $\mathsf{C}^1_{3;1}$ 的厚非可嵌入极空间的共线变换（见定理 2.4），以及图为 $\mathsf{B}^1_{n;1}$ 和 $\mathsf{D}^1_{n;1}$ 的分裂极空间的共线变换进行了分类（相关陈述见命题 2.5、定理 2.6 和注 2.7）。

极空间的 II 类和 III 类自同构（即点国内共线变换）的情况更加复杂，但也更加丰富。回顾一下，这类（非平凡）自同构的图为 X{v1}，其中 X {v2}B、C、D{v3}和 {v4}。

自同构的图中圈出的节点最少的那些（即 $i=1$）已有完整分类。

定理 3. 设 $\Pi=(\mathscr{P},\Omega)$ 是一个秩为 $n\geq 3$ 的极空间，且 $\theta$ 是 $\Pi$ 的共线变换。
(1) 若 $\Pi$ 为辛型，则 $\theta$ 的对立图为 $\mathsf{C}^2_{n;1}$ 当且仅当 $\theta$ 是轴共线变换（当 $\mathrm{char}(\mathbb{K})=2$ 时），或是特定的对合中心共线变换（当 $\mathrm{char}(\mathbb{K})\neq 2$ 时）。(2) 若 $\Pi$ 非辛型，则 $\theta$ 的图为 $\mathsf{X}^2_{n;1}$、$\mathsf{X}\in\{\mathsf{B},\mathsf{D}\}$ 当且仅当 $\theta$ 是轴心中心共线变换（因此 $\Pi$ 是正交极空间），或者秩为 3 且 $\theta$ 是理想贝尔共线变换。

在分裂情形下（即那些由交换域上的 Chevalley 群导出的情形），可以完整分类图不等于某个“极端图”$\mathsf{B}^2_{n;n/2}$、$\mathsf{C}^2_{n;n/2}$、$\mathsf{D}^2_{n;n/2}$（其中 $n$ 为偶数）或 $\mathsf{D}^2_{n;(n-1)/2}$（其中 $n$ 为奇数）的点保持自同构。

定理 4. 设 $\theta$ 是抛物型、辛型（特征不为 2）或双曲极空间 $\Delta$ 上的点国内共线变换，其对立图分别为 $\mathsf{B}^2_{n;i}$, $1\leq i\leq(n-1)/2$、$\mathsf{C}^2_{n,\ i}$,$1\leq i\leq(n-1)/2$ 或 $\mathsf{D}^2_{n,\ i}$, $1\leq i\leq(n-2)/2$。那么，$\theta$ 分别是 $i$ 个两两正交的长根中心变换的乘积、一个 $(I_{2n-2i},-I_{2i})$-调和，或 $i$ 个两两正交的长根中心变换的乘积。若假设 $\theta$ 至少固定一个点，则该结论对 $\mathsf{C}^2_{n,\ n/2}$ 也成立。

值得注意的是，当秩为 $n\geq 3$ 的极空间是厄米型时，II 类自同构只有一种类型，其对立图为 $\mathsf{B}^2_{n;m}$，其中 $2m\in\{n,n+1\}$（精确表述参见命题 3.17）。

最理想的情形是保持自同构不固定任何点（III 类）。这类自同构受到严格限制，以下定理说明了这一点。特别要注意，每个 III 类自同构都必须具有“极端”的对立图 $\mathsf{X}^2_{n;n/2}$，其中 $n$ 为偶数，且 $\mathsf{X}\in\{$ 为 B、C、D$\}$。

定理 5. 设 $\Delta$ 是类型为 $\mathsf{B}_n$、$\mathsf{C}_n$ 或 $\mathsf{D}_n$ 的球形建筑，且 $n\geq 4$，并设 $\Pi=(\mathscr{P},\Omega)$ 是定义在域 $\mathbb{K}$上的相应极空间。假设存在一个 $\Pi$ 上没有不动点的点国内共线映射 $\theta$。令 $\mathscr{Q}$ 表示 $\theta$ 的不动直线集合，并令 $\Omega'$ 表示不动奇异子空间集合。则

(1) $n$ 为偶数；(2) $\mathrm{Diag}(\theta)=\mathsf{X}^2_{n;n/2}$，其中 $\mathsf{X}\in\{$ 为 B、C、D$\}$；(3) 对 $(\mathscr{Q},\Omega')$ 而言，$\Pi'=$ 是定义在 $\mathbb{K}$ 的某个二次扩张上，或定义在四元数除环 $\mathbb{H}$ 上的极空间，其中该除环在 $\mathbb{K}$ 上的维数为 2（且 $\mathbb{K}$ 在 $\mathbb{H}$的中心上的维数为 2）。

在分裂情形下，我们可以给出更明确的描述。

定理 6. 设 $\Delta$ 是域 $\mathbb{K}$上的秩为 $n\geq 4$ 的分裂极空间。设 $\theta$ 是 $\Delta$ 的一个没有不动点的点国内共线变换。那么 $n$ 为偶数，且 $\Delta$或者是辛极空间（类型 $\mathsf{C}_n$），或者是双曲极空间（类型 $\mathsf{D}_n$）；相应地，$\theta$ 的对立图为 $\mathsf{C}^2_{n,n/2}$ 或 $\mathsf{D}^2_{n,n/2}$。此外，$\theta$ 的不动元素结构为以下之一：

(1) $\mathbb{K}$的一个二次扩张上的辛极空间；或
(2) 一个极小厄米极空间，或一个混合极空间，
分别如此。在每种情形下，不动元素结构中的点都是被 $\theta$固定的 $\Delta$ 的直线。

在每种情况下，我们都可以给出更精确的表述，如下所示。

定理 7. 设 $\Delta$ 是定义在域 $\mathbb{K}$ 上、秩为 $n \geq 4$ 的辛极空间。设 $\theta$ 是 $\Delta$ 的一个没有不动点的点国内共线变换。设 $\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{K}$ 的二次扩张，$\theta$ 的不动元素结构定义在该扩张上（根据定理 6）。那么 $\theta$ 是一个对合；若 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$，则 $\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{K}$ 的不可分扩张。反过来，若 $\mathbb{K}$ 有一个二次扩张 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$，且在 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$ 的情形下该扩张不可分，则 $\Delta$ 有一个如上所述的、没有不动点的点国内共线变换 $\theta$。

定理 8. 设 $\Delta$ 是定义在域 $\mathbb{K}$ 上、秩为 $n \geq 4$ 的双曲极空间。设 $\theta$ 是 $\Delta$ 的一个没有不动点的点国内共线变换。设 $\mathrm{PG}(2n-1, \mathbb{K})$ 为环境射影空间。则 $\theta$ 自然延拓为 $\mathrm{PG}(2n-1, \mathbb{K})$ 上逐点固定铺展 $\mathscr{S}$ 的共线变换，而该铺展定义了一个基于 $\mathbb{K}$ 的二次扩张 $\mathbb{L}$ 上的射影空间 $\mathrm{PG}(n-1, \mathbb{L})$；并且，$\mathrm{PG}(2n-1, \mathbb{K})$ 上每个逐点固定 $\mathscr{S}$ 的共线变换都是 $\Delta$ 上没有不动点的点国内共线变换。此外：

(1) 若 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ 可分，则不动元素极空间（参见定理 6）是极小 Hermitian 空间。(2) 若 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ 不可分，则不动元素极空间是辛极空间在 $\mathbb{L}$ 上的子空间，该子空间是通过将长根仿射变换限制到 $\mathbb{K}$ 而得到的。

反过来，如果 $\mathbb{K}$ 存在二次扩张 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$，那么就存在一个如上所述、没有不动点的 $\Delta$的点国内共线变换。

对于非分裂极空间，情况很大程度上取决于底域以及定义该极空间的型。最简洁的情形如下。

定理 9. 设 $\Delta$是定义在域$\mathbb{K}$上、秩为 $n \geq 4$ 的极小厄米极空间，其对应的域对合为 $\sigma$，域扩张为 $\mathbb{K}/\mathbb{F}$。设 $\theta$ 是 $\Delta$的一个没有不动点的点国内共线变换。令 $\mathrm{PG}(2n-1, \mathbb{K})$ 为环境射影空间。则 $\theta$是一个对合，并自然扩张为 $\mathrm{PG}(2n-1, \mathbb{K})$ 上的变换，逐点固定铺展 $\mathscr{S}$；该铺展定义了一个以四元数除环 $\mathbb{H}$ 为坐标、以其中心 $\mathbb{F}$为底域的射影空间 $\mathrm{PG}(n-1, \mathbb{H})$，其中 $\mathbb{K}$是 $\mathbb{H}$的一个二维子代数。在 $\Delta$ 中，固定$\mathscr{S}$ 的每个成员的 $\Delta$的唯一非平凡共线变换是 $\theta$。不动元素极空间是一个极小四元数极空间，它与 $\mathbb{H}$ 的一个非标准对合相关；该对合逐点固定 $\mathbb{F}$上的一个三维子代数。

反之，若 $\mathbb{K}$ 具有四元数扩张 $\mathbb{H}$，使得 $\mathbb{H}$ 的中心 $\mathbb{F}$ 是$\mathbb{K}$ 的子域，且 $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ 是可分二次域扩张，那么就存在一个如上所述的 $\Delta$上的无不动点点国内共线变换。

剩余情形是标准形式具有非平凡各向异性型的正交极空间和厄米极空间。由于这些空间包含在给定点国内共线变换下固定的双曲极空间和极小厄米极空间，前两个定理给出了 III 类共线变换存在的必要条件。我们提供了一些例子，也列举了若干此类共线变换不存在的情形（见第 3.3 节）。

本文还将分类那些可容许图，它们可作为分裂球状建筑中某个幺幂元的对置图得到（也就是说，该元素与 $U^+$ 中的某个元素共轭），从而推广了关于例外型建筑的相应结果 [12, 定理 5]。在 [12] 中，我们引入了可容许图为极闭图的组合概念。定义见第 1.4 节；不过目前我们指出，在经典情形下，除 $\mathsf{A}^2_{n;(n-1)/2}$ ($n$ 奇数)、$\mathsf{A}^1_{n;n}$、$\mathsf{B}^1_{n;i}$ 或 $\mathsf{D}^1_{n;i}$（其中 $i$ 为奇数且$1 \leq i < n$）、$\mathsf{C}^2_{n;i}$（其中 $1 \leq i \leq n/2$）以及表 2 中的图之外，所有可容许图都是极闭图。由此，作为幺幂元对置图出现的可容许图分类如下。

定理 10. 设 $\Delta$ 为 Dynkin 图为 $\Gamma$ 的分裂不可约球面建筑。类型为 $\Gamma$ 、可作为幺幂元对置图得到的可容许 Dynkin 图，恰为极闭图。

特别地，定理 10 表明，所有极闭可容许图（经典型）都可以作为某个自同构的对立图出现，该自同构作用于相应的分裂建筑（定义在任意域上）。我们将证明以下定理，从而完成 [12, 推论 10], 的证明，说明可容许图的列表中没有冗余。

定理 11. 设 $\Delta$ 是不可约型为 $X_n$ 的分裂球形建筑（若 $B_n$、$C_n$ 或 $F_4$ 型处于特征 2，或 $G_2$ 型处于特征 3，则假设底域完美）。每个底层 Dynkin 图为 $X_n$ 的容许图，都可作为 $\Delta$的某个自同构的对立图出现。

我们以概述本文的结构作为引言的结尾。第 1 节介绍球形建筑、保持自同构和极空间的背景知识。主要定理将在第 2–4 节中证明。更具体地说，定理 1 在第 2 节开头证明，定理 2 由定理 2.2 和 2.3 推出，定理 3 则由定理 3.7 和命题 3.11 推出。定理 4 由定理 3.13 和 3.14 推出，定理 5 则由推论 3.4、3.6 和 3.20 推出。定理 6、7、8 和 9 分别在定理 3.21、命题 3.22、命题 3.23 和命题 3.24 中证明。定理 10 和 11 在第 4 节证明。

# 1 背景与定义

本节介绍 Coxeter 群、球形建筑、驯顺自同构、对立图、Chevalley 群、射影空间和极空间的背景知识。

## 1.1 Coxeter 群与球形建筑

设 $(W, S)$ 是一个球形 Coxeter 系统，其 Coxeter 图为 $\Gamma = \Gamma(W, S)$。对于 $J \subseteq S$，令 $W_J$ 为由 $J$ 生成的抛物子群，并令 $\Gamma_J = \Gamma(W_J, J)$ 为 $\Gamma$ 的相应子图。对于每个 $J \subseteq S$，令 $w_J$ 为 $W_J$ 的最长元，并记作 $w_0 = w_S$。对于每个 $J \subseteq S$，元素 $w_J$ 通过 $\pi_J(s) = w_J s w_J^{-1}$（对 $s \in J$）诱导出 $\Gamma_J$ 的自同构 $\pi_J$。记作 $\pi_0 = \pi_S$。

设 $\Delta$ 是类型为 $(W, S)$ 的厚球面建筑，将其视为单纯复形，其室集为 $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\Delta)$，$W$-距离函数为 $\delta\colon \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to W$。令 $\tau\colon \Delta \to 2^S$ 为单纯复形 $\Delta$ 上固定的型映射（生成球形 Coxeter 系统的指标约定采用 Bourbaki [3] 约定）。关于建筑理论的主要参考文献是 [1, 20], ，并假定读者已熟悉该理论。

室 $A, B \in \mathscr{C}$ 相对，当且仅当它们在室图中的距离达到最大值；等价地，若 $\delta(A, B) = w_0$。建筑 $\Delta$ 中的单形 $\alpha$, $\beta$ 相对，当且仅当 $\tau(\beta) = \pi_0(\tau(\alpha))$，且存在一个包含 $\alpha$ 的室 $A$ 和一个包含 $\beta$ 的室 $B$，使得 $A$ 和 $B$ 相对。

建筑 $\Delta$中单形 $\alpha$ 的余空间，是建筑 $\Delta$ 中所有包含 $\alpha$的单形的集合，并带有由 $\Delta$上的序关系所诱导的序关系。然后，Res($\alpha$)是一个建筑，其 Coxeter 图由建筑 $\Delta$ 的 Coxeter 图删除属于 $\tau(\alpha)$的所有节点后得到。

设 $\alpha$ 是 $\Delta$ 的一个单形。到 $\alpha$ 上的投影是映射 $\mathrm{proj}_\alpha\colon \Delta \to \mathrm{Res}(\alpha)$，定义如下（见 [20, 第 3] 节）。对于 $\Delta$ 的一个单形 $\beta$，我们将 $\mathrm{proj}_\alpha(\beta)$ 定义为 Res($\alpha$) 中满足以下性质的极大单形 $\gamma$：从 Res($\beta$) 中任一室到 Res($\alpha$) 中的所有最短廊道，终点室都包含 $\gamma$。

我们将秩至少为 3 且不含法诺平面余体的厚不可约球形建筑称为大型建筑，而含有至少一个法诺平面余体的则称为小型建筑。

## 1.2 自同构与对置图

$\Delta$ 的自同构是一个单纯复形自同构 $\theta : \Delta \to \Delta$。注意， $\theta$ 不一定保持类型。事实上，每个自同构 $\theta : \Delta \to \Delta$ 都会诱导出 $\Gamma$ 的一个自同构 $\pi_\theta$，当且仅当 $\delta(A, B) = s$ $\delta(A^\theta, B^\theta) = \pi_\theta(s)$。

设 $\theta$ 是 $\Delta$ 的一个自同构。$\theta$ 的对置几何为

$$\mathsf{Opp}(\theta) = \{\alpha \in \Delta \mid \alpha \text{ is opposite } \alpha^\theta\},$$

而 $\theta$ 的类型 Typ($\theta$) 是所有满足以下条件的子集 $J \subseteq S$ 的并集：Opp($\theta$) 中存在一个类型为 $J$ 的单形。

以下基本定理由 Leeb [8] 以及 Abramenko 和 Brown [2]，得出，它表明 Opp($\theta$) 为空，当且仅当 $\theta$ 是恒等变换。

定理 1.1（[8, 2]）。每个厚球形建筑的非平凡自同构都会将某个单形映射到一个对置单形上。

$\theta$的对立图 Diag($\theta$) 是三元组 ($\Gamma$, Typ($\theta$) $\pi_\theta$)，其中 $\Gamma$ 是 $\Delta$的 Coxeter 图。简而言之， $\theta$ 的对立图通过绘制 $\Gamma$ 并圈出 Typ($\theta$)的节点来表示；圈出的节点构成关于 $\pi_0 \circ \pi_\theta$不变的极小子集。若 $\pi_0 \circ \pi_\theta \neq 1$，则按照标准方式将图画成“弯曲”的形状（参见引言中的例子）。如果没有节点被圈出（即 Typ($\theta$) $= \emptyset$），对立图就是空的；如果所有节点都被圈出（即 Typ($\theta$) $= S$），则对立图是满的。注意，Diag($\theta$)为空当且仅当 $\theta$ 是恒等变换（由定理 1.1 可知）。

定义 1.2. 设 $\Delta$ 是型为 $(W, S)$ 的球形建筑。设 $\theta$ 是 $\Delta$的非平凡自同构，且 $J \subseteq S$ 在图自同构 $\pi_0 \circ \pi_\theta$下稳定。则称 $\theta$ 为：

(1) 若 Opp($\theta$) 中存在一个类型为 Typ($\theta$) 的单形，则称其有帽；否则称其无帽。(2) 若 Opp($\theta$) 不包含室，则称其为驯顺。(3) 若 Opp($\theta$) 不包含类型为 $J$ 的单形，则称其为 $J$- 驯顺。

若单形 $\alpha \in \Delta$ 未被 $\theta$ 映射到相对单形，则称其对 $\theta$ 驯顺；否则称其对 $\theta$ 非驯顺。若自同构 $\theta$ 的含义可从上下文中明确，我们通常会简单地说 $\alpha$ 驯顺（或非驯顺）。

上述定义要求 $J$ 在 $\pi_0 \circ \pi_\theta$ 作用下保持不变，这是为了避免平凡情形。因为如果 $J$ 在 $\pi_0 \circ \pi_\theta$ 作用下不保持不变，那么必然不存在类型为 $J$ 的单形被 $\theta$ 映射到相对位置（见 [10, 引理 1.3]）。

[10] 的主要结果是以下这个有用的事实。

定理 1.3（[10, 定理 1]）。每个大型球形建筑的自同构都有帽。

设 $\theta$ 是 $\Delta$ 的自同构，并假设 $\alpha \in$ 对径集($\theta$)。由 [20, 定理 3.28] 可知，映射 $\mathsf{proj}_\alpha$ : 余迹($\alpha^\theta$) $\to$ 余迹($\alpha$) 是一个同构，因此我们有一个同构

$$\theta_\alpha : \mathsf{Res}(\alpha) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Res}(\alpha) \quad \text{given by} \quad \theta_\alpha = \mathsf{proj}_\alpha \circ \theta.$$

若 $\pi_\theta$ 是由 $\theta$诱导的 $\Gamma$ 自同构，且若 $J = \tau(\alpha)$，那么由 $\theta_\alpha$ 诱导的 $\Gamma_{S\setminus J}$自同构为 $\pi_{\theta_\alpha} = \pi_{S\setminus J} \circ \pi_0 \circ \pi_\theta$（见 [10, 命题 1.11]）。$\theta$ 的本土性与 $\theta_\alpha$的本土性之间存在如下非常有用的关系（特别是，这种关系有助于进行归纳论证）。

引理 1.4（[10, 命题 1.13]）。设 $\theta$ 是球形建筑 $\Delta$ 的自同构，且 $\alpha \in \mathrm{Opp}(\theta)$。若 $\beta \in \mathrm{Res}(\alpha)$，则 $\beta$ 在建筑 $\Delta$ 中与 $\beta^\theta$ 相对，当且仅当 $\beta$ 在建筑 $\mathrm{Res}(\alpha)$中与$\beta^{\theta_\alpha}$ 相对。

若 $\pi = \mathrm{id}$，则称容许图 $\mathrm{X} = (\Gamma, J, \pi)$ 为保型（这些就是类型保持自同构的对立图）。例如，D 型的保型图恰好是：$n$ 和 $i$ 均为偶数的 $\mathrm{D}^1_{n;i}$，$n$ 为奇数且$i$ 为偶数的 $\mathrm{D}^1_{n;i}$，以及所有的 $\mathrm{D}^2_{n,\ i}$。

## 1.3 根系与 Chevalley 群

分裂不可约球面建筑是由交换域 $\mathbb{K}$ 上的 Chevalley 群产生的建筑。在这种情况下，有一个与之对应的不可约晶体根系 $\Phi$。令$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$为一组固定的单根系，并令 $\Phi^+$ 表示相应的正根。采用标准记号（参见 [4, 16]），我们用 $x_\alpha(a)$（$\alpha \in \Phi$ 和 $a \in \mathbb{K}$）表示 Chevalley 群 $G = G_\Phi(\mathbb{K})$ 的幂零生成元。记 $U_\alpha = \langle x_\alpha(a) \mid a \in \mathbb{K} \rangle$ 为 $\alpha \in \Phi$ 的根群，并

$$U = \langle U_\alpha \mid \alpha \in \Phi^+ \rangle.$$

By a 幺幂元是指 $G$ 中与 $U$ 的某个元素共轭的元素 .

令 $\Gamma = \Gamma(\Phi)$ 为 Dynkin 图（约定在双键或三键的情形下，箭头指向短根）。根 $\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n$ 的高度为 $\mathrm{ht}(\alpha) = k_1 + \cdots + k_n$，且存在唯一的高度最大的根 $\varphi$（即 $\Phi$ 的最高根）。$\Phi$ 的极型是由 $\wp \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ 给出的子集

$$\wp = \{1 \le i \le n \mid \langle \alpha_i, \varphi \rangle \neq 0\}.$$

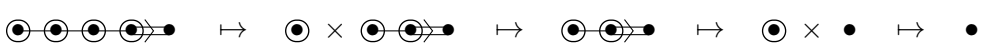
因此，采用标准的 Bourbaki 标号，$\mathrm{A}_n$、$\mathrm{B}_n$、$\mathrm{C}_n$、$\mathrm{D}_n$ 的极型分别为 $\{1, n\}$、$\{2\}$、$\{1\}$、$\{2\}$（记住这些的一个简单方法是注意到，在构造相应的仿射图时，极型就是与附加生成元相连的 $\Gamma$ 的节点集合）。当 $\wp = \{p\}$ 是单元素集合时，我们称 $p$ 为极节点。

Dynkin 图的对偶极类型是对应于对偶图的极节点的子集 $\wp'$。因此，在 $\mathrm{A}_n$ 和 $\mathrm{D}_n$ 的情形下为 $\wp' = \wp$，而在 $\mathrm{B}_n$ 的情形下为 $\wp' = \{1\}$，在 $\mathrm{C}_n$ 的情形下为 $\wp' = \{2\}$。若 $\wp' = \{p'\}$，我们将 $p'$ 称为对偶极节点。

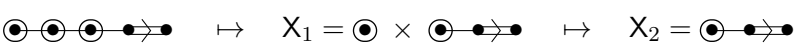
## 1.4 极闭容许图

容许图的定义自然地推广到容许 Dynkin 图（附加条件是 $\pi$ 保持 Dynkin 图上的箭头）。设 X 是一个容许 Dynkin 图，且 $\mathrm{X} = \mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \ldots$ 是一系列子图，使得对于 $j \ge 1$，图 $\mathrm{X}_j$ 由 $\mathrm{X}_{j-1}$ 通过从 $\mathrm{X}_{j-1}$的某个连通分支中移除一个圈出的极型而得到。该过程在某一步 $j = k$ 终止（即 $\mathrm{X}_k$ 中没有圈出的极型）。若 $\mathrm{X}_k$ 是空图（即没有圈出的节点），则称 X 为极闭。

For 例如，以下序列 $\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3, \mathrm{X}_4$ 表明 $\mathrm{B}^1_{5;4}$ 是极性闭的 d



而 $\mathrm{B}^1_{5;3}$ 并非极闭，因为



其中 $\mathsf{X}_2$ 是一个没有极节点被圈出的非空图。事实上，通过检查图表列表可知，经典型中并非极闭的可容许Dynkin图，恰好就是引言中列出的那些图。

假设 $\mathsf{X}$ 是极闭的，并令 $\mathsf{X} = \mathsf{X}_0, \mathsf{X}_1, \ldots, \mathsf{X}_k$ 为一列子图，它们是通过依次移除带圈的极节点且使 $\mathsf{X}_k$ 为空得到的（如极闭的定义所述）。令 $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in \Phi^+$ 为每一步移除的极节点所对应的最高根。例如，对于上文中 $\mathsf{B}^1_{5;4}$ 的序列，相应的最高根序列（以单根为基底）为

$$\varphi_{\mathsf{B}_5} = (12222) \quad \mapsto \quad \varphi_{\mathsf{A}_1} = (10000) \quad \mapsto \quad \varphi_{\mathsf{B}_3} = (00122) \quad \mapsto \quad \varphi_{\mathsf{A}_1} = (00100).$$

注意，序列 $\mathsf{X}_0, \ldots, \mathsf{X}_k$ 并不唯一（例如，在上文给出的 $\mathsf{B}^1_{5;4}$ 序列中，我们可以在第二步移除 $\mathsf{B}_3$ 图的极节点，而不是 $\mathsf{A}_1$ 极节点），不过显然，最高根集合 $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ 与所作选择无关。此外，注意根 $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ 两两垂直（根据极型的定义），因此群

$$U(\mathsf{X}) = \langle U_{\varphi_1}, \ldots, U_{\varphi_k} \rangle$$

由相应的正根群生成的群是阿贝尔群。若元素 $g \in U(\mathsf{X})$ 满足 $g = x_{\varphi_1}(a_1) \cdots x_{\varphi_k}(a_k)$，其中 $a_1, \ldots, a_k \neq 0$，则称其为一般元素。

## 1.5 射影空间

众所周知，类型 $\mathsf{A}_n$ 的建筑等价于射影空间：建筑的类型 1 顶点对应射影空间中的点，类型 2 顶点对应直线，依此类推，类型 $n$ 顶点对应超平面。射影空间的自同构称为共线变换（分别称为对偶），当且仅当相应的类型 $\mathsf{A}_n$ 建筑的自同构保型（分别交换类型 $i$ 和 $n-i+1$，其中$i = 1, \ldots, n$）。

我们用 $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ 表示 $\mathbb{K}$ 上、维数为 $n$ 的射影空间，其中 $\mathbb{K}$ 是域（可能非交换）。点、直线等分别是向量空间 $\mathbb{K}^{n+1}$ 的 1 维子空间、2 维子空间等。

若 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{K}$ 的子域，且 $\mathbb{K}$ 在 $\mathbb{F}$ 上的维数为 $\mathbb{K}$ 2，则 $\mathrm{PG}(n, \mathbb{F})$ 到 $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ 的自然嵌入称为 Baer子空间（但请注意，Baer子空间并非点线几何技术意义上的“子空间”）。$\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ 的 Baer共线变换是指逐点固定某个 Baer子空间的共线变换。

$\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$ 的辛极性是形如 $\theta$ 的对偶，其中 $U^\theta = \{v \in \mathbb{K}^{n+1} \mid (u, v) = 0 \text{ 对所有 } u \in U\}$ 均成立；这里，$(\cdot, \cdot)$ 是 $\mathbb{K}^{n+1}$ 上的非退化辛形式（必然 $n$ 为奇数且 $\mathbb{K}$ 是交换的；此处 $U$ 是子空间）。

$\mathrm{PG}(n-1, \mathbb{K})$ 的 $(I_{n-i}, -I_i)$-调和（其中 $\mathbb{K}$ 是交换域）是由底层向量空间上的线性映射所诱导的共线变换，其对角矩阵包含 $n-i$ 个 1 和 $i$ 个 $-1$。

$\mathsf{A}_n$ 型建筑的本土性已有充分研究（见下文定理 1.5）。

定理 1.5（[17, 定理 3.1、4.3] 和 [10, 定理 3.5]）。设 $\Delta$ 为建筑 $\mathsf{A}_n(\mathbb{K})$，将其视为射影空间 $\mathrm{PG}(n, \mathbb{K})$，其中 $\mathbb{K}$ 是一个可能为非交换的域，且 $n \geq 2$。

(1) 共线变换 $\theta$ 在 $\Delta$ 上的对立图为 $\mathrm{Diag}(\theta) = \mathsf{A}^1_{n;i}$（带有 $0 \leq i \leq n/2$），当且仅当 $\theta$ 逐点固定一个唯一的、射影维数为 $n-i$ 的子空间，但不逐点固定任何射影维数更大的子空间。

(2) 若 $|\mathbb{K}| > 2$，则 $\Delta$ 存在国内对偶，当且仅当 $n$ 为奇数且 $\mathbb{K}$ 是交换的。在这种情况下，每个国内对偶都是辛极性（也就是说，$\theta$ 由 $\mathbb{K}^{n+1}$上的一个非退化辛形式诱导），其对立图为 Diag($\theta$) $= \mathsf{A}^2_{n;(n-1)/2^\circ}$

因此，本文聚焦于 $\mathsf{B}_n$、$\mathsf{C}_n$ 和 $\mathsf{D}_n$ 型建筑。

## 1.6 极空间

$\mathsf{B}_n$、$\mathsf{C}_n$ 和 $\mathsf{D}_n$ 型建筑都可以视为极空间 $\Pi$，其中 $\Pi$ 的点是建筑的 1 型顶点。下面回顾基本定义。

定义 1.6（参见 [6, 第 7] 章）。设 $n > 0$。秩为 $n$ 的极空间是一个二元组 $\Pi = (\mathscr{P}, \Omega)$，由集合 $\mathscr{P}$（点）和 $\mathscr{P}$ 的子集族 $\Omega$（奇异子空间）构成，并满足以下公理:

(1) 奇异子空间 $X \in \Omega$ 及其包含的奇异子空间共同构成某个 $d \in \{-1, 0, \dots, n-1\}$ 维（可能可约的）射影空间 $d$（于是$d = \dim(X)$ 是 $X$ 的维数）。(2) 任意两个奇异子空间的交点仍是奇异子空间。(3) 若 $X$ 是一个 $(n-1)$ 维奇异子空间，且 $p \in \mathscr{P} \backslash X$，则存在唯一一个包含 $p$ 的 $(n-1)$ 维奇异子空间 $Y$，使得 $\dim(X \cap Y) = n-2$。奇异子空间 $X \cap Y$ 由 $X$ 中满足 $\{p, q\}$ 包含在某个 1 维奇异子空间中的点 $q$ 构成。(4) 存在两个不相交的 $n-1$ 维奇异子空间。

设 $\Pi = (\mathscr{P}, \Omega)$ 是秩为 $n$ 的极空间。维数为 1（分别为 2）的奇异子空间称为直线（分别为平面）。维数为 $n-1$（分别为 $n-2$）的奇异子空间称为极大（分别为次极大）奇异子空间。维数为 $i$ 的奇异子空间称为奇异 $i$-空间。若点 $p$、$q \in \mathscr{P}$ 包含在同一条直线上，则称它们共线。注意，根据第一条公理，若两个不同的点包含在某个奇异子空间中，则它们共线。由两个不同的点 $x$、$y$ 确定的（唯一）直线记作 $\langle x, y \rangle$。符号 $\langle \cdot \rangle$ 将在全文中使用，其含义显然是生成。

令 $\mathscr{L}$ 表示 $\Pi = (\mathscr{P}, \Omega)$ 的直线集合。将关联关系定义为包含关系，可将 $\Pi$ 视为点线几何 $\Pi' = (\mathscr{P}, \mathscr{L})$。事实上，Buekenhout 与 Shult 给出了一组等价的公理，可用这种关联结构刻画极空间（见 [6, §7.2]）。特别地，$\Pi'$ 满足以下条件（Buekenhout-Shult 一或全公理）：若 $p \in \mathscr{P}$ 与 $L \in \mathscr{L}$ 不关联，则 $L$ 的点要么有一个、要么全部与 $p$ 共线。

集合 $\Omega$ 可以从点线几何 $\Pi' = (\mathscr{P}, \mathscr{L})$ 中恢复为所有同时是 $\Pi'$ 的子空间（也就是说，在 $X$ 中至少有两个不同点的每条直线，其所有点都在 $X$ 中）且为奇异的 $X \subseteq \mathscr{P}$ 的集合（也就是说，$X$ 由两两共线的点组成）。因此，我们将 $\Pi$ 与 $\Pi'$ 视为相同。

我们用 $p \perp q$ 表示点 $p$ 与 $q$ 共线，并用 $p^\perp$ 表示所有与 $p$ 共线的点的集合（包括 $p$ 本身）。若 $X \subseteq \mathscr{P}$，则记作 $X^\perp = \bigcap_{p \in X} p^\perp$。

点 $x$ 与 $y \in \mathscr{P}$ 相对（在建筑理论意义上）当且仅当它们不共线。更一般地，奇异子空间之间的对立由以下显然的引理给出。

引理 1.7. 奇异空间 $X, Y \in \Omega$ 相对，当且仅当它们维数相同、彼此不相交，并且对每个点 $x \in X$，都存在一个点 $y \in Y$，使得 $x$ 和 $y$ 相对。特别地，极大奇异子空间 $X, Y$ 相对，当且仅当它们彼此不相交。

我们回顾以下定义。

定义 1.8. 设 $\Pi$ 是一个秩为 $n$ 的极空间。

(1) 秩为 $n$ 的极空间中余秩为 $t$, $0 \leq t \leq n-1$ 的子空间，是指与每个维数为 $t$ 的奇异子空间都有非空交集，且至少与一个维数为 $t-1$ 的奇异子空间不相交的子空间。(2) 几何超平面是余秩为 1 的子空间，也就是说，每条直线都至少包含该子空间中的一个点，且至少有一条直线恰好包含其中一个点。若它与某个点 $p$ 的 $p^{\perp}$ 重合，则称其为奇异的；否则称其为非退化，此时它所诱导的点线几何是一个极空间。(3) 余秩为 2 的子空间也称为几何子超平面。(4) $\Pi$ 的共线变换是点集 $\mathscr{P}$ 上的一个置换，它保持直线集 $\mathscr{L}$ 不变。(5) 中心共线变换（中心为 $p \in \mathscr{P}$）是指固定所有与 $p$ 共线的点的共线变换。(6) 轴共线变换（轴为 $L \in \mathscr{L}$）是指稳定每条与 $L$ 相交的直线的共线变换 $\theta$。必然， $\theta$ 固定每个与 $L$ 中所有点共线的点。(7) 中心为 $p_i$（$i = 1, 2$）的中心共线变换 $\theta_i$（$i = 1, 2$）在 $p_1$ 与 $p_2$ 共线时相互垂直。(8) 中心为 $L_i$（$i = 1, 2$）的轴共线变换 $\theta_i$（$i = 1, 2$）在以下任一情形下相互垂直： $L_1$ 与 $L_2$ 相交于一点且不共面（称为第一类）；或者 $L_1$ 与 $L_2$ 包含于同一个三维空间且不相交（称为第二类）。(9) 两个中心共线变换或两个轴共线变换在其中心相对时互为对径。(10) 秩为 3 的极空间的理想贝尔共线变换，是指至少有一条不动直线、在每个不动平面上都诱导出一个 Baer共线变换，并固定每条不动直线所经过的每个平面的共线变换。

除非另有明确说明，我们总是假设极空间的直线都是厚直线。也就是说，每条直线至少包含 3 个点。若秩为 $n$ 的极空间中，每个维数为 $(n-2)$ 的奇异子空间恰好包含于两个维数为 $n-1$ 的极大奇异子空间中，则称该极空间为非厚；否则称为厚。厚极空间对应于 $\mathsf{B}_n$ 和 $\mathsf{C}_n$ 类型的建筑（建筑的室是极空间中奇异子空间构成的极大旗，以此方式，建筑中类型为 $i+1$ 的顶点对应于维数为 $i$ 的奇异子空间，其中 $0 \leq i \leq n-1$）。在非厚的情形下，每个维数为 $(n-2)$ 的奇异子空间恰好包含于两个极大奇异子空间中，并且极大奇异子空间有两种类型（同一类型的成员彼此相交于余维数为偶数的子空间）。这种极空间所谓的“oriflamme 复形”是一个 $\mathsf{D}_n$ 类型的厚建筑。

我们可以将 $\mathsf{B}_n$、$\mathsf{C}_n$ 或 $\mathsf{D}_n$ 型建筑 $\Delta$ 的自同构 $\theta$ 视为相关极空间 $\Pi = (\mathscr{P}, \Omega)$ 的自同构，亦记为 $\theta$。由于 $\mathsf{B}_2/\mathsf{C}_2$ 型建筑的对偶以及 $\mathsf{D}_4$ 型建筑的三元对偶在本文中都不起作用，所有这类自同构都是极空间 $\Pi$ 的共线变换（不过请注意，在 $\mathsf{D}_n$ 情形下，自同构 $\theta$ 可能会交换建筑中类型为 $n-1$ 和 $n$ 的顶点）。

除秩 3 中的一个类外，所有厚极空间都可嵌入射影空间。更确切地说，它们是非退化二次型、交错型和厄米型的各向同性几何，或是这类几何的子空间（见 [20]）；后一种情形下，底域是特征为 2 的非交换域，它们由伪二次型描述。不过，本文不需要讨论这一点，因为例如我们将证明

一些排除非交换域的结果，例如命题 3.15。与二次型相关的极空间称为正交极空间，它们是射影空间中的非退化二次曲面。

类型 $\mathsf{D}_n$ 的分裂球形建筑对应于双曲二次曲面（其标准方程为 $X_{-2n}X_{2n} + X_{-2n+1}X_{2n-1} + \cdots + X_{-1}X_1 = 0$），类型 $\mathsf{B}_n$ 的分裂球形建筑对应于抛物型二次曲面（其标准方程为 $X_{-2n}X_{2n} + X_{-2n+1}X_{2n-1} + \cdots + X_{-1}X_1 = X_0^2$）。类型 $\mathsf{C}_n$ 的分裂建筑与标准形式$X_{-2n}Y_{2n} - X_{2n}Y_{-2n} + X_{-2n+1}Y_{2n-1} - X_{2n-1}Y_{-2n+1} + \cdots + X_{-1}Y_1 - X_1Y_{-1}$下的非退化交错形式相关。请注意，这些结构是射影空间中辛极性的不动点几何。众所周知，若域 $\mathbb{K}$ 是特征 2 的完美域，则类型 $\mathsf{B}_n$ 和 $\mathsf{C}_n$ 的极空间同构；若该域不完美（但仍具有特征 2），则类型 $\mathsf{B}_n$ 的极空间是类型 $\mathsf{C}_n$极空间的一个极子空间。为便于表述，我们将特征不为 2 的辛极空间称为真辛极空间。

由非退化的 $\sigma$-厄米型所关联的极空间，其中 $\sigma$ 是底域 $\mathbb{K}$上的一个对合，称为厄米极空间。若射影空间的维数为 $2n-1$，其中 $n$ 是极空间的秩，则称其为极小厄米极空间。极小厄米极空间的标准方程为 $X_{-2n}^{\sigma}X_{2n} + X_{2n}^{\sigma}X_{-2n} + X_{-2n+1}^{\sigma}X_{2n-1} + X_{2n-1}^{\sigma}X_{-2n+1} + \cdots + X_{-1}^{\sigma}X_1 + X_1^{\sigma}X_{-1} = 0$。

在极空间的语境中，使用“作为奇异子空间的（射影）维数”比使用“建筑顶点的类型”更方便，因此索引会有偏移。若 $\theta$ 是 $\Pi$ 的一个自同构，我们称 $\theta$ 为 $i$-驯顺的，如果 $\theta$ 不会将任何维数为 $i$ 的奇异子空间映到一个相对的子空间。因此，$i$-本土性意味着在建筑中对类型为 $i+1$ 的顶点驯顺。在非厚极空间中有一个例外：其中有两类极大奇异子空间。它们的射影维数均为 $n-1$，我们将它们称为 $(n-1)'$-空间和 $(n-1)$-空间，它们分别对应于 $\mathsf{D}_n$建筑中类型为 $n-1$ 和 $n$ 的顶点。点国内、线国内等表达的含义显而易见。

## 2 I类共线变换

回顾一下，极空间的 I类共线变换是指那些至少将一个点映射到对径点的驯性共线变换。因此，I类共线变换的对立图为 $\mathsf{X}_{n;i}^1$，其中 $0 \le i < n$（其中 $\mathsf{X} \in \{\mathsf{B},\mathsf{C},\mathsf{D}\}$）。下文证明的定理 1 表明，这些共线变换可由其具有丰富结构的不动点集来刻画。

引理 2.1. 设 $\Pi$ 为秩 $n$ 的极空间，且 $0 \le i \le n-1$。假设 $\theta$ 是 $i$-驯顺的。此外，

(1) 若 $i < n-1$，假设 $\theta$ 是 $(i+1)$-驯顺的；(2) 若 $i > 0$，假设 $\theta$ 不是 $(i-1)$-驯顺的。那么 $\theta$ 逐点固定一个余秩为 $i$的几何子空间。

证明. 在 $i < n-1$ 的情形下，该陈述恰为 [18, 定理 6.1]。若 $i = n-1$，则我们沿用 [18, 定理 6.1]证明中的思路。[18,定理 6.1] 证明中只有第一步用到了存在维数为 $i+1$的奇异子空间这一事实。由于此处$i = n-1$（因此不存在这样的奇异子空间），我们为这一情形的证明步骤给出另一种论证。

设 $U$ 是一个非国内的次极大奇异子空间，并设 $M$ 是包含 $U$ 的任意极大奇异子空间。根据 $(n-1)$-本土性，$M^\theta$ 与 $M$ 相交于一点 $p$。现在我们断言 $p^\theta = p$。反设 $p^\theta \neq p$，并选取一个次极大奇异子空间

$U_0$ 包含于 $M$ 中，其中 $p \in U_0$ 且 $p^{\theta^{-1}} \notin U_0$。于是 $U_0^\theta$ 包含 $p^\theta$，但不包含 $p$。设 $M_0$ 是包含 $U_0$、但不同于 $M$ 的任意极大奇异子空间。则 $M_0$ 和 $M_0^\theta$ 有一个公共点 $p_0$（根据 ($n-1$)-本土性）。显然， $p_0 \notin M^\theta$。但是， $p_0$ 与 $U_0^\theta$ 的所有点均共线（因为它属于 $M_0^\theta$），且也与 $p$ 共线（因为它属于 $M_0$），这意味着 $p_0$ 与 $M^\theta$ 的所有点共线，矛盾。由此得证。

由此可知， $U^\perp \cap (U^\theta)^\perp$ 被逐点固定，因而定理 6.1] 证明的其余部分可原样适用。

□

现在我们可以证明定理 1。

定理 1 的证明。设 $\theta$ 是极空间 $\Pi$ 上的一个非平凡驯性共线变换，其对径图为 $\mathsf{X}^1_{n;i}$，其中 $\mathsf{X} \in \{\mathsf{B}、\mathsf{C}、\mathsf{D}\}$、 $n \geq 2$和 $1 \leq i \leq n$。由于我们假设 $\Pi$ 很大，共线变换 $\theta$ 是有帽的；又由于 $\theta$ 是驯顺的，因此有 $i < n$。于是， $\theta$ 在相应建筑的类型为 $i+1$ 的顶点上是驯顺的，也就是说， $\theta$ 是 $i$-驯顺的（回想一下射影维数的指标偏移）。于是引理 2.1 的假设成立，因此 $\theta$ 逐点固定一个余秩为 $i$的几何子空间。

反过来，假设 $\theta$ 将至少一个点映到一个对径点，固定一个余秩为 $i$的几何子空间，并且不固定任何余秩更小的几何子空间。如果 $\theta$不将任何奇异（$i-1$）空间映到对径点，那么 $\theta$ 的图为 $\mathsf{X}^1_{n;j}$，其中某个 $j < i$ 成立（根据容许图的分类，以及点被映到对径点这一事实）。因此，由上一段可知， $\theta$ 固定一个余秩为 $j < i$的几何子空间，矛盾。剩下要证明的是， $\theta$ 不会将任何奇异 $i$空间映到对径点。由余秩为 $i$的子空间的定义可知，这一点显然成立：固定结构与每个奇异 $i$空间相交，因此没有这样的奇异子空间会被映到对径位置。

□

最简单的情形出现在对立图 $\mathsf{X}^1_{n;1}$ 中，因为这等价于一个共线变换，其恰好逐点固定一个几何超平面。此类共线变换能否作出某些一般性结论，取决于可能的几何超平面的结构。特别是，如果极空间是分裂的或不可嵌入的，我们便可以将它们全部确定下来。如果极空间是特征不为 2 的正交极空间（由二次曲面导出），那么几何超平面必须是非退化的。接下来的几段将更精确地说明这些情形。我们从辛极空间开始，在那里可以完全分类图为 $\mathsf{C}^1_{n;1}$ 和 $\mathsf{C}^1_{n;2}$ 的共线变换。先考虑 $\mathsf{C}^1_{n;1}$ 的情形。

定理 2.2. 辛极空间 $\Delta = \mathsf{C}_{n,\ 1}(\mathbb{K})$ 的每个共线变换 $\theta$，其极对立图为（即 $\mathsf{Diag}(\theta) = \mathsf{C}^1_{n;1}$），都是一个中心射影。

证明。根据 [18, 定理 5.1]，共线变换 $\theta$ 逐点固定一个几何超平面 $H$。如果 $H$张成整个环境（$2n-1$）维射影空间，那么 $\theta$ 就是恒等变换（因为 $\mathsf{C}_{n,1}(\mathbb{K})$ 的每个共线变换都继承自环境射影空间的一个共线变换）。因此$H$ 包含于环境射影空间的一个射影超平面中，故与某个点 $p$的极点重合。由于 $\theta$ 逐点固定 $p^\perp$，由对偶性， $\theta$ 逐子空间固定 $p$，也就是说， $\theta$ 固定所有经过 $p$的子空间。因此， $\theta$ 是以 $p$ 为中心（以 $p^\perp$为轴）的中心共线变换（在环境射影空间中）。

□

对立图 $\mathsf{C}^1_{n;2}$ 是 $\mathsf{C}_n$ 型的极—对偶极图（将 [12]中的术语延伸至此）。在这种情况下，我们有如下分类。

定理 2.3. 设 $n \geq 3$。辛极空间 $\Delta = \mathsf{C}_{n,1}(\mathbb{K})$ 的共线变换 $\theta$，满足$|\mathbb{K}| \geq 3$，其对立图为 $\mathsf{Diag}(\theta) = \mathsf{C}^1_{n;2}$，当且仅当它 $\theta$ 要么是两个非平凡垂直长根 elation 的乘积，要么

（2）是由两个相对长根群生成的群中的一个非平凡元素，且不与长根中心共线变换共轭。

特别地，若 char($\mathbb{K}$) $\neq 2$，则所有非平凡短根 elation 的对立图均为 $\mathsf{C}^1_{n;2}$。

证明。设 $\theta$ 的对立图为 $\mathsf{C}^1_{n;2}$。由于 $|\mathbb{K}| \geq 3$，该极空间很大，因此根据定理 1，共线变换 $\theta$ 逐点固定一个余秩 2 子空间 $S$。我们断言，在环境射影空间 PG($2n-1, \mathbb{K}$) 中，$S$ 是一个子空间，其维数必为 $2n-3$。事实上，由于 $S$ 是一个子空间且被逐点固定，它在 PG($2n-1, \mathbb{K}$) 中张成的射影子空间也被 $\theta$ 逐点固定；我们不妨假设它与 $S$ 重合（否则就用它替换 $S$）。若 $\dim S = 2n-2$，则 $S$ 是一个超平面，且 $\theta$ 是线国内的（因为每条直线都包含一个不动点），这就产生矛盾。现在反设 $\dim S \leq 2n-4$。由于 $\theta$ 不是线国内的，存在一个 $\Delta$ 的奇异平面 $\pi$，它与 $S$ 仅交于一点 $p$。取 $\pi$ 上任一条不经过 $p$ 的直线 $L$。那么每个经过 $L$ 的奇异平面都与 $S$ 相交，因此 $L^\perp \subseteq \langle L, S\rangle$。由此得到 $\dim S \in \{2n-4, 2n-5\}$。若 $\dim S = 2n-5$，则 $L^\perp = \langle L, S\rangle$；再考虑另一条不经过 $p$ 的直线 $M \subseteq \pi$，可得 $M^\perp \subseteq \langle M, S\rangle = \langle L, S\rangle$，因此比较维数可知 $L^\perp = M^\perp$，矛盾。这说明 $\dim S = 2n-4$，故 $\dim\langle L, S\rangle = 2n-2$，并且在 $L$ 上存在唯一一点 $x$，使得 $x^\perp = \langle L, S\rangle = \langle \pi, S\rangle$。适当地改变 $L$ 在 $\pi$ 中的位置，便可推出至少对 $\pi$ 中的两个点都有 $x^\perp = y^\perp$，矛盾。因此 $\dim S = 2n-3$。

因此，对于 $\Delta$ 中的两点 $p$、$q$，有 $S = p^\perp \cap q^\perp$。首先假设 $p$ 与 $q$ 不共线。那么 $\theta$ 的矩阵 $M_A$ 可以写成分块对角矩阵，其分块为一个 $(2n-2)\times(2n-2)$-单位矩阵，以及一个保持非退化二维辛形式的 $2\times 2$ 分块 $A$。因此，$A$ 的行列式为 1。但这样一来，$A$ 因而 $\theta$ 可由幺幂上三角矩阵和下三角矩阵生成，也就是由相对的长根中心共线变换生成。

现在假设 $p$ 与 $q$ 共线。考虑辛形式 $x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 + \cdots + x_{2n-1}y_{2n} - x_{2n}y_{2n-1}$，不妨设 $p = (1, 0, 0, \ldots, 0)$，$q = (0, 0, 1, 0, \ldots, 0)$。容易计算得出，$\theta$ 的矩阵是分块对角矩阵，除第一个 $4\times 4$ 分块外，其余分块均为平凡块；第一个分块为

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

对于某些 $a, b, c \in \mathbb{K}$。若将 $\Delta$ 的相应共线变换记为 $\theta(a, b, c)$，则可见 $\theta(a, b, c) = \theta(a, 0, 0)\theta(0, b, 0)\theta(0, 0, c)$，其中前两个是长根中心共线变换，第三个是短根 elation。此外，计算可得，若 $a \neq 0$，则 $\theta(a, c^2/a, c)$ 是一个长根中心共线变换，其中心为 $(a, 0, c, 0, 0, \ldots, 0)$；而 $\theta(a, b, c) = \theta(a, c^2/a, c)\theta(0, b - c^2/a, 0)$ 是两个互相垂直的长根中心共线变换的乘积。类似地，若 $b \neq 0$，也有同样结论。因此可假设 $(a, b) = (0, 0)$。此时 $\theta = \theta(0, 0, c)$ 是一个短根 elation。若 char($\mathbb{K}$) $= 2$，则 $\theta$ 是相应 $\mathsf{B}_n$ 型建筑中的一个长根中心共线变换，因此其对立图为 $\mathsf{B}^2_{n;1} = \mathsf{C}^2_{n;1}$（根据定理 2.1]）。现在设 char($\mathbb{K}$) $\neq 2$。则 $\theta(0, 0, c) = \theta(c/2, c/2, c/2)\theta(-c/2, -c/2, c/2)$，其中 $\theta(\pm d, \pm d, d)$ 是一个中心长根 elation，其中心为 $(1, 0, \pm 1, 0, \ldots, 0)$（采用相应的符号）。

因此，我们已经证明，每个图为 $\mathsf{C}^1_{n;2}$ 的共线变换都属于 (1) 或 (2) 所述的情形。反向结论可通过直接计算得到（例如，参见命题 4.4 的证明）。 □

与辛极空间的情形十分相似，厚非可嵌入极空间也有相应的结论。这里我们用 $\mathsf{C}^1_{3;1}$ 表示对置图，因为这些极空间的行为类似于辛

极空间（从代数群意义上说，鉴于其底层根系——这一点从其根群的交换关系中显而易见——它们的 Dynkin 类型在某种意义上是 $\mathsf{C}_3$）。

定理 2.4. 厚非可嵌入极空间 $\Delta$ 的每个共线变换 $\theta$，若其极对立图为（即 $\mathrm{Diag}(\theta) = \mathsf{C}^1_{3;1}$），都是中心射影。

证明. 根据 [5], ，唯一的几何超平面是奇异超平面，也就是与给定不动点 $p$共线的所有点。设 $x$ 是任意一个与 $p$不共线的点。则 $x^\perp \cap p^\perp$被逐点固定，因此 $x^\theta$ 包含于 $\{p, x\}^{\perp\perp}$。但此时 $\theta$ 与唯一一个以 $p$ 为中心、将 $x$映射到 $x^\theta$的中心射影重合。关于这种中心射影的显式表达式（可证明它确实存在），见 [7, 命题 4.13]。 □

类似的论证表明：

命题 2.5. 特征不为 2 的域 $\Delta$ 上的正交极空间中，每个共线变换 $\theta$ 都逐点固定一个非退化几何超平面，其对立图为 $\mathrm{Diag}(\theta) = \mathsf{B}^1_{n;1}$。此外，$\theta$ 是一个对合。

证明。由于域的特征不为 2，极空间是大的，因此根据定理 1，共线变换 $\theta$ 逐点固定一个几何超平面 $H$。假设 $H$ 是奇异的，即对于 $\Delta$中的某个点 $p$，有 $H = p^\perp$。由于 $\theta$ 与由定义 $\Delta$的对称双线性型所导出的非退化极性 $\rho$ 可交换，并且由于 $\theta$ 固定了 $p^\rho = \langle p^\perp\rangle$ 中的所有点（它们生成环境射影空间），因此它必须稳定所有经过 $p$的超平面，进而也稳定所有经过 $p$的直线。但每条位于 $H$ 之外的此类直线都与 $\Delta$ 相交于另一个点 $x$，因此对于 $H$之外的每个点，都有 $x^\theta = x$。这证明了第一个断言。

类似的论证表明，$\theta$ 是环境射影空间中的一个调和变换，其轴为$\langle H\rangle$，中心为 $c := \langle H\rangle^\rho$。由于经过 $c$ 的直线与 $\Delta$ 至多相交于两点，$\theta$ 是一个对合。 □

接下来我们考虑类型为 $\mathsf{B}_n$, $n \geq 3$ 和 $\mathsf{D}_n$, $n \geq 4$ 的分裂极空间。对于类型 $\mathsf{B}_n$，除了命题 2.5 之外，我们没有其他可说的。不过，对于类型 $\mathsf{D}_n$，我们可以说得稍微具体一些。事实上，对立图 $\mathsf{D}^1_{n,1}$ 刻画了唯一一个逐点固定类型为 $\mathsf{B}_{n-1}$ 的分裂极子空间的对合，并且它不固定任何室。

定理 2.6. 极空间 $\Delta$ 中，类型为 $\mathsf{D}_n$, $n \geq 4$且对立图为 $\mathsf{D}^1_{n;1}$ 的每个共线变换 $\theta$ 都是一个逐点固定类型为 $\mathsf{B}_{n-1}$的极子空间的对合。因此，$\theta$ 自动是类型旋转的。

证明。由以下事实可知：$\mathrm{PG}(2n-2, \mathbb{K})$ 中不存在 Witt 指标为 $n$的非退化二次曲面（因为任意一对极大子空间都必须有非平凡交），而 $\mathrm{PG}(2n+1, \mathbb{K})$ 中存在唯一一个 Witt 指标为 $n$的二次曲面，且它是抛物型的。 □

注 2.7。注意，若 $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$，则 $\mathsf{B}_{n,1}(\mathbb{K})$ 是 $\mathsf{C}_{n,1}(\mathbb{K})$ 的子空间（当 $\mathbb{K}$ 是完美的时，两者相等）。在非完美情形下，存在不同于中心共线变换的直线保持共线变换；而在完美情形下，我们可以依据定理 2.2 推出，总能得到一个中心共线变换。非完美情形的一个反例如下：$\mathrm{PG}(2n-1, \mathbb{K})$ 的共线变换，其作用为

$$(x_{-n}, x_{-n+1}, \ldots, x_{-1}, x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_{-n}, x_{-n+1}, \ldots, x_{-2}, ax_1, a^{-1}x_{-1}, x_2, \ldots, x_n),$$

其中 $a$ 是关于（标准）型 $x_{-n}x_n + \cdots + x_{-1}x_1 \in \mathbb{K}^2$ 的非平方元。（如果这是一个中心共线变换，那么除 $(x_{-1}, x_1) = (a, 1)$ 外坐标全为 0 的点将是中心，但该点不属于极空间。）

事实上，可以选择坐标，使不动子空间就是上述子空间，即其方程为 $X_{-1} = aX_1$；此时，逐点固定该几何超平面的一般共线变换可表示为

$$(x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{-n}, \dots, (ab+1)x_{-1} + a^2 b x_1, bx_{-1} + (ab+1)x_1, \dots, x_n),$$

与 $ab^2 + b \in \mathbb{K}^2$。

# 3 极空间的点国内共线变换

本节证明定理 3–9，讨论点国内共线变换。我们先作一些初步观察，然后将分析分为 II 类和 III 类共线变换。注意，根据 [11, 定理 1]，极空间的所有点国内共线变换都是有帽的。

## 3.1 初步观察

以下是第一个基本观察。

命题 3.1. 设 $\Delta$为秩至少为 2 的极空间。设 $\theta$ 为 $\Delta$的自同构，并假设 $\theta$ 是点国内的。那么对于每个满足 $p^\theta \neq p$的点 $p$，直线 $\langle p, p^\theta \rangle$ 在 $\theta$下保持不变。

证明。反设存在一点 $p$，满足 $p^\theta \neq p$且 $\langle p$，而 $p^\theta \rangle$在 $\theta$下不动。取 $x \in \langle p$、$p^\theta \rangle \setminus \{p, p^\theta\}$。于是 $x^\theta \in \langle p^\theta$、$p^{\theta^2} \rangle \setminus \{p^\theta, p^{\theta^2}\}$。由点保持性，$x$与 $\langle p^\theta$、$p^{\theta^2}\rangle$中的所有点共线，因此 $p$、$p^\theta$、$p^{\theta^2}$包含在 $\Delta$的一个平面 $\pi$中，而该平面由它们张成。设 $\alpha$ 为一个包含 $\langle p$、$p^\theta \rangle$ 的平面，并且 $\alpha$ 与 $\pi$ 不包含在 $\Delta$的同一个奇异子空间中。取 $q \in \alpha \setminus \pi$和 $r \in \langle q$、$p^\theta \rangle \setminus \{q, p^\theta\}$，并注意到 $q$与 $p^{\theta^2}$不共线。于是有 $r \perp r^\theta$和 $p^\theta \perp r^\theta$（因为 $p \perp r$，二者都在 $\alpha$中）。因此 $r^\theta$与 $\langle r$、$p^\theta\rangle$中的所有点共线。同理，$q^\theta$与 $\langle q$、$p^\theta \rangle = \langle r$、$p^\theta\rangle$中的所有点共线。因此，$\langle q^\theta$、$r^\theta \rangle$中的所有点（尤其是 $p^{\theta^2}$）都与 $\langle q$、$p^\theta \rangle$中的所有点（尤其是 $q$）共线。矛盾，由此证明得证。 □

我们指出命题 3.1 的一个直接推论。

推论 3.2. 若 $\theta$ 是某个极空间 $\Delta$ 的点国内共线变换，则 $\langle \theta \rangle$ 的每个元素都是点国内的。

证明. 任取 $\Delta$ 中的一个点 $x$。若 $x = x^\theta$，则 $x$ 被 $\langle \theta \rangle$ 的每个元素固定；若 $x \neq x^\theta$，则 $\theta$ 稳定 $\langle x$，$x^\theta \rangle$ 也如此，因此 $\langle \theta \rangle$ 的每个元素也如此。 □

上述命题引出了以下问题：射影空间的哪些共线变换具有这样的性质：连接一个不动点与其像的每条直线都是不动直线？答案见下述命题。

命题 3.3. 设 $\Sigma$ 是一个维数至少为 2 的有限维射影空间，且 $\theta$ 是一个共线变换，具有如下性质：$\Sigma$ 的每个点至少位于一条不动直线上（或者等价地，对每个点 $x \neq x^\theta$，直线 $\langle x, x^\theta \rangle$ 都是不动的）。那么以下情况恰有一种成立。

(*i*) 没有不动点，所有不动直线构成 $\Sigma$ 的直线铺展。$\Sigma$ 的射影维数为奇数，记作 $2n+1$，且不动子空间构成一个维数为 $n$ 的射影空间。

$(ii)$ 所有不动点构成 $\Sigma$ 的一个 Baer子空间 $\mathfrak{B}$ 。$(iii)$ 所有不动点是 $\Sigma$ 的两个互补子空间 $U$、$V$ 的并集，并且 $\theta$ 是一个 $(U,V)$- 调和，即 $\theta$ 固定 $U\cup V$ 中的所有子空间以及包含 $U$、$V$ 中任意一个的所有子空间。$(iv)$ 所有不动点构成一个维数为 $\ell$ 的子空间 $U$，且 $2\ell+1\geq \dim\Sigma$；所有不动超平面的交点是一个维数为 $\dim\Sigma-\ell-1$ 的子空间 $V\subseteq U$。那么 $\theta$ 是一个 $(U,V)$-中心共线变换，即 $\theta$ 固定 $U$ 的每个子空间以及包含 $V$ 的每个子空间。

证明。若 $\theta$ 没有不动点，则显然 $(i)$ 成立。因此，从现在起我们可以假设至少存在一个不动点。证明分为以下步骤。

步骤 1。首先设 $\dim\Sigma=2$。若所有直线都不动，则 $\theta$ 是恒等变换，且 $(iv)$ 在$\ell=2$时成立。因此我们可以假设存在一条直线 $L$ 不动。我们断言 $x=L\cap L^\theta$ 是不动点。事实上，若非如此，则 $x\neq x^\theta\in L^\theta$。由于 $x^\theta$ 也属于所有经过 $x$ 且在 $\theta$下不动的直线，我们便得到矛盾： $L^\theta$ 是不动点。断言得证。取 $L\setminus\{x\}$中的两个不同点，作经过它们的不动直线并求交，得到第二个不动点 $y$。

首先假设 $xy$ 之外没有不动点。任取 $z\in xy$，并选择一条直线 $M\ni z$，其中 $M\neq L$。若 $M=M^\theta$，则 $z=M\cap xy$是不动点；若 $M\neq M^\theta$，则 $M\cap M^\theta$是不动点，而且必然是 $z$，否则它位于 $xy$之外，与我们的假设矛盾。我们已经证明， $xy$ 中的每个点都是不动点，因此 $\theta$ 是轴变换，进而是中心变换，所以 $(iv)$ 在 $\ell=1$ 时成立。

现在假设点 $z$ off $xy$ 固定，但没有完全四边形固定。设 $K$ 是一条与 $\{x,y,z\}$ 不相交的直线。若 $K$ 固定，则分别连接 $x$ 与 $yz\cap K$、$y$ 与 $xz\cap K$ 的直线的交点也固定，并与 $x$、$y$、$z$ 构成一个完全四边形，矛盾。因此 $K\neq K^\theta$，又由于 $K\cap K^\theta$ 固定，它位于直线 $xy$、$yx$、$xz$ 中的一条上，不妨设为 $xy$。采用与上述类似的论证可证明，对于每一条与 $\{x,y,z\}$ 不相交的直线 $M$，其像 $M^\theta$ 与 $xy$ 上的 $M$ 相交。因此我们得出结论： $xy$ 逐点固定，且 $(iii)$ 成立。

最后，假设 $\theta$ 固定某个完全四边形。则不动点结构是一个子平面 $\pi$。每个点至少位于 $\pi$ 的一条直线上（由关于 $\theta$ 的假设可知），并且每条直线 $N$ 要么固定，因而包含许多不动点；要么不固定，并包含不动点 $N\cap N^\theta$。因此 $(ii)$ 成立。

步骤 2. 注意，如果某个子空间 $U$ 是不动的，那么 $\theta$ 在 $U$ 上的限制 $\theta_{|U}$ 满足命题的假设，其中将 $\Sigma$ 替换为 $U$。

步骤 3. 假设 $\dim\Sigma\geq 3$，且不动点集 $P$ 不生成 $\Sigma$。我们首先断言$P$是一个子空间。事实上，设 $x$、$y\in P$，并令 $z\in\Sigma\setminus\langle P\rangle$。于是直线 $L=\langle z,\ z^\theta\rangle$ 是不动的，因此平面 $\alpha=\langle L,\ x\rangle$ 是不动的。由步骤 1 和 2，以及 $z$取在 $\langle P\rangle$ 之外这一选择可知， $\alpha\cap P$是经过 $x$的一条完整直线 $M$。我们可以假设 $y\notin M$，否则该断言显然成立。于是 $u=L\cap M$ 是不动的，因此平面 $\langle y,\ z,\ u\rangle$也不动。再次应用步骤 1 和 2，并根据$z$的选择可知，直线 $\langle y,\ u\rangle$ 上的所有点都是不动的。于是，不动平面 $\langle x,\ y,\ u\rangle$ 包含两条直线，且其上所有点均为不动点，由步骤 1 和 2 即可得出该断言。

注意，前面的论证还表明，每当 $z\in\Sigma\setminus P$ 时， $\langle z,z^\theta\rangle$ 都包含一个唯一不动点。令 $Q$ 为所有满足以下条件的点 $q\in P$ 的集合：经过 $q$ 且不在 $P$ 中的某条直线是不动的。我们断言 $Q$ 是一个子空间。事实上，设 $q,r\in Q$。那么，根据 $Q$ 的定义，存在点 $x,y\in\Sigma\setminus P$，使得 $q\in\langle x,x^\theta\rangle$ 且 $r\in\langle y,y^\theta\rangle$。显然， $X=\langle x,y,q,r\rangle$ 是三维的，并且 $X\cap P=\langle q,r\rangle$。因此，直线 $L=\langle x,y\rangle$ 不与 $P$ 相交。这意味着 $L\cap L^\theta=\emptyset$。任取 $s\in\langle q,r\rangle$。设 $z\in L$ 和 $z'\in L^\theta$ 满足 $s\in\langle z,z'\rangle$。那么， $z'$ 是 $L^\theta$ 上满足 $\langle z,z'\rangle$ 与 $P$ 相交的唯一点。由此可得 $z'=z^\theta$，因而 $s\in Q$。断言得证。

接下来我们断言， $Q$ 是所有不动超平面的交点。事实上，首先设 $H$ 是包含 $Q$的超平面。取 $z\in H\setminus P$。那么 $\langle z,z^\theta\rangle$与 $Q\subseteq H$相交，因此 $z^\theta\in H$。

因此 $H$ 是不动的。现在设 $H$ 是不包含 $Q$的超平面。选取 $x \in Q \setminus H$。令$z \in \Sigma \setminus P$满足 $x \in \langle z, z^\theta \rangle$。由于 $x \notin H$，我们可以假设 $z \in H$（一个超平面与每条直线都非平凡相交）。但此时 $z^\theta \notin H$，因此 $H \neq H^\theta$。断言得证。

现在注意，在 $\Sigma$的对偶中， $P$ 和 $Q$ 的作用互换。因此，除对偶情形外，我们可以假设 $k =$维数 $Q \leq \frac{1}{2}(n-2)$（若 $k = \frac{1}{2}(n-1)$ =维数 $P$，则 $(iv)$ 成立）。令 $W$ 为 $Q$ 的一个补子空间。则 $W \cap W^\theta$ 的维数至少为 $n - 2k - 2 \geq 0$。因此， $W \cap W^\theta$ 非空。任取 $w \in W \cap W^\theta$。则 $\langle Q, w \rangle$ 不变，$w = \langle Q, w \rangle \cap W = \langle Q, w \rangle \cap W^\theta$ 也不变。因此 $W \cap W^\theta \subseteq P$，从而 $\ell =$维数 $P \geq n - k - 1$。若 $\ell \geq n - k$，则可应用对偶论证并得到 $n - k - 1 \geq n - k$，这就产生矛盾。因此 $k + \ell = n - 1$，且 $(iv)$ 成立。

步骤 4。假设 $\dim \Sigma \geq 3$，不动点集 $\mathfrak{B}$ 生成 $\Sigma$，且具有厚射影空间的结构。那么根据步骤 1 和 2，每个不动平面 $\alpha$ 与 $\mathfrak{B}$ 相交于$\alpha$ 的一个 Baer子平面，并且 $(ii)$ 成立。

步骤 5。假设 $\dim \Sigma \geq 3$，不动点集 $P$ 生成 $\Sigma$，且具有非厚广义射影空间的结构。我们首先断言，若 $L$ 是 $P$的一条厚直线，那么 $\Sigma$中与 $L$ 关联的所有点都属于 $P$。事实上，反设不然，并设 $\{x, y\}$ 是 $P$的一条薄直线。平面 $\pi = \langle L, x \rangle$ 在 $\theta$ 下是不动的，由步骤 1 和 2 可知， $\pi \cap P$是 $\pi$的一个 Baer子平面。设$B$ 是 $\pi$ 中经过 $x$ 的一条直线，且与 $P$ 相交于至少三个点。那么 $B$ 是其在 $\Sigma$中的载线的真子直线。平面 $\langle B, y \rangle$ 是不动的，由步骤 1 和 2 可知， $\langle x, y \rangle$ 包含 $P$中的至少三个点，矛盾。断言得证。

现在再次令 $\{x, y\}$ 为一条薄直线（根据假设，这样的直线存在）。令 $P_x$ 和 $P_y$ 分别为 $P$ 中与 $x$ 和 $y$同处一条厚直线上的点集。我们断言， $\{P_x, P_y\}$是 $P$的一个划分。事实上，若 $u \in P_x \cap P_y$，则平面 $\langle x、\ y、\ u \rangle$ 包含两条完全由不动点构成的直线，因此步骤 1 和 2 表明该平面上的所有点都是不动点；特别地， $\langle x、\ y \rangle$上的所有点都是不动点，这与我们关于 $\langle x、\ y \rangle$ 的假设矛盾。此外，假设存在$v \in P \setminus （P_x \cup P_y）$。那么平面 $\langle x、\ y、\ v \rangle$ 是不动的，且 $\langle x、\ y、\ v \rangle \cap P = \{x, y, v\}$。这再次与步骤 1 和 2 矛盾。断言得证。现在考虑 $P_x$、$z \neq w \neq x \neq z$中的任意两个点 $z$、$w$。平面 $\langle x、\ z、\ w \rangle$ 包含两条直线，其上所有点都属于 $P$。步骤 1 和 2 表明，$\langle z、\ w \rangle$ 上的所有点也都是不动点。因此， $P_x$是 $\Sigma$的子空间， $P_y$也同样如此。现在 $(iii)$ 成立。□

每种情形的例子都很容易找到。关于情形（$ii$），有一点值得说明：如果底层结构是域（此时射影空间是帕普斯型的），那么这样的自同构 $\theta$ 由单位矩阵和一个逐点固定某个子域$\mathbb{F}$ 的伴随域自同构诱导，其中该子域属于一个域 $\mathbb{K}$，且 $\mathbb{K}$ 在 $\mathbb{F}$ 上的维数为 2。因此， $\theta$ 是一个对合。但如果底层除环不是交换的，则存在 $\theta$ 不是对合的例子（注意，这修正了 [17, 定理 7: 2] 其中“理想 Baer 对合”应替换为“理想贝尔共线变换”）。例如，考虑一个域 $\mathbb{F}$及其二次伽罗瓦扩张$\mathbb{K}$，并将伽罗瓦对合记为 $x \mapsto \overline{x}$。然后定义除环 $\mathbb{K}_{\mathbb{F}}((t))$，它是以 $\mathbb{K}$ 为系数的洛朗级数 $f(t)$，其乘法由 $xt = t\overline{x}$诱导，对所有 $x \in \mathbb{K}$ 均如此。令 $a \in \mathbb{K}$ 满足 $a\overline{a} = 1$，但 $a \notin \{1, -1\}$（总是存在）。那么映射 $\theta$：$f(t) \mapsto f(at)$ 定义了一个逐点固定域 $\mathbb{K}((t^2))$的自同构；该域由以 $\mathbb{K}$ 为系数的洛朗级数 $f(t^2)$ 构成（并且 $\mathbb{K}_{\mathbb{F}}((t))$ 在 $\mathbb{K}((t^2))$ 上的维数为 2，且在 $\mathbb{K}_{\mathbb{F}}((t))$ 上维数至少为 2 的任意射影空间中诱导的自同构都满足（$ii$））。然而， $\theta$ 的阶是 $a$ 在$\mathbb{K}$中的乘法阶，由于 $a \neq -1$，该阶不同于 2。

由此可得以下有趣的推论。

推论 3.4. 极空间 $\Delta = (X, \Omega)$ 中的点国内共线变换 $\theta$ （其秩 $r$ 为奇数）固定一个室。

证明。我们首先断言，$\theta$ 固定一个极大奇异子空间，即维数为 $r-1$ 的奇异子空间。注意，[18, 定理 4.2] 证明了对于非辛极空间，此断言成立；不过这里我们给出一个独立证明，其中也包括辛情形。

假设 $\theta$ 不固定任何极大奇异子空间。令 $d \leq r-2$ 为固定奇异子空间的最大维数，并令 $U$ 在 $\theta$ 下固定，且 $\dim U = d$。由命题 3.1 可得 $d \geq 1$。由于 $d < r-1$，存在一个点 $x$，它与 $U$中的所有点共线。若 $x$ 固定，则由 $U$和 $x$生成的奇异子空间在 $\theta$下固定，且维数为 $d+1$，这与 $d$的极大性矛盾。因此 $x \neq x^\theta$ 和 $\theta$ 固定直线 $xx^\theta$。由于 $U$ 固定，$x^\theta$ 与 $U$ 中的所有点共线，而 $U$ 和 $xx^\theta$ 生成一个维数为 $d+1$ 或$d+2$的子空间 $U'$，该子空间在 $\theta$下固定，这再次与 $d$的极大性矛盾。由此可知该断言成立。

现在令 $U$ 为由 $\theta$固定的一个极大奇异子空间。根据命题 3.3，我们总能固定 $U$的一个室，从而固定 $\Delta$的一个室，除非处于情形（$i$）。但此处不会出现该情形，因为 $\dim U = r-1$ 为偶数。

□

引理 3.5. 秩至少为 3、具有非帕普斯型平面（因此定义在非交换除环上）的极空间 $\Delta$ 的点国内共线变换 $\theta$ 固定一个室。

证明. 若 $\Delta$ 的秩为 3，则由推论 3.4 可得结论。现在假设 $\Delta$ 的秩至少为 4。于是 $\Delta$ 是厚的。若 $\theta$ 的对立图为 $\mathsf{B}^2_{n;1}$，则独立证明的命题 3.11 表明 $\theta$ 是轴共线变换，因此它固定任何包含该轴的室。因此，根据对立图分类，对于 $i > 1$，$\theta$ 的对立图为 $\mathsf{B}^2_{n;i}$。但这意味着存在某个非驯顺三维空间 $U$。然而，对偶 $\theta_U$ 必须是驯顺的，这意味着它是辛极性，与 $U$ 为非帕普斯型这一事实矛盾。

□

最后，我们注意到，如果它是$(n-1)$-驯顺的，那么根据引理 2.1 可立即得出，它必然是 II 类共线变换。

推论 3.6. 设 $\Delta$ 是类型为 $\mathsf{X}_n$ 的厚建筑，其中 $\mathsf{X} \in \{\mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}\}$，且 $\Pi = (\mathscr{P}, \Omega)$ 是相应的极空间。若共线变换 $\theta$ 的对置图为 $\mathsf{X}^2_{n,\,i}$，其中 $2i < n$，则 $\theta$ 逐点固定一个余秩至多为 $n-1$ 的几何子空间。

## 3.2 II 类自同构

如果 $\theta$ 是秩为 $n$ 的极空间的 II 类自同构，那么对于某个 $0 \leq i \leq n/2$（其中 $\mathsf{X} \in \{\mathsf{B},\mathsf{C},\mathsf{D}\}$），有 $\mathsf{Diag}(\theta) = \mathsf{X}^2_{n;i}$。

### 3.2.1 对置图 $\mathsf{X}^2_{n;1}$

对置图为 $\mathsf{X}^2_{n;1}$（其中 $\mathsf{X} \in \{\mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}\}$）的点国内共线变换可以分类。这正是定理 3 的内容，我们将在本小节中证明该定理。我们先讨论辛情形，即定理 3(1)。

定理 3.7。设 $n \geq 2$。辛极空间 $\Delta := \mathsf{C}_{n,\,1}(\mathbb{K})$ 的共线变换 $\theta$ 唯一，其对立图为共极对置图（即 $\mathsf{C}^2_{n;1}$）；若 $n = 2$，则假定它至少有一个不动点。当 $\mathsf{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ 时，它是对合中心共线变换；当 $\mathsf{char}(\mathbb{K}) = 2$ 时，$\theta$ 则是轴心中心共线变换。

证明。首先假设 $n \geq 3$。那么对于所有 $j \geq 3, j \leq n$，$\theta$ 都是 $j$-驯顺的。因此，由 [18,定理 6.1] 可知，$\theta$ 的不动点结构是一个余秩为 2 的子空间。因此，定理 2.3 的证明中讨论的情形同样适用。显然，沿用该证明中的记号，当 $p$

与 $q$ 不共线的情形，仅当双曲直线 $\langle p,q\rangle$ 上的所有点都是不动点时才会出现。若 $\mathrm{char}(\mathbb{K})\neq 2$，则这会产生唯一的对合中心共线变换；若 $\mathrm{char}(\mathbb{K})=2$，则会产生恒等变换。若有共线变换 $\theta(a,b,c)$，$a,b,c\in\mathbb{K}$，则容易计算得出，$\theta(a,b,c)$ 将点 $(x_i)_{1\leq i\leq 2n}$ 映射到一个与其共线的点，当且仅当

$$ax_2^2+2cx_2x_4+bx_4^2=0,$$

这就证明了该定理。

接下来假设 $n=2$。那么我们有一个点国内辛广义四边形。由 [19] 可知，$\theta$ 要么逐直线地固定一个铺展，要么逐点地固定一个理想子四边形，要么是轴心中心共线变换。由于假设 $\theta$ 至少固定一个点，因此很容易看出第一种情况不可能发生（它会导致恒等变换）。

现在假设 $\theta$ 逐点固定一个理想子四边形。取标准辛形式$x_0y_1-x_1y_0+x_2y_3-x_3y_2$，不妨假设该理想子四边形包含所有同时与双曲直线 $(*,*,0,0)$ 和 $(0,0,*,*)$ 相交的直线，记号含义显然。于是 $\theta$ 具有形式 $(x_0,x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_0,x_1,ax_2,ax_3)$，其中 $a\in\mathbb{K}$。当且仅当 $a^2=1$ 时，该变换保持给定的辛形式；这表明，当 $\mathrm{char}(\mathbb{K})\neq 2$ 时，我们得到一个对合中心共线变换；当 $\mathrm{char}(\mathbb{K})=2$ 时，则得到恒等变换。由于在特征 $\neq 2$ 下，辛四边形不允许轴心中心共线变换，定理得证。 □

接下来我们考察所有其他极空间。秩 3 是个例外，但此情形下的驯顺共线变换已在 [18, 第 6] 节中分类。这也包括更为复杂的不可嵌入极空间（它们不容许轴心中心共线变换）。

为了证明定理 3(2)，我们需要做一些准备。首先，在以下命题中汇集几何超平面和几何子超平面的一些性质。子空间 $S$ 的根是与 $S$的所有点共线的 $S$ 点的集合。它总是一个奇异子空间。

命题 3.8。设 $\Delta=(X,\Omega)$ 是一个秩至少为 3 的非退化极空间。那么以下性质成立。

$(i)$ 每个几何超平面和几何子超平面都是一个可能退化的极空间（根中的每个点称为深点）。$(ii)$ 几何超平面或几何子超平面的根分别至多为 0 维或 1 维。$(iii)$ 设 $S$ 是一个几何子超平面，$p\in X$ 是一个不在 $S$ 中的点。令 $S'=\{x\in X\mid x\in L,p\in L,S\cap L\neq\emptyset\}$。若 $S\subseteq p^\perp$，则 $S'=p^\perp$ 是一个几何超平面。若 $S$ 中有点与 $p$ 不共线，则 $S'$ 是一个几何子超平面。$(iv)$ 每个包含几何子超平面深点的平面，都包含该子超平面的一条直线。

证明。（$i$）这直接由子空间的定义得出。

$(ii)$ 假设几何超平面 $H$ 的根包含一条直线 $L$。那么，一条与 $L'$ 相对$L$ 的直线与 $H$没有公共点，这与几何超平面的定义矛盾。另一条陈述可用类似方法证明。

(*iii*) 首先假设 $S \subseteq p^{\perp}$。反设存在一条经过 $p$ 的直线 $L$，它与 $S$不相交。任取一个包含 $L$ 的平面 $\pi$。由于 $S$ 是一个几何子超平面，它与 $\pi$ 交于一点 $x$（不可能交于一条直线，因为这将与 L 不与 $S$相交这一事实矛盾）。设 $\pi$ 中有一条不包含 $x$的直线 $K$，并设 $\alpha$ 是一个经过 $K$ 且与 $p$不共线的平面。那么 $\alpha$ 和 $S$ 应有一个公共点 $y$，根据构造，$y \notin K$。于是 $y \perp p$，这与 $\alpha$的选取矛盾。这表明 $p^{\perp} = S'$。显然，这是一个几何超平面。

现在假设 $S$ 中有一点与 $p$ 不共线。反设存在一个平面 $\beta$ 与 $S'$ 不相交。设 $\beta_p$ 是经过 $p$ 的平面，它与 $\beta$ 交于直线 $M$。那么 $\beta_p$ 包含 $S$ 中的某个点 $s$；因此直线 $ps$ 包含于 $S'$ 中。由此，点 $ps \cap M$ 包含于 $S'$ 中。所以 $\beta$ 终究包含 $S'$ 中的一个点。

(*iv*) 反设存在一个平面 $\alpha$ 与几何子超平面 $S$仅在深点 $x$ 相交。设 $\alpha'$ 是经过 $\alpha$ 中一条不经过 $x$ 的直线 $K$ 的平面，并且$\alpha'$ 与 $x$ 不共线。那么 $\alpha'$ 与 $S$ 有一个公共点 $y$，且 $xy$ 属于$S$，因此 $xy \cap K$ 属于 $S$，矛盾。

□

接下来，我们需要了解子空间（具有某些余秩）的更多性质。

命题 3.9。设 $S$ 是一个极空间的子空间，并假设 $S$ 不是奇异子空间（但它可以是退化极空间）。

(*i*) 如果某个维数为 $d$ 的奇异子空间 $D$ 是 $S$ 的几何超平面，那么它包含根，且 $S$ 的极大奇异子空间的维数为 $d$ 或 $d+1$。(*ii*) 如果 $S$ 的点集 $D$ 中的每个点都与其补集$S \setminus D$中的点共线，那么该点集要么包含于根中，要么 $D$ 的补集包含于根中。(*iii*) $S$ 的真几何超平面在 $S$ 中的补集绝不可能包含于根中。

证明。对于 $x \in S$，我们简记 $x^{\perp} \cap S$ 为 $x^{\perp}$。

(*i*) 首先假设根 $R$ 中存在一个不包含于 $D$ 的点 $x$。设 $S$ 中有两个不共线点 $y$、$z$。直线 $xy$ 和 $xz$ 都包含 $D$ 中的某个点，而根据假设，这些点彼此共线，这与 $y$ 和 $z$ 的选取矛盾。因此，$D$ 包含 $S$ 的根。于是，$D/R$ 是一个奇异子空间，也是 $R$ 的余空间中的超平面；该余空间要么是一个（非退化）极空间（这会导致矛盾，因为对每个子空间都存在一条与之不相交的直线），要么只是一个点集。于是，$D/R$ 要么为空集，要么是单个点，这就证明了(*i*)。

(*ii*) 假设 $D$ 不包含于 $R$，并令 $x \in D \setminus R$。那么 $x^{\perp}$ 是 $S$ 的一个（真）几何超平面，并且根据假设包含 $S \setminus D$。假设 $x^{\perp} \setminus (D \cup R) \neq \emptyset$，并令$y \in x^{\perp} \setminus (D \cup R)$。选取 $z \in S \setminus (x^{\perp} \cup y^{\perp})$。那么 $z \in D$，因为 $z \notin x^{\perp}$。但此时 $y \in D$，因为$y \notin z^{\perp}$，矛盾。

(*iii*) 假设 $H$ 是 $S$ 的一个真几何超平面，且包含 $S$的根$R$ 的补集。令 $x \in R \setminus H$，并令 $y \in H \setminus R$。那么每个点 $z \in \langle x, y \rangle \setminus \{x, y\}$ 都属于$S \setminus (R \cup H) = \emptyset$，矛盾。

命题得证。 □

最后，我们需要识别辛极空间，这一点我们已在定理 3.7 中处理过。

命题 3.10. 秩至少为 3 的极空间 $\Delta$ 是辛的，当且仅当存在一对不共线的点 $\{x,y\}$（此时对所有这样的点对均成立），使得每个点 $z$ 都包含在极空间的一条直线上，而这条直线包含一个点 $\{x,y\}^{\perp}$ 和一个点 $\{x,y\}^{\perp\perp}$。

证明。“仅当”部分显然。现在我们来证明“如果”部分。

将 $\Delta$ 替换为两个适当的余维 2 相对奇异子空间的垂面的交点后，不妨设 $\Delta$ 的秩为 2（但它是经典的，这意味着其自同构群在相对点对上可迁，因此不妨设给定条件对每一对不共线的点都成立）。我们证明每个点都是射影的，即对于每个点 $x$ 以及任意一对与 $x$相对的点 $\{y,z\}$，集合 $\{x,y\}^{\perp}$ 与 $\{x,z\}^{\perp}$ 要么恰有一个公共点，要么完全相同。

事实上，不妨设 $z\notin\{x,y\}^{\perp\perp}$（否则设 $\{x,y\}^{\perp}=\{x,z\}^{\perp}$）。现在，给定条件意味着 $z$位于一条直线 $L$ 上，该直线包含 $y'\in\{x,y\}^{\perp\perp}$和 $z'\in\{x,y\}^{\perp}$。于是 $z'\in\{x,y,z\}^{\perp}$。若还有 $z'\neq z''\in\{x,y,z\}^{\perp}$，则 $z\in\{z',z''\}^{\perp}\supseteq\{x,y\}^{\perp\perp}$。因此 $y'\in\{z',z''\}^{\perp}$，这意味着整条直线 $L$ 与 $z''$共线，故 $z''\in L$，进而 $z'=z''$。

结论现在由 [15] 得出。 □

现在我们证明定理 3(2)。

命题 3.11。设 $\Delta=(X,\Omega)$ 是一个秩至少为 3、非辛型的极空间，并设 $\theta$ 是 $\Delta$ 的一个自同构，其对立图为 $\mathrm{B}^2_{n;1}$ 或 $\mathrm{D}^2_{n;1}$。那么，$\theta$ 是一个轴心中心共线变换（因此 $\Delta$ 是一个正交极空间）；或者秩为 3，且 $\theta$ 是一个理想贝尔共线变换。

证明。我们首先证明，只要 $\theta$ 在秩 3 时不是理想贝尔共线变换，$\theta$ 的不动点结构恰好是一个余秩为 2 的子空间。

[18] 的定理 6.1 和定理 7.2 已经推出，$\theta$ 逐点固定一个余秩为 2 的子空间 $S$。注意，$S$ 不是奇异子空间，否则我们可以找到一个与 $S$ 不相交的平面。我们证明 $\theta$ 不固定 $S$ 之外的任何点。事实上，反设 $\theta$ 固定某个点 $x\in X\setminus S$。

我们首先断言，$\theta$ 逐点固定每一条与 $x$以及 $S$中某点关联的直线。事实上，我们分两种情况讨论。

先假设 $S$ 并非所有点都与 $x$共线。于是 $x^{\perp}\cap S$ 是 $S$的一个几何超平面$H$。反设 $S\setminus H$ 的所有点都与 $H$的所有点共线。根据命题 3.9($ii$)，($iii$)，$H$ 包含于 $S$的根中。因此，所有经过 $x$ 且与 $S$ 相交的直线之并是一个奇异子空间；但根据命题 3.8($iii$)，它同时也是一个几何子超平面，这显然矛盾（对置子空间彼此不相交）。由此可知，存在不共线的点 $a\in H$ 和 $b\in S\setminus H$。因此，$b$ 在直线 $ax$上的投影也被固定。任取 $S$ 中经过 $a$的直线 $L$；由于 $\theta$ 逐点固定一条直线和另外两个点，它在由 $L$ 和 $x$ 张成的奇异平面上的限制就是恒等变换。因此，$\theta$ 逐点固定所有经过 $x$ 且与 $S$ 相交于一个与 $a$共线点的直线。由 $H$的连通性可知，$\theta$ 逐点固定所有经过 $x$ 且与 $S$ 相交的直线。

现在假设 $S$ 的所有点都与 $x$ 共线。先假设存在一点 $y\neq x$，使得 $y\perp S$。注意此时 $\{x,y\}^{\perp}=S$（由命题 3.8($iii$)可得）。根据命题 3.10，我们可以选取一点 $z$，使其不在连接 $S$ 中一点与 $\{x,y\}^{\perp\perp}$ 的直线上。注意，$z$ 在 $\theta$ 下不是不动点：由 $z$ 的选取可知，我们可以找到 $x^{\perp}\setminus S$ 中一点 $w$ 与 $z$ 共线；根据一或全公理，该点必定是不动点，否则 $ww^{\theta}$ 包含 $x$。于是直线 $zz^{\theta}$ 与 $x^{\perp}$ 相交于某点 $u$。由于经过 $x$ 的每条直线都被固定，且根据命题 3.1，$zz^{\theta}$ 是不动点，所以 $u$ 被 $\theta$ 固定。若 $u\notin S$，则与上一段类似的论证表明 $\theta$ 逐点固定 $x^{\perp}$，这意味着具有直线驯性，与假设矛盾。因此，我们可以假设 $u\in S$。由于 $S$ 是 $x^{\perp}$ 的一个截面，它是一个非退化极空间，因此存在一点

$v \in S \setminus u^{\perp}$。 $v$ 在 $zz^{\theta}$ 上的投影 $x'$ 是 $\theta$ 的不动点，而 $S$ 不包含于 $x'^{\perp}$。因此，根据证明的第一部分，直线 $zz^{\theta}$ 被逐点固定。这一矛盾说明 $z$ 终究是不动点，因而上文的点 $w$ 也是不动点；于是如前所述，这意味着 $x^{\perp}$ 被逐点固定。这一矛盾证明了该断言。

前面的证明清楚地表明， $S$ 不包含于 $x^{\perp}$，否则 $x^{\perp}$ 将被逐点固定，因此 $\theta$ 是线国内的。令 $H_x$ 为所有经过 $x$ 且与 $S$相交的直线之并。于是由命题 3.8（$iii$）， $H_x$ 是 $\Delta$的一个几何子超平面。

最后，我们断言每条直线 $K$ 都包含一个不动点。事实上，任取一条直线 $K$，并取任一包含 $L$的平面$\beta$。由于 $S$ 是余秩 2 的子空间， $\beta$ 包含一个点 $s \in S$；又由于 $H_x$ 是余秩 2 的子空间， $\beta$ 包含一个点 $h \in H_x$。若 $s \neq h$，则交换 $h$ 与 $x$ 的角色，可得到 $\beta$ 中一条逐点固定的直线（即 $hs$），因此$K$上有一个不动点。所以我们可以假设 $s = h \in H$。首先，假设存在一点 $r \in S$ 与 $s$不共线。那么由本断言证明的第一部分，包含 $r$ 以及 $r$ 在 $\beta$ 上的投影的平面包含一条逐点固定的直线，该直线与 $K$相交，从而证明了断言。因此我们可以假设 $s$ 与 $S$中的所有点都共线。于是 $s$ 是 $S$ 的一个深点，并且由命题 3.8（$iv$），经过 $s$ 的每个平面都与 $S$有一条公共直线，从而再次得到 $K$上的一个不动点。

因此， $\theta$ 是线国内的，这与我们的假设矛盾。这表明， $\theta$ 的不动点集确实是几何子超平面 $S$。令 $x$ 为 $S$外的一个点。我们断言，直线 $xx^{\theta}$ 与 $S$相交。事实上，假设二者不相交。则 $x^{\perp} \cap S = (x^{\theta})^{\perp} \cap S$。由于直线 $xx^{\theta}$与 $S$不相交，命题 3.8($iii$)推出 $S$ 不包含于 $x^{\perp}$。但这样一来，从 $S \setminus x^{\perp}$ 上的一点向直线 $xx^{\theta}$ 作投影，就会得到一个位于 $S$之外的不动点，矛盾。断言得证。

设 $xx^{\theta} \cap S = c$。若 $S$中存在一个与 $c$ 相对的点 $z$，则将 $z$ 投影到 $xx^{\theta}$上，会得到一个位于 $S$ 之外的不动点，矛盾。因此， $c$ 是 $S$的深点。现在我们可以选取一个与 $c$ 相对的 $y \in X \setminus S$，从而得到 $S$的第二个深点 $c' = yy^{\theta} \cap S$。因此， $cc'$ 是 $S$ 的根（由命题 3.8($ii$)可知，根不可能大于一条直线），且每个不固定的点 $z$ 都满足 $zz^{\theta} \cap cc' \neq \emptyset$。所以， $\theta$ 是轴 $cc'$的轴心中心共线变换。

□

### 3.2.2 分裂极空间

现在我们将注意力转向分裂情形。事实上，我们可以对分裂极空间中所有点国内共线变换进行分类，这些变换在极大奇异子空间中也具有驯性。先给出一个引理和一些记号：对于 PG(3, $\mathbb{K}$) 中三个两两不相交的直线 $L, M, N$，记 $\mathrm{proj}_M^L(N)$ 为以 $L$ 为中心，将 $N$ 投影到 $M$ 上的投影；也就是说，$\mathrm{proj}_M^L(N)$ 将点 $x \in N$ 映到交点 $\langle L, x\rangle \cap M$。

引理 3.12. 设 $L_1, L_2$ 和 $L_3$ 是 PG(3, $\mathbb{K}$) 中三条两两不相交的直线，并设 $M$ 是一条横截线，也就是说，$M$ 是一条直线，对于所有 $i \in \{1, 2, 3\}$，它都与 $L_i$ 交于点 $x_i$。设 $L$ 是一条经过 $x_1$、位于平面 $\langle L_1, M\rangle$ 中的直线，其中 $L_1 \neq L \neq M$；并且对于 $|\mathbb{K}| > 2$，设 $L'$ 是一条同时与 $L_1$ 和 $M$ 相交、但与三元组 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 不相交的直线。那么 $\mathrm{proj}_{L_2}^{L_1}(L_3)\ \mathrm{proj}_{L_3}^{L}(L_2)$ 有唯一不动点，而 $\mathrm{proj}_{L_2}^{L_1}(L_3)\ \mathrm{proj}_{L_3}^{L'}(L_2)$ 恰有两个不动点。

证明。由 $\{L_1, L_2, L_3\}$ 和 $\{L, L_2, L_3\}$ 恰有一条公共横截线，即 $M$，而 $\{L_1, L_2, L_3\}$ 和 $\{L', L_2, L_3\}$ 恰有两条公共横截线，即 $M$ 和经过 $L' \cap L_1$ 的 $\{L_1, L_2, L_3\}$ 的唯一横截线，便可轻易得出此结论。

□

下一个定理是定理 4 的主要内容。回想第 1 节定理 1.3 之后，对于将对象 $\alpha$ 映射到对径对象的共线变换$\theta$， $\theta_\alpha$ 的定义。还要回想，真辛极空间是指特征不等于 2 的极空间。

定理 3.13. 设 $\theta$ 是大抛物型、真辛型或双曲型极空间 $\Delta$ 上的点国内共线变换，其对立图分别为 $\mathsf{B}^2_{n;i}$, $2 \le 2i \le n-1$、$\mathsf{C}^2_{n,\ i}$, $2 \le 2i \le n-1$或 $\mathsf{D}^2_{n,\ i}$, $2 \le 2i \le n-2$。那么， $\theta$ 分别是 $i$ 个两两正交的长根中心变换、一个（$I_{2n-2i}, -I_{2i}$）-调和，或 $i$ 个两两正交的长根中心变换的乘积。

证明。我们对 $i$ 使用归纳法来证明该定理； $i = 1$ 的情形已包含在命题 3.11 和定理 3.7 中。现在令 $i \ge 2$。

我们首先注意到，在秩为 $n$ 的抛物型极空间或秩为 $n+2$ 的双曲极空间中，至多 $n/2$ 个垂直根中心共线变换的乘积作用下，每条不动直线要么逐点不动，要么仅有一个点不动。此外，每个点都位于一条不动直线上。又在秩为 $n$ 的辛极空间中，$(I_{2n-2i}, -I_{2i})$-调和作用下，每条不动直线要么逐点不动，要么恰有两个点不动。此外，每个点都位于一条不动直线上。

对立图告诉我们，存在一条直线 $L$ 被映射到一条与之相对的直线上。由大性可知，我们可以选取 $L$，使得根据归纳法， $\theta_L$ 分别是 $i-1$ 个两两正交的长根中心变换的乘积、一个 $(I_{2n-2i}, -I_{2i-2})$-调和，或 $i-1$ 个两两正交的长根中心变换的乘积。现在取一个经过 $L$ 、在 $\theta_L$ 下不动的奇异三维空间 $\Sigma$，并且 $\Sigma$ 中所有经过 $L$ 的平面在 $\theta_L$ 下也不动。那么， $\Sigma$ 中每个包含 $L$ 的平面 $\pi$ 都具有性质 $\pi \cap \pi^\theta \neq \emptyset$。令 $K = \Sigma \cap \Sigma^\theta$，并取满足 $K'^\theta = K$ 的 $K' \subseteq \Sigma$。首先假设 $K$ 和 $K'$ 不相交。那么点 $x \in K'$ 被映射到点 $\langle L,\ x\rangle \cap K$。因此， $\theta$ 的作用在 $K'$ 上的限制由 $\mathrm{proj}_K^L(K')$ 给出。取 $\Sigma$ 中一条与 $K \cup K'$ 不相交的直线 $M$。我们断言 $M$ 与 $M^\theta$ 相对。反设不然，取一个与 $M$ 中所有点共线的点 $u \in M^\theta$。注意到 $u \notin K$ 和 $\langle M,\ K\rangle = \Sigma$, 这与 $u$ 和 $M \cup K$ 中所有点共线的事实矛盾。因此断言成立。现在在 $\Sigma$ 中适当选取 $M$，引理 3.12 将导致与本证明第二段中的观察相矛盾。若 $K' \cap K$ 是某个点 $z$, 则 $\theta$ 在 $K'$ 上的限制由以 $L \cap \langle K$ 为中心的中心射影给出， $K'\rangle$。考虑一条直线 $M$，它与 $K$ 相交于适当选取的另一个点 $K'$（辛情形下，该点取在线 $\langle z$、 $L \cap \langle K$、 $K'\rangle\rangle$ 上；其他情形下则取在该直线之外），我们再次得到与本证明第二段中的观察相矛盾的结论。

因此我们已经证明 $K$ 被逐点固定。现在令 $\pi$ 为经过 $L$ 且不被 $\theta_L$ 固定的任意平面。由先前的观察可知， $\pi$ 包含在一个被 $\theta_L$ 固定的奇异三维空间 $\Sigma$ 中。我们断言， $K := \Sigma \cap \Sigma^\theta$ 被 $\theta$ 稳定（根据正交情形或辛情形，恰有一个或两个不动点）。这里同样有两种情况需要排除： $K'$（定义同前，即 $K'^\theta = K$）与 $K$ 不相交，以及 $K' \cap K$ 是单元素集合。我们来解释第一种情况；第二种简单得多，留给读者。

先考虑正交情形。令 $\pi$ 为 $\Sigma$ 中包含 $L$ 且被 $\theta_L$ 固定的唯一平面。令 $M$ 为 $\pi$ 中与 $L$、$K$ 和 $K'$ 都分别交于一点的直线。现在可以在平面 $\langle L$、 $M\rangle$ 中，选取一条经过 $M \cap L$ 的唯一直线 $T$，使得 $\mathrm{proj}_K^T(K') = \theta/K'$。由此可知， $\theta_T$ 固定 $\Sigma$ 内经过 $T$ 的所有平面；而证明的前一部分现已推出 $K = \Sigma \cap \Sigma^\theta$ 被 $\theta$ 逐点固定，这就产生了矛盾（因为 $\theta_L$ 并未固定 $\Sigma$ 中经过 $L$ 的所有平面）。

现在辛情形的论证类似，只需注意到有两个平面 $\pi_1$、$\pi_2$ 经过 $L$，且在 $\theta_L$ 下保持不变。设 $M_i$ 是平面 $\pi_i$ 中 $L$、$K$、$K'$ 的唯一横截线，那么我们同样可以适当地选取 $M_1$ 上的一点 $z$，使得令 $T := \langle z, M_2 \cap L\rangle$ 后，映射 $\mathrm{proj}_K^T(K')$ 与 $\theta/K'$ 重合。于是得到同样的矛盾。

因此，我们已经证明 $\theta$ 稳定 $W := L^\perp \cap L^{\theta\perp}$，其中 $\theta$ 在正交情形下通过归纳法诱导出由 $i-1$ 个两两正交的长根中心变换组成的乘积 $\sigma$，其轴为 $(2i-3)$ 维奇异子空间 $A_W$；而在真辛情形下，诱导出一个

$(I_{2n-2-2i}, -I_{2i-2})$-调和 $\sigma$，其轴分别为 $(2n-2i-3)$ 维奇异子空间$A_W$ 和 $(2i-3)$ 维奇异子空间 $A'_{W^\circ}$。无论哪种情形， $W$ 都包含一条被映到相对位置的直线 $L^*$。对 $L^*$ 重复上文对 $L$ 所做的操作，并注意到在正交情形下，由 $L$ 和 $L^\theta$ 定义的双曲二次曲面 $H$ 是稳定的；而在（真）辛情形下，并集 $L \cup L^\theta$ 是稳定的（因为这是与所有稳定直线 $\langle x、\ x^\theta\rangle$ 相交的唯一一条直线，其中有 $x \in L$）。由此可知，在正交情形下， $\theta$ 在 $H$ 上诱导一个轴变换 $\sigma'$，其轴为直线 $A$；或者，在由 $L$ 和 $L^\theta$ 的张成空间中诱导出的非退化辛空间内，存在唯一一个 $(I_2, -I_2)$-调和 $\sigma'$，其轴为直线 $A$ 和 $A'$。

现在我们先讨论正交情形。令 $\sigma'$ 为 $\sigma$ 到 $\Delta$ 的自然延拓（即， $\sigma'$是生成 $\sigma$的 $(i-1)$ 个垂直长根 elation 的乘积，并自然延拓到 $\Delta$；注意，考虑相同的轴和同一对对应直线， $W$ 的每个长根中心共线变换都能唯一延拓为 $\Delta$ 的长根中心共线变换）。令 $\sigma''$ 为轴为 $A$、将 $L$ 映射到 $L^\theta$的长根中心共线变换。我们断言， $\sigma'\sigma''$在 $W^*$上的限制：$= L^* \cap L*^\perp$（记为 $\sigma^*$）与 $\theta$ 在 $W^*$ 上的限制（记为 $\theta^*$）相同。事实上，我们知道 $\theta^*$ 是至多 $(i-1)$ 个垂直长根 elation 的乘积。因此，不动点集是一个奇异子空间，故必包含 $A$和 $A_W \cap W^*$。但这两点生成一个维数为 $2i-3$的奇异子空间 $A^*$，所以 $\sigma^*$ 恰为 $(i-1)$ 个垂直长根 elation 的乘积，且轴为 $B$。我们可以将 $\sigma'\sigma''$ 与轴为$\langle L^*$的根中心共线变换 $\rho$ 相乘； $L^{*\theta}\rangle \cap A_W$是一条直线，该变换将 $L^{*\theta}$映射到 $L^*$。由于 $\rho$在 $L^* \cap L^{*\perp}$上诱导恒等变换，我们可推得 $\sigma^*$ 也是至多 $(i-1)$ 个垂直长根 elation 的乘积。但其不动点集也包含 $B$，因此 $B$ 是 $\sigma^*$的轴。由于 $\sigma^*$ 和 $\theta^*$ 在$W \cap W^*$上相同，且都将 $L$映射到 $L^\theta$，断言得证。因此， $\sigma'\sigma''$与 $\theta$在 $W \cup W^*$上相同。由 [12, 命题 5.4]，我们得到 $\sigma'\sigma'' = \theta$，且 $\theta$ 是 $i$ 个垂直长根 elation 的乘积，证毕。

现在我们讨论真辛情形。在这里，采用代数方法更为方便。我们可以选取标准交替双线性形式，使它在 $W$和 $H$中也具有标准形式。由前文可知，存在 $k \in \mathbb{K}$，使得 $\theta$的矩阵为对角矩阵，对角线上依次为 $2n-2i-2$ 个 1、 $2i-2$ 个 $-1$、两个 $k$和两个$-k$。但显然，为了使 $\theta$ 成为 $\Delta$的自同构，必须有 $k \in \{1, -1\}$，于是结论得证。

□

现在我们将辛情形下的定理 3.13推广到图 $\mathsf{C}^2_{2n;n}$，从而完成定理 4 的证明。注意，存在具有该对立图的驯性共线变换，它们不固定任何室。但是，如果要求至少有一个不动点，那么我们便有一个定义良好的对合中心共线变换。

定理 3.14. 设 $\theta$ 是带有对立图 $\mathsf{C}^2_{n,i}$, $2 \le 2i \le n$的大型真辛极空间$\Delta$ 上的点国内共线变换，且至少固定一个点（若 $n = 2i$）。则 $\theta$ 是一个（$I_{2n-2i}, -I_{2i}$）-调和。

证明. 若 $2i < n$，则此结论已在定理 3.13 中证明，因此以下假设 $n = 2i$。我们对 $n$进行归纳。对于 $n = 2$，定理由定理 3.7 得出。现在假设$n > 1$。

设 $x$ 是一个固定点。容易看出，点保持性蕴含由 $\theta$ 在 $\mathrm{Res}_\delta(x)$ 中诱导的映射 $\theta_{(x)}$ 也具有点保持性。我们断言，存在一个经过 $x$ 的平面 $\pi$，使得 $\pi, \pi^\theta$ 在 $\mathrm{Res}_\Delta(x)$ 中构成一对对置对。事实上，假设并非如此。那么 $\theta_{(x)}$ 既点国内又线国内，因此是恒等变换。设 $X$ 是一个非驯顺的三维空间（由对立图可知它存在）。容易看出， $x^\perp \cap X$ 与 $x^\perp \cap X^\theta$ 相交为 $x$ 和 $x^\perp \cap X$

张成一个维数为 $1+\dim(x^\perp \cap X)$ 的奇异子空间，而且该子空间在 $\theta$ 的作用下保持不变。这是矛盾的，从而证明了这一断言。

现在令 $L$ 为 $\pi$ 中一条不经过 $x$ 的直线。那么 $L^\theta$ 与 $L$ 在 $\Delta$ 中相对。映射 $\theta_L$ 固定由 $L$ 和 $x$ 张成的平面，因此由归纳法可知，它要么是恒等变换，要么是一个 $(I_{n-2}, -I_{n-2})$-调和变换。无论哪种情况，都可类似于定理 3.13 的证明，证明 $\Delta_L := L^\perp \cap (L^\theta)^\perp$ 在 $\theta$ 下保持不变。假设 $\Delta_L$ 逐点固定（换言之，$\theta_L$ 是恒等变换）。那么每个维数至少为 4 的奇异子空间都是驯顺的；若 $n \geq 6$，这就导致矛盾。因此，若 $n \geq 6$，则 $\theta$ 在 $\Delta_L$ 中诱导一个 $(I_{n-2}, -I_{n-2})$-调和变换。在这种情况下，取 $\Delta_L$ 中一条非驯顺直线 $M$。考虑将 $\Delta$ 嵌入 $\mathrm{PG}(2n-1, \mathbb{K})$，可知 $M^\perp \cap \Delta_L$ 的维数为 $2n-7$，因而当 $(2n-7)+(n-3)-(2n-4) \geq 0$ 时，它与 $\Delta_L$ 中逐点固定子空间（其维数为 $n-3$）有非平凡交点；故若 $n \geq 6$。因此，若 $n \geq 6$，则 $\theta_M$ 有一个不动点，我们可以再次应用归纳法，证明 $\Delta_M := M^\perp \cap (M^\theta)^\perp$ 固定不变；此外，$\theta$ 在 $\Delta_M$ 中诱导一个 $(I_{n-2}, -I_{n-2})$-调和变换。在 $\Delta_L$ 和 $\Delta_M$ 中诱导的调和变换在非空交集（其维数至少为 3）上相同；由于 $\Delta_L$ 和 $\Delta_M$ 张成整个空间，$\theta$ 本身就是一个 $(I_n, -I_n)$-调和变换。

剩下的情形是 $n = 4$。反设 $\Delta_L$ 逐点固定。于是 $\Delta_L^\perp$ 是由 $\theta$ 稳定的辛四边形，而定理 3.7 蕴含 $\theta$ 要么固定一个铺展 $\mathscr{S}$，要么是一个（$I_2$，$-I_2$）-调和。在前一种情形中，设 $S \in \mathscr{S}$ 是该铺展中的一条直线，$p$ 是 $\Delta_L$中的任意一点。由 $S$ 和 $p$ 张成的奇异平面 $\pi$ 被 $\theta$ 固定，而 $L$ 上没有点是不动点。但对于任意一点 $q \in \pi \setminus (S \cup \{p\})$，我们有 $q \neq q^\theta$，且 $qq^\theta$ 是不动点，这意味着 $S \cap qq^\theta$ 是不动点，矛盾。因此，$\theta$ 在 $\Delta_L^\perp$中诱导一个（$I_2$，$-I_2$）-调和，记其轴为 $A$ 和 $A'$。现在命题 3.1 和 3.3（$iii$）蕴含 $\langle A, \Delta_L \rangle$ 或 $\langle A', \Delta_L \rangle$ 逐点固定。这意味着 $\theta$ 是一个（$I_6$，$-I_2$）-调和，因而具有对立图 $\mathsf{C}^2_{4;1}$，矛盾。命题得证。

因此，$\theta$ 在 $\Delta_L$ 中诱导一个（$I_2, -I_2$）-调和，设其对应的轴为 $A, A'$。再设 $\Delta_L$ 中的直线 $M$ 被映射到一个对径对象。于是 $\Delta_M = \Delta_L^\perp$，交换 $L$ 和 $M$ 的角色可知，$\theta$ 在 $\Delta_M$ 中诱导一个（$I_2, -I_2$）-调和，设其轴为 $B, B'$。于是由命题 3.1 和 3.3（$iii$）可知，要么 $\langle A, B \rangle$ 和 $\langle A', B' \rangle$ 被逐点固定，要么 $\langle A, B' \rangle$ 和 $\langle A', B \rangle$ 被逐点固定。无论哪种情况，我们都得到一个（$I_4, -I_4$）-调和。□

### 3.2.3 II 类共线变换的一般情形

由于秩 3 的情形已完全明确，我们可以只考虑秩 $\geq 4$ 的情形。我们有以下起点。

命题 3.15。设 $\Delta = (X, \Omega)$ 是一个秩为 $n \geq 4$ 的极空间。设 $\theta$ 是 $\Delta$ 的一个点国内共线变换。那么 $\Delta$ 的所有平面都是帕普斯型的，即 $\Delta$ 定义在一个域上，并且 $\theta$ 的伴随域自同构是与相应厄米形式相关的那个（因此对于辛极空间和正交极空间是平凡的，对于厄米极空间则是一个对合）。如果 $\theta$ 是点国内的、$(n-1)$-驯顺的且 $(n-2)$-驯顺的，那么 $\Delta$ 总是一个辛极空间或正交极空间。

证明。对立图告诉我们，存在某个维数为 3 的奇异子空间 $\Sigma$，它被映射到一个相对的子空间。于是 $\theta_\Sigma$ 是局部对偶；由大性可知，它是辛极性（无论如何，如果极空间不大，那么它也定义在某个域上）。这类极性只存在于帕普斯射影空间中。现在任取 $\Sigma$ 中一条不被该辛极性固定的直线 $L$。于是 $L$ 和 $L^\theta$ 相对，而由 $L$ 和 $L^\theta$ 生成的 $\Delta$ 环境射影空间中的三维子空间 $W$，与一个广义四边形 $\Delta$ 相交。由 [21] 中定理 8.5.11 的证明可直接得出，映射 $\kappa$：
$L^\theta \to L : x \mapsto x^\perp \cap L$

是一个半线性映射的限制，其伴随域自同构为对合 $\sigma$；该对合对应于定义 $\Delta$ 的厄米形式（因此在辛极空间和正交极空间中是平凡的）。设 $\sigma'$ 为 $\theta$ 的伴随域自同构。设 $L'$ 为 $L^\theta$ 到 $\Sigma$ 上的投影。那么，对于每个点 $x \in L$，我们有 $x^{\theta\kappa} = L \cap (x^\theta)^\perp = L \cap x^{\theta_\Sigma} = x$，因为 $\theta_\Sigma$ 是辛的，故 $x \in x^{\theta_\Sigma}$。由于 $\theta\kappa$ 的伴随域自同构是 $\sigma'\sigma$，根据 $x^{\theta\kappa} = x$，它必定是恒等变换；因此，对所有 $x \in L$，我们推出 $\sigma = \sigma'$。

剩下要证明的是最后一个断言。为此，假设 $\theta$ 也分别是 $(n-1)$-驯顺和 $(n-2)$-驯顺。 [18] 的定理 6.1 推出， $\theta$ 逐点固定一个余秩至多为 $n-2$ 的子空间。由于这样的子空间总包含一条直线，$\theta$ 的伴随域自同构是恒等变换，因此 $\Delta$ 不是厄米的。

□

由前一个命题可得三种情形：辛情形、正交情形和厄米情形。辛情形已在定理 3.14 中处理。现在我们来讨论真正交情形，即最小嵌入中不含大小至少为 3 的割线的正交极空间。我们将证明， $\theta$ 属于共线变换群的一个共轭群，该群逐点固定集合 $E_1(C)$（用 Tits 的记号表示为 [20]）。

引理 3.16. 秩为$n \geq 3$ 的（严格）正交极空间 $\Delta$上的点国内共线变换 $\theta$ 若有不动点，则会固定一个室 $C$ 及所有与之相邻的室。特别地，若 $\theta$ 既是点国内的，又是（$n-1$）国内的，或者若 $\theta$ 是点国内的且 $n$ 为奇数，则上述结论成立。

证明. 设 $\theta$的一个不动点为 $x$ 。我们断言， $\theta$ 固定一个包含 $x$的极大奇异子空间。事实上，若 $n = 2$，则由 $\theta$ 是点国内的这一事实可立即得出结论。若$n > 2$，则根据归纳法，只需证明 $\theta$固定一条经过 $x$ 的直线。取一条经过 $x$ 的任意直线 $L$ ，并假设 $L$ 不固定。由命题 3.1， $\pi$ 与 $L$ 和 $L^\theta$ 所张成的平面固定。结合命题 3.3，可得 $\pi$中经过$x$ 的一条不动直线。断言得证。

因此，设 $U$ 是一个被 $\theta$ 固定的极大奇异子空间，且 $x \in U$。我们可以再次应用命题 3.3。由于我们知道 $\theta$ 是线性的（见命题 3.15），并且至少有一个不动点（根据假设，即 $x$），不动点结构只有两种可能：(1) $\theta$ 逐点固定恰好两个互补子空间 $W_1$ 和 $W_2$；或者 (2)$\theta$ 在 $U$ 中诱导一个中心共线变换（可能是平凡的）。

首先假设情形 (1)： $\theta$ 逐点固定两个互补子空间 $W_1$ 和 $W_2$。取超平面 $V_1 \subseteq W_1$ 和 $V_2 \subseteq W_2$ ，并考察 $\theta$ 在子空间 $V$ 的余空间 $R$ 中的作用，其中 $V$ 是由 $V_1$ 和 $V_2$ 张成的、维数为 $n-3$ 的子空间。注意， $R$ 是一个正交广义四边形。于是 $\theta$ 固定 $\langle V_1, W_1\rangle$ 以及 $\langle V_2, W_1\rangle$，这些点都在 $R$ 的直线 $U$ 上，而该直线上的其他点均不被固定。但 $\theta$ 在 $R$ 中诱导一个点国内共线变换。由于这类共线变换逐点固定一个对偶几何超平面， $R$ 中的不动点结构是一个理想子四边形。然而，真正交四边形是直线极小的（术语及这一结果见 [21] 的第 5.9 节）。这一矛盾表明，我们始终处于情形 (2)。

因此， $\theta$ 在 $U$中诱导一个中心共线变换。因此，我们可以在 $U$ 中选取一个室 $C'$ ，使得 $\theta$ 逐点固定 $E_1(C')$ 。令 $C = C' \cup \{U\}$。于是， $\theta$ 固定 $C$ 以及 $C$ 中所有与 $i$相邻且满足$1 \leq i \leq n-1$ 的室。接下来只需证明 $\theta$ 也固定所有与 $n$相邻的室。考虑 $C'$中维数为 $n-3$ 的奇异子空间 $\Sigma$。然后，$\theta$ 在 $\Sigma$的余空间（一个广义四边形）上的诱导作用，固定了对应于 $C'$中维数为 $n-2$ 的奇异子空间 $\Sigma'$ 的点。由点国内性可知，它固定经过该点的所有直线，即 $\theta$ 固定所有包含 $\Sigma'$的极大奇异子空间。因此， $\theta$ 固定所有与 $C$相邻的室 $n$。

如果 $\theta$ 是 $(n-1)$-驯顺的，那么根据引理 2.1，它固定一个点。如果 $n$ 是奇数，那么 $\theta$ 的对立图表明 $\theta$ 是 $(n-1)$-驯顺的。

□

特别地，前述引理适用于所有双曲极空间。

现在我们考察厄米情形。射影空间 $\Sigma$ 的 Baer 子空间具有以下两个性质：(1) $\Sigma$ 的每个超平面都与 $\Sigma$ 的至少一个点关联；(2) $\Sigma$ 的每个点都位于 $\Sigma'$ 的某条直线上。设 $\Delta'$ 是秩为 $n$ 的极空间$\Delta$ 的一个子极空间，而该极空间的秩为 $n$，并且满足以下性质。

(Pr1) $\Delta'$ 的每个极大奇异子空间都是 $\Delta$ 的某个极大奇异子空间的 Baer 子空间。

(Pr2) $\Delta$ 中包含 $\Delta'$ 的一个次极大奇异子空间的每个极大奇异子空间都属于 $\Delta'$。

那么我们称 $\Delta'$ 为 $\Delta$ 的理想 Baer 子极空间。这推广了 [18] 中秩 3 理想 Baer 子极空间的定义。固定 $\Delta$ 的理想 Baer 子极空间且不固定其他任何对象的对合称为理想 Baer 对合。

命题 3.17. 厄米极空间 $\Delta$ 中秩为 $n \geq 3$ 且有不动点的点国内共线变换 $\theta$ 是理想 Baer 对合，其对立图为 $\mathrm{B}^2_{n;m}$，其中 $2m \in \{n, n+1\}$。

证明. 取任意不动点 $x$。完全类似于引理 3.16 证明中的第一段，可以证明存在一个经过 $x$、在 $\theta$ 的作用下保持不变的极大奇异子空间 $U$。现在，由命题 3.3 和 3.15 可知，$\theta$ 在$U$ 中的不动点结构是一个 Baer 子空间 $\Sigma'$，且 $\theta$ 对 $U$ 的限制是一个对合。设$U$ 的一个超平面由 $\Sigma'$的一个超平面张成。于是，根据点保持性，包含 $W$ 的$\Delta$ 的所有极大奇异子空间都被 $\theta$固定，因此它们都包含其他被 $\theta$固定的点。这表明，对每个不动点 $x$，都存在许多与之相对的不动点。因此，不动点结构是一个非退化极空间，容易看出它是一个理想 Baer 子极空间。

显然，$\theta^2$ 是线性且点国内的（由推论 3.2 可知），因此根据命题 3.15，它是恒等变换。因此，$\theta$ 是一个对合，引理得证（对立图可由命题 3.15 的最后一个断言推出）。 □

例 3.18。设 $\Delta$ 是秩为 $n$、对应于方程为 $\sum_{i=1}^{n} X_{-i}\overline{X}_i - X_i\overline{X}_{-i} = 0$ 的厄米簇的极空间，该簇位于 PG$(2n-1, \mathbb{K})$ 中，其中 $x \mapsto \overline{x}$ 是相应的域对合，且 $\mathbb{K}$ 交换。设 $\theta$ 为如下共线变换：将坐标为 $(x_{-n}, x_{-n+1}, \ldots, x_{-1}, x_1, \ldots, x_n)$ 的点映射到 $(\overline{x}_{-n}, \overline{x}_{-n+1}, \ldots, \overline{x}_{-1}, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$。若以 $\mathbb{F}$ 表示该域对合的不动域，则 $\Delta$ 中的不动点恰为 Baer子空间 PG$(2n-1, \mathbb{F})$ 的所有点，因此 $\theta$ 逐点固定一个秩为 $n$ 的辛极空间。容易计算可知，该共线变换是点国内的。

现在我们可以转而关注 III 类共线变换。

## 3.3 III类自同构

若 $\theta$ 是秩为 $n$ 的极空间的 III 类自同构，那么根据推论3.4和3.6，秩 $n$ 为偶数，且 Diag($\theta$) $= \mathrm{X}^2_{n;n/2}$（其中 X $\in$ {B,C,D}）。

首先，我们需要对命题 3.3 的情形（$i$）作更精确的说明。

命题3.19. 设 $\Sigma$ 是域 $\mathbb{K}$ 上一个维数至少为 2 的有限维射影空间，并设 $\theta$ 是一个无不动点共线变换，具有如下性质：对于每个点 $x$，直线 $\langle x, x^\theta \rangle$ 都是不动的。那么 $\Sigma$ 的射影维数为奇数，记作 $2n+1$；不动子空间构成一个射影维数为 $n$ 的射影空间，它要么定义在 $\mathbb{K}$ 的一个二次（不一定可分）扩张 $\mathbb{L}$ 上，要么定义在一个四元数除环 $\mathbb{H}$ 上，而该除环自然包含 $\mathbb{K}$ 作为其中心上的一个二维子代数。

证明. 显然，不动点结构是一个维数为 $n$ 的射影空间 $\mathfrak{P}$。为确定坐标化除环，我们考察一个固定的三维子空间，即考察情形 $n = 1$。应用克莱因对应， $\theta$ 在 PG(5, $\mathbb{K}$) 中的一个双曲二次曲面 $Q$ 上作用，并逐点固定一个卵形体 $O$。

若 $\theta$ 是线性的，则 $O$ 中任意三个点确定 $Q$ 上的一条圆锥曲线，该曲线逐点固定（由线性性可知）。考察四个不共圆锥曲线的固定点，可知 $\theta$ 逐点固定 PG(5, $\mathbb{K}$) 中的一个三维子空间 $\Sigma$，它与 $Q$ 相交于 $O$。因此， $O$ 是 $\Sigma$ 中的椭圆二次曲面（即非退化非直纹二次曲面）。由于 $O$ 的稳定子诱导出一个包含 $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{L})$ 的群，其中 $\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{K}$ 的某个二次扩张；又由于 $\mathfrak{P}$ 上直线的射影变换群继承自 $\Sigma$ 中由 $\theta$ 固定的三维子空间的共线变换群，因此我们推得 $\mathfrak{P}$ 定义在 $\mathbb{L}$ 上。

现在假设 $\theta$ 不是线性的。注意， $\theta$ 不会将任何点映射到与其共线的点。我们证明 $\theta$ 是一个对合。设 $x$ 是任意一点。若 $x$ 被 $\theta$ 固定，则 $x$ 也被 $\theta^2$ 固定。现在假设 $x^\theta$ 与 $x$ 相对。设 $\pi$ 是经过 $x$ 的任意奇异平面。由于 $\theta$ 保持类型， $\pi^\theta$ 与 $\pi$ 交于唯一一点 $p$。显然 $p^\theta \in \pi^\theta \ni p$，因此由上文的论述可知 $p = p^\theta$。于是， $p^\perp \cap (p^\theta)^\perp$ 中固定点的集合构成一个卵形体 $C$；由于 $\theta$ 不是线性的，该卵形体不可能是平面圆锥曲线。因此 $C$ 张成 $p^\perp \cap (p^\theta)^\perp$，所以 $\theta$ 保持 $p^\perp \cap (p^\theta)^\perp$。因此 $\theta$ 也保持该集合的极点，即 $\{p, p^\theta\}$，这意味着 $p^{\theta^2} = p$。这表明 $\theta$ 是一个对合。

回到 $\mathfrak{P}$， $\theta$ 作为伽罗瓦群，因此 $\mathfrak{P}$ 源于伽罗瓦下降，这意味着坐标化结构是一个四元数除环。也可以用初等方法看出这一点：设 $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$: $k \mapsto \overline{k}$ 为伴随域对合，则在 $n = 1$ 的情形下，可选取坐标使得 $\theta$ 将 $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 映射为 $(\overline{x}_2, a\overline{x}_1, \overline{x}_4, a\overline{x}_3)$，其中$a = a^\theta \notin \{x\overline{x} : x \in \mathbb{K}\}$。由此确定了四元数除环，其乘法由 $(x, y) \cdot (u, v) = (xu + a\overline{y}v, yu + \overline{x}v)$ 给出。

□

立即可得推论，即定理 5：

推论 3.20。设 $\Delta = (X, \Omega)$ 是定义在域 $\mathbb{K}$ 上、秩为 $n \geq 4$ 的极空间。设 $\theta$ 是 $\Delta$ 的一个点国内共线变换，且有不动点。设 $Y$ 是不动直线的集合， $\Upsilon$ 是不动奇异子空间的集合。那么 $\Gamma = (Y, \Upsilon)$ 是一个极空间，它定义在 $\mathbb{K}$ 的某个二次扩张上，或定义在四元数除环 $\mathbb{H}$ 上；该除环在 $\mathbb{K}$ 上的维数为 2（并且 $\mathbb{K}$ 在 $\mathbb{H}$ 的中心上的维数为 2）。

现在我们首先处理分裂情形（定理 6）。回顾秩为 $n$ 的极小厄米极空间的定义：其环境射影空间的维数为 $2n - 1$。混合极空间（秩为 $n$）是辛极空间（秩为 $n$）的真子空间，且自身也是极空间。这里，特征必定为 2。

定理 3.21。设 $\Delta = (X, \Omega)$ 是定义在域 $\mathbb{K}$ 上、秩为 $n \geq 4$ 的分裂极空间。设 $\theta$ 是 $\Delta$ 的一个点国内共线变换，且没有不动点。那么 $n$ 为偶数，记作 $n = 2m$，且对立图为 $\mathsf{C}^2_{n,\ m}$ 或 $\mathsf{D}^2_{n,\ m}$。此外， $\Delta$ 或为

– 辛极空间，且 $\theta$ 的不动点结构是定义在 $\mathbb{K}$ 的二次扩张上的辛极空间；或– 双曲正交极空间，且 $\theta$ 的不动点结构为极小厄米极空间或混合极空间。

证明。辛情形可直接由命题 3.19 以及以下事实得出：辛极空间是唯一满足环境射影空间的所有点都属于该极空间这一性质的嵌入极空间。

在双曲情形，只需考虑秩 $n = 4$。应用三重性，我们可以假设 $\theta$ 具有对立图 $\mathsf{D}^1_{4;2}$；此时不动点结构是一个余秩为 2 的子空间，因此是自然嵌入射影五维空间的正交广义四边形；根据 [21], 的注记 3.4.10，它或者是一个混合四边形，或者是一个极小厄米四边形的对偶。

在抛物情形中，我们考虑由 $\theta$固定的两个相对极大奇异子空间。于是，$\theta$ 稳定由它们生成的双曲极空间 $H$ 。一条不包含在$H$ 中的不动直线与 $H$ 交于一点（因为 $H$ 是一个几何超平面），而该点随后必被固定，由此产生矛盾。

□

注意，前一个定理指出，没有任何抛物型极空间存在无不动点的点国内共线变换。因此，在辛情形中，若特征为 2，则定义域不能是完美域。事实上，我们甚至可以更具体地描述这些共线变换以及上述二次扩张。下一个命题就是定理 7。

命题 3.22. 设 $\Delta = (X, \Omega)$ 是定义在域 $\mathbb{K}$ 上、秩为 $n \geq 4$ 的辛极空间。设 $\theta$ 是 $\Delta$ 的一个没有任何不动点的点国内共线变换。设 $\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{K}$ 的二次扩张，根据定理 3.21， $\theta$ 的不动点结构定义在该扩张上。那么， $\theta$ 是一个对合，并且

– $\mathbb{K}$ 的特征不为 2，且 $\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{K}$的可分扩张；或者– $\mathbb{K}$ 的特征为 2，且 $\mathbb{L}$ 是 $\mathbb{K}$的不可分扩张。

反过来，若 $\mathbb{K}$ 存在二次扩张 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$，且当 $\mathbb{K}$ 的特征为 2 时该扩张不可分，则 $\Delta$存在如上所述的无不动点点国内共线变换。

证明。显然，只需证明：若 $\mathbb{K}$ 上的一个辛四边形中，某个无不动点共线变换 $\theta$保持一个铺展不变，则 $\theta$ 是一个对合；并且当 $\mathbb{K}$ 的特征为 2 时，该铺展对应于一个不可分扩张。

设辛四边形 $\Delta$ 由标准辛形式 $x_0y_1 - x_1y_0 + x_2y_3 - x_3y_2$定义。不失一般性，设 $\theta$ （由命题 3.15 可知，其伴随域自同构是平凡的）将点 (1, 0, 0, 0) 映到 (0, 0, 0, 1)，并将 (0, 0, 1, 0) 映到 (0, 1, 0, 0)。因此，(0, 1, 0, 0) 被映到 $(0, a, b, 0)$，而 (0, 0, 0, 1) 被映到 $(c, 0, 0, d)$，从而得到矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & a & e & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d \end{pmatrix},$$

对于某些 $a, b, c, d, e \in \mathbb{K}$。令 $\theta$ 将每个点 $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ 映射到与之共线的点，可得

$$cx_3x_1 - (ax_1 + ex_2)x_0 + bx_1x_3 - (x_0 + dx_3)x_2 \equiv 0.$$

由此得到 $e = -1$, $c = -b$ 和 $a = d = 0$。

由于 $\theta$ 没有不动点， $b$ 是非平方数，因此我们看到 $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\sqrt{b})$，这就证明了这些断言（反过来，由于 $\theta$ 的显式型，显然成立）。 □

双曲情形更加典范。这是引言中的定理 8。

命题 3.23. 设 $\Delta = (X, \Omega)$ 是定义在域 $\mathbb{K}$ 上、秩为 $n \geq 4$ 的双曲极空间。设 $\theta$ 是 $\Delta$ 的一个没有任何不动点的点国内共线变换。令 $\mathrm{PG}(2n - 1, \mathbb{K})$ 为环境射影空间。则 $\theta$ 自然延拓为 $\mathrm{PG}(2n - 1, \mathbb{K})$ 上逐点固定铺展 $\mathscr{S}$ 的共线变换，而该铺展定义了一个建立在 $\mathbb{K}$ 的二次扩张 $\mathbb{L}$ 上的射影空间 $\mathrm{PG}(n - 1, \mathbb{L})$。

PG(2$n-1,\mathbb{K}$) 的每个逐点固定 $\mathscr{S}$ 的共线变换，都是 $\Delta$ 的一个没有不动点的点国内共线变换。若 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ 可分，则不动极空间是极小厄米极空间；若 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ 不可分，则不动极空间是辛极空间的子空间，该辛极空间定义在 $\mathbb{L}$ 上，并由将长根中心共线变换限制到 $\mathbb{K}$ 而得到。

反过来，若 $\mathbb{K}$ 有二次扩张 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$，则存在一个如上所述的 $\Delta$ 点国内共线变换，且没有不动点。

证明。再次只需考虑 $n=4$ 的情形。我们将坐标排序为 i n

$$(x_{-4},x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_1,x_2,x_3,x_4),$$

令 $X$ 为满足方程 $X_{-4}X_4-X_{-3}X_3+X_{-2}X_2-X_{-1}X_1=0$ 的点集，并假设 $\theta$ 稳定直线 $\langle p_{-4}、\ p_{-3}\rangle$、$\langle p_4、\ p_3\rangle$、$\langle p_{-2}、\ p_{-1}\rangle$、$\langle p_2p_1\rangle$，其中 $p_i$ 是在位置 $i$ 处为 1、其余位置均为 0 的点。设

$$M_i=\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix},$$

$a_i、\ b_i、\ c_i、\ d_i\in\mathbb{K}、\ i=-2、\ -1、1、2$。于是我们可以假设 $\theta$ 的分块矩阵为

$$\begin{pmatrix} M_{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_2 \end{pmatrix}.$$

（回顾命题 3.15，$\theta$ 是线性的；$\theta$ 的作用在左侧）

由于 $\theta$ 没有不动点，对所有 $i\in\{-2,-1,1,2\}$，都有 $b_i\neq 0\neq c_i$。由 $\theta$ 保持二次曲面（因而使二次型在相差一个标量倍的意义下保持不变）可推出 det $A_{-2}=$ det $A_{-1}=$ det $A_1=$ det $A_2:=d$。由 $\theta$ 将每个点映到与其共线的点可推出 tr $A_{-2}=$ tr $A_{-1}=$ tr $A_1=$ tr $A_2:=t$。对于 $i=1,\ 2$，我们还有 $A_{-i}=A_i$。此外，由于 $\Delta$ 中没有不动点，方程 $x^2-tx+d=0$ 在 $\mathbb{K}$ 中无解，并确定一个二次域扩张 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$。由此可知，$\theta$ 逐点固定 PG(7,$\mathbb{K}$) 的一个铺展 $\mathscr{S}$。显然，PG(7,$\mathbb{K}$) 中每个逐点固定该铺展的共线变换，限制在 $\Delta$ 上后都是点国内共线变换。

设 $\delta$ 是方程 $x^2-tx+d=0$ 在 $\mathbb{L}$ 中的一个解。于是，我们可以将 $\mathbb{L}$ 的每个元素写成 $a+b\delta$，其中 $a、\ b\in\mathbb{K}$，因此有 $\delta^2=t\delta-d$。现在，我们将 PG(7,$\mathbb{K}$) 中的每个点$p=(x_{-4},x_{-3},\ldots,x_3,x_4)$ 与 PG(3,$\mathbb{L}$) 中的点 $p^\beta=(c_2x_{-4}-a_2x_{-3}+x_{-3}\delta,c_1x_{-2}-a_1x_{-1}+x_{-1}\delta,$ $c_1x_1-a_1x_2+x_2\delta,c_2x_3-a_2x_4+x_4\delta)$ 相对应。经过初等计算可知，在 $\theta$ 的作用下，一个点的像对应于 PG(3,$\mathbb{L}$) 中的同一个点（坐标相差一个标量 $\delta$）。因此，我们可以将 PG(7,$\mathbb{K}$) 的不动直线与 PG(3,$\mathbb{L}$) 的点相对应。将元素 $u+v\delta\in\mathbb{L}$ 的共轭 $u+tv-v\delta$ 记作$\overline{u+v\delta}$，其中 $u,v\in\mathbb{K}$。于是可计算得，PG(7,$\mathbb{K}$) 中的点 $p$ 属于 $\Delta$ 当且仅当 $p^\beta$ 的坐标 $(y_{-2},y_{-1},y_1,y_2)$ 满足关系式 $c_1Y_{-2}\overline{Y}_2+c_2Y_{-1}\overline{Y}_1\in\mathbb{K}$。

这就证明了命题（注意，根据我们给出的 $\theta$ 的明确形式，反向结论同样显而易见）。

□

现在我们考虑非分裂极空间。极小厄米极空间的情形最为简洁。下面是定理 9。

命题 3.24. 设 $\Delta=(X,\Omega)$ 是秩为 $n\geq 4$、定义在域 $\mathbb{K}$ 上的极小厄米极空间，其对应的域对合为 $\sigma$，域扩张为 $\mathbb{K}/\mathbb{F}$。设 $\theta$ 是 $\Delta$ 的一个驯性共线变换，它逐点固定点且没有任何不动点。设 PG($2n-1,\mathbb{K}$) 为环境射影

空间。那么， $\theta$ 是一个对合，并自然延拓为 PG($2n-1,\mathbb{K}$) 上的变换，逐点固定一个铺展$\mathscr{S}$；该铺展定义了一个以四元数除环 $\mathbb{H}$ 为坐标、其中心为 $\mathbb{F}$ 的射影空间 PG($n-1,\mathbb{H}$)，其中 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{H}$ 的一个二维子代数。在 $\Delta$ 中，逐一固定 $\mathscr{S}$ 的唯一非平凡共线变换是 $\theta$。不动极空间是一个极小四元数极空间，与 $\mathbb{H}$ 的一个非标准对合相关；该对合逐点固定一个定义在 $\mathbb{F}$ 上的三维子代数。

反过来，若 $\mathbb{K}$ 具有一个四元数扩张 $\mathbb{H}$，使得 $\mathbb{H}$ 的中心 $\mathbb{F}$ 是$\mathbb{K}$ 的子域，且 $\mathbb{K}/\mathbb{F}$ 是可分二次域扩张，则存在一个如上所述的 $\Delta$的无不动点点国内共线变换。

证明。注意，根据命题 3.15， $\theta$ 是一个对合。此外，若 $\Delta$ 的另一个对合 $\theta'$ 恰好固定与 $\theta$相同的直线，则 $\theta\theta'$ 是 $\Delta$的线性点国内共线变换，这就说明了 $\theta$的唯一性。我们仍只需考虑 $n=4$ 的情形。论证与命题 3.23 的证明类似。我们按如下方式排列坐标:

$$(x_{-4},x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_1,x_2,x_3,x_4),$$

令 $X$ 为满足方程的点集

$$X_{-4}X_4^\sigma+X_4X_{-4}^\sigma-X_{-3}X_3^\sigma-X_3X_{-3}^\sigma+X_{-2}X_2^\sigma+X_2X_{-2}^\sigma-X_{-1}X_1^\sigma-X_1X_{-1}^\sigma=0,$$

并假设 $\theta$稳定直线 $\langle p_{-4}、\ p_{-3}\rangle$、$\langle p_4、\ p_3\rangle$、$\langle p_{-2}、\ p_{-1}\rangle$、$\langle p_2p_1\rangle$，其中 $p_i$是第 $i$ 个位置为 1、其余位置均为 0 的点。

由于 $\theta$ 是一个对合，我们可以假设它交换 $p_{-4}$ 与 $p_{-3}$、$p_4$ 与 $p_3$、$p_{-2}$与 $p_{-1}$，以及 $p_2$ 与 $p_1$。因此，它的分块矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_{-2} & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_{-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & A_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

with

$$M_i=\begin{pmatrix} 0 & a_i\\ b_i & 0 \end{pmatrix},$$

$a_i,b_i\in\mathbb{K}$, $i=-2,-1,1,2$。由 $\theta$ 保持 $X$，且 $\theta$ 将 $\Delta$ 中的点映射为共线点这一条件，可直接推出 $a_{-i}=a_i$, $b_{-i}=b_i$，其中 $i=1$，2，且 $a_1b_1^\sigma=a_2b_2^\sigma=b_1a_1^\sigma=b_2a_2^\sigma=:\ \ell\in\mathbb{F}$。那么，当且仅当 $\ell\notin\{kk^\sigma:\ k\in\mathbb{K}\}$时，$\theta$ 在 $\Delta$ 中没有不动点。容易验证，这就定义了 PG($7,\mathbb{K}$) 中一个无不动点对合，因而逐点固定一个铺展 $\mathscr{S}$。

我们可以定义四元数除环 $\mathbb{H}:=\{u+v\delta:(u,v)\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}\}$，其加法为通常的加法，乘法由 $\delta v=v^\sigma\delta$ 和 $\delta^2=\ell$ 确定。显然， $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{H}$ 的中心，而 $\mathbb{K}$ 是 $\mathbb{F}$ 上一个 2 维除子代数。

现在，我们将 PG($7,\mathbb{K}$) 中的每个点 $p=(x_{-4},x_{-3},\dots,x_3,x_4)$ 与左射影空间 PG($3,\mathbb{H}$) 中的点 $p^\beta=(a_2^\sigma x_{-4}+x_{-3}\delta,a_1^\sigma x_{-2}+x_{-1}\delta,a_1^\sigma x_1+x_2\delta,a_2^\sigma x_3+x_4\delta)$ 对应起来。经过简单计算可知，点在 $\theta$ 作用下的像对应于 PG($3,\mathbb{H}$) 中的同一个点（坐标相差一个左标量 $\delta$）。因此，我们可以将 PG($7,\mathbb{K}$) 的不动直线与 PG($3,\mathbb{H}$) 的点对应起来。将元素 $u+v\delta\in\mathbb{H}$ 的非标准对合 $u-v^\sigma\delta$ 记作 $\overline{u+v\delta}$，其中 $u,v\in\mathbb{K}$。于是可计算得，PG($7,\mathbb{K}$) 中的点 $p$属于 $\Delta$，当且仅当 $p^\beta$的坐标 $(y_{-2},y_{-1},y_1,y_2)$ 满足关系 $Y_{-2}a_2^{-\sigma}\overline{Y}_2+Y_{-1}a_1^{-\sigma}\overline{Y}_1=Y_2a_2^{-\sigma}\overline{Y}_{-2}+Y_1a_1^{-\sigma}\overline{Y}_{-1}$。

这就证明了该命题（注意，由于我们对 $\theta$ 给出了明确形式，反向结论也显而易见）。

□

接下来要考虑的是标准形式具有非平凡各向异性型的正交极空间和厄米极空间。这些空间包含在给定的点国内共线变换下保持不变的双曲极子空间和极小厄米极子空间，因此命题 3.23 和 3.24 给出了其存在的必要条件。一般而言，若任意极空间中有一个双曲型或极小厄米型极子空间允许一个没有不动点的点国内共线变换，那么该共线变换能否扩展为一个没有不动点的点国内共线变换，取决于各向异性型的形状；一般规则是，经过重新协调后，各向异性型必须是相应域扩张或四元数除环的范数型的若干倍数之和。下面我们举几个特定域上的例子来说明这一点。

一些特殊域

实数域上的二次曲面。考虑射影空间中 Witt 指标为 $2n$ 、维数为 $4n+2k-1$的实二次曲面。其标准方程为

$$X_{-2n}X_{2n}+X_{-2n+1}X_{2n-1}+\cdots+X_{-1}X_1=X_{0,-k}^2+X_{0,-k+1}^2+\cdots+X_{0,-1}^2+X_{0,1}^2+\cdots+X_{0,k}^2.$$

设 $M$ 是一个具有非实特征值的实 $2\times 2$ 矩阵。乘以适当的标量后，我们可以假设其行列式为 1。那么它的迹具有 2 cos $\varphi$ 的形式，其中$\varphi\in]0、\ \pi[$。由下式定义的共线变换

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}x_{-2\ell}\\x_{-2\ell+1}\end{pmatrix} & \mapsto \quad M\cdot\begin{pmatrix}x_{-2\ell}\\x_{-2\ell+1}\end{pmatrix},\ell=1,2,\ldots,n,\\ \begin{pmatrix}x_{2\ell-1}\\x_{2\ell}\end{pmatrix} & \mapsto \quad M\cdot\begin{pmatrix}x_{2\ell-1}\\x_{2\ell}\end{pmatrix},\ell=1,2,\ldots,n,\\ \begin{pmatrix}x_{0,-\ell}\\x_{0,\ell}\end{pmatrix} & \mapsto \quad \begin{pmatrix}\cos\varphi & \pm\sin\varphi\\ \mp\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_{0,-\ell}\\x_{0,\ell}\end{pmatrix},\ell=1,2,\ldots,k\end{cases}$$

是点国内且无不动点的。其不动点结构是 PG$(2n+k-1,\mathbb{C})$ 中的一个厄米极空间，方程为（以及前述约定）

$$Y_{-n}\overline{Y}_n-Y_n\overline{Y}_{-n}+\cdots+Y_{-1}\overline{Y}_1-Y_1\overline{Y}_{-1}=Y_{0,k}\overline{Y}_{0,k}+\cdots+Y_{0,1}\overline{Y}_{0,1}.$$

有理数域上的二次曲面。考虑射影空间 PG$(11,\mathbb{Q})$ 中 Witt 指标为 4、方程为

$$X_{-4}X_4+X_{-3}X_3+X_{-2}X_2+X_{-1}X_1=X_{0,-2}^2+X_{0,-1}^2+X_{0,1}^2+\ell X_{0,2}^2,$$

其中 $\ell\in\mathbb{Q}$。如果 $\ell$ 是完全平方数，那么我们可以令$X'_{0,\ 2}=\sqrt{\ell}X_{0,\ 2}$，并且像之前一样构造出无不动点的点国内共线变换。然而，如果 $\ell$ 不是完全平方数，那么$X_{0,\ -2}^2+\ell X_{0,\ 2}^2$和$X_{0,\ -1}^2+X_{0,\ 1}^2$并不定义同一个二次扩张$\mathbb{Q}$的范数，而且可以很容易地证明不存在无不动点的点国内共线变换。

复厄米极空间。与实二次曲面类似，这里也有相似的结论。设射影空间 PG$(4n+2k-1,\mathbb{C})$ 中一个 Witt指标为 $2n$ 的厄米簇由（标准）方程给出

$$\sum_{\ell=1}^{-2n}X_{-2\ell}\overline{X}_{2\ell}+X_{2\ell}\overline{X}_{-2\ell}-X_{-2\ell+1}\overline{X}_{2\ell-1}-X_{2\ell-1}\overline{X}_{-2\ell+1}=\sum_{\ell=1}^{k}X_{0,-\ell}\overline{X}_{0,-\ell}+X_{0,\ell}\overline{X}_{0,\ell}.$$

那么，对于每个 $r \in \mathbb{R}^+$，由下式定义的半线性对合

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_{-2\ell} \\ x_{-2\ell+1} \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \overline{x}_{-2\ell+1} \\ -r.\overline{x}_{-2\ell} \end{pmatrix}, \ell = 1, 2, \ldots, n, \\ \begin{pmatrix} x_{2\ell-1} \\ x_{2\ell} \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \overline{x}_{2\ell} \\ -r.\overline{x}_{2\ell-1} \end{pmatrix}, \ell = 1, 2, \ldots, n, \\ \begin{pmatrix} x_{0,-\ell} \\ x_{0,\ell} \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \pm\sqrt{r}.\overline{x}_{0,\ell} \\ \mp\sqrt{r}.\overline{x}_{0,-\ell} \end{pmatrix}, \ell = 1, 2, \ldots, k \end{cases}$$

是点国内且无不动点的。

现在，前文所述有理二次曲面的类似性质也适用于复有理厄米特簇，在此不再赘述。

有限域。前述讨论使我们现在可以得出结论：秩至少为 3 的有限极空间Δ 存在无不动点的点国内共线变换，当且仅当它是奇特征下的辛极空间，或是双曲二次曲面、椭圆二次曲面或极小厄米特簇。此外，所有这类共线变换都可以在适当的标准形式下明确写出。

注 3.25。逆向过程，即从域扩张 $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ 上的厄米形式或从具有二维子域 $\mathbb{K}$的四元数除环 $\mathbb{H}$ 上的厄米形式出发，并将其视为子域 $\mathbb{K}$ 上的形式，从而分别得到二次型或厄米形式，是众所周知的（有时称为域约化）。不过，这里还会出现其他情况，因为这并不总是与共线变换及其不动点结构有关（例如，当四元数除环 $\mathbb{H}$ 的二维子域 $\mathbb{K}$是该代数基域的不可分扩张时）。但若它与共线变换及其不动点结构有关，那么它总是一个点国内的无不动点共线变换。

# 4 极闭图

本节证明定理 10，对可容许Dynkin图进行分类，这些图是分裂球状建筑中幺幂元的对立图。例外型 $\mathsf{E}_n$ ($n = 6, 7, 8$)、$\mathsf{F}_4$ 和 $\mathsf{G}_2$ 的结果见定理 $[12, \text{定理 } 5]$, ，因此这里我们讨论经典型。我们还将证明定理 11。

我们需要以下引理。射影空间 PG($V$)中的非退化广义极性 $\rho$ 是点集上的一种对称关系，使得对于每个点 $p$ ，与 $p$ 有关系的点集 $p^\rho$ 都是 PG($V$)的一个超平面。如果极空间 $\Delta$ 嵌入在某个射影空间 PG($V$)的非退化广义极性 $\rho$ 中，并且 $\Delta$ 的每个点 $p$ 都是 PG($V$)中的点，且由 $p^\perp$ 张成的超平面恰好与 $p^\rho$重合，我们就称之为如此。

引理 4.1. 设 $\Gamma$ 是嵌入在 $\mathbb{L}$ 上射影空间 PG($V$) 中的非退化广义极性 $\rho$ 内、秩为 $n$ 的任意极空间，且 $\Gamma$ 张成 PG($V$)。设 $0 \leq i \leq n-1$。那么，余秩为 $i$ 的几何子空间不包含于余维数为 $i+1$ 的子空间中。

证明。反设 $S$ 是 PG($V$) 中余维数为 $i+1$ 的子空间，且包含一个余秩为 $i$ 的 $\Gamma$ 几何子空间。由于 $\Gamma$ 嵌入于 $\rho$， $\Gamma$ 中每个不属于 $S^\rho$ 的点 $x$ 都具有这样的性质： $x^\perp \cap S$ 是一个余维数为 $i+2$ 的子空间。取这样一个点 $x_1$（根据假设， $\Gamma$ 不包含于 $S^\rho$ ，故这样的点显然存在）。在 $\Gamma_1 :=$ Res($x_1$) 中，这意味着我们得到一个子空间 $S_1$ ，其余维数为 $S_1 = i+2$ ，且与每个维数为 $(i-1)$ 的奇异子空间都有非平凡交。由于 Res($x_1$) 嵌入于 PG($V_2$) 的一个非退化极性中，且

余维数为 $V_2 = 2$，并张成 PG($V_2$)，我们可以应用相同的论证并如此继续，直到得到一个秩为 $n-i$、张成 PG($V_{2i}$) 的极空间 $\Gamma_i$，其余维数为 $V_{2i} = 2i$；以及 PG($V$) 中余维数为 $2i+1$ 的子空间 $S_i$，因此它在 PG($V_{2i}$) 中余维数为 1，并且与 $\Gamma_i$ 中每个维数为 0 的子空间都有非平凡交。换言之，$\Gamma_i$ 包含于 $S_i$，这就产生了矛盾。

□

现在我们可以证明，对于奇数 $i$，对立图 $\mathsf{B}^1_{n;i}$ 不会作为类型 $\mathsf{B}_n$ 的分裂建筑中任何幺幂元的对立图出现。事实上，考虑所有正规的正交极空间，我们可以证明一个稍微更一般的结果。回顾一下，正规的正交极空间是指其最小嵌入中不存在大小至少为 3 的割线的极空间。这包括特征不等于 2 时所有 Witt 指标至少为 2 的二次曲面，以及所有双曲二次曲面。

命题 4.2. 设 $\Delta$ 是标准嵌入于某个射影空间 PG($V$) 中的正规正交极空间，且 $\theta$ 是 $\Delta$ 的一个共线变换，其对立图为 $\mathsf{B}^1_{n;i}$，其中 $i$ 为某个奇数，$1 \le i \le n-1$。那么 $\theta$ 不是幺幂元。

证明. 反设 $\theta$ 是 $\Delta$ 的一个幺幂元，其对立图为 $\mathsf{B}^1_{n;i}$，其中 $i$ 为某个奇数，$1 \le i \le n-1$。根据 [18, 定理 6.1] 和引理 2.1，$\theta$ 逐点固定一个余秩为 $i$ 的几何子空间；由引理 4.1，该几何子空间生成 PG($V$) 的一个余维数至多为 $i$ 的子空间 $S$。由于 $\theta$ 是幺幂的，$\theta$ 的不动点集是一个子空间 $T$，我们断言它就是 $S$。事实上，由于 $S$ 由一个余秩为 $i$ 的逐点不动子空间张成，它也逐点不动（这也可由 [18] 中定理 6.1 的证明得出）。现在假设 $\operatorname{codim} T < i$。那么，任取一个维数为 $i-1$ 的奇异子空间，它与 $T$ 至少交于一点，因此不可能被映到一个相对的子空间，矛盾。所以 $S = T$，且 $\operatorname{codim} S = i$。

由于 $S$ 是 $\theta$的轴，子空间 $S^\perp$ 是 $\theta$的中心，也就是说，PG($V$)中所有包含 $S^\theta$ 的子空间都不动。由于幺幂元具有关联对（轴，中心），我们有$S^\perp \subseteq S$。这意味着 $S^\perp$ 是 $\Delta$ 的一个维数为 $i-1$的奇异子空间。由于它充当 $\theta$的中心，后者将 $\Delta$ 中一个与 $S$不相交的 $(i-1)$ 维奇异子空间 $W$映射到一个包含于 $\langle S, W\rangle$且与之不相交的 $i-1$ 维奇异子空间。因此，$W$和$W^\theta$是秩为 $i$的双曲二次曲面$\langle S, W\rangle \cap \Delta$ 中两个不相交且类型相同的极大奇异子空间，这意味着 $i$ 为偶数，矛盾。 □

现在我们可以证明定理 10 的一个方向。

推论 4.3。设 $\theta$ 是一个分裂球状建筑的自同构。如果 $\theta$ 的对立图不是极闭的，那么 $\theta$ 不是幺幂元。

证明。回顾一下，除类型为 $\mathsf{A}^2_{n;(n-1)/2}$ ($n$ 奇数)、$\mathsf{A}^1_{n;n}$、$\mathsf{B}^1_{n;i}$ 或 $\mathsf{D}^1_{n;i}$ (其中 $i$ 为奇数且 $1 \le i < n$)、$\mathsf{C}^2_{n;i}$ (其中 $1 \le i \le n/2$) 的图以及表 2 中的图外，所有经典型容许图都是极闭的。图 $\mathsf{A}^2_{n;(n-1)/2}$ ($n$ 奇数)、$\mathsf{A}^1_{n;n}$、$\mathsf{B}^1_{n;i}$ (其中 $i$ 为奇数且 $1 \le i < n$) 以及表 2 中的图，都对应于 $\Delta$ 的非类型保持自同构，因此不可能作为 $U$ 的某个共轭元的对立图出现。命题 4.2 和定理 3.14 表明，其余非极闭图 $\mathsf{B}^1_{n;i}$ ($i$ 奇数) 和 $\mathsf{C}^2_{n;i}$ 不可能是幺幂元的对立图。

□

现在我们必须证明反向结论。为此，我们简要回顾分裂经典群中元素 $x_\alpha(a)$ 的显式矩阵实现，并遵循 [4] 中的约定（请注意，这会得到与第 1.6 节所列不同的二次型）。在每种情形下，我们都会给出具有 $\alpha \in \Phi^+$ 的 $x_\alpha(a)$ 的矩阵，而相应的元素 $x_{-\alpha}(a)$ 则通过转置得到。

对于类型 $\mathsf{A}_n$，根系的单根为 $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$（对应 $1 \le i \le n$），最高根为 $\varphi = e_1 - e_{n+1}$。切瓦利生成元为（对于 $a \in \mathbb{K}$）$x_{e_i-e_j}(a) = 1 + aE_{i,j}$ 对于$1 \le i < j \le n+1$。

对于 $\mathsf{B}_n$ 型，根系的单根为 $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$（$1 \le i \le n-1$时）和 $\alpha_n = e_n$，最高根为 $\varphi = e_1 + e_2$。设 $(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $\mathbb{K}^{2n+1}$ 上的对称双线性型，其定义如下：

$$(x,y) = 2x_0y_0 + x_1y_{n+1} + \cdots + x_ny_{2n} + x_{n+1}y_1 + \cdots + x_{2n}y_n$$

（此处向量和矩阵的行列索引从 0 开始）。那么 $\Delta = \mathsf{B}_n(\mathbb{K})$ 可以实现为与二次曲面 $f(x) = (x, x)$ 相关联的极空间。切瓦利生成元为（见 [4,第 11.2] 节）

$$\begin{aligned} x_{e_i-e_j}(a) &= 1 + a(E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) \\ x_{e_i+e_j}(a) &= 1 + a(E_{i,n+j} - E_{j,n+i}) \\ x_{e_k}(a) &= 1 + 2aE_{k,0} - aE_{0,n+k} - a^2E_{k,n+k}. \end{aligned}$$

对于 $\mathsf{C}_n$ 型，根系的单根为 $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$（$1 \le i \le n-1$时）和 $\alpha_n = 2e_n$，最高根为 $\varphi = 2e_1$。设 $(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $\mathbb{K}^{2n}$ 上的辛形式，其定义如下：

$$(x,y) = x_1y_{n+1} + \cdots + x_ny_{2n} - x_{n+1}y_1 - \cdots - x_{2n}y_n.$$

我们将 $\mathbb{K}^{2n}$ 的标准基记为 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, f_1, \ldots, f_n$，使得对于所有$1 \le i, j \le n$，均有 $(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = (f_i, f_j) = 0$，且 $(\varepsilon_i, f_j) = \delta_{i,j}$。切瓦利生成元为

$$\begin{aligned} x_{e_i-e_j}(a) &= 1 + a(E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) \\ x_{e_i+e_j}(a) &= 1 + a(E_{i,n+j} + E_{j,n+i}) \\ x_{2e_k}(a) &= 1 + aE_{k,n+k}. \end{aligned}$$

对于类型 $\mathsf{D}_n$ $(n \ge 4)$，根系的单根为 $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$（$1 \le i \le n-1$对应的），以及 $\alpha_n = e_{n-1} + e_n$，最高根为 $\varphi = e_1 + e_2$。设 $f(x)$ 为二次型

$$f(x) = x_1x_{n+1} + \cdots + x_nx_{2n}$$

定义在 $\mathbb{K}^{2n}$ 上，并设 $(x,y)$ 为相应的对称双线性型 $(x,y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$。切瓦利生成元为

$$\begin{aligned} x_{e_i-e_j}(a) &= I + a(E_{i,j} - E_{n+j,n+i}) \\ x_{e_i+e_j}(a) &= I + a(E_{i,n+j} - E_{j,n+i}). \end{aligned}$$

More此外，图自同构（交换节点 $n-1$ 和 $n$）的矩阵为

$$\sigma = 1 - E_{n,n} - E_{2n,2n} + E_{n,2n} + E_{2n,n}.$$

下面的命题证明了定理 10 的逆命题。回顾第 1.4 节中 $U(\mathsf{X})$ 的定义。

命题 4.4. 设 $\mathsf{X} = (\Gamma, J, \pi)$ 是一个经典型的极闭可容许图。$U(\mathsf{X})$ 中的每个一般元都有对立图 $\mathsf{X}$。

证明. 设 $\theta$ 是 $U(\mathrm{X})$ 中的一个一般元。根据 [12, 引理 1.1 和 3.5]，元素 $\theta$ 将室 $w_0B$映射到魏尔距离 $w_{S\setminus J}w_0$，因此该室的型为 $J$ 的单形经 $\theta$映射后成为一个对置单形。因此 $J \subseteq \mathrm{Typ}(\theta)$。接下来只需证明反向包含。我们逐一考察每个非空的极闭图 X，具体而言，${}^2\mathrm{A}^1_{n;i}$ ($0 \le i \le n/2$)、$\mathrm{B}^1_{n;i}$ (其中 $i$ 为偶数且 $0 \le i < n$)、$\mathrm{B}^1_{n;n}$、$\mathrm{B}^2_{n;i}$ ($0 \le i \le n/2$)、$\mathrm{C}^1_{n;i}$ (当 $0 \le i \le n/2$ 时)、$\mathrm{D}^1_{n;i}$ (其中 $i$为偶数)，以及 $\mathrm{D}^2_{n,i}$ (其中 $0 \le i \le n/2$)。

在此证明中（且仅在此证明中），“维数”指向量空间维数（而非射影维数）。此外，$\{i\}$-驯顺表示在建筑的类型为 $i$ 顶点上驯顺。

(1) $\mathrm{X} = \mathrm{A}^1_{n;i}$ 且 $1 \le i \le n/2$。只需证明对每个$j > i$，$\theta$ 都是 $\{j, n-j+1\}$-驯顺的。最高根序列为 $\varphi_k = e_k - e_{n-k+2}$，其中 $1 \le k \le i$。因此

$$\theta = (I + a_1E_{1,n+1})(I + a_2E_{2,n}) \cdots (I + a_iE_{i,n-i+2}) = I + a_1E_{1,n+1} + \cdots + a_iE_{i,n-i+2},$$

其中 $a_1$，.....，$a_i \neq 0$。由于 $\theta$逐点固定由向量 $e_k$ 张成的（$n-i+1$）维空间，且 $1 \le k \le n-i+1$，因此每个维数为 $j > i$ 的空间都包含一个不动点。因此，如果（$V$，$V'$）是一个类型为 $\{j, n-j+1\}$的单形（也就是说，$\dim(V) = j$，$\dim(V') = n-j+1$，且$V \subseteq V'$），那么 $V$包含一个不动点。因此 $V^\theta \cap V' \neq \{0\}$，所以 $\theta$ 是 $\{j, n-j+1\}$-驯顺的，结论得证。

(2) $\mathrm{X} = \mathrm{B}^1_{n;2i}$，其中 $1 \le i \le n/2$。只需证明 $\theta$ 对 $j > 2i$是 $\{j\}$-驯顺的，而对 $j > 2i$不是 $\{1\}$-驯顺的。最高根为 $\varphi_k$，其中 $k = 1$，.....，$2i$，其中 $\varphi_k = e_{2k-1} + e_{2k}$且 $\varphi_{i+k} = e_{2k-1} - e_{2k}$，对于 $1 \le k \le i$。因此 $\theta = \prod_{k=1}^{i} x_{e_{2k-1}+e_{2k}}(a_k)x_{e_{2k-1}-e_{2k}}(b_k)$，其中$a_1$，.....，$a_i$，$b_1$，.....，$b_i \neq 0$，于是

$$\theta = I + \sum_{k=1}^{i} \big(a_k(E_{2k-1,n+2k} - E_{2k,n+2k-1}) + b_k(E_{2k-1,2k} - E_{n+2k,n+2k-1}) + a_kb_kE_{2k-1,n+2k-1}\big).$$

由向量 $e_k$（其中 $k \notin \{2, 4, \ldots, 2i\} \cup \{n+1, n+2, \ldots, n+2i\}$）和向量 $e_{n+2k} - a_kb_k^{-1}e_{2k}$（其中 $k = 1$，.....，$i$）张成的$(2n-2i+1)$维空间被 $\theta$逐点固定，因此对所有 $j > 2i$，$\theta$都是 $j$-驯顺的。设 $x = e_1 + e_2 + e_{n+1} - e_{n+2}$。则$(x, x) = 0$（因此 $\langle x\rangle$是极空间中的一个点），并且我们计算得$(x, \theta x) = -a_1b_1 \neq 0$，所以 $\theta$将此点映射到一个对径点。

(3) $\mathrm{X} = \mathrm{B}^1_{n;n}$。证明的第一段表明，$\theta$ 将一个室映射到一个对置室，因此结论成立。

(4) $\mathrm{X} = \mathrm{B}^2_{n;i}$，其中 $1 \le i \le n/2$。只需证明 $\theta$ 是 $\{1\}$-驯顺的，并且对所有 $j > 2i$，$\{j\}$-驯顺。对于 $1 \le k \le i$，最高根为 $\varphi_k = e_{2k-1} + e_{2k}$，因此

$$\theta = \prod_{k=1}^{i}(I + a_k(E_{2k-1,n+2k} - E_{2k,n+2k-1})) = I + \sum_{k=1}^{i} a_k(E_{2k-1,n+2k} - E_{2k,n+2k-1}),$$

其中 $a_1, \ldots, a_i \neq 0$。由向量 $e_k$（满足$k \notin \{n+1, n+2, \ldots, n+2i\}$）张成的 $(2n-2i+1)$ 维空间被 $\theta$ 逐点固定，因此每个维数为 $j > 2i$ 的子空间都包含一个不动点。因此，对于所有 $j > 2i$，$\theta$ 都是 $\{j\}$-驯顺的。此外，对于每个点 $p = \langle x\rangle$，我们计算得 $(x, \theta x) = (x, x) = 0$，因此 $\theta$ 是 $\{1\}$-驯顺的。

(5) $\mathrm{X} = \mathrm{C}^1_{n;i}$，其中 $1 \le i \le n$。只需证明 $\theta$ 对于 $j > i$ 是 $\{j\}$-驯顺的，并且 $\theta$不是点国内。对于 $1 \le k \le i$，最高根为 $\varphi_k = 2e_k$。因此

$$\theta = \prod_{k=1}^{i}(I + a_kE_{k,n+k}) = I + \sum_{k=1}^{i} a_kE_{k,n+k}.$$

因此， $\theta$ 固定由 $e_k$ 张成的 $(2n-i)$ 维空间，其中 $k \notin \{n+1,\dots,n+i\}$。因此，对于所有 $j>i$， $\theta$ 都是 $\{j\}$- 驯顺的。由于 $\theta e_{n+1}=a_1e_1+e_{n+1}$，我们有 $(e_{n+1},\theta e_{n+1})=-a_1\neq 0$，因此 $\langle e_{n+1}\rangle$ 被映射到一个对径点，结论得证。

(6) $\mathrm{X}=\mathrm{D}^1_{n;2i}$，其中 $1\le i\le n/2$。最高根与 $\mathrm{B}^1_{n;2i}$ 情形相同，论证也与 (2) 相同。

(7) $\mathrm{X}=\mathrm{D}^2_{n;i}$，其中 $1\le i\le n/2$。最高根与 $\mathrm{B}^2_{n;i}$ 情形相同，论证也与 (3) 相同。

□

最后我们证明定理 11。

定理 11 的证明。非极性闭合保型可容许图为 $\mathrm{B}^1_{n;i}$（其中 $i$ 为奇数且 $1\le i<n$）以及 $\mathrm{C}^2_{n;i}$（对于 $1\le i\le n/2$）。若底域的特征为 2，则根据假设，该域是完美的，因此可以应用前述命题和对偶。于是设特征不为 2。我们将证明，这些图可以由相应建筑的调和变换得到。

(1) $\mathrm{X}=\mathrm{B}^1_{n;i}$，其中 $i$ 为奇数且 $1\le i<n$。更一般地，我们证明对于所有 $1\le i<n$，调和

$$\theta=\mathrm{diag}(\epsilon,\underbrace{-1,\dots,-1}_{i'},\underbrace{1,\dots,1}_{n-i'},\underbrace{-1,\dots,-1}_{i'},\underbrace{1,\dots,1}_{n-i'}),$$

其中 $\epsilon=(-1)^i$ 和 $i'=\lfloor i/2\rfloor$，其对立图为 $\mathrm{B}^1_{n;i}$。注意， $\theta$ 保持型 $(\cdot,\cdot)$，因此 $\theta\in \mathrm{B}_n(\mathbb{F})$。由于 $\theta$ 逐点固定一个维数为 $2n-i+1$ 的子空间，每个维数为 $j\ge i+1$ 的子空间都包含一个不动点，因此对每个 $j\ge i+1$， $\theta$ 都是 $j$-驯顺的。若 $i$ 为奇数，则点 $p=\langle e_0+e_n-e_{2n}\rangle$ 映射到一个对径点；若 $i$ 为偶数，则点 $p=\langle e_0+e_1-e_{n+1}\rangle$ 映射到一个对径点。因此， $\theta$ 不是点国内。现在证明 $\theta$ 不是 $i$-驯顺的。设 $i$ 为偶数。令 $x_j=e_j+e_{2n-j+1}$和 $y_j=e_{n+j}-e_{n-j+1}$，其中 $1\le j\le i'=n/2$。则 $V=\langle x_1,\dots,x_{i'},y_1,\dots,y_{i'}\rangle$ 是全各向同性的。若 $V\ni p=\langle v\rangle$ 且 $v=a_1x_1+\cdots+a_{i'}x_{i'}+b_1y_1+\cdots+b_{i'}y_{i'}$，并且 $a_j\neq 0$，则 $p$ 与 $\theta\langle y_j\rangle\in\theta_iV$相对，因为 $(v,\theta y_j)=-2a_j$。类似地，若 $b_j\neq 0$，则 $p$ 与$\theta\langle x_j\rangle\in\theta V$相对。因此 $V$和 $\theta V$相对。现在设 $i$ 为奇数。存在整数 $k$，使得 $i'<k<n-i'+1$，因此 $e_k$和 $e_{n+k}$都被 $\theta$固定。令 $x_1,\dots,x_{i'}$和 $y_1,\dots,y_{i'}$如上所述，并令 $z=e_0+e_k-e_{n+k}$。那么，对所有 $1\le j\le i'$，$(z,z)=(z,x_j)=(z,y_j)=0$，因此 $V=\langle z,x_1,\dots,x_{i'},y_1,\dots,y_{i'}\rangle$ 是一个维数为 $i$ 的全各向同性空间。若 $p=\langle v\rangle$ 且 $v=cz+a_1x_1+\cdots+a_{i'}x_{i'}+b_1y_1+\cdots+b_{i'}y_{i'}$，并且 $c\neq 0$，则 $p$与 $\theta\langle z\rangle\in\theta V$相对。若 $c=0$，则或者 $a_j\neq 0$，其中某个 $j$（此时 $p$ 与 $\theta\langle y_j\rangle$相对），或者 $b_j\neq 0$，其中某个 $j$（此时 $p$与 $\theta\langle x_j\rangle$相对）。因此 $V$与 $\theta V$相对，结论得证。

(2) $\mathrm{X}=\mathrm{C}^2_{n;i}$，其中 $1\le i\le n/2$。令 $\theta$ 为 $(2n-2i,2i)$-调和

$$\theta=\mathrm{diag}(\underbrace{-1,\dots,-1}_{i},\underbrace{1,\dots,1}_{n-i},\underbrace{-1,\dots,-1}_{i},\underbrace{1,\dots,1}_{n-i}).$$

由于 $\theta$逐点固定一个维数为 $2n-2i$的空间，因此对于所有 $j\ge 2i+1$， $\theta$都是 $j$-驯顺的。此外，由于对于所有 $x\in\mathbb{F}^{2n}$，$(x,\theta x)=0$，我们可知 $\theta$是点国内的。令 $x_j=e_j+f_{n-j+1}$和 $y_j=e_{n-j+1}+f_j$，其中 $1\le j\le n/2$。令 $V=\langle x_1,\dots,x_i,y_1,\dots,y_i\rangle$（注意， $V$是全各向同性的）。我们断言 $V$和 $\theta V$相对。因为若 $p=\langle v\rangle$满足 $v=a_1x_1+\cdots+a_ix_i+b_1y_1+\cdots+b_iy_i$，且对于某个 $j$有 $a_j\neq 0$，则 $p$和 $\theta\langle y_j\rangle$ 相对；若对于某个 $j$有 $b_j\neq 0$，则 $p$和 $\theta\langle x_j\rangle$相对。因此， $\theta$ 的对立图为 $\mathrm{C}^2_{n,\ i}$。

现在我们考虑非类型保持图。

(3) $\mathsf{X} = \mathsf{A}^2_{n;(n-1)/2}$，其中 $n \geq 3$ 为奇数。设 $(\cdot,\cdot)$ 是定义在 $\mathbb{F}^{n+1}$ 上的任意非退化辛形式（注意 $n+1$ 是偶数），对于子空间 $U$，记 $U^\circ = \{v \in \mathbb{F}^{n+1} \mid (u,v) = 0 \text{ 对所有 } u \in U\}$ 成立。则满足 $U^\theta = U^\circ$ 的映射是一个辛极性，并具有所需的图。

(4) $\mathsf{X} = {}^2\mathsf{B}^1_{2;1}$ 或 $\mathsf{X} = {}^2\mathsf{C}^1_{2;1}$，即特征 2 的完美域上 $\mathsf{B}_2$ 型和 $\mathsf{C}_2$ 型建筑的对偶。每个对偶都有此图。

(5) $\mathsf{X} = \mathsf{D}^1_{n;2i+1}$，其中 $0 \leq i < (n-1)/2$。令 $0 \leq i \leq n/2$，并令

$$\begin{aligned}
\theta_i &= I + \sum_{j=1}^{i} (E_{2j-1,2j} - E_{n+2j,n+2j-1}) \\
\eta &= I + E_{n-1,n} + E_{n-1,2n} - E_{n-1,2n-1} - E_{n,2n-1} - E_{2n,2n-1} \\
\sigma &= I - E_{n,n} - E_{2n,2n} + E_{n,2n} + E_{2n,n},
\end{aligned}$$

其中 $\theta_0 = I$。类似于上述的计算表明，对于 $0 \leq i \leq n/2$，共线变换 $\theta_i$ 的对立图为 $\mathsf{D}^2_{n,\ i}$，共线变换 $\eta_i = \theta_i\eta$ 的对立图为 $\mathsf{D}^1_{n,\ 2i}$，而对偶$\sigma_i = \theta_i\sigma$ 的对立图为 $\mathsf{D}^1_{n,\ 2i+1}$。

最后，$\mathsf{D}_4$ 型建筑的三元对偶见 [22],，证明完毕 . □

## 参考文献


[1] P. Abramenko 和 K. Brown。《建筑：理论与应用》，第 248 卷。《数学研究生教材》，Springer，2008 年。[2] P. Abramenko 和 K. Brown。非球面建筑的自同构具有无界位移。《关联几何创新》，10：1–13，2009 年。[3]N. Bourbaki。《李群与李代数》第 4–6 章。数学元素。Springer-Verlag，2002 年。[4] R. Carter。《李型单群》。Wiley 经典文库。John Wiley & Sons，纽约，1989 年。[5] A.M. Cohen 和 E.E. Shult。仿射极空间。Geom. Dedicata，35：43–76，1990 年。[6] B. De Bruyn。关联几何导论。数学前沿。Birkh¨ auser，2016 年。[7] B. De Bruyn 和 H. Van Maldeghem。不可嵌入极空间。M ¨unster J. Math.，7：557–588，2014 年。[8] B. Leeb。通过渐近几何刻画高秩不可约对称空间和欧几里得建筑，第 326 卷，收入 Bonner Mathematische Schriften。波恩大学，2000 年。¨J. Parkinson、B. Temmermans 和 H. Van Maldeghem。广义多边形中自同构与对立的组合学。Ann. Combin.，19(3)：567–619，2015 年。[9] J. Parkinson 和 H. Van Maldeghem。大型球形建筑自同构的对立图。Journal of Combinatorial Theory, Series A，162：118–166，2019 年。

[11] J. Parkinson 和 H. Van Maldeghem。小型球形建筑自同构的对立图。《关联几何创新》，17：141–188，2019 年。[12] J. Parkinson 和 H. Van Maldeghem。例外型球形建筑中的自同构与对立，I。即将发表于《加拿大数学杂志》，2021 年。[13] J. Parkinson 和 H. Van Maldeghem。例外型球形建筑中的自同构与对立，ii：Moufang 六边形。《关联几何创新》（即将发表），2023 年。[14] H. Petersson、B. M¨uhlherr 和 R. Weiss。《建筑中的下降》，第 190 卷，收入《数学研究年刊》。普林斯顿大学出版社，2015 年。[15] A.E. Schroth。通过导子刻画辛四边形。Arch. Math.，58：98–104，1992 年。[16] R. Steinberg。《Chevalley 群讲义》，第 66 卷，收入大学讲座系列。美国数学学会，2016 年。[17] B. Temmermans、J.A. Thas 和 H. Van Maldeghem。射影空间中的本土性。《关联几何创新》，12：141–149，2011 年。[18] B. Temmermans、J.A. Thas 和 H. Van Maldeghem。具有受限位移的极空间共线变换。Des. Codes Cryptogr.，64：61–80，2012 年。[19] B. Temmermans、J.A. Thas 和 H. Van Maldeghem。广义完全四边形中的本土性。Ann. Combin.，16：905–916，2012 年。[20] J. Tits。《球形型建筑与有限 BN 对》，第 386 卷。《数学讲义》，Springer-Verlag，1974 年。[21] H. Van Maldeghem。《广义多边形》，第 93 卷，收入《数学专著》。Birkh¨auser，巴塞尔、波士顿、柏林，1998 年。[22] H. Van Maldeghem。建筑 $D_{id}$ 型中 $I_4$ 型三元对偶的刻画。载于 N.S.N. Sastry 编，《例外型群、Coxeter 群及相关几何》，第 82 卷，收入《施普林格数学与统计学会议录》，第 205–216 页。Springer，2014 年。