arXiv:2303.07730v2 [math.GT] 3 Oct 2024

三维映射环面的整数填充体积、复杂度与整系数单纯体积

FEDERICA BERTOLOTTI* 和 ROBERTO FRIGERIO†

Abstract. 我们证明，闭定向曲面上的德恩扭转 f的整数填充体积为零，即其单值化为 f^n 的映射环面的整系数单纯体积相对于 n呈次线性增长。由此，我们完整刻画了整数填充体积为零的曲面映射类。结合 Purcell 和 Lackenby 关于映射环面复杂度的结果，我们还证明，在三维中，复杂度与整系数单纯体积并非 Lipschitz 等价。

1. Introduction

除非另有说明，本文中的流形均指拓扑流形，并假定其定向、闭且连通。流形的复杂度 M 可以用许多数值不变量来衡量。其中最自然的或许是 Δ-复杂度 $\Delta(M)$，即 M 的（宽松）三角剖分中单形的最小数量（见定义 4.1；若 M 不允许任何三角剖分，则我们约定 $\Delta(M) = \infty$）。 M 的任一三角剖分都会导出 M的一个整数基本循环，而 M 的一个有趣不变量是奇异同调中 M 的整数基本循环所含单形的最小数量（更准确地说，是其 ℓ^1-范数）：这个正整数就是 M的整系数单纯体积，通常记作 $\|M\|_{\mathbb{Z}}$（见定义 2.1）。整系数循环比三角剖分更灵活，而实系数循环又比整系数循环更灵活。因此，我们可以更进一步，考虑奇异同调中 M 的实系数基本循环的 ℓ^1-范数下确界，从而得到 M 的单纯体积 $\|M\|$（同样见定义 2.1）。该概念最初出现在 [Thu79] 所述的莫斯托刚性定理证明中，Thurston 将其归功于 Gromov（另见 [Gro81]）；随后，Gromov 在其开创性论文 [Gro82]中，将其作为一个具有独立研究价值的不变量进行了深入研究。

虽然单纯体积与流形所能承载的几何结构密切相关，但 Δ-复杂度和整数单纯体积

*本研究部分受到 INdAM GNSAGA 项目的资助，项目编号 CUP E55F22000270001。

†本研究部分受到 INdAM 通过 GNSAGA 提供的资助，以及 MUR 通过 PRIN 项目第 2022NMPLT8 号“流形的几何与拓扑”提供的资助，项目编号 CUP I53D23002370001。

本质上更具组合性，可用于估计代数拓扑不变量：例如， Δ-复杂度和整数单纯体积都为贝蒂数提供上界，进而也为欧拉示性数提供上界。由于欧拉示性数在有限覆盖下具有乘法性，因此稳定的 Δ-复杂度和稳定整数单纯体积（通过对相应不变量在有限覆盖上的取值进行稳定化而得）也给出了它的上界。这些事实，加上 Gromov 长期以来关于非球面流形的单纯体积与欧拉示性数之间关系的猜想，使稳定整数单纯体积备受关注。最近已证明，对于所有非球面三维流形，稳定整数单纯体积等于经典单纯形体积 [FLMQ21] （在更高维度中，即使对于范围较窄的双曲流形，稳定整数单纯体积也不等于单纯体积 [FFM12]）。

Δ-复杂度与整数单纯体积。本文着重研究 Δ-复杂度与整数单纯体积之间（尚未得到充分探讨的）比较。对于闭定向 n-流形上的两个数值不变量 h_1, h_2 ，如果存在常数 $k \geq 1$，使得对每个闭定向 n-流形 M都有 $h_1(M) \leq k \cdot h_2(M)$，且$h_2(M) \leq k \cdot h_1(M)$，那么我们称它们等价。

流形的 Δ-复杂度和整数单纯体积显然都是正的，但单纯体积在许多流形上都为零（例如，基本群可 amenable 的流形）。因此，单纯体积既不等价于整数单纯体积，也不等价于 Δ-复杂度。在一维时，整数单纯体积与 Δ-复杂度等价（事实上二者相等！）（这是显然的，因为唯一的闭一维流形是 S^1 ，且 $\Delta(S^1) = \|S^1\|_{\mathbb{Z}} = 1$）；在二维时，二者也等价，因为对于每个亏格为 $g \geq 1$ 的闭定向曲面，都有 $\Delta(S^2) = \|S^2\|_{\mathbb{Z}} = 2$ ，且 $\Delta(\Sigma_g) = \|\Sigma_g\|_{\mathbb{Z}} = 4g - 2$ （见 [L¨oh18，命题 4.3]）。本文证明如下结论：

定理 1. 在3维情形下，整数单纯体积与 Δ-复杂度并不等价。更确切地说，存在一个由 M_i 个3维流形构成的序列，使得

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\Delta(M_i)}{\|M_i\|_{\mathbb{Z}}} = +\infty \ .$$

定理 1 中所述序列里的流形都是以圆为底空间的环面丛。事实上，若 N 是一个 n 维流形，且 $f\colon N \to N$ 是一个同胚，我们将纤维化于 S^1 上、单值化为 f 的 $(n+1)$ 维流形记为 $N \rtimes_f S^1$ ，即

$$N \rtimes_f S^1 = \frac{N \times [0,1]}{\sim} \ ,$$

其中，对所有 $x \in N$，有 $(x,\ 0) \sim (f(x),\ 1)$。现在令 $T = S^1 \times S^1$为二维环面，并令 $f\colon T \to T$ 为沿一条同伦地

非零伦简单闭曲线的德恩扭转，其中该曲线位于 T 中。那么定理 1 中提到的流形 M_i 是 f^i 的映射环面，即 $M_i = T \rtimes_{f^i} S^1$。

我们对定理 1 的证明依赖于对 Δ-复杂度以及映射环面的整数单纯体积分别进行研究。事实上，我们证明：若 $f\colon T \to T$ 是环面上的德恩扭转，则 Δ 的复杂度随 i 线性增长（见定理 2），而其整数单纯体积相对于 i 的增长是次线性的（见推论 5）。显然，这足以推出定理 1。

Δ-复杂度 3-纤维化到圆上的流形。映射类群 Δ纤维化到圆上的流形的复杂度已由 Lackenby 和 Purcell 在 [LP22b, LP22a] 中进行了广泛研究。借鉴他们的技术并以其研究成果为基础，我们在此证明以下结果：

定理 2。设 $f\colon T \to T$ 是环面的自同胚，代表映射类群 $\mathrm{MCG}(T)$ 中的一个无限阶元素。那么，f^i 的映射环面的 Δ 复杂度相对于 i 线性增长，也就是说，存在常数 $0 < k_1 \le k_2$ 使得

$$k_1 \le \frac{\Delta\left(T \rtimes_{f^i} S^1\right)}{i} \le k_2$$

对每个 $i \ge 1$。

注意，同胚 $f\colon T \to T$ 满足定理的假设，当且仅当 f 是非平凡的德恩扭转幂或阿诺索夫同胚。特别地，当 $f\colon T \to T$ 是环面的阿诺索夫自同构时，定理 2 的结论已在 [LP22a，定理 1.4]，中得到证明，其中还给出了 k_1 和 k_2 的显式估计。因此，我们的贡献主要在于将 Lackenby和Purcell的策略应用于德恩扭转情形。

填充体积与整数单纯体积。为了研究 $T \rtimes_{f^i} S^1$ 的整数单纯体积，我们采用了 [BF22] 中最近引入的一个不变量：填充体积。

设 $f\colon M \to M$ 是流形 M 上的保定向自同胚。f 的整数（分别为实数）填充体积 $\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f)$（分别为 $\mathrm{FV}_{\mathbb{R}}(f)$）是一个数值不变量，其定义基于 f 对 M 基本循环的作用（见定义2.2）。在实数情形下，[BF22] 的定理 5 表明，同胚 f 的填充体积等于 f 的映射环面的单纯体积，即

$$\mathrm{FV}_{\mathbb{R}}(f) = \|M \rtimes_f S^1\| \,. \tag{1}$$

[BF22 定理 5] 的证明可以很容易地加以改编，从而得出以下结果；该结果将在第 2 节证明：

定理 3. 设 $f\colon\ M \to M$ 是流形 M 上的保向同胚。那么，

$$\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) = \lim_{i\to\infty} \frac{\|M \rtimes_{f^i} S^1\|_{\mathbb{Z}}}{i}.$$

公式 (1) 对自同胚的实填充体积作出了令人满意的描述，并已被用于例如对实填充体积为正（分别为零）的曲面自同胚进行分类（见 [BF22，推论 9]）。相反，整数填充体积似乎更难以捉摸。在第 3 节中，我们证明以下结果，它完整描述了曲面映射类群上整数填充体积的行为：

定理 4. 设 S 为亏格 g 的闭定向曲面，且 $f\colon S \to S$ 是 S的保向自同胚。那么 $\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) > 0$当且仅当满足以下条件之一：

- $g = 1$ 且 f 是阿诺索夫的；
- $g > 1$ 且存在自然数 $k \in \mathbb{N}$ 以及一个子曲面$S' \subseteq S$ （即 S的余维零子流形 S'，可带边界），使得 f^k 同伦于一个同胚 $h\colon\ S \to S$，该同胚满足 $h(S') = S'$，且限制在 S'上是一个伪阿诺索夫自同胚 $h|_{S'}$。

我们证明定理 4 的关键步骤，是证明环面上德恩扭转的整数填充体积为零（见定理 3.1）。随后，我们将这一结果推广到高亏格曲面上的德恩扭转（定理 3.4），最后利用 [BF22] 关于实 整数填充体积的一些非消失结果（这些结果蕴含整数填充体积相应的非消失结果），完成定理 4 的证明。

定理 4 和 [BF22, 推论 9] 表明，对于亏格为 $g \geq 2$ 的曲面 S 上任意自同胚 f，$\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) = 0$ 当且仅当 $\mathrm{FV}_{\mathbb{R}}(f) = 0$。然而，[BF22] 证明，若 f 是环面上的阿诺索夫自同构，则 $\mathrm{FV}_{\mathbb{R}}(f) = 0$，而 $\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) > 0$（并且在高维中，实填充体积为零也不保证整数填充体积为零，见 [BF22, 推论 13]）。特别是，整数填充体积能够区分环面上的阿诺索夫自同构与德恩扭转，而实填充体积则不能。

结合定理 3 和定理 4，我们很容易推出以下结论：

推论 5. 设 $f\colon\ T \to T$ 是沿环面上的非零伦简单闭曲线进行的德恩扭转。那么

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\|M \rtimes_{f^i} S^1\|_{\mathbb{Z}}}{i} = \mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) = 0\ ,$$

如上所述，推论 5 和定理 2 最终推出了定理 1。

略窥高维。在高维中，整数单纯体积与 Δ-复杂度之间的等价关系会以惊人的方式失效：例如，当某个 n-流形 M 不允许三角剖分时（此时 $\Delta(M) = \infty$，而 $\|M\|_{\mathbb{Z}}$ 当然是有限的），或者当无穷多个两两不同胚的 n-流形具有相同的整数单纯体积时。

在 3 维中，已知这两种现象都不会发生：每个 3 维流形都允许三角剖分；此外，Clara L¨oh 的一个结果保证，对于每个 $k \in \mathbb{N}$，在同胚意义下，整数单纯体积等于 k [的 3 维流形只有有限多个（L¨oh18，命题 5.3]）。然而，在维数 $n \geq 4$ 中，存在不可三角剖分流形，也存在无穷多个两两不同胚的 n-流形，它们具有相同的整数单纯体积。事实上，由于同伦等价的流形具有相同的整数单纯体积，最后一句可直接由 [KS04，定理 1.2]，得出：作者在那里构造了对于每个 $n \geq 4$，一族无穷多个闭、可定向的拓扑 n-流形，它们彼此简单同伦等价，但两两不同胚（若 $n > 4$，则可以选取这些流形为光滑流形，因而可三角剖分）。

据作者所知，以下问题仍未解决：

问题 6. 固定 $n \geq 4$ 和 $k \in \mathbb{N}$。满足以下条件的 n-流形 M 的同伦类数量是否

$$\|M\|_{\mathbb{Z}} \leq k$$

有限?

回顾一下，若存在一个度为 d 的映射 $f\colon M \to N$，则称流形 M d 支配 流形 N。正如 L¨oh 所指出的，在维数 3 的情形下，整数单纯体积具有有限到一性质，这一事实源于：对于任意固定的 3维流形和任意固定的 $d > 0$，被 M 以 d 支配的 3 维流形的同胚类数量有限 [Liu20]。在高维中，问题 6 也与一个（可能很难的问题）有关：一个固定的流形 M 能否 d 支配无穷多个两两不同伦的流形。

本文结构。第 2 节回顾填充体积和单纯体积的定义，并证明定理 3。第 3 节计算环面上德恩扭转的整数填充体积，随后证明定理 4。最后，第 4 节将证明定理 2，内容涉及三维幂零流形和可解流形的 Δ-复杂度。

2. Filling volumes and simplicial volumes

令 $R = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{Z}$，并令 M 为一个 n 维流形（回想一下，本文假设每个流形都是闭的、连通的且定向的）。令 $C_*(M, R)$ 表示 M 上系数取自

R 的奇异链复形。对于每个 $i \in \mathbb{N}$，用 $Z_i(M,R) \subseteq C_i(M,R)$（分别用 $B_i(M,R) \subseteq C_i(M,R)$）表示 i 次循环（分别为边界）构成的子空间。我们在 $C_*(M,R)$ 上赋予通常的 ℓ^1 范数，使得若 $c = \sum_{k\in I} a_k\sigma_k$ 是一个写成约化形式的奇异链，则

$$\|c\|_1 = \left\|\sum_{k\in I} a_k\sigma_k\right\| = \sum_{k\in I} |a_k| \ .$$

在边界空间 $B_i(M,\ R)$ 上，还定义了**填充范数** $\|\cdot\|_{\text{fill},\ R}$ 使得对于每个 $z \in B_i(M,\ R)$,

$$\|z\|_{\text{fill},R} = \inf\{\|b\|_1 \,|\, b \in C_{i+1}(M,R)\ ,\ \partial b = z\} \ .$$

回忆一下，$H_n(M,\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 由M的基本类 $[M]_{\mathbb{Z}}$ 生成，而 M 的整数基本循环（或 $\mathbb{Z}$-基本循环）就是 $[M]_{\mathbb{Z}}$ 的任意代表。我们用 $[M]_{\mathbb{R}} \in H_n(M,\ \mathbb{R})$ 表示 M 的实基本类，即基本类 $[M]_{\mathbb{Z}}$ 在系数变换映射 $H_n(M,\ \mathbb{Z}) \to H_n(M,\ \mathbb{R})$ 下的像。M 的 $\mathbb{R}$-基本循环（或实基本循环）是 $Z_n(M,\ \mathbb{R})$ 中 $[M]_{\mathbb{R}}$ 的任意代表。

定义 2.1。The R-单纯体积 M 是

$$\|M\|_R = \inf\{\|z\|_1 \,|\, z \text{ is an } R-\text{fundamental cycle for } M\} \ .$$

实单纯体积 $\|M\|_{\mathbb{R}}$ 就是经典单纯形体积，通常记作 $\|M\|$。

若 $f\colon M \to M$是一个映射，我们用 $f_*\colon C_*(M,R) \to C_*(M,R)$ 表示它在奇异链上的诱导映射。注意，f_* 关于 ℓ^1-范数以及（在边界子空间上）关于填充范数都是范数不增的。

下述不变量称为 f的**填充体积**，在 [BF22]中定义。

定义2.2。设 $f : M \to M$ 是保定向的自同胚，且 $z \in C_n(M,R)$ 是 M的一个 R-基本循环。令

$$\mathrm{FV}_R(f) = \lim_{m\to\infty} \frac{\|f_*^m(z) - z\|_{\text{fill},R}}{m} \ ,$$

其中 $\|\cdot\|_{\text{fill},R}$ 表示 $B_n(M,R)$ 上的填充范数。（符号 FV 表示填充体积。）

文献 [BF22] 证明了不变量 $\mathrm{FV}_R(f)$ 定义良好，即上述极限（由 Fekete 引理可知其存在且有限）不依赖于基本循环 z的选择。此外，事实证明，$\mathrm{FV}_R(f)$ 仅取决于 f 的同伦类（另见 [BF22]）；由定义本身可知，$\mathrm{FV}_{\mathbb{R}}(f) \le \mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f)$。

注记 2.3。Fekete 引理以及 $\mathrm{FV}_R(f)$ 不依赖于基本循环 z 的选择这一事实，也蕴含了填充体积的如下刻画，该刻画将在定理 3 的证明中加以利用

（详情参见 [BF22，命题 2]）：

$$\mathrm{FV}_R(f) = \inf\left\{ \frac{\|f_*^m(z) - z\|_{\mathrm{fill},R}}{m} \;\middle|\; z \text{ fundamental cycle for } M,\, m \in \mathbb{Z} \right\} .$$

回忆一下，符号 $M \rtimes_f S^1$ 表示 f的映射环面，即将每个 $x \in M$对应的 $(x, 0)$ 与 $(f(x), 1)$ 识别后，由 $M \times [0,1]$ 得到的流形。 [BF22]证明了 $\mathrm{FV}_{\mathbb{R}}(f)$ 与 f 的映射环面之间如下非常简洁的关系：

$$\mathrm{FV}_{\mathbb{R}}(f) = \|M \rtimes_f S^1\| .$$

通过调整 [BF22, 定理 5], 的证明，我们在此证明 f 的整数填充体积与其映射环面的整数单纯体积之间一个类似（但稍复杂）的关系：

定理 3. 设 $f : M \to M$ 是流形 M上的一个保向同胚。那么

$$\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) = \lim_{i\to\infty} \frac{\|M \rtimes_{f^i} S^1\|_{\mathbb{Z}}}{i}.$$

证明。 设 z 是 M的一个整数基本循环。不难构造一个 $M \times [0,1]$ 的（相对）基本循环，其范数为 $(n+1)\|z\|_1$，边界等于 $(i_0)_*(z) - (i_1)_*(z)$，其中 $i_j : M \to M \times \{j\}$ 是包含映射。为了将这个基本循环 “ 闭合 ” 起来，从而得到 $M \rtimes_f S^1$ 的一个基本循环，可以将它与 $(i_1)_*(b)$ 相加，其中 $b \in C_{n+1}(M, \mathbb{Z})$ 是一个满足 $\partial b = z - f_*(z)$ 的元素。由此得到如下估计

$$\|M \rtimes_f S^1\|_{\mathbb{Z}} \le (n+1)\|z\|_1 + \|f_*(z) - z\|_{\mathrm{fill},\mathbb{Z}}$$

（详细证明见 [BF22，引理 3.1] ）。将同胚 f 替换为其幂 f^i ，并除以 i ，即可得到

$$\frac{\|M \rtimes_{f^i} S^1\|_{\mathbb{Z}}}{i} \le \frac{(n+1)\|z\|_1}{i} + \frac{\|f_*^i(z) - z\|_{\mathrm{fill},\mathbb{Z}}}{i} .$$

在 $i \to +\infty$ 时对该不等式取极限，便得到不等式

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{\|M \rtimes_{f^i} S^1\|_{\mathbb{Z}}}{i} \le \mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) .$$

为完成证明，我们现在只需证明

$$\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) \le \liminf_{i\to\infty} \frac{\|M \rtimes_{f^i} S^1\|_{\mathbb{Z}}}{i} .$$

当然，只需证明

$$\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) \le \frac{\|M \rtimes_{f^i} S^1\|_{\mathbb{Z}}}{i}$$

对每个 $i \in \mathbb{N}$ 都成立。

为此，我们依据 [BF22 定理 5], 的证明，该证明表明，如果 $z \in C_{n+1}(M \rtimes_f S^1, \mathbb{Z})$ 是一个整数基本循环，使得

$\|z\|_1 = \|M \rtimes_f S^1\|_{\mathbb{Z}}$，那么可以找到足够大的 $m \in \mathbb{N}$，以及一个链 $w \in C_{n+1}(M, \mathbb{Z})$，使得：

(1) $\|w\|_1 \leq m \cdot \|z\|_1$，以及 (2) 对某个 M 的基本循环 b，

有 $\partial w = b - f_*^m(b)$。

（尽管 [BF22 的定理 5] 讨论的是实系数情形，但这一具体结论的证明适用于任意系数。）因此，我们得到

$$\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) \leq \frac{\|b - f_*^m(b)\|_{\mathrm{fill},\mathbb{Z}}}{m} \leq \frac{\|w\|_1}{m} \leq \|z\|_1 = \|M \rtimes_f S^1\|_{\mathbb{Z}} ,$$

其中，第一个不等式源于注 2.3 中所述的填充体积刻画。对于任意 $i \in \mathbb{N}$，我们都可以在上述不等式中用 f^i 替换 f，从而得到

$$\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f^i) \leq \|M \rtimes_{f^i} S^1\|_{\mathbb{Z}} .$$

最后，利用 $\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f^i) = i \cdot \mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f)$ 这一事实（见 [BF22，定理 2]），我们可以推得

$$\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) \leq \frac{\|M \rtimes_{f^i} S^1\|_{\mathbb{Z}}}{i} ,$$

如所需。至此证明完毕。

□

注 2.4。定理 3 的证明并未利用整数系数的任何特殊性质。事实上，若 R 是一个含幺赋范环，则基本循环、ℓ^1- 范数和 R- 填充范数的概念都有意义。因此，可以定义 R-单纯体积 $\|\cdot\|_R$ 和填充体积 $FV_R(\cdot)$；将定理 3 中的 $\mathbb{Z}$ 替换为 R 后，结论仍然成立。（由于经典单纯体积关于有限覆盖具有可乘性，当 $R = \mathbb{R}$ 时，定理 3 便还原为 [BF22 的定理 5], ，该定理断言 $FV_{\mathbb{R}}(f) = \|M \rtimes_f S^1\|$。）

3. The integral filling volume of surface automorphisms

本节致力于研究曲面自同胚的整数填充体积。我们首先证明，环面上的德恩扭转的整数填充体积为零（定理 3.1）。接着，我们利用这一结果证明，任意闭可定向曲面上的德恩扭转也具有这一性质（定理 3.4）。最后，我们将这些结果与 [BF22] 中对曲面自同胚的实填充体积的描述结合起来，从而完整刻画整数填充体积为零的曲面自同胚（定理 4）。

3.1. 环面上德恩扭转的填充体积。

我们将整个小节用于证明以下结果：

定理 3.1。设 T 为环面，$f\colon T \to T$ 为沿 T 的任意非零伦简单闭曲线所作的德恩扭转。则 $\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) = 0$。

为了证明该定理，我们固定环面的一个基本循环 $c \in C_2(T,\ \mathbb{Z})$，并构造高效链来填充边界 $c - f_*^{2^{2k}}(c)$。

令 $e_i \in \mathbb{R}^{k+1}$ 为 $\mathbb{R}^{k+1}$ 标准基中的第 i 个向量，并令 $\Delta^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ 为 $e_1, \dots, e_{k+1}$ 的凸包，即

$$\Delta^k = \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i e_i \,\middle|\, 0 \le \lambda_i \le 1,\ \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

对于 $n, m \in \mathbb{N}$ 和 $p_1, \dots, p_{n+1} \in \mathbb{R}^m$，我们用 $\mathrm{str}_m(p_1, \dots, p_{n+1})$ 表示 $\mathbb{R}^m$ 中顶点为 $p_1, \dots, p_{n+1}$ 的直 n-单形，也就是由映射定义的奇异单形

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{str}_m(p_1, \dots, p_{n+1}) : & \Delta^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i & \mapsto & \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i p_i \end{array}.$$

令 T 为环面 $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$，$\pi\colon\ \mathbb{R}^2 \to T$ 为商映射。我们记

$$[p_1, \dots, p_{n+1}] \in C_n(T, \mathbb{Z})$$

T 中由 $\pi(\mathrm{str}_2(p_1, \dots, p_{n+1}))$ 给出的 n-单形。

注3.2。由于 $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$，对于每个 $i, j \in \mathbb{Z}$，两个符号 $[(x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots, (x_{n+1}, y_{n+1})]$ 和 $[(x_1 + i, y_1 + j), (x_2 + i, y_2 + j) \dots (x_{n+1} + i, y_{n+1} + j)]$ 在 $C_n(T, \mathbb{Z})$ 中表示同一个单形。

采用这一记号，环面的一个基本循环表示为

$$c = [(0,0), (1,0), (1,1)] - [(0,0), (0,1), (1,1)]$$

（见图 1）。

设 $f\colon\ T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 沿一条非零伦简单闭曲线作德恩扭转。经过映射类群中某个元素的共轭后，我们可以假设 f 由矩阵表示

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

设 $f_*\colon\ C_*(T,\ \mathbb{Z}) \to C_*(T,\ \mathbb{Z})$ 为链集上的诱导映射。我们有

$$f_*^k(c) = [(0,0), (1,0), (k+1, 1)] - [(0,0), (k, 1), (k+1, 1)],$$

这同样是 T 的基本循环（图 1）。

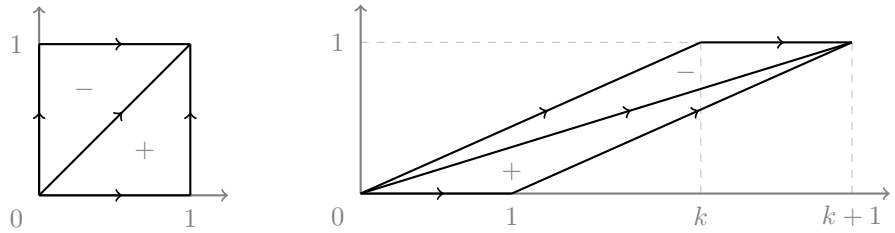

FIGURE 1. 环面 $\mathbb{R}^2$中循环 c和 $f_*^k(c)$ 的一个提升。

链 $f_*^{2^{2k}}(c) - c \in C_2(T, \mathbb{Z})$ 是一个边界，因为它是两个基本循环之差。对于 $k \in \mathbb{N}$，我们将构造链 $w_k \in C_3(T, \mathbb{Z})$，使得 $\partial w_k = f_*^{2^{2k}}(c) - c$，并且具有如下性质：$\|w_k\|_1$ 随着 k 线性增长。这将证明 $f_*^k(c) - c$ 的填充范数增长速度低于线性。

我们将这一构造分成几个步骤。

步骤1。令

$$\begin{aligned}\tau_k = &+ [(0,0),(1,0),(2^{2k}+1,0),(2^{2k}+1,1)]\\ &- [(0,0),(2^{2k},0),(2^{2k}+1,0),(2^{2k}+1,1)]\\ &+ [(0,0),(2^{2k},0),(2^{2k},1),(2^{2k}+1,1)]\end{aligned}$$

（见图 2），并设

$$b_k = [(0,0),(1,0),(2^{2k}+1,0)] - [(0,0),(2^{2k},0),(2^{2k}+1,0)]\ .$$

于是我们有 $\|\tau_k\|_1 = 3$ 和 $\partial\tau_k + b_k = f_*^{2^{2k}}(c) - c$，因为

$$\begin{aligned}\partial\tau_k + b_k = &+ [(1,0),(2^{2k}+1,0),(2^{2k}+1,1)] - [(0,0),(2^{2k},0),(2^{2k},1)]\\ &+ [(0,0),(1,0),(2^{2k}+1,1)] - [(0,0),(2^{2k},1),(2^{2k}+1,1)]\\ &+ [(2^{2k},0),(2^{2k},1),(2^{2k}+1,1)] - [(2^{2k},0),(2^{2k}+1,0),(2^{2k}+1,1)],\end{aligned}$$

其中第一行等号右侧等于 0，这是因为三元组 $((1,0),(2^{2k}+1,0),(2^{2k}+1,1))$ 是由平移 $(1,0)$ 将 $((0,0),(2^{2k},0),(2^{2k},1))$ 得到的（见注 3.2，其中 $(i,j) = (1,0)$）；第二行等于 $f_*^{2^{2k}}(c)$，第三行等于 $-c$（再次参见注 3.2，其中 $(i,j) = (2^k,0)$）。

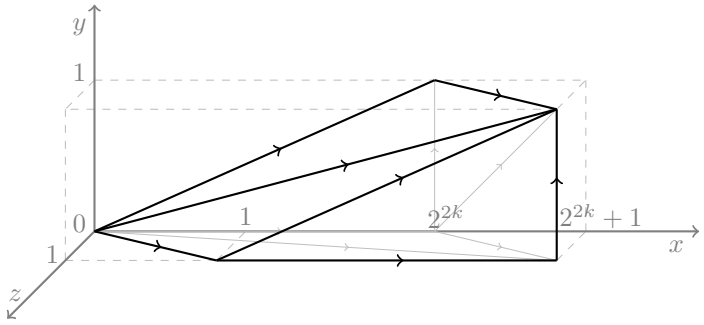

FIGURE 2. 链 τ_k 是通过将图中棱柱的三角剖分投影到 xy-平面上得到的。

令 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$，并用 $\gamma\colon S^1 = S^1 \times \{0\} \hookrightarrow T = S^1 \times S^1$ 表示 T 中由 $\gamma([t]) = [(t,0)]$ 定义的简单闭曲线。边界 b_k 支撑在 γ 的像中，因此它也表示 S^1 中的一条链 $s_k^0 \in C_2(S^1, \mathbb{Z})$；这里我们将 S^1 与 γ 的像等同。注意，采用此记号，我们有 $\gamma_*(s_k^0) = b_k$。

为了找到一个高效的链 $\omega \in C_3(T,\mathbb{Z})$，其边界为 b_k，只需找到一个高效的链 $\omega_{S^1} \in C_3(S^1,\mathbb{Z})$，其边界为 s_k^0，并令 $\omega = \gamma_*(\omega_{S^1})$。

与环面的情形一样，我们将 $\pi_{S^1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ 记作商映射；若 $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$，则将 $[x_1,\ldots,x_{n+1}]$ 记作 S^1 中由 $\pi_{S^1}(\mathrm{str}_1[x_1,\ldots,x_{n+1}])$ 给出的直线n-单形。按照这一记号，我们有

$$s_k^0 = \left[0, 1, 2^{2k}+1\right] - \left[0, 2^{2k}, 2^{2k}+1\right] .$$

注 3.3。如注 3.2 所述，对于每个 $i \in \mathbb{Z}$，符号 $[x_1,\ldots,x_{n+1}]$ 和 $[x_1+i,\ldots,x_{n+1}+i]$ 表示 S^1 中同一个单形。

步骤 2。对于每个 $i = 0,\ldots,2k$，令

$$s_k^i = \left[0, 2^i, 2^{2k-i}+2^i\right] - \left[0, 2^{2k-i}, 2^{2k-i}+2^i\right] .$$

于是存在两个链 $\alpha, \beta, \in C_3(T,\mathbb{Z})$（与 k 和 i 无关），以及映射 $\varphi_k^i\colon T \to S^1$，使得 $(\varphi_k^i)_*(\partial\alpha) + (\varphi_k^{i+1})_*(\partial\beta) = s_k^{i+1} - s_k^i$。

证明。回想一下

$$c = [(0,0),(1,0),(1,1)] - [(0,0),(0,1),(1,1)]$$

并令

$$\begin{aligned} a = &+ [(0,0),(1,0),(1,1/2)] - [(0,0),(0,1/2),(1,1/2)] + \\ &+ [(0,1/2),(1,1/2),(1,1)] - [(0,1/2),(0,1),(1,1)] , \\ b = &+ [(0,0),(1/2,0),(1/2,1)] - [(0,0),(0,1),(1/2,1)] + \\ &+ [(1/2,0),(1,0),(1,1)] - [(1/2,0),(1/2,1),(1,1)] . \end{aligned}$$

链 a, b, c 都是环面的基本循环，因此它们余边界等价（图 3）。特别地，存在 $\alpha, \beta \in C_3(T,\mathbb{Z})$ 使得

$$\begin{aligned} \partial\alpha &= a - c \\ \partial\beta &= c - b . \end{aligned}$$

令

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\varphi}_k^i : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^1 \\ & (x,y) & \mapsto & 2^i x + 2^{2k-i} y \ . \end{array}$$

我们定义 $\varphi_k^i : T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 为由 $\widetilde{\varphi}_k^i$ 诱导的商映射。然后（见图 3）

$$\left(\varphi_k^i\right)_* (c) = \left[0, 2^i, 2^{2k-i}+2^i\right] - \left[0, 2^{2k-i}, 2^{2k-i}+2^i\right] = s_k^i$$

and

$$\begin{aligned}\left(\varphi_k^i\right)_*(a) =& + \left[0, 2^i, 2^{2k-i-1}+2^i\right] - \left[0, 2^{2k-i-1}, 2^{2k-i-1}+2^i\right] + \\ &+ \left[2^{2k-i-1}, 2^{2k-i-1}+2^i, 2^{2k-i}+2^i\right] - \left[2^{2k-i-1}, 2^{2k-i}, 2^{2k-i}+2^i\right] \\ =& + \left[0, 2^i, 2^{2k-i-1}+2^i\right] - \left[0, 2^{2k-i-1}, 2^{2k-i-1}+2^i\right] + \\ &+ \left[2^i, 2^{i+1}, 2^{2k-i-1}+2^{i+1}\right] - \left[2^i, 2^{2k-i-1}+2^i, 2^{2k-i-1}+2^{i+1}\right] \\ =& \left(\varphi_k^{i+1}\right)_*(b).\end{aligned}$$

综上所述，我们得到

$$\begin{aligned}\left(\varphi_k^i\right)_*(\partial\alpha) + \left(\varphi_k^{i+1}\right)_*(\partial\beta) &= \left(\varphi_k^i\right)_*(a-c) + \left(\varphi_k^{i+1}\right)_*(c-b) \\ &= (\varphi_k^{i+1})_*(b) - s_k^i + s_k^{i+1} - (\varphi_k^{i+1})_*(b) = s_k^{i+1} - s_k^i \ .\end{aligned}$$

□

步骤3。设

$$\omega_k = \sum_{i=0}^{k-1} (\varphi_k^i)_*(\alpha) + (\varphi_k^i)_*(\beta) \ .$$

Then

$$\partial\omega_k = \sum_{i=0}^{k-1} \left((\varphi_k^i)_*(\partial\alpha) + (\varphi_k^{i+1})_*(\partial\beta)\right) = \sum_{i=0}^{k-1} (s_k^{i+1} - s_k^i) = s_k^k - s_k^0 = -s_k^0 \,,$$

其中最后一个等式用到了这一事实： $s_k^k = 0$。此外,

$$\|w_k\|_1 \le \sum_{i=0}^{k-1} \left(\left\|(\varphi_k^i)_*(\alpha)\right\|_1 + \left\|(\varphi_k^i)_*(\beta)\right\|_1 \right) \le k \left(\|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1 \right) \ .$$

现在我们可以完成定理 3.1 的证明了。根据步骤 1 和步骤 3，我们有

$$f_*^{2^{2k}}(c) - c = \partial\tau_k + b_k = \partial\tau_k + \gamma_*(s_k^0) = \partial\tau_k + \gamma_*\left(-\partial\omega_k\right) = \partial\left(\tau_k - \gamma_*\left(\omega_k\right)\right)$$

and

$$\|\tau_k - \gamma_*\left(\omega_k\right)\|_1 \le \|\tau_k\|_1 + \|\gamma_*\left(\omega_k\right)\|_1 \le 3 + k\left(\|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1\right) \ .$$

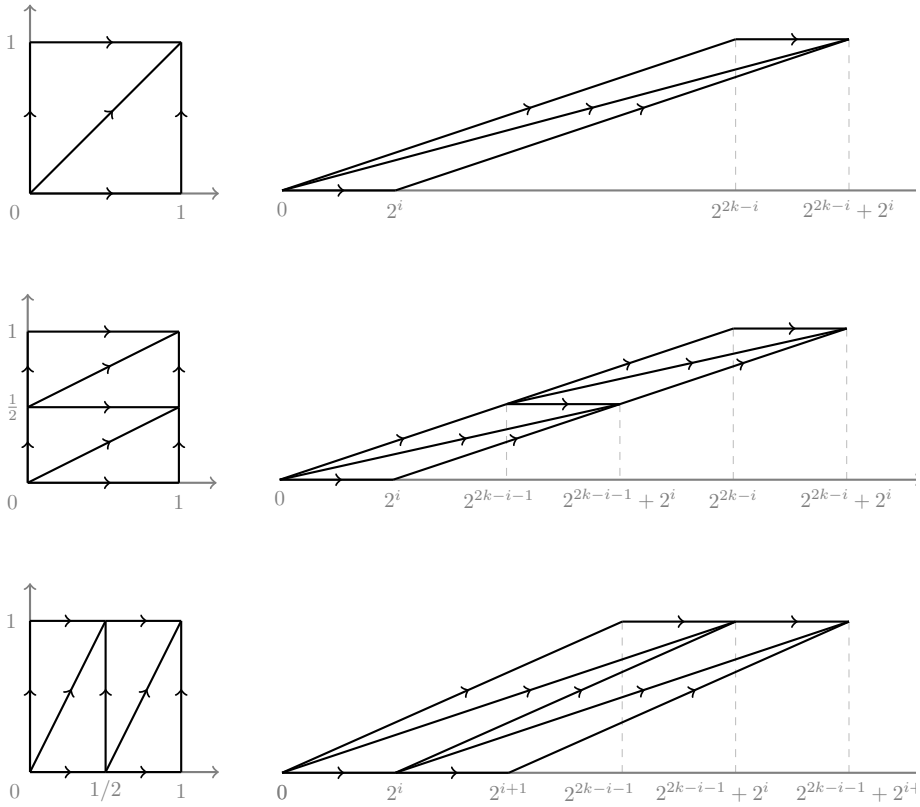

FIGURE 3. 基本循环在 $\mathbb{R}^2$ 中的提升 c， a， b 如左图所示。右图中的平行四边形投影到水平轴上后，表示循环 $\varphi_k^i(c)$ $\varphi_k^i(a)$ $\varphi_k^{i+1}(b)$在 $\mathbb{R}$ 中的提升。注意， $\varphi_k^{i+1}(b)$的提升是将右侧上方的平行四边形平移到下方平行四边形旁边后，由 $\varphi_k^i(a)$ 的提升得到的。

Thus

$$\begin{aligned}
\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) &= \lim_{k\to\infty} \frac{\left\|f_*^k(c)-c\right\|_{\mathrm{fill},\mathbb{Z}}}{k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\left\|f_*^{2^{2k}}(c)-c\right\|_{\mathrm{fill},\mathbb{Z}}}{2^{2k}} \\
&\le \lim_{k\to\infty} \frac{\left\|\tau_k-\gamma_*\left(\omega_k\right)\right\|_1}{2^{2k}} \\
&\le \lim_{k\to\infty} \frac{3+k\left(\|\alpha\|_1+\|\beta\|_1\right)}{2^{2k}} = 0\ .
\end{aligned}$$

□

3.2. 高亏格曲面上的德恩扭转的填充体积。 在本小节中，我们利用环面上德恩扭转的整数填充体积为零这一性质，得到高亏格曲面的类似结果。

首先固定一些记号。设 S 是一个曲面。稍作滥用，若 $\gamma\colon S^1 \to S$ 是一条闭曲线，则我们也用 γ 表示映射 γ 的像 $\mathrm{im}(\gamma) \subset S$。此外，若 $S' \subset S$ 是 S 的一个闭子集，则我们用 $S\backslash\backslash S'$ 表示相对于 S 上某个辅助黎曼度量对 $S \setminus S'$ 取完备化。这样，当 γ 是一条简单闭曲线时，曲面 $S\backslash\backslash\gamma$ 是一个（不一定连通的）紧曲面，具有两个边界分支，且二者均可典范地与 γ 识别。

定理 3.4。 设 S 是一个亏格为 $g \geq 1$, $\gamma\colon S^1 \to S$ 的闭曲面，其中 S 内有一条简单闭曲线，且 $f\colon S \to S$ 是沿 γ 的德恩扭转。那么$\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) = 0$。

证明。 根据定理 3，只需证明

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|S \rtimes_{f^k} S^1\|_{\mathbb{Z}}}{k} = 0.$$

为此，我们先用另一种方式描述 $S \rtimes_{f^k} S^1$ 。

紧流形 $N' = (S\backslash\backslash\gamma) \times S^1$ 有两个边界分支T_1, T_2, 二者均可典范地与环面 $T = \gamma \times S^1$相识别；我们记

$$i : T_1 \hookrightarrow T_2$$

为由两个典范识别 $T_1 \to T$ 和 $T \to T_2$复合而成的映射。若赋予 T_1 和 T_2 由 N'诱导的定向，则映射 i 是反向保持定向的。

令 $c' \in C_3(N',\ \partial N',\ \mathbb{Z})$为偶对$(N',\ \partial N')$的一个相对整数基本循环。我们有 $\partial c' = b_1 + b_2$，其中 $b_i \in C_2(T_i,\ \mathbb{Z})$是一个基本循环。链 $-i_*(b_1)$和 b_2 都是 T_2的基本循环，因此存在 $w \in C_3(T_2,\ \mathbb{Z}) \subseteq C_3(N',\ \mathbb{Z})$，使得 $\partial w = i_*(b_1) + b_2$。设$c = c' - w$，则 c仍是偶对$(N',\ \partial N')$的相对基本循环，且$\partial c = b_1 - i_*(b_1)$。

现在令 $g'\colon T_1 \to T_1$ 为沿 γ的德恩扭转，令 $g_k\colon T_1 \to T_2$ 为复合映射 $i \circ (g')^k$，并令 N_k 为通过沿 g_k 粘合两个边界分支而从 N' 得到的流形。记 $p\colon N' \to N_k$ 为投影。那么， $p_*(c) \in C_3(N_k,\ \mathbb{Z})$ 是一条链，其在 N_k 中的边界包含于 $p(T_1)$ 内，并且它由下式给出：

$$\partial p_*(c) = p_*(b_1) - p_*(i_*(b_1)) = p_*(b_1) - p_*(g'_*)^{-k}(b_1) = p_*(b_1 - (g'_*)^{-k}(b_1)) .$$

特别地， $\partial p_*(c)$作为 N_k 中的边界，其填充范数不超过 $p_*(b_1 - (g'_*)^{-k}(b_1))$作为 $p(T_1) \cong T$中的边界时的填充范数。根据 [FR16，引理 3.3], , 流形 N_k 与该流形同胚

$S \rtimes_{f^k} S^1$。因此，

$$\begin{aligned}
\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) &= \lim_{k\to\infty} \frac{\|S \rtimes_{f^k} S^1\|_{\mathbb{Z}}}{k} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\|N_k\|_{\mathbb{Z}}}{k} \\
&\le \lim_{k\to\infty} \frac{\|p_*(c)\|_1 + \|\partial p_*(c)\|_{\mathrm{fill},\mathbb{Z}}}{k} \\
&\le \lim_{k\to\infty} \frac{\|c\|_1 + \left\|p_*(b_1 - (g'_*)^{-k}(b_1))\right\|_{\mathrm{fill},\mathbb{Z}}}{k} \\
&\le \lim_{k\to\infty} \frac{\|c\|_1}{k} + \lim_{k\to\infty} \frac{\left\|b_1 - (g'_*)^{-k}(b_1)\right\|_{\mathrm{fill},\mathbb{Z}}}{k} \\
&= 0 + \mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(g') \\
&= 0\,,
\end{aligned}$$

其中最后一个等式由定理 3.1 得出。 □

3.3. 曲面自同胚的整数填充体积。 在本小节中，我们运用前面的结果，彻底说明在二维情形下，保向自同胚的整数填充体积何时为零。

定理 4. 设 S 是亏格为 g 的闭定向曲面，且 $f\colon S \to S$ 是 S 的保向自同胚。那么，$\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f) > 0$ 当且仅当以下条件之一成立：

- $g = 1$ 且 f 是阿诺索夫的；
- $g > 1$ 且存在自然数 $k \in \mathbb{N}$ 和子曲面 $S' \subseteq S$（即 S 的一个余维零子流形 S'，边界可以为空），使得 f^k 同伦于同胚 $h : S \to S$，该同胚满足 $h(S') = S'$，并且限制在 S' 上时是一个伪阿诺索夫自同胚 $h|_{S'}$。

证明。 我们分别考虑 S 是球面、环面或亏格为 $g > 1$ 的曲面的情形。

我们用 φ 表示 f 在 S 的映射类群 MCG(S) 中的类，并回顾 [BF22] 的结果：f 的填充体积只取决于其同伦类 φ（因此我们可以将 $\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(f)$ 记作 $\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(\varphi)$）。

若 S 是球面，则 MCG(S) 是平凡群，因此积分填充体积恒为零。

若 S 是环面，则 φ 是周期的、阿诺索夫的或可约的 [FM11, 定理 13.1]：

- 若 φ 是周期的，则 $\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(\varphi) = 0$ [BF22, 定理 2]；
- 若 φ 是阿诺索夫的，则 $\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(\varphi) > 0$ [BF22，命题 4.3]；

• 若 φ 是可约的，则它可表示为某个德恩扭转的某次幂 $h^k : h$ ($T \to T$ FM11，第 13.[节）。由定理 3.1 和1]BF22，定理 [可得 FV 2], (ℤ) φFV $= k$ ·(ℤ) h。

若 S 是亏格为 $g > 1$ 的曲面，则 φ 是周期的、伪阿诺索夫的或可约的 [FM11, 定理13.2]:

• 若 φ 是周期的，则 $\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(\varphi) = 0$ [BF22, 定理 2];

• 若 φ 是伪阿诺索夫的，则 $\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(\varphi) \geq \mathrm{FV}_{\mathbb{R}}(\varphi) > 0$ [BF22, 推论9] (在这种情况下，我们取 $S' = S$ 和 $k = 1$)。

• 若 φ 是可约的，则存在其某个正整数次幂 φ^k ，它可以表示为一个映射 h ，并具有以下性质 [FM11, 推论 13.3]: 存在两两不交的环带 $A_1, \ldots, A_m \subset S$，使得 $h\big|_{A_i}$ 是 A_i 上的德恩扭转的某个幂（对每个 $1 \leq i \leq m$均如此），并且 h 在 $S \setminus \cup_{i=1}^m A_i$ 的每个连通分支上的限制要么是伪阿诺索夫的，要么是恒等映射。

如果在这些连通分支中至少有一个（例如 $S' \subset S$）上， h 的限制映射 $h\big|_{S'}$ 是伪阿诺索夫映射，那么根据 [BF22 的推论 9] 和 [BF22 的定理 2], , 我们有

$$\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(\varphi) = \frac{\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(h)}{k} \geq \frac{\mathrm{FV}_{\mathbb{R}}(h)}{k} > 0\,.$$

否则， h 在 $S \setminus \cup_{i=1}^m A_i$ 的每个连通分支上都限制为恒等映射；如果我们用 g_i 表示 A_i 上的德恩扭转，那么

$$h = g_1^{k_1} \circ \ldots \circ g_m^{k_m}\,.$$

由于 g_1、……、 g_m 是定义在两两不相交环带上的德恩扭转，它们两两可交换。由 [BF22 的定理 2] 和定理 3.4 可得

$$\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(\varphi) = \frac{\mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(h)}{k} \leq \frac{\sum_{i=1}^m \left(k_i \cdot \mathrm{FV}_{\mathbb{Z}}(g_i)\right)}{k} = 0.$$

□

4. Triangulation complexity of nilmanifolds and solmanifolds

回顾引言，本文中出现的所有流形均假设为闭、有向且连通的。设 M 为一个 n-流形。借用低维拓扑中的术语，我们将 M 的三角剖分理解为把 M 表示成若干 n维单形的并，并通过仿射同胚将其中一些面成对识别；特别地，允许同一个单形的面自邻接，也就是说，闭单形不必嵌入在 M中。 M 的三角剖分 $\mathcal{T}$的复杂度Δ($\mathcal{T}$)，是 $\mathcal{T}$中的 n-单形数目。

定义 4.1。流形 M 的 Δ-复杂度 $\Delta(M)$定义为 $\Delta(\mathcal{T})$的最小值，其中 $\mathcal{T}$遍历 M的所有三角剖分。若 M 不允许任何三角剖分，则令 $\Delta(M) = \infty$。

注记 4.2。容易验证，按照我们的定义，对 M 的三角剖分进行第二次重心细分后，可得到 M的严格三角剖分，即将 M 描述为一个单纯复形的几何实现。因此，若 $\Delta'(M)$表示 M的严格三角剖分中最高维单形的最小数量，则

$$\Delta(M) \leq \Delta'(M) \leq (n+1!)^2 \Delta(M) \ ,$$

其中 $n =$维数为 M。特别地，根据引言中的定义，数值不变量 Δ'和 Δ 是等价的。

本节致力于证明定理 2。该定理保证：若 $\varphi : T \to T$ 是德恩扭转的非平凡幂，或是环面的阿诺索夫同胚，则环面丛 $T \rtimes_{\varphi^n} S^1$的 Δ-复杂度相对于 n线性增长。如引言所述，阿诺索夫情形已在 [LP22a], 中处理，其中还给出了增长的定量估计。因此，我们的贡献主要在于将Lackenby和Purcell的策略应用于德恩扭转情形。

在证明定理 2 之前，我们先介绍曲面的脊图。正如 [LP22b、LP22a], 所讨论的，这一对象在计算圆上的曲面丛的 Δ-复杂度时起着基础作用。

4.1. 曲面上的脊图。设 S 为闭曲面。位于 S 上的脊 Γ是一个嵌入图，其顶点的度数均不为 1 或 2，且其补集 $S \backslash\backslash \Gamma$ 是一个圆盘。若 S 赋有固定的胞腔结构，则称脊 Γ 是胞腔的，如果它是 S的子复形。

对 S 的脊 Γ进行边收缩，是指在 S 中将 Γ 的一条边收缩为一点的操作（从而将 Γ 的两个顶点收缩为一个顶点）。边扩张 是这一操作的逆操作。

闭曲面 S 上的脊图 Sp(S)是一个图，其顶点是 S上模同痕的脊；当且仅当两个顶点对应的脊相差一次边扩张或边收缩时，它们之间才由一条边连接。

注意，映射类群 MCG(S) 通过等距变换作用于 Sp(S)。

命题 4.3 ([LP22b，命题 2。7])。设 S 是一个亏格为 $g \geq 1$的闭曲面，并在 S 中固定一个脊 Γ 。那么，该映射

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MCG}(S) & \to & \mathrm{Sp}(S) \\ \gamma & \mapsto & \gamma \cdot \Gamma \end{array}$$

是映射类群 映射类群(S) 与脊图 $\mathrm{Sp}(S)$之间的拟等距。

[LP22b，命题 27] 仅保证映射类群(S)与 Sp(S)彼此拟等距。然而，在证明中，Lackenby 和

Purcell 证明了映射类群(S)在 Sp(S)上的作用满足 Milnor–Švarc 引理的所有假设，因此该引理保证命题 4.3 中所述的映射是拟等距。

引理 4.4. 设 S 是一个闭曲面，且 $\varphi \in$映射类群(S) 是一个无限阶元素。那么存在常数 $k_{\mathrm{Sp}} > 0$，使得对于 S 的每个脊 Γ 以及每个 $n \in \mathbb{N}$，都有

$$\frac{d_{\mathrm{Sp}(S)}(\varphi^n(\Gamma), \Gamma)}{n} \geq k_{\mathrm{Sp}} \ .$$

证明. 固定 S 的一个脊 Γ。映射

$$n \mapsto d_{\mathrm{Sp}(S)}(\varphi^n(\Gamma), \Gamma) \ ,$$

是次可加的，因此由 Fekete 引理，极限

$$k_{\mathrm{Sp}} = \lim_{n\to\infty} \frac{d_{\mathrm{Sp}(S)}(\varphi^n(\Gamma), \Gamma)}{n}$$

存在，且等于 inf$\{d_{\mathrm{Sp}(S)}(\varphi^n(\Gamma)\ \Gamma)/n\,,\quad n \geq 1\}$。

首先证明 k_{Sp} 与所选脊 Γ 无关。事实上，若 Γ' 是 S 的任意一个脊，则

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{Sp}(S)}(\varphi^n(\Gamma), \Gamma) \leq & d_{\mathrm{Sp}(S)}(\varphi^n(\Gamma), \varphi^n(\Gamma')) + d_{\mathrm{Sp}(S)}(\varphi^n(\Gamma'), \Gamma') + d_{\mathrm{Sp}(S)}(\Gamma', \Gamma) \\ = & d_{\mathrm{Sp}(S)}(\varphi^n(\Gamma'), \Gamma') + 2d_{\mathrm{Sp}(S)}(\Gamma', \Gamma) \end{aligned}$$

类似地,

$$d_{\mathrm{Sp}(S)}(\varphi^n(\Gamma'), \Gamma') \leq d_{\mathrm{Sp}(S)}(\varphi^n(\Gamma), \Gamma) + 2d_{\mathrm{Sp}(S)}(\Gamma', \Gamma) \ .$$

这些不等式直接推出

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{d_{\mathrm{Sp}(S)}(\varphi^n(\Gamma), \Gamma)}{n} = \liminf_{n\to\infty} \frac{d_{\mathrm{Sp}(S)}(\varphi^n(\Gamma'), \Gamma')}{n} \ ,$$

也就是说，k_{Sp} 不依赖于 Γ。

为了得出结论，我们还需证明 $k_{\mathrm{Sp}} > 0$。为此，固定映射类群 MCG(S) 的一个有限生成集。根据 [FLM01，定理 1，2],MCG(S) 中的无限阶元素是非扭曲的，也就是说，存在一个常数 $c > 0$ 使得

$$d_{\mathrm{MCG}(S)}(\varphi^n, \mathrm{id}) \geq cn \, .$$

根据命题 4.3，存在两个常数 $a > 0,\ b \geq 0$ 使得

$$d_{\mathrm{Sp}(S)}(\varphi^n(\Gamma), \Gamma) \geq a \cdot d_{\mathrm{MCG}(S)}(\varphi^n, \mathrm{id}) - b \geq acn - b \ ,$$

因此

$$k_{\mathrm{Sp}} = \lim_{n\to\infty} \frac{d_{\mathrm{Sp}(S)}(\varphi^n(\Gamma), \Gamma)}{n} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{acn - b}{n} = ac > 0 \ .$$

□

4.2. **幂零流形和可解流形的三角剖分复杂度**。 在本小节中，我们证明定理 2。为方便读者，现重述如下：

定理 2. 设 $f : T \to T$ 是环面上的自同胚，在映射类群 $\mathrm{MCG}(T)$ 中代表一个无限阶元素。那么， f^i 的映射环面的 Δ-复杂度相对于 i 线性增长，即存在常数 $0 < k_1 \leq k_2$ 使得

$$k_1 \leq \frac{\Delta\left(T \rtimes_{f^i} S^1\right)}{i} \leq k_2$$

对每个 $i \geq 1$，均有。

设 $f : T \to T$ 是环面上的一个同胚，并设 $\mathcal{T}$ 是一个三角剖分

$$M = T \rtimes_f S^1 = T \times [0,1]/\sim,$$

其中（x，0）$\sim$（f（x），1）。

我们将由 $\mathcal{T}$ 诱导的对偶把手分解记为 $\mathcal{H}'$，其i维把手 $i = 0$，1，2，3 是通过取 $\mathcal{T}$ 的（$3-i$）-骨架的一个薄邻域，再移除（$3-i-1$）-骨架的一个薄邻域得到的（例如参见 [LP22a，第 2] 节）。

回顾一下，嵌入于 M 中且相对于 $\mathcal{T}$ 处于一般位置的曲面 S 的权重 定义为 S 与 $\mathcal{T}$ 的 1-骨架的交集基数。我们选取一个相对于 $\mathcal{T}$ 权重最小的纤维 $S \subseteq M$。在同痕意义下，不妨假设 S 相对于把手分解 $\mathcal{H}'$ 处于正规位置（正规位置的定义见 [LP22b，第 4] 节）。

正如 [LP22b, 第 4], 节所解释的，曲面 S 与$\mathcal{H}'$ 的把手相交于适当嵌入圆盘，因此继承了由 $\mathcal{H}'$诱导的胞腔结构。此外， M 的把手分解 $\mathcal{H}'$ 诱导出紧致带边流形 $M\backslash\backslash S$ 的把手分解 $\mathcal{H}$；该流形由沿 S切割M 得到。由于 S 是一个以圆为底空间的环面丛的纤维，我们可以将 $M\backslash\backslash S$认作乘积 $T \times [0,1]$。由此，我们得到 S 与 $T \times \{0\}$、 $T \times \{1\}$之间的自然识别。若通过显然的投影将 $T \times \{0\}$和 $T \times \{1\}$ 都识别为环面 T，则 S 的胞腔结构在 T 上诱导出两种胞腔结构，而同胚 f将一种映到另一种。此后，我们固定 T 上的胞腔结构，该结构由 S 通过识别 $S \cong T \times \{0\}$诱导得到。

我们选取 Γ_0 T的一个胞腔脊。根据构造，脊 $f(\Gamma_0)$ 相对于由 T 与 $T \times \{1\}$的识别所诱导的胞腔结构是胞腔的。因此，根据 [LP22a，引理 2.2] （按其中的术语，这保证把手分解 $\mathcal{H}$ 是预四面体的）、 [LP22a，定理 2.16] （这意味着 $\mathcal{H}$ 无法进行环带化简，关于这一概念的定义，另见 [LP22a] ）以及[LP22a，引理 2.5 和定理 9.1] （应用于 $f(\Gamma_0)$，并交换

$T \times \{0\}$ 和 $T \times \{1\}$ 的角色），存在一个胞腔脊 Γ_1，使得

$$d_{\mathrm{Sp}(T)}(f(\Gamma_0), \Gamma_1) \leq k_{\mathrm{hand}} \Delta(\mathcal{T}),$$

其中 k_{hand} 是一个普适常数，与所选的胞腔脊 Γ_0 无关（参见 [LP22a，定理 9.1]）。通过重复这一过程，我们得到一列满足以下条件的胞腔脊 $\{\Gamma_i\}$

$$d_{\mathrm{Sp}(T)}(f(\Gamma_{i-1}), \Gamma_i) \leq k_{\mathrm{hand}} \Delta(\mathcal{T}),$$

其中在每一步迭代中，我们都以 Γ_{i-1} 而非 Γ_0 作为输入。由于 $T \times \{0\}$ 中只有有限多个胞腔脊，因此存在两个整数 $r < s$，使得 $\Gamma_r = \Gamma_s$。重新标记后，我们可以假设 $r = 0$, $s = m$。因此，

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{Sp}(T)}(f^m(\Gamma_0), \Gamma_0) =& d_{\mathrm{Sp}(T)}(f^m(\Gamma_0), \Gamma_m) \\ \leq& \sum_{i=0}^{m-1} d_{\mathrm{Sp}(T)}(f^{m-i}(\Gamma_i), f^{m-i-1}(\Gamma_{i+1})) \\ =& \sum_{i=0}^{m-1} d_{\mathrm{Sp}(T)}(f(\Gamma_i), \Gamma_{i+1}) \\ \leq& m k_{\mathrm{hand}} \Delta(\mathcal{T}) \ . \end{aligned}$$

现在，令 $f : T \to T$ 为一个自同胚，它在映射类群(T)中代表一个无限阶元素；令 $\mathcal{T}_i$ 为 $M_i = T \rtimes_{f^i} S^1$ 的一个三角剖分，使得 $\Delta(M_i) = \Delta(\mathcal{T}_i)$。根据上面的不等式，存在一个正整数 m_i 和一个胞腔脊 $\Gamma_0^{(i)}$，使得

$$\Delta(M_i) = \Delta(\mathcal{T}_i) \geq \frac{d_{\mathrm{Sp}(T)}\left((f^i)^{m_i}\left(\Gamma_0^{(i)}\right), \Gamma_0^{(i)}\right)}{m_i k_{\mathrm{hand}}} \geq \frac{k_{\mathrm{Sp}}}{k_{\mathrm{hand}}} i \ , \tag{2}$$

最后一个不等式由引理 4.4 得出。这证明了 $\Delta(M_i)$ 至少以线性速度随 i 增长。

另一方面，若 $\mathcal{T}$ 是 M的三角剖分，则我们可以将其提升到 $M_i \to M$ 的 i重覆盖上，从而得到 M_i 的一个三角剖分，其中有 $i\Delta(\mathcal{T})$ 个四面体。因此，$\Delta(M_i) \leq i\Delta(\mathcal{T})$，这证明函数 $\Delta(M_i)$ 相对于 i至多线性增长。

References

[BF22] Federica Bertolotti 和 Roberto Frigerio。映射类群上的长度函数与映射环面的单纯体积，2022年。arXiv:2205.10846 [math]，即将在《几何与拓扑》发表。[FFM12] Stefano Francaviglia、Roberto Frigerio 和 Bruno Martelli。流形的稳定复杂度与单纯体积。 *J. Topol.*，5：977–1010，2012年。[FLM01] Benson Farb、Alexander Lubotzky 和 Yair Minsky。映射类群的秩一现象。 *Duke Math. J.*，106(3)：581–597，2001年2月。[FLMQ21] Daniel Fauser、Clara L¨oh、Marco Moraschini 和 Jos´e Perdon Quintanilha。3维流形的稳定整数单纯体积。 *J. Topol.*，14：608–640，2021年。[FM11] Benson Farb 和 Dan Margalit。 *A Primer on Mapping Class Groups (PMS-49)*。普林斯顿大学出版社，9月。2011

[FR16] Bell Foozwell 和 Hyam Rubinstein。四维 Haken 协边理论。 *Illinois J. Math.*，60(1)：1–17，2016年。[Gro81] 米哈伊尔·格罗莫夫。双曲流形（据 Thurston 和约根森）。 *Lecture Notes in Math.*，842：43–50，1981年。布尔巴基研讨班第546期，施普林格——柏林。[Gro82] 米哈伊尔·格罗莫夫。体积与有界上同调。

Inst. Hautes Études Sci. , ： –。[*Publ. Math.* 56 5 99, 1982

KS04] S. Kwasik 和 R. Schultz。关于同伦球形空间形式的环面稳定化与指数稳定化。 *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*，137：571–593，2004年。[Liu20] 刘毅。3维流形之间非零度映射的有限性。 *J. Topol.*，13 237 268，2020：–。[L¨oh18] Clara L¨oh。整数单纯体积较小的奇维流形。 *Ark. Mat.*，56 2 351( )：–375，2018年。[LP22a] Marc Lackenby 和 Jessica S. Purcell。椭圆型和 Sol 三维流形的三角剖分复杂度，2022年12月。arXiv:2212.04683 [math]。[LP22b] Marc Lackenby 和 Jessica S. Purcell。纤维化三维流形的三角剖分复杂度，2022年10月。arXiv:1910.10914，即将在《几何与拓扑》发表。[Thu79] 威廉·瑟斯顿。 *The Geometry and Topology of Three-manifolds*。普林斯顿大学，1979年。

Scuola Normale Superiore, Pisa, Italy
Email address: federica.bertolotti@sns.it

Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Italy
Email address: roberto.frigerio@unipi.it