关于无交叉生成树之间翻转距离的一则札记

NicolasBousquet ！里昂大学，里昂第一大学，法国国家科学研究中心，LIRIS CNRS第5205联合研究单位，F-69621，法国里昂
ValentinGledel ！
于默奥大学数学与数理统计系，瑞典
JonathanNarboni ！
雅盖隆大学数学与计算机科学学院理论计算机科学系，克拉科夫，波兰

Théo Pierron
里昂大学、里昂第一大学、法国国家科学研究中心、LIRIS CNRS第5205联合研究单位，F-69621，里昂，法国

arXiv:2303.07710v1 [cs.CG] 14 Mar 2023

摘要

我们研究由 n 凸位置的点构成的生成树，其边两两不相交。对这类树进行一次翻转，就是添加一条边并删除另一条边，使结果仍然是一棵无交叉生成树。给定两棵树，我们探讨将一棵树变换为另一棵树所需的最少翻转次数。朴素的 $2n-\Omega(1)$上界沿用了25年，直到Aichholzer等人近期取得突破，给出了 $2n-\Omega(\log n)$界。我们将他们的结果改进为 $2n-\Omega(\sqrt{n})$上界，并加强和简化了他们若干结果的证明。

关键词与短语 生成树、翻转距离、重构

数字对象标识符 XXX.23

资助 ANR项目GrR (ANR-18-CE40-0032)
Jonathan Narboni：波兰国家科学中心资助编号2019/34/E/ST6/00443

1 引言

我们固定平面上的一个点集 $P=\{v_1、\ldots\ldots、v_n\}$，这些点处于凸位置（并假设 $v_1、\ldots\ldots、v_n$ 按此顺序出现在 P 的凸包上）。无交叉生成树是 P 的一棵生成树，其边是连接点对的直线段，且任意两条边都不相交（端点处除外）。一次翻转 是从无交叉生成树中删除一条边并添加另一条边，使所得结构仍是 P 的无交叉生成树。一个翻转序列 是由无交叉生成树构成的序列，其中相邻两棵生成树恰好相差一次翻转。我们研究如何通过一系列翻转，将一棵无交叉生成树转换为另一棵。

给定两棵无交叉生成树 T_1 和 T_2，注意到，应用一次翻转后，它们的边集的对称差大小 $|T_1\Delta T_2|$ 至多减少 2，因此需要 $|T_1\Delta T_2|/2$ 次翻转（注意，当 T_1和 T_2 没有公共边时，这个数量可达到 n ）。Hernando等人 [3] 证明，存在两棵树 T_1 和T_2，使得任意翻转序列至少需要 $\frac{3}{2}n-5$ 次翻转。关于上界，Avis和Fukuda [2] 证明， T_1 和 T_2 之间始终存在一个至多使用 $2n-4$ 次翻转的翻转序列。这个简单的 $2n-\Omega(1)$ 上界在过去 25 年中一直未能改进，直到 Aichholzer等人 [1] 最近将上界改进为 $2n-\Omega(\log n)$。他们还证明，如果两棵生成树中有一棵是路径，则存在一个长度为 $\frac{3}{2}n$ 的翻转序列。

本文通过证明存在一个长度至多为 $2n-\Omega(\sqrt{n})$ 的变换，改进了 [1] 的上界（推论4）。我们还以更简短的证明重新证明了

© Nicolas Bousquet、Valentin Gledel、Jonathan Narboni 和 Théo Pierron，依据知识共享许可协议CC-BY 4.0授权。

当一棵树是路径时，存在长度为 $\frac{3}{2}n$ 的变换（定理 8）；并通过证明，若其中一棵树包含长度为 t 的诱导路径，则存在长度为 $2n - \frac{t}{3}$ 的变换，从而放宽了这一结果（推论 7）。

最后，我们证明，如果其中一棵树是良好毛毛虫树（其精确定义将在第 2 节给出），那么最短变换的长度至多为 $\frac{3}{2}n$ （推论 5）。这一结果意义非凡，因为据我们所知，在所有需要 $\frac{3}{2}n - \Omega(1)$ 次翻转的例子中，两棵无交叉生成树中至少有一棵是良好毛毛虫树 [3, 1]。因此，我们的结论实质上保证了：如果 $\frac{3}{2}n$ 不是紧确的上界，那么需要更长变换的生成树必定具有截然不同的构造方式。

我们认为，我们的这些初步结果为以下猜想提供了进一步的依据：

▶**猜想 1.** 任意一对无交叉生成树之间都存在长度至多为 $\frac{3}{2}n$ 的翻转序列。

我们的所有证明都简单、自成一体，主要基于对下一节开头所述引理的简单应用。

2 结果

回顾一下，在本文中，我们始终考虑一组按此顺序排列的、处于凸位置的 n 点 v_1、……、v_n。树的叶节点 T 是度为 1 的顶点。T的内部节点 是指非叶节点的顶点。边界边 是凸包的一条边，即 v_iv_{i+1} 对于某个i。我们先证明以下断言：

▷ 断言 2。设 T 是一棵无交叉生成树， e 是一条边界边。那么，我们可以通过一次边翻转将 e 添加到 T 中，且不移除任何边界边（除非 T 仅包含边界边）。

证明。 </style}将 添加到 不会产生任何交叉，因为 属于 的凸包。此外，{$e\}$ 中的唯一环必然至少包含一条不属于边界边集合的边，否则 $T \cup \{e\}$ 恰好就是 P的凸包。◀

我们的所有结果都可以由以下简单但非常有用的引理推出：

▶ **引理 3.** 设 $i \leqslant n$。设 T_1, T_2 是 P 的两棵生成树，使得 T_1 包含所有满足 $j < i$ 的边 v_jv_{j+1}，且 T_2 不含任何满足 $j > i$ 和 $k > i$ 的边 v_jv_k。那么， T_1 与 T_2 之间存在一个长度至多为 $|T_1 \Delta T_2|/2$ 的翻转序列。

证明。 记 X 为点集 $\{v_1, \ldots, v_i\}$，并记 E_X 为对每个 $j < i$ 都包含边 v_jv_{j+1} 的边集。我们首先对 T_2 应用断言 2，直到它包含 E_X 的所有边。由于 T_1 包含 E_X 中的所有边，我们可以选择这些翻转，使得对称差 $T_1 \Delta T_2$ 每次都减少 2。注意，此后，所有位于 X 之外的顶点都是 T_2 中的叶子。

现在证明，只要 $T_1 \neq T_2$，就能在 T_1 中找到一个良好的翻转，也就是说，将其应用于 T_1 后，得到的树 T_1' 仍满足引理的假设，并且$|T_1' \Delta T_2| = |T_1 \Delta T_2| - 2$。不断对$T_1'$ 重复这一论证，直到达到 T_2，即可立即得出结论。

假设 $T_1 \neq T_2$，并令 $v_{i_1}v_{j_1}$ 为 $T_1 \setminus T_2$ 中不属于 E_X 的最左边，*i.e.* 也就是说，使 $i_1 \in [1, i]$ 最小且 $j_1 > i$ 最大的边（见图 1）。这样的边必定存在，因为 $T_1 \neq T_2$。回想一下， v_{j_1} 是 T_2 中的一个叶节点，其父节点 v_j 必定位于 $X \setminus \{v_{i_1}\}$ 中。如果在 T_1 中将 $v_{i_1}v_{j_1}$ 与 $v_{j_1}v_j$ 交换是一次良好翻转，那么问题便解决了。因此，我们可以假设存在一条来自 T_1 且与 $v_{j_1}v_j$ 相交的边，例如 $v_{i_2}v_{j_2}$。由 i_1 的极小性以及

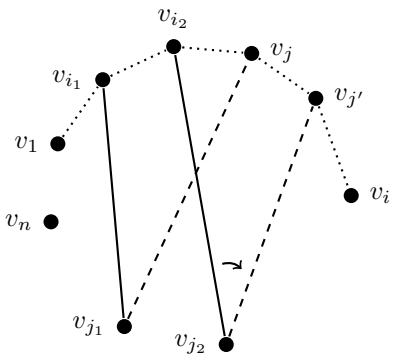


图 1 点线表示路径 E_X，T_2 的边用虚线表示，T_1 的边用实线表示。翻转 $v_{i_1}v_{j_1} \to v_{j_1}v_j$ 不理想，但 $v_{i_2}v_{j_2} \to v_{j_2}v_{j'}$ 是。

由于 T_1 是一棵非交叉树，因此有 $j > i_1$、$j_2 < j_1$，进而得到 $i_2 \geqslant i_1$。用 $v_{i_2}v_{j_2}$ 替代 $v_{i_1}v_{j_1}$，重复前面的论证，可得到一次良好翻转，或一列顶点 $v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}$，满足 $j_1 > \cdots > j_k$。注意，$j_k > i$，否则 $v_{i_k}v_{j_k} \cup E_X$ 会在 T_2 中构成一个环。因此，这一过程至多经过 $n - i$ 步便会终止，从而存在一次良好翻转，证毕。◀

在本文余下部分，我们将从该引理推导出一些推论。首先，我们改进 [1] 的上界：

▶ **推论4.** 任意一对无交叉生成树之间，都存在长度至多为 $2n - \Omega(\sqrt{n})$ 的翻转序列。

证明。 设 T_1, T_2 是两棵无交叉生成树。将集合 P 任意划分为 $\sqrt{n}$ 个大小为 $\sqrt{n}$ 的分区。如果某个分区中不包含任何两个端点都位于该分区内的 T_1 的边，那么我们使用断言 2 将该分区之外的所有边界边添加到 T_2 中（需 $n - \sqrt{n}$ 次翻转），然后应用引理 3，将所得的树转换为 T_1，还需 n 次额外翻转。

因此，我们可以假设所有分区都包含一条两个端点均属于 T_1 的边，因此这是一条边界边。再次对 T_1 应用 $n - \sqrt{n}$ 次断言 2，并对 $\overline{T_2}$ 应用 n 次断言 2，我们可以将两棵树都变换为一棵仅包含边界边的树。由此得到 T_1 和 T_2 之间的翻转序列，至多需要 $2n - \sqrt{n} + 1$ 步（因为任意两棵仅包含边界边的树都可以通过一次边翻转相邻）。◀

如果一棵树的内部节点所诱导的子图是一条路径，那么它就是一棵毛毛虫树 。若对于任意一条包含四个顶点 u、v、w、x 的路径，只要 v、w 是内部节点，直线 vw 就会将 P 的凸包分成两个部分，其中一部分包含 u，另一部分包含 x（见图2），则称这棵毛毛虫树为良好的 。

据我们所知，在所有需要 $\frac{3}{2}n - \Omega(1)$ 次翻转的例子中，两棵无交叉生成树至少有一棵是良好毛毛虫树 [3, 1]。

▶ **推论 5.** 设 T_1, T_2 是无交叉生成树，且 T_1 是一棵良好毛毛虫树。则 T_1 和 T_2 之间存在长度至多为 $\frac{3}{2}n$的翻转序列。

证明。 我们用 $w_1, \ldots, w_k$ 表示 T_1 的内部节点集合。由对称性，不妨设 $w_1 = v_1$，并令 j 为满足 $v_j = w_k$ 的指标。将顶点的顺序反转后，我们也可以假设 $j \leqslant n/2$。至多应用断言 2 j 次，我们

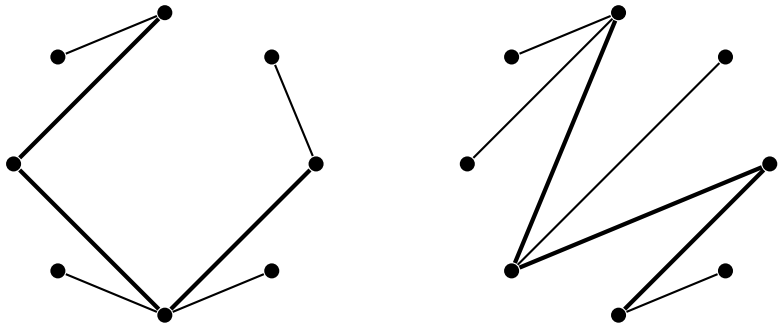


图2 两棵毛毛虫树，其内部路径以粗体标出。左边的不是优美的，而右边的是。

可以将所有边 v_iv_{i+1} 添加到 T_2，其中 $i < j$。注意，所得的树满足引理 3 的假设，因此我们可以在至多 n 步内将其变换为 T_1，由此完成证明。◀

设 P 是一个处于凸位置的点集。若 t 条边 $a_1b_1, \ldots, a_tb_t$ 在平行，则称它们为平行边，当且仅当 $a_1, a_2, \ldots, a_t, b_t, b_{t-1}, \ldots, b_1$ 按照对应于 P 的凸包的循环顺序依次出现。此外，如果它们的端点两两不同，则称这些边为严格平行。利用引理 3，还可以轻松证明下面的结论，从而得到另一个有趣的推论：

▶ **引理 6.** 设 T_1、T_2 是两棵无交叉生成树，使得 T_1 有 t 条平行边（分别为严格平行边）。则存在一个从 T_1 到 T_2 的翻转序列，其长度至多为 $2n - \frac{t-1}{2}$（分别至多为 $2n - t + 1$）。

证明。 令 t' 为 T_1中平行边的最大数量。注意，$t' \geqslant t$。令$e_1 = a_1b_1, \ldots, e_{t'} = a_{t'}b_{t'}$为 T_1 中的 t'条平行边。我们称在不包含 a_1（分别为 b_1）的区段内，按照循环顺序位于 $b_{t'}$与 b_1（分别为 a_1 与 $a_{t'}$）之间的顶点为顶部顶点（分别为底部顶点）。令 b 为底部顶点的数量。

由于 T_1 无交叉，对于每个 $i \leqslant t' - 1$，在 T_1中都存在一条路径 Q_i，其连接 e_i的一个端点与 e_{i+1} 的一个端点。注意，如果两条边共用一个端点，这条路径可能缩减为单个顶点（我们称 Q_i 为平凡的）。请注意，如果多条边共用同一个端点，同一条平凡路径可能会出现多次。根据 t'的极大性，Q_i 中不可能存在连接顶部顶点与底部顶点的边。因此，我们可以将 $t' - 1$ 条路径 Q_i 分为两类：若 Q_i 仅包含连接顶部顶点的边，则称其为顶部路径；否则称为底部路径。根据对称性，不妨假设至少$w := (t' - 1)/2$ 条路径为顶部路径。

我们断言，可以在至多 $b - w$ 步内将 T_1 转换为一棵树 T_1'，使得树 T_1' 的所有边都至少有一个端点位于 a_1 和 $a_{t'}$ 之间。

回想一下，根据 t' 的极大性，上部 $\{a_i, \ldots, a_{i+1}\}$ 与下部 $B_i = \{b_{i+1}, \ldots, b_i\}$ 之间不存在边，除了 a_ib_i 和 $a_{i+1}b_{i+1}$。如果 Q_i 是一条底部路径，我们可以移除下部的一条边，并在上部添加一条边，从而得到一条顶部路径。现在，若一条边 bb' 满足 $b < b'$ 且其两个端点都在 B_i 中，则称其为外部边，当且仅当不存在一条不同于 bb' 的边 cc'，满足其两个端点都在 B_i 中且符合 $c \leqslant b < b' \leqslant c'$。容易看出，我们可以不断地将一条外部边 bb' 替换为连接 b 或 b' 与 a_i 的弧，直到不存在两个端点都在 B_i 中的边。因此，至多经过 $|B_i| - 1$ 步，我们就能确保 B_i 中不再有两个端点都位于其中的边（如果 Q_i 最初是一条顶部路径，则需−2 步）。对所有区段求和后，由于 $\sum_i (|B_i| - 1) = b$，并且对每一条 w 顶部路径，我们还额外减少一次翻转

路径，这一过程经过 $b-w$ 次翻转后，会得到一棵树 T_1'，其中每条边至少有一个端点位于 a_1和 $a_{t'}$ 之间。

根据断言 2，我们现在可以在至多 $n-b$ 步内将 T_2 转换为一棵树 T_2'，该树包含除底部顶点之间的边之外的所有边界边。最后，我们可以应用引理 3，在至多 n 步内将 T_1' 转换为 T_2'，总计得到长度至多为 $(b-w)+(n-b)+n=2n-w$ 的翻转序列，证毕。

在严格平行情形中，请注意，每条非平凡的顶部路径都必须包含 T_1 中的一条边界边（因而也包含在 T_1' 中）。注意，至多有 $t'-t$ 条平凡的顶部路径，因此 T_1' 和 T_2' 至少共享 $w-t'+t$ 条边界边；根据引理 3，从 T_2' 到 T_1' 的翻转序列至多需要 $n-w+t'-t$。因此，T_1 和 T_2 之间的翻转序列总长度至多为 $2n-2w+t'-t=2n-t+1$。◀

引理 6 立即推出：

▶ **推论 7**。设 T_1、T_2 是两棵无交叉生成树，且 T_1 包含一条长度为 t的子路径。存在一个从 T_1 到 T_2 的翻转序列，其长度至多为 $2n-\frac{t}{3}$。

证明。设 $Q:=x_1,\dots,x_{t+1}$是 T_1中一条长度为 t的子路径。对于每个 $2\leqslant i\leqslant t-1$，如果 x_{i-1} 和 x_{i+2} 被 x_i,x_{i+1} 分隔（即 x_i,x_{i+1} 中恰有一个出现在顶点循环顺序中 x_{i-1} 和 x_{i+2} 之间），我们就称 Q 的边 x_ix_{i+1} 为分隔边。否则，我们称这条边为串联边。按照约定，Q 的首尾两条边既是串联边，也是分隔边。记 s（分别为 p）为串联边（分别为分隔边）的数量，因此 $s+p=t+2$。

注意到 Q 的分隔边彼此平行，因此引理 6 保证存在一个长度至多为 $a=2n-\frac{p-1}{2}$ 的翻转序列。此外，如果 x_ix_{i+1} 是串联边，那么在 T_1中，x_i 与 x_{i+1} 之间有一条边界边（位于不包含顶点 x_{i-1} 和 x_{i+2}的部分）。因此，也存在一个从 T_1 到 T_2、长度至多为 $b=2n-s+1$ 的翻转序列（经过一棵边界树）。现在注意到 $2a+b=6n-t$，因此 a 或 b 必须至多为 $\frac{6n-t}{3}$，由此得证。◀

对于路径的情形，我们实际上可以通过找到一个长度至多为 $\frac{3}{2}n$ 的翻转序列来改进推论 7（以更简洁的方式重新证明 [1] 的一个结果）：

▶ **定理 8.** 设 T_1、T_2 是两棵无交叉生成树，且 T_1 是一条路径。存在一个从 T_1 到 T_2 的翻转序列，其长度至多为 $\frac{3}{2}n$。

证明。设 $x_1,\dots,x_n$是路径 T_1上的顶点（按顺序排列）。在循环顺序中删去 x_1和 x_n后，得到两个顶点集合，分别称为上部和下部。我们认为 x_1 和 x_n 同时属于这两个部分。注意，T_1的所有边要么是边界边（连接上部或下部中两个相邻顶点的边），要么是穿越边（其两个端点分别位于两个部分中）。

记 n_t（分别记 n_b）为上部（分别为下部）的顶点数，其中包括 x_1和 x_n。注意，$n_t+n_b=n+2$。记 b_t,b_b为 T_1 中边界边的数量，分别对应上部和下部。

现在，我们将上部的所有 n_t+1 边界边添加到 T_2，并在 T_1 中将下部的所有b_b 边界边转换为穿越边（与断言 2 类似）。注意，所得的两棵树在上部共有 b_t 条边界边，并满足引理 3 的假设。因此，它们之间存在长度至多为 $n-b_t$ 的翻转序列，从而我们可以通过至多 $(n_t-1)+b_b+(n-b_t)$ 次翻转将 T_1 转换为 T_2。

将前述论证中的上部和下部互换，可得到另一个长度为（n_b-1）$+b_t+$（$n-b_b$）的翻转序列。这两个序列的长度之和至多为 $2n+n_b+n_t-2=3n$，因此其中一个序列的长度至多为 $\frac{3}{2}n$，证明完毕。◀

参考文献

1 Oswin Aichholzer、Brad Ballinger、Therese Biedl、Mirela Damian、Erik D. Demaine、Matias Korman、Anna Lubiw、Jayson Lynch、Josef Tkadlec 和 Yushi Uno。无交叉生成树的重构。 *CoRR*，abs/2206.03879，2022年。 arXiv:2206.03879， doi:10.48550/arXiv.2206.03879。

2 David Avis 和 Komei Fukuda。用于枚举的反向搜索。 离散应用数学，65(1-3):21–46，1996年。 doi:10.1016/0166-218X(95)00026-N。

3 M. Carmen Hernando 、 Ferran Hurtado 、 Alberto Márquez、Mercè Mora 和 Marc Noy。凸位置的点的几何树图。 离散应用数学，93(1):51–66，1999年。网址： https://doi.org/10.1016/S0166-218X(99)00006-2。