arXiv:2303.07753v3 [math.RT] 5 Sep 2024

单态射范畴的函子方法 II：不可分解对象

¨NAN GAO、JULIAN KULSHAMMER、SONDRE KVAMME 和 CHRYSOSTOMOS PSAROUDAKIS

Abstract. 我们研究 Artin 代数 Λ 上箭图的（分离）单态射范畴 mono(Q, Λ)。我们证明，存在一个从 mono(Q, Λ) 到 rep(Q, mod Λ) 的等价（按 Auslander 的术语称为表示等价），其中 mod Λ 是有限生成 Λ-模的范畴，而 mod Λ 和 mono(Q, Λ) 分别表示相应的关于单射对象的稳定范畴。此外，若 Q 至少有一个箭头，我们证明这一等价当且仅当 Λ 是遗传的。一般而言，该等价在 rep(Q, mod Λ) 中的不可分解对象与 mono(Q, Λ) 中的非内射不可分解对象之间诱导出一个双射；我们证明，广义 Mimo 构造——一个到 mono(Q, Λ) 中的显式极小右逼近——给出了此双射的逆映射。我们应用这些结果描述根平方为零的 Nakayama 代数的单态射范畴中的不可分解对象，并给出 Loewy 长度为 3、剩余域相同的两个阿廷单列环的单态射范畴中的不可分解对象之间的一个双射。

证明这些结果的主要工具，是任意阿贝尔范畴上正合自函子的自由单子语言。这使我们能够避开由箭图表示带来的技术性组合问题。该框架也适用于更一般的情形，例如调制的表示。特别是，我们得到了关于代数 H 的奇点范畴的新结果。这些代数由 Geiss、Leclerc 和 Schr¨oer 引入，旨在将他们关于簇代数与 Lusztig 半典范基的结果推广到可对称化 Cartan 矩阵。我们还重新得到了一些关于 ι箭图代数的结果。这些代数由 Lu 和 Wang 引入，用以通过半导出 Hall 代数实现 ι量子群。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 6 3. 自由单子的单态射范畴 8 4. 内射对象 15 5. 等价 17 6. Mimo 构造 23 7. Mono(X) 中不可分解对象的刻画 27 8. Artin 代数上的箭图表示的应用 30 9. 调制的应用 41 致谢 44 参考文献 44

1. Introduction

有限生成阿贝尔群基本定理是代数中最古老的分类结果之一。Kronecker 在 [Kro70, §1], 中隐含地陈述了这一结果，后来 Frobenius 和 Stickelberger 在 [FS79, IV, p. 231] 中更明确地表述了它。证明之后，人们开始研究有限阿贝尔群的子群，相关工作包括 Miller [Mil04, Mil 05], 、Hilton [Hil07], 和 Birkhoff [Bir35]。在这种情况下，人们感兴趣的不仅是抽象群，还有它们的嵌入。对所有这类嵌入进行分类，可以归结为确定所有

Date: 2024年9月9日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 16G60，16G20，13C14，18A25，18C20。

嵌入有限生成 $\mathbb{Z}/(p^n)$-模中的不可分解嵌入，其中 p 是素数。这个问题的难度随 n 增加； $n=5$ 的情形直到 1999 年才由 [RW99] 首先确定。对于 $n \geq 7$，该问题受野性控制，因此不可能进行分类 [RS06]。边界情形$n=6$ 仍未解决；由于 Birkhoff 在论文 [Bir35], 中提出了描述有限阿贝尔群嵌入的问题，这一情形被称为 Birkhoff 问题。在那篇论文中，他还构造了一个含一个参数的族，其中包含两个固定的 $\mathbb{Z}/(p^6)$-模之间的不可分解嵌入；当 p 趋于无穷时，该族的基数也趋于无穷，这表明这个问题颇具挑战性。

Ringel 和 Schmidmeier 在一系列论文[RS06, RS08b, RS08a, RS24]中开展的工作，使对子模的研究重新焕发活力。他们考察了 Artin 代数的子模范畴，并特别关注截断多项式环 $\Bbbk[x]/(x^n)$。这些范畴与 Hall代数 [Sch12], Littlewood–Richardson表 [KS15, KS22, Sch11], 亚交换群[Sch05], 预射影代数 [RZ14], 奇点范畴 [Che11, HMA21], 加权射影直线 [KLM13], 以及赋值群 [Arn00, RW79]有关联。

更一般的子模系统称为单态射范畴，这些范畴也得到了并行研究，包括其表示型 [Pla76, Sim02] 以及 Auslander–Reiten 箭图[Moo09, XZZ14]。它们与余挠对 [EHHS13, HJ19], Gorenstein 同调代数 [DELO21, EEGR09, LZ13, XZZ14, Zha11], 抛物向量丛 [Moz20], 加权射影直线 [Sim18], 以及拓扑数据分析 [BBOS20]有关联。

本文致力于推进对任意单态射范畴中不可分解对象的描述。据我们所知，我们的第一个主要结果（定理 A）即使对于经典子模范畴也是新的。为陈述该结果，我们先说明一般的设定。设 $\mathcal{B}$ 为一个阿贝尔范畴， Q 为一个顶点为 Q_0 、箭为 Q_1的有限无环箭图。 Q在 $\mathcal{B}$中的表示范畴记作 $\mathrm{rep}(Q,\mathcal{B})$，它是函子 $Q \to \mathcal{B}$构成的范畴，其中 Q 按自然方式视为一个范畴。具体而言，其对象是元组 $(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha)_{\mathtt{i}\in Q_0,\ \alpha\in Q_1}$ 其中，对于每个顶点 $\mathtt{i}$， $B_{\mathtt{i}}$ 是 $\mathcal{B}$中的一个对象；对于每个箭头 $\alpha\colon \mathtt{i}\to\mathtt{j}$， $B_\alpha\colon B_{\mathtt{i}} \to B_{\mathtt{j}}$ 是 $\mathcal{B}$ 中的一个态射。单态射范畴（分离的）记作 $\mathrm{mono}(Q,\mathcal{B})$，是 $\mathrm{rep}(Q,\mathcal{B})$的一个全子范畴。它由所有满足以下条件的表示构成

$$B_{\mathtt{i},\mathrm{in}}\colon \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1\\ t(\alpha)=\mathtt{i}}} B_{s(\alpha)} \xrightarrow{(B_\alpha)_\alpha} B_{\mathtt{i}}$$

对所有顶点 $\mathtt{i}$，均为单态射，其中 $s(\alpha)$ 和 $t(\alpha)$ 分别表示箭头 α 的源和终点。若 $Q=(1\to 2)$，则可得到 Birkhoff、Ringel 和 Schmidmeier 研究的经典子模范畴。一般而言，$\mathrm{mono}(Q,\mathcal{B})$ 是一个正合范畴；若 $\mathcal{B}=\mathrm{mod}\,\Lambda$ 是 Artin 代数 Λ 上有限生成右 Λ-模的范畴，则它具有几乎分裂序列 [LZ13, RS08b]。

为了描述 $\mathrm{mono}(Q,\mathcal{B})$ 中的不可分解对象，我们构造一个等价，即一个反映同构的满且稠密函子。这里我们沿用 [Kel91] 的术语。这类函子最早由 Auslander 在 [Aus71] 中提出，“用以表明两个加性范畴的表示理论本质上相同”。他称这类函子为表示等价。它们有时也称为检测函子，例如参见 [Bau95]。

令 $\overline{\mathcal{B}}$ 和 $\mathrm{mono}(Q,\mathcal{B})$ 分别为 $\mathcal{B}$ 和 $\overline{\mathrm{mono}}(Q,\mathcal{B})$ 关于所有经由内射对象分解的态射所构成的理想的商范畴，其中我们使用 $\mathrm{mono}(Q,\mathcal{B})$ 的正合结构来定义其内射对象。关于内射对象的描述，见第 4 节或 (1.0.2)。

定理 A（定理 5.7 和 5.15）。设 Q 是有限无环箭图， $\mathcal{B}$ 是有足够多内射对象的阿贝尔范畴。那么典范函子

$$\overline{\mathrm{mono}}(Q,\mathcal{B}) \to \mathrm{rep}(Q,\overline{\mathcal{B}}).$$

是一个等价。此外，如果 Q 至少有一个箭头，那么当且仅当 $\mathcal{B}$ 是遗传的时，该函子是等价。

这将 [RZ17, 定理 1.1 b)] 中针对完美微分 kQ-模的同调函子，以及 [BBOS20, 定理 1.5] 中等价（及其对偶）作为特例重新呈现出来。此外，它还给出了一个

对遗传范畴的非平凡刻画，并说明使用这类范畴进行的构造通常更简单，参见导出范畴 [Hap87, 第 4] 节。

定理 A 中的等价在 $\mathrm{mono}(Q,\mathcal{B})$ 与 $\mathrm{rep}(Q,\overline{\mathcal{B}})$ 中的不可分解对象的同构类之间诱导出一个双射。若 $\mathcal{B}$ 是某个 $\overline{\text{Artin}}$ 代数的模范畴，那么这些对象还与 $\mathrm{mono}(Q,\mathcal{B})$ 中的非内射不可分解对象一一对应。由此可推出，两个 Artin 代数之间的稳定等价会在其对应的单态射范畴中的非内射不可分解对象之间诱导出一个双射。我们将在第 8.1 小节中更详细地讨论这一结论的推论。

定理 A 对于比较有限 Loewy 长度的局部单列环特别有用，例如 $\mathbb{Z}/(p^n)$ 和 $\mathbb{K}[x]/(x^n)$。一方面，关于 $\mathbb{K}[x]/(x^n)$ 上单态射范畴表示论已有若干结果。例如，$\mathrm{mono}(\mathbb{A}_m, \mathrm{mod}\,\mathbb{K}[x]/(x^n))$ 的表示型

$$\mathbb{A}_m = 1 \to 2 \to \cdots \to m$$

已在 [Sim02], 中给出，而在表示有限和温和的情形下，当 $m \leq 3$ 时，不可分解对象的分类以及 Auslander–Reiten 箭图已在 [Moo09, RS08a] 中给出。另一方面，关于 $\Lambda = \mathbb{Z}/(p^n)$ 的新结果并不多。鉴于 $\mathbb{Z}/(p^n)$ 与 $\mathbb{K}[x]/(x^n)$十分相似，二者都是 Loewy 长度为 n 的局部单列环，这或许令人惊讶。不过，这可以用缺乏某些工具（如覆盖理论）来解释。一个典型例子是，$\mathrm{mono}(\mathbb{A}_2, \mathrm{mod}\,\mathbb{K}[x]/(x^6))$ 的 Auslander–Reiten 箭图已在 [RS08a] 中借助覆盖理论确定。$\mathrm{mono}(\mathbb{A}_2, \mathrm{mod}\,\mathbb{Z}/(p^6))$ 的类似问题即 Birkhoff 问题，目前仍未解决。

一般而言，人们希望 $\mathbb{K}[x]/(x^n)$ 和 $\mathbb{Z}/(p^n)$ 上单态射范畴的表示论相似，例如参见 [Sch08]。以下结果在 $n \leq 3$ 时有力地证实了这一点。该结果借助定理 A 以及存在稳定等价这一事实得以证明

$$\overline{\mathrm{mod}}\,\mathbb{F}_p[x]/(x^n) \cong \overline{\mathrm{mod}}\,\mathbb{Z}/(p^n)$$

在这种情况下。这里 $\mathbb{F}_p$ 表示含有 p 个元素的有限域。

定理 B（定理 8.13）。设 Q 是有限无环箭图，且 n 是一个小于或等于 3 的整数。那么，存在一个双射，在 $\mathrm{mono}(Q, \mathrm{mod}\,\mathbb{F}_p[x]/(x^n))$ 与 $\mathrm{mono}(Q, \mathrm{mod}\ \mathbb{Z}/(p^n))$ 中的不可分解对象之间保持分拆向量不变。

这在 Birkhoff 与 Ringel–Schmidmeier 的工作之间建立了非平凡的联系。这里，分拆向量的含义如下：对于定义在 $R = \mathbb{F}_p[x]/(x^n)$ 或$R = \mathbb{Z}/(p^n)$ 上的表示 $(M_\mathtt{i}, M_\alpha)$，每个 $M_\mathtt{i}$ 都可以写成 $M_\mathtt{i} = R/\mathfrak{m}^{n_1} \oplus R/\mathfrak{m}^{n_2} \oplus \cdots \oplus R/\mathfrak{m}^{n_k}$，其中 $\mathfrak{m}$ 是 R 的极大理想，而 $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$。相应的数列 $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ 是 $M_\mathtt{i}$的分拆。对每个顶点 i 都这样处理，就得到表示 $(M_\mathtt{i}, M_\alpha)$ 的分拆向量。

回顾 Gabriel 定理 [Gab72]：它用 ADE Dynkin 箭图对代数闭域上有限表示型的遗传有限维代数进行分类。这是代数表示论中的一项基础性结果。定理 A 的一个应用给出了根基平方为零的 Nakayama Artin 代数上有限表示型单态射范畴的 Gabriel 型分类。这里，m 是单 Λ-模的个数，而 t 是非内射单 Λ-模的个数。

定理 C（定理 8.17）。设 Q 是一个有限连通无圈箭图，Λ 是一个非半单的根平方为零 Nakaya ma Artin 代数。那么，$\mathrm{mono}(Q, \text{模范畴}\,\Lambda)$ 为有限型，当且仅当 Q 是 Dynkin 型。在这种情况下，不可分解对象的个数为 $m \cdot |Q_0| + t \cdot |\Phi^+|$，其中 $|\Phi^+|$ 表示与该 Dynkin 型对应的正根集合。

我们不假设我们的代数是域上线性的。特别地，定理 C 也适用于 $\mathbb{Z}/(p^2)$。

假设 $\mathcal{B}$ 是某个 Artin 代数的模范畴。那么定理 A 给出了一个双射 .

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Isomorphism classes of}\\ \text{indecomposable non-injective}\\ \text{objects in mono}(Q,\mathcal{B})\end{array}\right\} \xrightarrow{\cong} \left\{\begin{array}{c}\text{Isomorphism classes of}\\ \text{indecomposable objects}\\ \text{in rep}(Q,\overline{\mathcal{B}})\end{array}\right\} \tag{1.0.1}$$

由函子 $\mathsf{mono}(Q,\mathcal{B}) \to \mathsf{mono}(Q,\mathcal{B}) \xrightarrow{} \mathsf{rep}(Q,\overline{\mathcal{B}})$ 给出。在许多情况下，$\mathsf{rep}(Q,\overline{\mathcal{B}})$ 比 $\mathsf{mono}(Q,\mathcal{B})$ 更容易研究。例如，如果 $\mathcal{B}$ 是根平方为零 Nakayama Artin 代数的模范畴，那么 $\overline{\mathcal{B}}$ 就是斜域的直积的模范畴，因此可以用经典方法计算 $\mathsf{rep}(Q,\overline{\mathcal{B}})$。定理 C 的证明正是采用了这种方法。

为了充分利用双射 (1.0.1)，我们希望明确构造其逆，从而能够根据 $\mathsf{rep}(Q,\overline{\mathcal{B}})$ 中的不可分解对象，描述 $\mathsf{mono}(Q,\mathcal{B})$ 中的不可分解对象。具体做法如下。设 $(B_{\mathtt{i}},B_\alpha)$ 是 $\mathsf{rep}(Q,\overline{\mathcal{B}})$ 中的一个对象。对于每个顶点 i，选取一个对象 $B_{\mathtt{i}}$，使其属于 $\mathcal{B}$，没有非零内射直和项，并且与 $B_{\mathtt{i}}$ 在 $\overline{\mathcal{B}}$中同构。对于每个箭头 $\alpha\colon \mathtt{i}\to\mathtt{j}$，选取一个提升 $B_\alpha\colon B_{\mathtt{i}}\to B_{\mathtt{j}}$，使之将 B_α 提升到 $\mathcal{B}$。这给出 $\mathsf{rep}(Q,\mathcal{B})$ 中的一个表示 $(B_{\mathtt{i}},B_\alpha)$，其同构类取决于所选的提升 B_α。现在，取 $(B_{\mathtt{i}},B_\alpha)$ 的最小右 $\mathsf{mono}(Q,\mathcal{B})$-逼近。记作 $\mathsf{Mimo}(B_{\mathtt{i}},B_\alpha)$，并称为 Mimo 构造。显式公式见例 6.9 或 [LZ13，第 3a 节]。

定理 D（定理 7.9 和 8.1）。设 Q 是一个有限无环箭图，$\mathcal{B}=\operatorname{mod}\Lambda$ 是一个 Artin 代数 Λ上的模范畴。上文的对应关系 $(B_{\mathtt{i}},B_\alpha)\mapsto\mathsf{Mimo}(B_{\mathtt{i}},B_\alpha)$ 给出了 (1.0.1) 的逆。特别地，它在同构意义下与选择无关。

如果 $\mathcal{B}$ 具有内射包，并且是 Noether、Artin 或局部诺特的，那么该定理在更一般的情形下也成立。

请注意，Mimo 构造最初由 [RS08b] 为 $\mathbb{A}_2$引入，并在描述相应单态射范畴的 Auslander–Reiten 平移时发挥了重要作用。在这种情况下，它也可以解释为一个三角函子 [Che12，第 5] 节。任意有限无环箭图的 Mimo 构造公式由 [LZ13], 给出，文中证明了它是一个右逼近。我们首次证明了它在一般情形下是一个极小右逼近。

为完整呈现这一图景，我们描述 $\mathsf{mono}(Q,\mathcal{B})$ 中的不可分解内射对象。它们恰好由 $f_!(J(\mathtt{i}))=(f_!(J(\mathtt{i}))_{\mathtt{j}},f_!(J(\mathtt{i}))_\alpha)$ 给出，其中 J 是 $\mathcal{B}$ 中的不可分解内射对象，并且

$$f_!(J(\mathtt{i}))_{\mathtt{k}}=\bigoplus_{\substack{p\in Q_{\geq 0}\\ s(p)=\mathtt{i},t(p)=\mathtt{k}}} J \quad\text{and}\quad f_!(J(\mathtt{i}))_\alpha\colon \bigoplus_{\substack{p\in Q_{\geq 0}\\ s(p)=\mathtt{i},t(p)=\mathtt{k}}} J\to \bigoplus_{\substack{p\in Q_{\geq 0}\\ s(p)=\mathtt{i},t(p)=\mathtt{l}}} J \tag{1.0.2}$$

对于一个箭头 $\alpha\colon \mathtt{k}\to\mathtt{l}$，其中 $f_!(J(\mathtt{i}))_\alpha$ 是由路径 p 和 αp 所索引的分量之间的恒等映射 $J\xrightarrow{1}J$ 诱导的。利用这一点和定理 D，我们给出线性定向的 $\mathbb{A}_n$-箭图、一个非线性定向的 $\mathbb{A}_4$-箭图以及克罗内克箭图的单态射范畴中所有不可分解对象的显式描述，见第 8.3 和 8.4 小节。

在大多数证明中，我们采用更抽象的单子和 Eilenberg–Moore 范畴语言，这与 [CL20] 和 [GKKP22] 类似。这样做是为了避免由箭图表示带来的技术性组合问题，例如 Mimo 构造（见例 6.9）以及上文的 $f_!$。为了了解它们之间的关系，考虑自函子

$$X\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}\quad X(B_{\mathtt{i}})_{\mathtt{i}\in Q_0}=\left(\bigoplus_{\alpha\in Q_1,t(\alpha)=\mathtt{j}} B_{s(\alpha)}\right)_{\mathtt{j}\in Q_0}$$

在 $\mathcal{C}=\prod_{\mathtt{i}\in Q_0}\mathcal{B}$ 上。Q 在 $\mathcal{B}$ 中的表示数据等价于一个对象 $C\in\mathcal{C}$ 和一个态射 $X(C)\to C$。此外，该表示属于单态射范畴，当且仅当 $X(C)\to C$ 是单态射。同样，Q 在 $\overline{\mathcal{B}}$ 中的表示数据等价于一个对象 $C\in\overline{\mathcal{C}}$ 和一个态射 $X(C)\to C$，其中 $\overline{\mathcal{C}}$。由此可得存在

等价

$$\operatorname{rep}(Q,\mathcal{B})\cong\mathcal{C}^{T(X)}\quad\text{and}\quad\operatorname{Mono}(X)\cong\operatorname{Mono}(Q,\mathcal{B})\quad\text{and}\quad\operatorname{rep}(Q,\overline{\mathcal{B}})\cong\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$$

其中，$\mathcal{C}^{T(X)}$和 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 分别表示 $\mathcal{C}$和 $\overline{\mathcal{C}}$上的自由单子 $T(X)$ 的 Eilenberg–Moore 范畴，而 Mono(X) 是 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 的全子范畴，其中 $X(C)\to C$ 是一个单态射。用这种语言来表述，若干构造变得更加简洁且更具概念性。例如，$f_!$是从 Eilenberg–Moore 范畴到 $\mathcal{C}^{T(X)}\to\mathcal{C}$的遗忘函子 f^*: 的左伴随；而 Mimo 构造（其复杂公式见例 6.9）只需通过取一个特定的推出即可得到，参见定义 5.1 和 6.1。我们的结果适用于阿贝尔范畴上的任意正合、局部幂零且保持内射对象的自函子 X。如上所示，构造和证明都使用其自由单子的 Eilenberg–Moore 范畴。

由于我们是在更一般的情形下研究，因此我们的结果也涵盖了箭图表示的推广，例如调制的表示，见例 3.9。文献中对此有多种不同称呼（且所需假设各异），例如 [K¨ul17]，中的代数原种的表示、[GKKP22]，中的门类表示、[DLLY22]，中阿贝尔范畴图上的表示，以及 [GK05] 中的扭曲表示。调制的单态射范畴与 Gorenstein 同调代数有关 [K¨ul17, DLLY22]，也与余挠对和模型结构有关 [DLLY22]。

一类研究充分的调制是自内射环上的拟种。更明确地说，给定一个有限无环箭图 Q，对每个顶点 i 赋予一个自内射代数 Λ_{i}；对每个箭头 $\alpha\colon \mathrm{i}\to\mathrm{j}$，则赋予一个 Λ_{i}-Λ_{j}-双模 M_α，它作为左 Λ_{i}-模和右 Λ_{j}-模都是投射的。在这种情况下，单态射范畴等于代数 $T(M)$ 关于 $\Lambda=\prod_{\mathrm{i}\in Q_0}\Lambda_{\mathrm{i}}$ 的 $M=\bigoplus_{\alpha\in Q_1}M_\alpha$ 张量代数上的 Gorenstein 投射模范畴，其稳定范畴等价于 $T(M)$ 的奇点范畴，见 [K¨ul17]。

作为一个重要的特殊情形，我们有与元组 (C, D, Ω) 相关联的拟种 [GLS17]，其中 $C=(c_{\mathrm{i,j}})$ 是一个可对称化 Cartan 矩阵，其对称化子为 $D=\operatorname{diag}(d_{\mathrm{i}})$，定向为 Ω。相应的张量代数同构于 GLS 代数 $H=H(C, D, \Omega)$。对于这些代数，我们得到以下结果。这里，Cohen–Macaulay 有限是指有限生成不可分解 Gorenstein-投射模在同构意义下只有有限多个。

定理 E. 设 $C=(c_{\mathrm{i,j}})_{\mathrm{i,j}\in I}$ 是一个可对称化 Cartan 矩阵，其对称化子为 $D=\operatorname{diag}(d_{\mathrm{i}}\mid \mathrm{i}\in I)$，定向为 Ω。假设 $d_{\mathrm{i}}\le 2$ 对所有 i 均成立 $\in I$。令 $I'\subseteq I$ 为所有满足 $d_{\mathrm{i}}=2$ 的元素 i 构成的子集，并令 $C|_{I'\times I'}=(c_{\mathrm{i,j}})_{\mathrm{i,j}\in I'}$ 为 C 的相应子矩阵。那么，$H=H(C, D, \Omega)$ 是 Cohen–Macaulay 有限的，当且仅当 $C|_{I'\times I'}$作为一个对称 Cartan 矩阵是 Dynkin 型。此外，在此情形下，$C|_{I'\times I'}$ 的正根与 H 的奇点范畴中的不可分解对象的同构类之间存在双射。

更一般地，我们证明，H的奇点范畴中的不可分解对象的同构类，与由 Cartan 矩阵 $C|_{I'\times I'}$ 确定、定向为 $\Omega|_{I'\times I'}$的箭图上的有限维不可分解表示之间存在双射。对此无需任何有限性假设。注意，对于 $D=\operatorname{diag}(2\mid i\in I)$，Gorenstein 投射$H$-模可以识别为 $k[x]/(x^2)$ 上 Q 的单态表示，其中 Q 是与 C 和 Ω 相关联的箭图。因此，我们得到了 $\Lambda=$的定理 C $\mathbb{K}[x]/(x^2)$。

定理 E 是关于根平方为零的循环 Nakayama 代数上的调制的一项更一般结果的推论，见定理 9.3。该双射由调制情形下定理 A 中等价的一个类比构造而来；而通过定理 D 的一个类比，我们得到了与给定表示相关联的奇点范畴中不可分解对象的显式描述。此项更一般的结果也适用于 ι箭图代数上的模，这些模在[LW22、LW21a、LW21b], 中有所研究，见第 9.2 小节。在那里，Gorenstein 投射模的范畴发挥着重要作用，尤其是因为它被用来通过 Hall代数实现 ι量子群[LW22、LW21a], ，并且对于 Dynkin 箭图，它等价于正则 Nakajima–Keller–Scherotzke 范畴上的投射对象范畴 [LW21b]。

本文的结构如下。第 2 节分别介绍单子和正合范畴所需的背景知识。在第 3 节中，我们研究自函子上的自由单子。本节分为四个部分：在第 3.1 小节中，我们定义自函子的自由单子，

并给出相关示例。在第 3.2 小节中，我们将讨论范围限定在阿贝尔情形。第 3.3 小节介绍顶函子，并回顾其基本性质。最后，第 3.4 小节介绍本文的核心对象——单态射范畴。第 4 节讨论单态射范畴中的内射对象，以及内射包的存在性。第 5 节证明定理 A。该节首先在第 5.1 小节讨论单态射范畴的反变有限性，接着在第 5.2 小节证明等价的存在性，最后在第 5.3 小节讨论遗传情形。第 6 节以本文的语言介绍 Mimo 构造。第 6.1 小节讨论一般情形，第 6.2 小节则明确说明调制情形下的设定。第 7 节包含定理 D 的证明，并在开头简要讨论极大内射直和项。

第 8 节讨论 Artin 代数上箭图表示的应用。第 8.1 小节探讨稳定等价，以及由此诱导的单态射范畴中不可分解对象之间的双射。第 8.2 小节证明定理 B，并讨论其与文献中其他结果的联系。第 8.3 小节证明定理 C，并利用定理 D，明确计算根平方为零的中山代数上单态射范畴中的不可分解对象。第 8.4 小节计算 $\mathbb{K}[x]/(x^2)$ 上克罗内克箭图的单态射范畴中的不可分解对象。在第 9 节中，我们将结果应用于根平方为零的循环 Nakayama 代数上的调制表示，从而得到定理 9.3。随后，我们在第 9.2 小节考察 ι箭图和 GLS 代数，并证明引言中的定理 E。

2. 预备知识

2.1. 记号。本文不考虑集合论方面的问题。所有范畴均假设为可加且幂等完备，所有函子均假设为可加。对于函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 和 $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，我们用 $F \dashv G$ 表示 F 是 G的左伴随。对于一个环 Λ，我们分别用 Mod Λ和 mod Λ表示右 Λ-模范畴和有限表示右 Λ-模范畴。全文中，$\mathbb{K}$ 是一个交换环。

2.2. 单子及单子上的模。本小节回顾单子及其 Eilenberg–Moore 范畴的定义。我们的主要例子来自箭图上的调制，见例 3.9。

定义 2.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴。$\mathcal{C}$ 上的一个单子是一个三元组（T，η，μ），其中 $T\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个函子，且 $\eta\colon \mathrm{Id} \to T$和 $\mu\colon T^2 \to T$是满足下列图表条件的自然变换

$$\begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{T(\mu)} & T^2 \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_T} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ T^2 & \xrightarrow[\mu]{} & T \end{array} \qquad \text{and} \qquad \begin{array}{ccccc} & & T & & \\ & \nearrow & \uparrow{\scriptstyle \mu} & \nwarrow & \\ T & \xrightarrow[T(\eta)]{} & T^2 & \xleftarrow[\eta_T]{} & T \end{array}$$

co交换。按照标准的记号滥用，有时我们将单子 (T, η, μ) 简记为 T。

伴随是单子的重要实例来源：若 η 和 ε 分别表示伴随 $L \dashv R$的单位和余单位，则三元组 $(R \circ L, \eta, R(\varepsilon_L))$ 定义了一个单子。关于此内容的更多细节，请参阅[Mac98，第 VI.1 节，第138] 页。

反过来，单子通过 Eilenberg–Moore 范畴产生伴随，下面我们将对此作简要回顾。在文献中，这有时称为代数范畴，或单子上的模范畴。

定义 2.2. 设 (T, η, μ) 是 $\mathcal{C}$ 上的一个单子。

(1) T-模是一个有序对 (M, h)，其中 M是 $\mathcal{C}$中的一个对象，且 $h\colon T(M) \to M$是满足 $h \circ \eta_M = 1_M$和 $h \circ \mu_M = h \circ T(h)$ 的态射。(2) T 的 Eilenberg–Moore 范畴 $\mathcal{C}^T$ 是这样一个范畴：其对象为 T-模，而两个 T-模之间的态射 $g\colon (M, h) \to (M', h')$ 由 $\mathcal{C}$中的一个态射$g\colon M \to M'$给出，并满足 $g \circ h = h' \circ T(g)$。(3) $f^*\colon \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$表示由 $f^*(M, h) = M$和 $f^*(g) = g$ 给出的遗忘函子。(4) $f_!\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^T$表示由 $f_!(M) = (T(M)\ \mu_M)$ 和 $f_!(g) = T(g)$给出的函子。

命题 2.3. 设 T是 $\mathcal{C}$上的一个单子。那么 $f^*\colon \mathcal{C}^T \to \mathcal{C}$是 $f_!\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^T$的右伴随 .

证明。由 [Mac98, 定理 VI.2.1] 可得。 □

令 η 和 ε 分别为伴随 $f_! \dashv f^*$ 的单位和余单位。最后，我们给出一个充分条件，以保证 Eilenberg–Moore 范畴是阿贝尔范畴。

命题 2.4。 [EM65, 命题 5.3] 设 $\mathcal{C}$ 是一个阿贝尔范畴，且 (T, η, μ) 是 $\mathcal{C}$ 上的一个单子。假设 T 是一个右正合函子。则有：

(1) Eilenberg–Moore 范畴 $\mathcal{C}^T$ 是阿贝尔范畴。(2) 在 $\mathcal{C}^T$ 中，序列 $(M, h) \to (M', h') \to (M'', h'')$ 正合，当且仅当序列$M \to M' \to M''$ 在 $\mathcal{C}$ 中正合。

2.3. 正合范畴。这里我们回顾正合范畴的一些基本性质，特别是关于内射包的结果。

正合范畴是一个加性范畴 $\mathcal{E}$，配备了一类核-余核对，称为正合列，并满足某些性质；更多详情见 [Kel90, 附录 A]，或 [B¨uh10]。若 $E_1 \xrightarrow{i} E_2 \xrightarrow{p} E_3$ 是一个正合列，则称 i 为膨胀，称 p 为压缩。设 $\mathcal{E}'$ 是正合范畴 $\mathcal{E}$ 的一个全子范畴。若对于任意正合列 $E_1 \to E_2 \to E_3$，只要 E_1 和 E_3 属于 $\mathcal{E}'$，其中项 E_2 就必定属于 $\mathcal{E}'$，则称 $\mathcal{E}'$ 为扩张封闭。在这种情况下，$\mathcal{E}'$ 继承一个正合结构，其正合列是 $\mathcal{E}$ 中所有项均属于 $\mathcal{E}'$ 的正合列；见 [B¨uh10, 引理 10.20]。

若对任意膨胀 $E \to E'$，态射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E', I) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, I)$ 都是满射，则称正合范畴 $\mathcal{E}$ 中的对象 I 为内射对象。若对 $\mathcal{E}$ 中的任意对象 E，都存在一个膨胀 $E \to I$，其中 I 为内射对象，则称正合范畴 $\mathcal{E}$有足够多的内射对象。在这种情况下，我们用 $\overline{\mathcal{E}}$表示 $\mathcal{E}$ 对经过内射对象的态射所成理想的商。

设 $g\colon E_1 \to E_2$ 是 $\mathcal{E}$中的一个态射。若任意满足 $g' \circ g = g$ 的态射$g'\colon E_2 \to E_2$ 都是同构，则称 g 为左极小。对象 E 在$\mathcal{E}$ 中的内射包是一个左极小膨胀 $i\colon E \to I$，其中 I 为内射对象。注意，对象的内射包在同构意义下唯一。$\mathcal{E}$ 的根是由下式定义的理想

$$\mathrm{Rad}_{\mathcal{E}}(E, E') \coloneqq \{g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, E') \mid 1_{E'} - g \circ g' \text{ is invertible for all } g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E', E)\}$$

对所有 $E, E' \in \mathcal{E}$均成立。回顾一下，根是对称的，因此有等式

$$\mathrm{Rad}_{\mathcal{E}}(E, E') \coloneqq \{g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E, E') \mid 1_{E} - g' \circ g \text{ is invertible for all } g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(E', E)\}.$$

关于内射包的更多信息，请参见 [Kra22, Section 2.1]；关于根，请参见 [Kra15, Section2] and [Kel64]。我们只需要以下联系二者的结果。

引理 2.5. 设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴，且设 $E \in \mathcal{E}$。以下结论成立：

(1) 若 $i\colon E \to I$ 是一个内射包，则 $p\colon I \to$ 的余核 i 属于 $\mathcal{E}$ 的根。(2) 假设 $\mathcal{E}$ 是带有自然正合结构的阿贝尔范畴。此外，假设 $\mathcal{E}$ 有内射包。设 $g\colon J \to E$ 是 $\mathcal{E}$ 中的一个态射。若 J 是内射的，且 E 没有非零内射直和项，则包含映射 $\ker g \to J$ 是一个内射包。特别地，g 属于 $\mathcal{E}$ 的根。

证明. 为证明结论 (1)，取任意态射 $k\colon \mathrm{coker}\ i \to I$。则端态射 $k' = 1_I - k \circ p$ 满足 $k' \circ i = i$。由于 i 是一个内射包，我们必有 k' 是一个同构。由于 k 是任意的，因此 p 属于 $\mathcal{C}$ 的根。

为证明 (2)，令 $u\colon \ker g \to E(\ker g)$ 表示 $\ker g$ 的内射包。于是，单态射 $i\colon \ker g \to J$ 可提升为分裂单态射 $E(\ker g) \to J$。考虑下方一行为分裂正合列的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker g & \xrightarrow{i} & J & \xrightarrow{g} & E & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle 1_J} & & \vdots & & \\ 0 & \longrightarrow & E(\ker g) & \longrightarrow & J & \longrightarrow & J' & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

由于左侧方块交换，我们得到一个诱导态射 $\operatorname{coker} i \to J'$。由于 J' 是内射的，我们可以将其提升为态射 $E \to J'$，使图中最右侧的方块交换。由于 $J \to J'$ 是分裂满态射，态射 $E \to J'$ 也是分裂满态射。因此，J' 必须是 J 和 E 的直和项。但作为 J 的直和项意味着 J' 是内射的，而 E 没有非零内射直和项。因此 $J' = 0$。故 i 是一个内射包。由于 g 经由 i 的余核分解，根据 (1)，它必属于根。□

最后，我们证明一个关于对象按极大内射直和项分解的唯一性结果。根据前一个引理，对于具有内射包的阿贝尔范畴，该结果成立。根据引理 6.5，该结果对于单态射范畴也成立。

引理 2.6. 设 $\mathcal{E}$ 是一个正合范畴，且 E_1 和 E_2 是 $\mathcal{E}$ 中的对象。假设从内射对象到 E_1 或 E_2 的任意态射都属于 $\mathcal{E}$ 的根。令

$$E_1 \oplus I_1 \xrightarrow{\cong} E_2 \oplus I_2$$

是一个同构，其中 I_1 和 I_2 是内射的。那么限制 $E_1 \to E_2$ 和 $I_1 \to I_2$ 是同构。

证明。设

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_3 & \phi_4 \end{pmatrix} : E_1 \oplus I_1 \to E_2 \oplus I_2 \quad \text{and} \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi_3 & \psi_4 \end{pmatrix} : E_2 \oplus I_2 \to E_1 \oplus I_1$$

表示该同构及其逆。于是有 $\psi_3 \circ \phi_2 + \psi_4 \circ \phi_4 = 1_{I_1}$。根据假设，$\phi_2$ 属于 $\mathcal{E}$ 的根。因此，根据根的定义，复合态射 $\psi_4 \circ \phi_4 = 1_{I_1} - \psi_3 \circ \phi_2$ 是一个同构。用类似的论证可知，复合态射 $\phi_4 \circ \psi_4$ 也是一个同构。因此，$\phi_4\colon I_1 \to I_2$ 本身必为同构。ϕ_1 是同构这一事实可用相同方法证明。□

3. The monomorphism category of the free monad

固定一个 $\mathbb{k}$-线性加性范畴 $\mathcal{C}$。在本节中，$X\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个 $\mathbb{k}$-线性函子，并且是局部幂零的，也就是说，对于任意对象 $M \in \mathcal{C}$，都存在一个 $n \geq 0$，使得 $X^n(M) = 0$。从第 3.2 小节起，我们假设 $\mathcal{C}$ 是阿贝尔范畴且 X 是正合的；从第 4 节起，我们还假设 X 保持内射对象。对 X 的这些假设旨在刻画由有限无环箭图在加性范畴和阿贝尔范畴中的表示所产生的单子的基本性质，参见例 3.11。我们借助 X上的自由单子来实现这一点，并对其进行定义。此外，我们还定义单态射范畴以及顶函子的类似物。

注释 3.1。我们对 X 所作的假设不同于 [GKKP22]中的假设。[GKKP22] 中的若干结果依赖于自由单子在 X上的 Eilenberg–Moore 范畴中存在相对中山函子，而本文并不需要作此假设。另一方面，[GKKP22] 中的许多证明仍然成立。我们在[GKKP22] 中使用的另一个技术条件是中山引理的相对版本：若 M 非零，则不存在满态射 $X(M) \twoheadrightarrow M$，参见 [GKKP22，引理 6.25]。在假设 X 是局部幂零的情况下，若 X 保持满态射，则该条件自动成立；特别地，当 X 是阿贝尔范畴上的正合函子时也是如此。

3.1. 自由单子。自由单子的定义模仿了箭图的路径代数的构造，更一般地说，也模仿了代数上双模的张量代数的构造。

定义 3.2. X 上的自由单子是单子 $(T(X)\ \eta, \mu)$，其中 $T(X)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 定义如下：

$$T(X)(M) = \coprod_{i \geq 0} X^i(M)$$

其中，$\eta\colon \mathrm{Id} \to T(X)$ 是典范包含，而 $\mu\colon T(X) \circ T(X) \to T(X)$ 在各个分量上由典范同构 $X^i X^j(M) \xrightarrow{\cong} X^{i+j}(M)$ 给出。

由于 X 是局部幂零的，对于每个对象 $M \in \mathcal{C}$，余积 $\coprod_{i\geq 0} X^i(M)$ 都是有限的。因此，我们将其视为直和 $\bigoplus_{i\geq 0} X^i(M)$。

注 3.3。在 [GKKP22] 中，定义自由单子时假设 X 保持可数余积。然而，这一点仅用于得出典范映射 $X(\coprod_{i\geq 0} X^i(M)) \to \coprod_{i\geq 1} X^i(M)$ 是同构；由此处 X 局部幂零这一事实可知，余积是有限的，因此会被加性函子 X 保持。

自由单子 $T(X)$ 的 Eilenberg–Moore 范畴有一种更简单的替代描述。令 $(X \Downarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ 为如下范畴：其对象是对 (M, h_1)，其中 $M \in \mathcal{C}$，且 $h_1 \colon X(M) \to M$ 是一个态射；在 $(X \Downarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ 中，从 (M, h_1) 到 (M', h_1') 的态射 g 是 $\mathcal{C}$ 中满足 $g \circ h_1 = h_1' \circ X(g)$ 的态射 $g \colon M \to M'$。注意，我们有一个函子

$$\mathcal{C}^{T(X)} \to (X \Downarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}) \quad (\bigoplus_{i\geq 0} X^i(M) \xrightarrow{h} M) \mapsto (M, h_1)$$

其中 $h_1 \colon X(M) \to M$ 是 h 到 $X(M)$ 的限制。

引理 3.4. 上述函子 $\mathcal{C}^{T(X)} \to (X \Downarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ 是范畴之间的一个同构。

证明。此结论可由 [GKKP22] 中引理 5.18 的证明得出。 □

注意，[CL20，注释 2.2] 中给出了 Eilenberg–Moore 范畴的类似描述。我们将范畴 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 和 $(X \Downarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ 视为相同。我们使用无衬线字体 M、N……表示 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 中的对象，因此不带无衬线字体的同一字母表示 $\mathcal{C}$ 中的底层对象，即 $M = f^*\mathsf{M}$ 和 $N = f^*\mathsf{N}$。诱导的态射 $X(M) \to M$ 随后记作 h_{M}，并称为 M 的结构映射。

在第 2.2 节中，我们看到遗忘函子 $f^* \colon \mathcal{C}^{T(X)} \to \mathcal{C}$ 有一个左伴随 $f_! \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{T(X)}$。它由 $f_!(M) = (\bigoplus_{i\geq 0} X^i(M), \iota_M)$ 给出，其中结构映射 ι_M 是典范包含

$$\iota_M \colon \bigoplus_{i\geq 1} X^i(M) \to \bigoplus_{i\geq 0} X^i(M). \tag{3.4.1}$$

$f_!(M)$形式的对象的任一直和项称为相对投射对象。若 $\mathcal{C} = \mathsf{Mod}\ \Lambda$，且 Λ是半单 Artin 代数，则相对投射对象与 $\mathcal{C}^{T(X)}$中的投射对象一致，参见命题 4.3。以下引理表明，相对投射对象对于 $\mathcal{C}^{T(X)}$中的逐对象分裂满态射，其表现与投射对象相同。

引理 3.5. 设 N是 $\mathcal{C}$中的一个对象，且 $g\colon \mathsf{M} \to \mathsf{M}'$是 $\mathcal{C}^{T(X)}$中的一个态射。假设 $f^*(g)$是一个分裂满态射。那么任意态射 $f_!(N) \to \mathsf{M}'$ 都可经由 g分解。

证明。由伴随 $f_! \dashv f^*$，映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{T(X)}}(f_!(N), g) \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{T(X)}}(f_!(N), \mathsf{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{T(X)}}(f_!(N), \mathsf{M}')$$

同构于映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, f^*(g)) \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, f^*(\mathsf{M})) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(N, f^*(\mathsf{M}')).$$

后者必为满态射，因为 $f^*(g)$是一个分裂满态射。由此得证。 □

$\mathcal{C}^{T(X)}$ 中的序列 $\mathsf{M}_1 \to \mathsf{M}_2 \to \mathsf{M}_3$ 称为逐对象分裂正合，如果序列

$$f^*(\mathsf{M}_1) \to f^*(\mathsf{M}_2) \to f^*(\mathsf{M}_3)$$

在 $\mathcal{C}$ 中是分裂正合的。我们证明，这样的序列是 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 中的正合列，即一个核-余核对。注意，尽管并未假设 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 是阿贝尔范畴，这一结论仍然成立。我们还证明，自由单子 $T(X)$ 的相对整体维数为一，也就是说，$\mathcal{C}^{T(X)}$ 中的任意对象都有一个长度为一、由相对投射对象构成的逐对象分裂分解。这里，将 $f_!(M)$ 的结构态射视为 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 中的一个态射 $\iota_M \colon f_!X(M) \to f_!(M)$，而 ε_M 表示伴随 $f_! \dashv f^*$ 在 M 处的余单位。

引理 3.6。以下结论成立：

(1) 任意逐对象分裂正合列都是正合列。

(2) 对于每个 $\mathsf{M} \in \mathcal{C}^{T(X)}$，序列

$$0 \to f_!X(M) \xrightarrow{\iota_M - f_!(h_\mathsf{M})} f_!(M) \xrightarrow{\varepsilon_\mathsf{M}} \mathsf{M} \to 0$$

是逐对象分裂正合的。

证明。设 $\mathsf{M}_1 \to \mathsf{M}_2 \to \mathsf{M}_3$ 是一个逐对象分裂正合序列。根据 [Bor94，命题 4.3，1] 映射 $\mathsf{M}_1 \to \mathsf{M}_2$ 是 $\mathsf{M}_2 \to \mathsf{M}_3$ 的一个核，因为 $f^*(\mathsf{M}_1) \to f^*(\mathsf{M}_2)$ 是 $f^*(\mathsf{M}_2) \to f^*(\mathsf{M}_3)$ 的一个核。由于 $T(X)$ 保持分裂正合序列，[Bor94，命题 4.32] 推出 $\mathsf{M}_2 \to \mathsf{M}_3$ 是 $\mathsf{M}_1 \to \mathsf{M}_2$ 的一个余核，因为 $f^*(\mathsf{M}_1) \to f^*(\mathsf{M}_2) \to f^*(\mathsf{M}_3)$ 是分裂正合的。这就证明了 (1)。

这一事实

$$0 \to f^*f_!X(M) \xrightarrow{f^*(\iota_M - f_!(h_\mathsf{M}))} f^*f_!(M) \xrightarrow{f^*(\varepsilon_\mathsf{M})} f^*(\mathsf{M}) \to 0$$

是一个分裂正合列，这可以用与 [GKKP22] 中引理 6.17 的证明类似的方法来证明。注意，该证明中的无穷和在我们的情形下都是有限和，因为 X 是局部幂零的。□

接下来我们证明，相对投射对象总是同构于形如 $f_!(M)$ 的对象。它们也可以通过其结构态射是分裂单态射来刻画。

命题 3.7. 设 $\mathsf{M} \in \mathcal{C}^{T(X)}$。以下条件等价：

(1) M 是相对投射对象。(2) $h_\mathsf{M}\colon X(M) \to M$ 是 $\mathcal{C}$ 中的分裂单态射。(3) M 同构于形如 $f_!(N')$ 的对象，其中 $N' \in \mathcal{C}$。

证明。显然，对于满足 h_M 是分裂单态射的对象 $\mathsf{M} \in \mathcal{C}^{T(X)}$，其类在取直和项下封闭。由于对所有 $N \in \mathcal{C}$，ι_N 都是分裂单态射，这就证明了 (1)⇒(2)。

对于 (2)⇒(3)，考虑分裂正合列

$$0 \to X(M) \xrightarrow{h_\mathsf{M}} M \to N' \to 0$$

在 $\mathcal{C}$ 中，并选取一个截面 $i\colon N' \to M$。那么对每个 $m \geq 0$，态射 $X^m(i)\colon X^m(N') \to X^m(M)$ 是分裂正合列的一个截面

$$0 \to X^{m+1}(M) \xrightarrow{X^m(h_\mathsf{M})} X^m(M) \to X^m(N') \to 0.$$

利用这些 $X^m(i)$，我们得到同构

$$M \cong N' \oplus X(M) \cong N' \oplus X(N') \oplus X^2(M) \cong \ldots \cong N' \oplus X(N') \oplus \cdots \oplus X^n(N')$$

其中 n 是满足 $X^{n+1}(M) = 0$ 的某个整数。由于这些同构与 M 和 $f_!(N')$ 的结构态射相交换，我们得到一个同构 $\mathsf{M} \cong f_!(N')$。反方向 (3)⇒(1) 显然。□

推论 3.8. 对象 $M \in \mathcal{C}$ 是不可分解的，当且仅当 $f_!(M)$ 是不可分解的。

证明. 根据命题 3.7，$f_!(M)$ 的任一直和项都具有 $f_!(N)$ 的形式。对它们的结构态射取余核，可知这等价于 N 是 M 的直和项。因此，$f_!(M)$ 是不可分解的，当且仅当 M 是不可分解的。□

例 3.9. 设 $Q = (Q_0, Q_1)$ 是一个箭图，其中 Q_0 和 Q_1 分别表示 Q 的顶点集和箭集。Q 的一个 k-调制 $\mathfrak{B}$ 是指：为每个顶点 $\mathsf{i} \in Q_0$ 指定一个 k-线性加性范畴 $\mathcal{B}_\mathsf{i}$，并为每个箭头 $\alpha\colon \mathsf{i} \to \mathsf{j}$ 指定一个 k-线性函子 $F_\alpha\colon \mathcal{B}_\mathsf{i} \to \mathcal{B}_\mathsf{j}$。与调制 $\mathfrak{B}$ 相联系，我们有范畴 $\operatorname{rep}\mathfrak{B}$，其对象是 $\mathfrak{B}$-表示。具体而言，其对象是形如 $(B_\mathsf{i}, B_\alpha)_{\mathsf{i}\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ 的集合，其中，对每个顶点 i，B_i 是 $\mathcal{B}_\mathsf{i}$ 中的一个对象；对每个箭头 $\alpha\colon \mathsf{i} \to \mathsf{j}$，$B_\alpha\colon F_\alpha(B_\mathsf{i}) \to B_\mathsf{j}$ 是 $\mathcal{B}_\mathsf{j}$ 中的一个态射。$\mathfrak{B}$-表示 (B_i, B_α) 到 $(B'_\mathsf{i}, B'_\alpha)$ 的一个态射是态射的集合 $(\varphi_\mathsf{i}\colon B_\mathsf{i} \to B'_\mathsf{i})_{\mathsf{i}\in Q_0}$，满足以下

对每个箭头 $\alpha\colon \mathsf{i} \to \mathsf{j}$，图表均交换：

$$\begin{array}{ccc} F_\alpha(B_{\mathsf{i}}) & \xrightarrow{B_\alpha} & B_{\mathsf{j}} \\ \downarrow{\scriptstyle F_\alpha(\varphi_{\mathsf{i}})} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{\mathsf{j}}} \\ F_\alpha(B'_{\mathsf{i}}) & \xrightarrow{B'_\alpha} & B'_{\mathsf{j}} \end{array}$$

注意，表示范畴可以识别为由某个函子所构造的格罗滕迪克构造的截面，该函子由 $\mathbb{K}$-调制导出，参见 [GKKP22]中的注释 4.6。假设 Q 有限且无环，并令 $\mathcal{C} = \prod_{\mathsf{i}\in Q_0} \mathcal{B}_{\mathsf{i}}$。定义函子

$$X\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \qquad (B_{\mathsf{i}})_{\mathsf{i}\in Q_0} \mapsto \Big(\bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1\\ t(\alpha)=\mathsf{i}}} F_\alpha(B_{s(\alpha)})\Big)_{\mathsf{i}\in Q_0}. \tag{3.9.1}$$

根据关于 Q 的假设可知， X 是幂零的，即对某个 $n \gg 0$有 $X^n = 0$ 。范畴 $\operatorname{rep}\mathfrak{B}$ （ $\mathfrak{B}$-表示）可以识别为自由单子 $T(X)$在 $\mathcal{C}$上的 Eilenberg–Moore 范畴 $\mathcal{C}^{T(X)}$。我们仿照[GKKP22, Meta-Example 6.20]，明确描述 Eilenberg–Moore 伴随 $f_! \dashv f^*$。遗忘函子定义为

$$f^*\colon \operatorname{rep}\mathfrak{B} \to \mathcal{C}, \qquad f^*(B_{\mathsf{i}}, B_\alpha)_{\mathsf{i}\in Q_0,\alpha\in Q_1} = (B_{\mathsf{i}})_{\mathsf{i}\in Q_0}.$$

对于 $f_!$，我们需要引入一些记号。令 $Q_{\geq 0}$ 表示 Q 中所有路径的集合，并对于 $p \in Q_{\geq 0}$，令 $s(p)$ 和 $t(p)$ 分别表示其源和终点。若 $p = \alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_1$，令

$$F_p \coloneqq F_{\alpha_n} \circ F_{\alpha_{n-1}} \circ \cdots \circ F_{\alpha_1}\colon \mathcal{B}_{s(p)} \to \mathcal{B}_{t(p)}.$$

函子 $f_!$ 作用于 $B = (B_{\mathsf{i}})_{\mathsf{i}\in Q_0}$ 后，得到

$$f_!(B) = \left(\bigoplus_{\substack{p\in Q_{\geq 0}\\ t(p)=\mathsf{i}}} F_p(B_{s(p)}), f_!(B)_\alpha\right)_{\substack{\mathsf{i}\in Q_0\\ \alpha\in Q_1}}. \tag{3.9.2}$$

Here

$$f_!(B)_\alpha\colon \bigoplus_{\substack{p\in Q_{\geq 0}\\ t(p)=s(\alpha)}} F_\alpha F_p(B_{s(p)}) \to \bigoplus_{\substack{q\in Q_{\geq 0}\\ t(q)=t(\alpha)}} F_q(B_{s(q)})$$

由恒等映射 $F_\alpha F_p(B_{s(p)}) \xrightarrow{1} F_q(B_{s(q)})$ 诱导，其中 $q = \alpha p$。关于这一构造的更多细节，请参见 [GKKP22，第 5] 节。

例 3.10. 无限箭图的表示及其单态射范畴也曾在例如 [EOT04、EE05、EEGR09] 中得到研究。例 3.9 可以推广为任意箭图 Q （不一定是有限或无环的）上的调制 $\mathfrak{B}$ 。然而，为了确保由 (3.9.1) 给出的函子 X 的幂是良定义的，我们需要将对象限制为满足以下条件的 $(B_{\mathsf{i}})_{\mathsf{i}\in Q_0}$: $\prod_{\mathsf{i}\in Q_0} \mathcal{B}_{\mathsf{i}}$

(A1) 对任意 $n \geq 1$ 和 $\mathsf{j} \in Q_0$，若 κ_n 是该集合的基数

$\{\alpha \in Q_1 \mid t(\alpha) = \mathsf{j}$，并且存在一条长度为 $n-1$ 的路径 p，满足 $t(p) = s(\alpha)$ 和 $B_{s(p)} \neq 0\}$

则 $\mathcal{B}_{\mathsf{j}}$ 有 κ_n-余积。

特别地，如果以 j 为终点的箭头只有有限多个，或者$\mathcal{B}_{\mathsf{j}}$ 有任意基数的余积，则此结论对顶点 j 成立。

为确保 X 是局部幂零的，我们必须限制在满足以下条件的对象 $(B_{\mathsf{i}})_{\mathsf{i}\in Q_0}$:

(B) 存在一个整数 $n \geq 0$ （取决于 $(B_{\mathsf{i}})_{\mathsf{i}\in Q_0}$），使得对于任意长度大于 n 的路径p，都有 $B_{s(p)} = 0$。

令 $\mathcal{C}$ 表示 $\prod_{\mathsf{i}\in Q_0} \mathcal{B}_{\mathsf{i}}$ 的子范畴，其对象满足 (A1) 和 (B)。显然，X 限制在 $\mathcal{C}$ 上仍是一个局部幂零自函子。由于若 Q 有限且无圈，则 $\mathcal{C} = \prod_{\mathsf{i}\in Q_0} \mathcal{B}_{\mathsf{i}}$，这推广了例 3.9。注意， $\mathcal{C}$ 非零当且仅当 Q 有一个汇点。

例 3.11。 设 $\mathcal{B}$ 是一个 $\mathbb{K}$-线性加性范畴。作为前述例子的一个特例，我们可以考虑调制 $\mathfrak{B}$ ，其中对所有 i， $\mathcal{B}_{\mathrm{i}} = \mathcal{B} \in Q_0$ ，且对所有 $\alpha \in Q_1$， $F_\alpha =$ 为恒等态射。在此情形下， $\mathfrak{B}$ 的表示范畴就是表示 Q 于 $\mathcal{B}$ 中的范畴 rep$(Q, \mathcal{B})$；其对象是由 B_{i} 中的对象 B_{i} 和态射 B_α: $B_{s(\alpha)} \to B_{t(\alpha)}$ 组成的集合 $B_{\alpha \mathrm{i} \in Q_0,\ \alpha \in Q_1}$。注意，rep$(Q, \mathcal{B})$ 等价于范畴 $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^Q}$ ，它由 $\mathbb{K}$- 线性函子 $_{\mathbb{K}}Q \to \mathcal{B}$ 构成，其中 Q 被视为一个范畴，其对象为 Q_0 ，态射由 $Q_{\geq 0}$ 给出，而 $_{\mathbb{K}}Q$ 表示范畴 Q 的 $\mathbb{K}$-线性化。

3.2. 阿贝尔范畴上的自由单子。本小节中，我们还假设$\mathcal{C}$是阿贝尔范畴，且 X: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$是正合的。于是，对于 $T(X)$及其 Eilenberg–Moore 范畴，我们有以下基本结果。

引理3.12。以下结论成立：

(1) 函子 $T(X)$: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$是正合的。(2) 范畴 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 是阿贝尔范畴。(3) 函子 $f_!$: $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{T(X)}$和 f^*: $\mathcal{C}^{T(X)} \to \mathcal{C}$是正合的。(4) 如果 X 保持内射对象，则 $T(X)$保持内射对象。

证明。由于 X 是正合的，且取余积是一个右正合函子，因此 $T(X)$必为右正合。由于 X 是局部幂零的，我们有一个同构 $T(X) \cong \prod_{i \geq 0} X^i$。由于取积是一个左正合函子， $T(X)$也必为左正合。因此， $T(X)$是正合的。 $\mathcal{C}^{T(X)}$是阿贝尔范畴且 f^* 是正合的这一事实由命题 2.4 得出。现在， $f_!$ 的正合性由 $T(X)$的正合性以及命题 2.4 中对 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 的正合列的描述得出。最后，如果 $I \in \mathcal{C}$ 是内射对象，且 X 保持内射对象，那么对于所有 $i \geq 0$， $X^i(I)$都是内射对象。由于内射对象在取积下封闭， $T(X)(I) \cong \prod_{i \geq 0} X^i(I)$必为内射对象，因此 $T(X)$保持内射对象。□

如果 X 保内射对象，那么 X 便下降为稳定内射范畴$\overline{\mathcal{C}}$上的一个自函子。由引理 3.12 (4)，函子 $T(X)$也保内射对象，因此下降为 $\overline{\mathcal{C}}$上的一个单子，仍记作同一个符号。

引理3.13. 假设 $\mathcal{C}$ 有足够多的内射对象，且 X 保内射对象。那么，视为$\overline{\mathcal{C}}$上的单子的 $T(X)$，等于 X 在 $\overline{\mathcal{C}}$上的自由单子。特别地，我们有一个同构$\overline{\mathcal{C}}^{T(X)} \xrightarrow{\cong} (X \Downarrow \mathrm{Id}_{\overline{\mathcal{C}}})$。

证明. 由于 X 是局部幂零的，因此在 $\mathcal{C}$的任意对象上取值时，和式 $\bigoplus_{i \geq 0} X^i$ 都是有限的，故该和式被函子 $\mathcal{C} \to \overline{\mathcal{C}}$保留。因此， $T(X)$必定是 X 在 $\overline{\mathcal{C}}$上的自由单子，从而得证。□

例 3.14. 设 Q 是一个有限无环箭图， $\mathfrak{B}$ 是 Q 上的一个调制，如例 3.9 所示，并假设范畴 $\mathcal{B}_{\mathrm{i}}$ 是阿贝尔范畴。那么， X 正合，当且仅当函子 F_α: $\mathcal{B}_i \to \mathcal{B}_j$正合； X 保内射对象，当且仅当函子 F_α 保内射对象。假设这两个条件成立，且对所有顶点 i，范畴 $\mathcal{B}_{\mathrm{i}}$ 都有足够多的内射对象。那么我们得到 Q上的另一个调制$\overline{\mathfrak{B}}$： 在顶点 i 处取内射稳定范畴 $\overline{\mathcal{B}_{\mathrm{i}}}$ ，而对箭头 α: i $\to$j，则取由 F_α 诱导的函子 G_α: $\overline{\mathcal{B}_{\mathrm{i}}} \to \overline{\mathcal{B}_{\mathrm{j}}}$。令 $\mathcal{C} = \prod_{\mathrm{i} \in Q_0} \mathcal{B}_{\mathrm{i}}$，可得等价 $\overline{\mathcal{C}} \cong \prod_{\mathrm{i} \in Q_0} \overline{\mathcal{B}_{\mathrm{i}}}$和 rep $\overline{\mathfrak{B}} \cong \overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$。若对所有 i 都有 $\mathcal{B}_{\mathrm{i}} = \mathcal{B} \in Q_0$，且如例 3.11 所示，对所有$\alpha \in Q_1$都有 $F_\alpha = \mathrm{Id}$，那么这给出 rep$(Q, \overline{\mathcal{B}})$ $\cong \overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$。

例 3.15. 设 Q 是任意箭图，不一定有限或无环。假设范畴 $\mathcal{B}_{\mathrm{i}}$是阿贝尔范畴且有足够多的内射对象。那么阿贝尔范畴 $\prod_{\mathrm{i} \in Q_0} \mathcal{B}_{\mathrm{i}}$ 有足够多的内射对象，并且它们是逐分量给出的，即当且仅当对所有 i $\in Q_0$， $B_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i} \in Q_0}$ 是内射对象时， B_{i} 才是内射对象。假设函子 F_α 是正合的并保持内射对象。为了确保由 (3.9.1) 给出的函子 X 的幂是正合的并保持内射对象，我们需要将范围限制为 $\prod_{\mathrm{i} \in Q_0} \mathcal{B}_{\mathrm{i}}$ 中满足以下条件的对象 $(B_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i} \in Q_0}$：

(A2) 对每个顶点 j， $\in Q_0$ 以下条件之一成立：

- 对于任意 $n \geq 1$，集合的基数

$$\{\alpha \in Q_1 \mid t(\alpha) = \mathsf{j}, \text{ 且存在一条长度为 } n-1 \text{ 的路径 } p, \text{ 满足 } t(p) = s(\alpha) \text{ 和 } B_{s(p)} \neq 0\}$$

是有限的，或者

- $\mathcal{B}_{\mathsf{j}}$ 是一个局部诺特格罗滕迪克范畴。

事实上，在第一种情况下，X^n 是正合的，并保持内射性，因为有限直和是正合的，且保持内射性。在第二种情况下，这一结论成立，是因为格罗滕迪克范畴中的无限余积是正合的，并且局部诺特范畴中内射对象的无限余积仍是内射对象。注意，在例 3.10 中，条件 (A2) 蕴含条件 (A1)。

现在令 $\mathcal{C}$ 为子范畴 $\prod_{\mathsf{i}\in Q_0} \mathcal{B}_{\mathsf{i}}$，它由例 3.10 中满足 (B) 和 (A2) 的所有对象组成。由于 $\mathcal{C}$ 对关于子对象、扩张和商范畴封闭，它是 $\prod_{\mathsf{i}\in Q_0} \mathcal{B}_{\mathsf{i}}$的一个 Serre 子范畴。特别地，它是阿贝尔范畴。它也有足够多的内射对象，因为对于 $\mathcal{C}$ 中的任意 $(B_{\mathsf{i}})_{\mathsf{i}\in Q_0}$，我们都能找到一个单态射 $(B_{\mathsf{i}})_{\mathsf{i}\in Q_0} \to (J_{\mathsf{i}})_{\mathsf{i}\in Q_0}$，其中对所有 $\mathsf{i} \in Q_0$，J_{i} 都是内射的，当且仅当 $B_{\mathsf{i}} \neq 0$。现在，X 限制为 $\mathcal{C}$ 上的一个正合、局部幂零自函子，并保持内射对象。因此，它满足本节的基本假设。注意，$\mathcal{C}$ 非零当且仅当 Q 有一个汇点顶点；并且当 Q 有限且无环时，$\mathcal{C} = \prod_{\mathsf{i}\in Q_0} \mathcal{B}_{\mathsf{i}}$。

例 3.16. 设 $\mathfrak{B}$ 是箭图 Q 上的一个调制，使得对于两个环 R 和 S 以及一个箭头 α，有 $\mathcal{B}_{s(\alpha)} = \operatorname{Mod} R$ 且 $\mathcal{B}_{t(\alpha)} = \operatorname{Mod} S$。我们考察函子 $F_\alpha\colon \mathcal{B}_{s(\alpha)} \to \mathcal{B}_{t(\alpha)}$ 正合且保持内射对象的常见情形，这与 [GKKP22, 元示例 4.2] 类似。

假设 $F_\alpha = \operatorname{Hom}_R(M, -)$，其中 M 是一个 S-R-双模。我们断言，F_α 正合且保持内射对象，当且仅当 M 作为右 R-模是投射的，并且作为左 S-模是平坦的。事实上，F_α 的正合性显然等价于 M 作为右 R-模是投射的。现在，$F_\alpha(I) = \operatorname{Hom}_R(M, I)$ 是一个内射 S-模，当且仅当

$$\operatorname{Hom}_S(-, \operatorname{Hom}_R(M, I)) \cong \operatorname{Hom}_R(- \otimes_S M, I)$$

是一个正合函子。对于每个内射 R-模，这成立当且仅当 $- \otimes_S M$ 正合，也就是说，M 作为左 S-模是平坦的。

现在假设 $F_\alpha = - \otimes_R N$ 是一个 R-S-双模 N，且 N 作为左R-模是有限表示的。我们断言，F_α 是正合函子且保持内射对象，当且仅当 N 作为左 R-模是投射的，并且 $\operatorname{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(N, R)$作为左 S-模是平坦的。事实上，F_α 是正合的等价于 N 作为一个 R-模是平坦的；又由于 N 是有限表示的，这又等价于 N作为一个 R-模是投射的。如果 N 是有限表示且投射的，那么

$$F_\alpha = - \otimes_R N \cong \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(N, R), -).$$

因此，根据上述论证，F_α 保持内射对象，当且仅当 $\operatorname{Hom}_{R^{\mathrm{op}}}(N, R)$作为左 S-模是平坦的。

例 3.17. 作为例 3.16 的一个特例，令 $\mathfrak{B}$ 为 $Q = (1 \to 2)$ 上由张量积 $- \otimes_R N\colon \operatorname{Mod} R \to \operatorname{Mod} S$给出的调制，其中 N是一个 R-S-双模。那么，$\mathfrak{B}$-表示的范畴等价于 $\operatorname{Mod}\Lambda$，其中 Λ 是三角矩阵环

$$\Lambda := \begin{pmatrix} R & 0 \\ N & S \end{pmatrix}$$

例如，[FGR75] 和 [ARS95 第 III.2] 节研究过这类环。描述 Gorenstein 投射 Λ-模时，[LZ10、XZ12、Zha13] 中也出现了它们的单态范畴（定义见下文例 3.26）。

3.3. 顶函子。我们考虑余核函子 top_X 及其右伴随 S:

$$\operatorname{top}_X\colon \mathcal{C}^{T(X)} \to \mathcal{C} \quad \mathsf{M} \mapsto \operatorname{coker} h_{\mathsf{M}}$$

$$S\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{T(X)} \quad M \mapsto (X(M) \xrightarrow{0} M).$$

应用 top_X 类似于取一个模的顶，而 $S(M)$ 可以看作集中在 M 的半单模的类比。这里我们汇总它们最重要的性质。引理 3.18 (4) 可视为中山引理的类比。

引理 3.18。以下结论成立：

(1) 我们有一个伴随 $\mathrm{top}_X \dashv S$。(2) $\mathrm{top}_X f_!(M) \cong M$ 关于 $M \in \mathcal{C}$ 自然。(3) 对所有 $M \in \mathcal{C}$，$\mathrm{top}_X(\iota_M) = 0$。(4) 若 $\mathrm{top}_X(\mathsf{M}) = 0$，则 $\mathsf{M} = 0$。

证明。第 (1) 部分由 [GKKP22，引理 5.26] 得出。第 (2) 和第 (3) 部分显然。第 (4) 部分成立，因为若 $M \neq 0$，则不存在 epimorphisms $X(M) \twoheadrightarrow M$，见注释 3.1。□

我们还需要一个关于 top_X 的左导出函子存在性的结果。

引理 3.19。对所有 $j > 0$，左导出函子 $L_j\mathrm{top}_X$ 均存在。此外，它们在相对投射对象上消失。

证明。根据 [Kva20，命题 3.1，4] 只需证明函子 $f_!f^*$ 和 $\mathrm{top}_X \circ f_!f^*$ 是正合的。但这由 $f_!$ 和 f^* 是正合的这一事实，以及引理 3.18 (2) 中的同构 $\mathrm{top}_X \circ f_! \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ 立即推出。□

最后，我们给出 top_X 的左导出函子的如下描述。

引理 3.20. 对于 $\mathsf{M} \in \mathcal{C}^{T(X)}$，有

$$L_1 \operatorname{top}_X(\mathsf{M}) = \ker h_{\mathsf{M}} \quad and \quad L_i \operatorname{top}_X(\mathsf{M}) = 0 \quad i \geq 2.$$

证明。这可由与 [GKKP22 引理 6.24] 相同的证明得出。□

3.4. 单态射范畴。

定义 3.21. 单态射范畴 $\mathrm{Mono}(X)$ 是 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 的全子范畴，由满足结构映射 h_{M} 是单态射的对象 M 组成。

注意，单态射范畴中的对象也可以等价地用顶$_X$的第一左导出函子来刻画。

引理 3.22. 设 $\mathsf{M} \in \mathcal{C}^{T(X)}$. 则 $\mathsf{M} \in \mathrm{Mono}(X)$ 当且仅当 $L_1\mathrm{top}_X(\mathsf{M}) = 0$

证明. 这直接由引理 3.20 中对 $L_1\mathrm{top}_X$ 的描述得出。□

回想一下，阿贝尔范畴的一个子范畴称为解消子范畴，如果它是生成的，并且对扩张、满态射的核以及直和项封闭。

引理 3.23. 范畴 $\mathrm{Mono}(X)$ 是解消子范畴，并且在 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 中对所有子对象封闭。特别地，它是一个正合范畴，其正合列为满态射，而膨胀态射为余核属于 $\mathrm{Mono}(X)$ 的单态射。

证明. 对任意对象 $\mathsf{M} \in \mathcal{C}^{T(X)}$，余单位 ε_{M}：$f_!f^*(\mathsf{M}) \twoheadrightarrow \mathsf{M}$ 是一个满态射。由于 $f_!$ 的像中的任意对象都属于 $\mathrm{Mono}(X)$，这说明 $\mathrm{Mono}(X)$ 是生成的。$\mathrm{Mono}(X)$ 对扩张和子对象封闭，这一事实源自单态射对扩张和子对象封闭。由于满态射的核和直和项都是子对象的特例，这说明 $\mathrm{Mono}(X)$ 是解消子范畴。

最后，由于 $\mathrm{Mono}(X)$ 对扩张封闭，它继承了来自 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 的正合结构，其中膨胀态射和压缩态射分别是余核和核属于 $\mathrm{Mono}(X)$ 的单态射和满态射。由于 $\mathrm{Mono}(X)$ 对满态射的核封闭，压缩态射与 $\mathrm{Mono}(X)$ 中的满态射一致。□

接下来我们说明顶$_X$ 如何检测 $\mathrm{Mono}(X)$ 中的膨胀态射和同构。

引理 3.24. 设 $g\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ 是 $\mathrm{Mono}(X)$ 中的一个态射。以下结论成立：

(1) g 是 $\mathrm{Mono}(X)$ 中的膨胀，当且仅当 $\mathrm{top}_X(g)$ 是单态射。(2) g 是同构，当且仅当 $\mathrm{top}_X(g)$ 是同构。

证明。为证明 (1)，假设 g 是一个单态射，且其余核属于 Mono(X)。对正合列应用 top$_X$：

$$0 \to \mathsf{M} \xrightarrow{g} \mathsf{N} \to \operatorname{coker} g \to 0$$

并利用 $L_1\mathrm{top}_X(\text{余核 } g) = 0$，可知 top$_X(g)$ 是一个单态射。

反之，假设 top$_X(g)$ 是一个单态射，并考虑正合列

$$0 \to \ker g \to \mathsf{M} \to \operatorname{Im} g \to 0.$$

由于 Im g 是 N 的一个子对象，因此它包含于 Mono(X) 中。因此 $L_1\mathrm{top}_X(\mathrm{Im}\ g) = 0$，所以将函子 top$_X$ 应用于包含映射 ker $g \to$M，可得一个单态射 top$_X$(ker g) $\to$top$_X$(M)。此外，由于复合态射 top$_X$(ker g) $\to$top$_X$(M) $\xrightarrow{\mathrm{top}_X(g)}top_X$(N) 为 0，且 top$_X(g)$ 是一个单态射，因此可推出 top$_X$(ker g) $= 0$。于是，根据引理 3.18 (4)，ker $g = 0$，所以 g必为一个单态射。最后，将函子 top$_X$ 应用于短正合列

$$0 \to \mathsf{M} \xrightarrow{g} \mathsf{N} \to \operatorname{coker} g \to 0$$

又由于 top$_X(g)$ 是单态射且 $L_1\mathrm{top}_X(\mathsf{N}) = 0$，我们得到 $L_1\mathrm{top}_X(\text{coker } g) = 0$。因此，根据引理 3.22，coker $g \in$ Mono(X)。这就证明了 (1)。

为证明 (2)，注意若 g 是同构，则 top$_X(g)$ 必须是同构。反过来，假设 top$_X(g)$ 是同构。则根据 (1)，g 必须是单态射。因此我们有一个右正合列

$$\mathrm{top}_X(\mathsf{M}) \xrightarrow{\mathrm{top}_X(g)} \mathrm{top}_X(\mathsf{N}) \to \mathrm{top}_X(\operatorname{coker} g) \to 0$$

由于 top$_X(g)$ 是同构，我们必有 top$_X$(coker g) $= 0$。因此，根据引理 3.18 (4)，coker $g = 0$，所以 g 必定是同构。□

由此可得一个判定态射是否属于根的准则。

引理 3.25. 设 g: M $\to$N 是 Mono(X) 中的一个态射，并假设 top$_X(g)$ 属于 $\mathcal{C}$的根。那么 g 属于 Mono(X) 的根。

证明。由第 2.3 小节中根的定义，以及引理 3.24 (2) 中顶反映同构这一事实，立即可得。□

例 3.26。设 Q 是一个有限无环箭图，$\mathfrak{B}$ 是 Q 上由阿贝尔范畴 $\mathcal{B}_{\mathtt{i}}$ 和正合函子 F_α 构成的调制，如例 3.9 中所述。设 $(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha)_{\mathtt{i}\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ 是一个 $\mathfrak{B}$-表示。对每个顶点 $\mathtt{i} \in Q_0$，考虑映射

$$B_{\mathtt{i},\mathrm{in}}\colon \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1\\ t(\alpha)=\mathtt{i}}} F_\alpha(B_{s(\alpha)}) \xrightarrow{(B_\alpha)} B_{\mathtt{i}}.$$

那么，top$_X$ 由下式给出

$$\mathrm{top}_X(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha)_{\mathtt{i}\in Q_0,\alpha\in Q_1} = (\operatorname{coker} B_{\mathtt{i},\mathrm{in}})_{\mathtt{i}\in Q_0}.$$

此外，由引理 3.20 可得

$$L_1\,\mathrm{top}_X(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha)_{\mathtt{i}\in Q_0,\alpha\in Q_1} = (\ker B_{\mathtt{i},\mathrm{in}})_{\mathtt{i}\in Q_0}.$$

因此，$(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha)_{\mathtt{i}\in Q_0,\alpha\in Q_1} \in$ 属于 Mono(X) 当且仅当对所有 $\mathtt{i} \in Q_0$，$B_{\mathtt{i},\mathrm{in}}$ 都是单态射。

4. Injective objects

回想一下，由命题 3.23 可知，Mono(X) 是一个正合范畴。本节中，我们研究正合结构下 Mono(X) 中的内射对象。我们证明，除同构外，它们都是形如 $f_!(I)$ 的对象，其中 I 是 $\mathcal{C}$ 中的内射对象，见命题 4.2 和推论 4.4。这改进了 [GKKP22] 中的引理 6.5 对自由单子的结论，因为该结果仅能推出内射对象是形如 $f_!(I)$ 的对象的直和项。此外，[GKKP22] 中的证明依赖于相对中山函子的存在，而以下证明并不需要这一假设。本节最后，我们刻画 Mono(X) 何时有足够多的内射对象，以及

何时它有内射包。以下全文中，$\mathcal{C}$ 是一个 $\Bbbk$-线性阿贝尔范畴，而 $X\colon \mathcal{C}\to\mathcal{C}$ 是一个正合函子，它是局部幂零的，并且保持内射对象。

We fi剩余 s how that the f 函子 顶x 在 d在态射上诱导满射 h同构空间 w hen the 陪域具有如下形式 $f_!(I)$，其中 I 内射。

引理 4.1. 设 g: 顶x M $\to I$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个态射，其中 I 是内射的，且 M $\in$ Mono(X)。那么存在一个态射 k: M $\to f_!(I)$，属于 $\mathcal{C}^{T(X)}$，满足 顶x(k) $= g$。

证明. 令 k_0 表示复合态射 $M \to$ 余核 $h_{\mathsf{M}} \xrightarrow{g} I$。应用 X，得到一个态射$X(k_0)$: $X(M) \to X($ $I)$；由于 $X(I)$ 是内射的，且 h_{M}: $X(M) \to M$是一个单态射，我们可以找到一个态射 k_1: $M \to X(I)$，使得 $k_1 \circ h_{\mathsf{M}} = X(k_0)$。重复这一过程，我们对每个 $i \geq 1$ 都得到满足 $k_i \circ h_{\mathsf{M}} = X$ (k_{i-1}) 的态射 k_i: $M \to X^i(I)$。这些态射诱导出一个态射$M \to \bigoplus_{i\geq 0} X^i(I)$；由于 $k_0 \circ h_{\mathsf{M}} = 0$，它可提升为 $\mathcal{C}^T(x)$ 中的一个态射 k: M $\to f_!(I)$。根据构造，我们有 顶x(k) $= g$，故证毕。□

现在我们可以证明，当 I 在 $\mathcal{C}$ 中是内射对象时，$f_!(I)$ 在 Mono(X) 中是内射对象。

命题 4.2. 设 $I \in \mathcal{C}$ 是内射对象，且 M $\in$Mono(X)。那么

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}^{T(X)}}(\mathsf{M}, f_!(I)) = 0 \quad \textit{for all } i > 0.$$

证明. 我们使用 Yoneda-Ext 证明该结论。设 $\xi \in$ Ext$^i_{\mathcal{C}^{T(X)}}$(M $f_!(I)$)。我们要找到 ξ 的一个代表元，使其最左侧的映射是一个分裂单态射。为此，注意到由于 Mono(X) 是解消子范畴，它满足 [Kel96, Section 12] 中条件 (C2) 的对偶。因此，[Kel96, Theorem 12.1] 的对偶蕴含诱导函子

$$D^-(\mathrm{Mono}(X)) \to D^-(\mathcal{C}^{T(X)})$$

betw导出范畴之间是全忠实的，其中我们将 Mono(X) 视为一个正合范畴

因此，我们可以找到一个形如以下形式的 ξ 代表元

$$0 \to f_!(I) \to \mathsf{N}_1 \to \cdots \to \mathsf{N}_i \to \mathsf{M} \to 0$$

其中所有项都属于 Mono(X)。由于 Mono(X) 对子对象封闭，中间的所有核也都属于 Mono(X)。令 i: $f_!(I) \to \mathsf{N}_1$ 表示最左边的态射。由引理 3.24，态射 top$x$(i) : $I \to$top$x$N$_1$ 是单态射。由于 I 是内射的，top$x$(i) 是分裂单态射，因此我们可以选取它的一个左逆 g: top$x$ N$_1 \to I$。由引理 4.1，我们可以找到一个态射 k: N$_1 \to f_!(I)$，满足 top$x$(k) $= g$。根据构造，对复合态射 $k \circ i$: $f_!(I) \to f_!(I)$ 作用 top$x$ 后，得到 I 上的恒等态射。因此，由引理 3.24 (2)，态射 $k \circ i$ 是同构，所以 i 必定是分裂单态射。这就证明了该断言。□

为证明命题 4.2 的逆命题，我们使用以下结果。

Pr命题 4.3。设 M $\in$ Mono(X)，并假设 M 在 $\mathcal{C}$中是内射的。那么，对于某个 e inj内射对象 J，有 $\mathcal{C}$。

证明。由于 M $\in$Mono(X)，映射 h_{M}: $X(M) \to M$是一个单态射。由于 M是内射的，$X(M)$必定是内射的，因此 h_{M} 是一个分裂单态射。由命题 3.7 可得结论。□

推论 4.4。设 M 是正合范畴 Mono(X) 中的一个内射对象。那么，对于某个内射对象 J，有 M $\cong f_!($ $J)$，其中 $\mathcal{C}$。

证明。由假设可知，对于任意 $N \in \mathcal{C}$，Ext$^1_{\mathcal{C}^{T(X)}}(f_!(N)$, M) $= 0$。现在，伴随 $f_! \dashv f^*$ 诱导出一个同构

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}^{T(X)}}(f_!(N), \mathsf{M}) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(N, f^*(\mathsf{M}))$$

参见 [LO17，引理 3.2]。因此，对所有 $N \in \mathcal{C}$，Ext$^1_{\mathcal{C}}(N, f^*$(M)) $= 0$。这意味着 f^*(M) 在 $\mathcal{C}$ 中是内射的。因此，由命题 4.3 可得，对于某个内射对象 $J \in \mathcal{C}$，M $\cong f_!(J)$。□

我们利用所得结果研究 Mono(X) 何时有足够多的内射对象。

命题 4.5. 假设 $\mathcal{C}$ 有足够多的内射对象。那么 Mono(X) 有足够多的内射对象。

证明。任取 $\mathsf{M} \in \mathrm{Mono}(X)$，并选取一个单态射 $i\colon \mathrm{top}_X(\mathsf{M}) \to I$ in $\mathcal{C}$，其中 I 是内射对象。注意，由命题 4.2，$f_!(I)$ 是内射对象。由引理 4.1，我们可以找到一个态射 $j\colon \mathsf{M} \to f_!(I)$，满足 $\mathrm{top}_X(j) = i$。现在由引理 3.24 (1)，可知 j 是 $\mathrm{Mono}(X)$ 中的膨胀。这就证明了所述结论。□

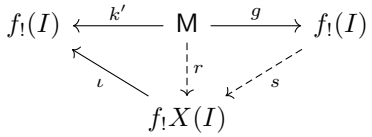
最后，我们证明 $\mathrm{Mono}(X)$ 中内射包的存在性。

命题 4.6。以下结论成立：

(1) 设 $g\colon \mathsf{M} \to f_!(I)$ 是 $\mathrm{Mono}(X)$ 中的一个态射，且 $I \in \mathcal{C}$ 内射。那么，当且仅当 $\mathrm{top}_X(g) : \mathrm{top}_X(M) \to I$ 是 $\mathcal{C}$ 中的一个内射包时，g 是 $\mathrm{Mono}(X)$ 中的一个内射包。(2) 如果 $\mathcal{C}$ 有内射包，那么 $\mathrm{Mono}(X)$ 也有内射包。

证明。为证明 (1)，我们先假设 $\mathrm{top}_X(g)$ 是一个内射包。根据引理 3.24，g 必须是一个余核属于 $\mathrm{Mono}(X)$ 的单态射。接下来只需证明 g 是左极小的。假设 $k\colon f_!(I) \to f_!(I)$ 是一个满足 $k \circ g = g$ 的态射。应用 top_X，可得 $\mathrm{top}_X(k) \circ \mathrm{top}_X(g) = \mathrm{top}_X(g)$。由于 $\mathrm{top}_X(g)$ 是一个内射包，所以它是左极小的，因此 $\mathrm{top}_X(k)$ 必须是一个同构。由引理 3.24 (2) 可知，k 必须是一个同构，因此 g 是左极小的。

反过来，假设 g 是一个内射包。由于 g 是一个膨胀，$\mathrm{顶}_X(g) : \mathrm{顶}_X(\mathsf{M}) \to I$ 必须是单态射。因此，只需证明 $\mathrm{顶}_X(g)$ 是左极小的。设 $k\colon I \to I$ 是满足 $k \circ \mathrm{顶}_X(g) = \mathrm{顶}_X(g)$ 的一个态射。考虑 $k' := g - f_!(k) \circ g\colon \mathsf{M} \to f_!(I)$。由于 $\mathrm{顶}_X(k') = 0$，存在一个态射 $r\colon \mathsf{M} \to f_!X(I)$，使得左侧三角形



是交换的。由于 $f_!X(I)$ 在 $\mathrm{Mono}(X)$ 中是内射的，且 $g\colon \mathsf{M} \to f_!(I)$ 是单态射，态射 r 可经由 g 延拓为态射 $s\colon f_!(I) \to f_!X(I)$。于是显然

$$g = (\iota \circ s + f_!(k)) \circ g$$

因此 $\iota \circ s + f_!(k)$ 是同构，因为 g 是一个内射包。最后，由于 $\mathrm{顶}_X(\iota) = 0$，可得 $\mathrm{顶}_X(\iota \circ s + f_!(k)) = k$，所以它也必定是同构。这说明 $\mathrm{顶}_X(g)$ 是左极小的。

为证明 (2)，任取 $\mathsf{M} \in \mathrm{Mono}(X)$，并令 $i\colon \mathrm{top}_X\,\mathsf{M} \to I$ be 是 $\mathcal{C}$ 中的一个内射包。由引理 4.1 可找到一个态射 $j\colon \mathsf{M} \to f_!(I)$，满足 $\mathrm{top}_X(j) = i$。于是，根据本引理的第一部分，j 必为一个内射包。□

5. The epivalence

在本节中，我们设 $\mathcal{C}$ 是一个有足够多内射对象的 $\Bbbk$-线性阿贝尔范畴，并且 $X\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个局部幂零且保持内射对象的正合函子。我们的目标是证明典范函子

$$\overline{\mathrm{Mono}}(X) \to \overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$$

是一个等价；若 $\mathcal{C}$ 是遗传的，则它实际上是一个等价。证明该函子稠密时，会用到一种特定的 $\mathrm{Mono}(X)$-右逼近构造，我们将先对此进行研究。

5.1. 反变有限性。回顾引理 3.6，我们有一个正合列

$$0 \to f_!X(M) \xrightarrow{\iota_M - f_!(h_{\mathsf{M}})} f_!(M) \xrightarrow{\varepsilon_{\mathsf{M}}} \mathsf{M} \to 0$$

对于所有 $\mathsf{M} \in \mathcal{C}^{T(X)}$。对此应用 $\mathrm{顶}_X$，得到一个正合列

$$0 \to L_1\,\mathrm{top}_X\,\mathsf{M} \to X(M) \xrightarrow{h_{\mathsf{M}}} M \to \mathrm{top}_X\,\mathsf{M} \to 0$$

因为 $L_1\,\mathrm{顶}_X\, f_!(M) = 0$。

定义 5.1. 固定一个单态射 $j\colon L_1$ 顶$X\,\mathsf{M} \hookrightarrow J$到一个内射模 J 中，并固定一个 $e\colon X(M) \to J$关于 j 的提升。定义对象 $\Omega\,\mathsf{M} \in \mathcal{C}^{T(X)}$ 和态射 $p_{\mathsf{M}}\colon \Omega\,\mathsf{M} \to \mathsf{M}$，使得下图中的下方序列是上方序列的推出：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & f_!X(M) & \xrightarrow{\iota_M - f_!(h_{\mathsf{M}})} & f_!(M) & \xrightarrow{\varepsilon_{\mathsf{M}}} & \mathsf{M} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_!(e)} & & \downarrow{\scriptstyle r} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & f_!(J) & \xrightarrow{s} & \Omega\,\mathsf{M} & \xrightarrow{p_{\mathsf{M}}} & \mathsf{M} & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{5.1.1}$$

注意， $\Omega\mathsf{M}$ 在同构意义下并未良定义，因为它取决于 J、单态射 j以及提升 e 的选择。在命题 5.3 中，我们证明它在 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 的某个商范畴中是良定义的。

我们首先证明 $\Omega\mathsf{M}$ 给出了一个右 $\mathsf{Mono}(X)$-逼近。

定理 5.2. 态射 $p_{\mathsf{M}}\colon \Omega\,\mathsf{M} \to \mathsf{M}$ 是 $\mathsf{M} \in \mathcal{C}^{T(X)}$ 的一个右 $\mathsf{Mono}(X)$-逼近。

证明。我们首先证明 $\Omega\mathsf{M}$ 属于 $\mathsf{Mono}(X)$。为此，我们将顶X 应用于图表 (5.1.1)。这得到图表

$$\begin{array}{ccccccc} L_1 \operatorname{top}_X \mathsf{M} & \longrightarrow & X(M) & \xrightarrow{h_{\mathsf{M}}} & M & \longrightarrow & \operatorname{top}_X \mathsf{M} \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle e} & & \downarrow & & \| \\ L_1 \operatorname{top}_X \mathsf{M} & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \operatorname{top}_X \Omega\,\mathsf{M} & \longrightarrow & \operatorname{top}_X \mathsf{M} \end{array}$$

with 正合行。由最左侧方块的交换性，映射 L_1顶$X\,\mathsf{M} \to J$ 等于 j，wh态射是单态射。此外，下方一行可以扩展为正合列

$$0 \to L_1 \operatorname{top}_X \Omega\,\mathsf{M} \to L_1 \operatorname{top}_X \mathsf{M} \xrightarrow{j} J$$

因为 L_1 顶$X(f_!(J)) = 0$。因此可得 L_1 顶$_X\,\Omega\,\mathsf{M} = 0$。于是， $\Omega\,\mathsf{M} \in \mathsf{Mono}($ $X)$.

为证明 p_{M}是右逼近，将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{T(X)}}(\mathsf{N}, -)$（其中 $\mathsf{N} \in \mathsf{Mono}(X)$）作用于正合列

$$0 \to f_!(J) \to \Omega\,\mathsf{M} \xrightarrow{p_{\mathsf{M}}} \mathsf{M} \to 0.$$

这给出一个满态射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{T(X)}}(\mathsf{N}, p_{\mathsf{M}})\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{T(X)}}(\mathsf{N}, \Omega\,\mathsf{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{T(X)}}(\mathsf{N}, \mathsf{M}).$$

因为 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}^{T(X)}}(\mathsf{N}\ f_!(J)) = 0$，由命题 4.2 可知。由此证明了该断言。 □

接下来我们证明 $\Omega\,\mathsf{M}$ 满足一个泛性质。这里 $\frac{\mathcal{C}^{T(X)}}{f_!\ \mathcal{C}}$(单射) 表示范畴 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 对态射理想取商，该理想由所有经过形如 $f_!(J)$ 且$J \in \mathsf{inj}\,\mathcal{C}$的对象的态射构成。

命题 5.3. 设 $g\colon \mathsf{N} \to \mathsf{M}$ 是 $\frac{\mathcal{C}^{T(X)}}{f_!\ \mathcal{C}}$(inj) 中的一个态射，且 $\mathsf{N} \in \mathsf{Mono}(X)$。那么存在唯一一个态射

$$g'\colon \mathsf{N} \to \Omega\,\mathsf{M}$$

属于 $\frac{\mathcal{C}^{T(X)}}{f_!\ \mathcal{C}}$(inj)，使得等式 $p_{\mathsf{M}} \circ g' = g$ 成立。

证明。由于 p_{M} 是一个右 $\mathsf{Mono}(X)$-逼近，因此 g' 存在。下面证明其唯一性：设 $g'\colon \mathsf{N} \to \Omega\,\mathsf{M}$ 和 $g''\colon \mathsf{N} \to \Omega\,\mathsf{M}$ 是 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 中的两个态射，满足$p_{\mathsf{M}} \circ g'$和 $p_{\mathsf{M}} \circ g''$ 在 $\frac{\mathcal{C}^{T(X)}}{f_!\ \mathcal{C}}$(inj)中作为态射相等。那么存在 $J' \in \mathsf{inj}\ \mathcal{C}$ 以及态射$u\colon \mathsf{N} \to f_!(J')$ 和 $v\colon f_!(J') \to \mathsf{M}$，使得

$$v \circ u = p_{\mathsf{M}} \circ (g' - g'')$$

在 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 中。此外，由于 p_{M} 是一个右 $\mathsf{Mono}(X)$-逼近，且 $f_!(J') \in \mathsf{Mono}(X)$，存在一个态射 $w\colon f_!(J') \to \Omega\,\mathsf{M}$，使得

$$v = p_{\mathsf{M}} \circ w.$$

因此， $p_{\mathsf{M}} \circ (g' - g'' - w \circ u) = 0$，这意味着 $g' - g'' - w \circ u$ 可经由 $\ker p_{\mathsf{M}} = f_!(J)$ 分解。因此，$g' - g'' = (g' - g'' - w \circ u) + w \circ u$ 可经由 $f_!(J) \oplus f_!(J') \cong f_!(J \oplus J')$ 分解。这表明 g' 和 g'' 在 $\frac{\mathcal{C}^{T(X)}}{f_!\quad \mathcal{C}}$(单射) 中相等。□

由命题 5.3 可知， $\Omega\,\mathsf{M}$ 和 p_{M} 在 $\frac{\mathcal{C}^{T(X)}}{f_!\quad \mathcal{C}}$(内射) 中在同构意义下唯一，且与 j 的选取无关：$L_1\mathsf{M}$ 的顶 x 和提升 e： $X(M) \to J$。事实上， $\Omega\,\mathsf{M}$ 的泛性质意味着赋值 $\mathsf{M} \mapsto \Omega\mathsf{M}$ 可以构成一个函子，以下结果将予以说明。这里记

$$\overline{\mathrm{Mono}}(X) = \tfrac{\mathrm{Mono}(X)}{f_!(\mathrm{inj}\,\mathcal{C})}$$

因为由命题 4.2 和命题 4.3 可知，$\mathrm{Mono}(X)$ 中的内射对象子范畴是 $f_!($内射 $\mathcal{C})$。

推论 5.4。赋值 $\mathsf{M} \mapsto \Omega\mathsf{M}$ 诱导出一个函子

$$\Omega\colon \tfrac{\mathcal{C}^{T(X)}}{f_!(\mathrm{inj}\,\mathcal{C})} \to \overline{\mathrm{Mono}}(X)$$

它是包含函子 $i\colon \mathrm{Mono}(X) \to \frac{\mathcal{C}^{T(X)}}{f_!\quad \mathcal{C}}$(内射) 的右伴随。此外，在 M 处，该伴随的余单位 $i \dashv \Omega$ 为 p_{M}。

证明。复合 p_{M} 给出一个同构

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{Mono}}(X)}(\mathsf{N}, \Omega\,\mathsf{M}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\frac{\mathcal{C}^{T(X)}}{f_!(\mathrm{inj}\,\mathcal{C})}}(\mathsf{N}, \mathsf{M})$$

对于 $\mathsf{N} \in \mathrm{Mono}(X)$，由命题 5.3 得出。由于 $\Omega\mathsf{M} \in \mathrm{Mono}(X)$，由 Yoneda 引理可知，赋值 $\mathsf{M} \mapsto \Omega\,\mathsf{M}$ 定义了一个函子 $\Omega\colon \frac{\mathcal{C}^{T(X)}}{f_!\quad \mathcal{C}}$(单射) $\to \mathrm{Mono}(X)$，使得该同构

$$\mathrm{Hom}_{\frac{\mathcal{C}^{T(X)}}{f_!(\mathrm{inj}\,\mathcal{C})}}(i(-), \mathsf{M}) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{Mono}}(X)}(-, \Omega\,\mathsf{M})$$

在 M 中自然。若 $\mathsf{N} = \Omega\,\mathsf{M}$，则恒等映射 $1_{\Omega\,\mathsf{M}}$ 的像为 p_{M}，因此它就是 M 处的余单位。由此得证。□

注 5.5。在 [Che12 的例 5.3] 中，他们解释了如何将关联 $\mathsf{M} \mapsto \Omega\mathsf{M}$ 理解为三角函子，其中 $\mathcal{C}^{T(X)} = \mathrm{rep}(1 \to 2, \mathcal{B})$，且 $\mathcal{B}$ 是弗罗贝尼乌斯正合的。

5.2. 一般情形。在本小节中，我们证明从单态射范畴到稳定范畴的 Eilenberg–Moore 范畴的函子诱导出一个等价。

定义 5.6. 若一个函子是满的、稠密的且反映同构，则称其为等价。

本小节余下部分将证明以下结果。

定理 5.7. 典范函子 $\mathrm{Mono}(X) \to \overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 是一个等价。

注 5.8. Aus71《第二章》中指出，等价保持并反映若干重要的表示论概念。特别地，定理 5.7 有以下推论：

(i) $\mathrm{Mono}(X)$ 中的一个对象是不可分解对象，当且仅当它在 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中的像是不可分解的。(ii) $\mathrm{Mono}(X)$ 中的对象的同构类与 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中的对象的同构类之间存在一个双射，该双射在不可分解对象上限制为一个双射。(iii) $\mathrm{Mono}(X)$ 是 Krull–Remak–Schmidt 类别，当且仅当 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 是 Krull–Remak–Schmidt 类别。

在对 $\mathcal{C}$ 施加温和条件时，$\mathrm{Mono}(X)$ 中的不可分解非内射对象与 $\mathrm{Mono}(X)$ 中的不可分解对象之间存在双射。因此，给定 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中的一个不可分解对象，我们便有一个与之对应的唯一（在同构意义下）$\mathrm{Mono}(X)$ 中的不可分解非内射对象。在第 7 节中，我们将说明，Mimo 构造是上一小节所定义的 Ω 的一种细化，它提供了一种显式描述该对象的方法。特别地，定理 7.9 将 $\mathrm{Mono}(X)$ 中不可分解对象的研究归结为对 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中不可分解对象的研究，而后者通常简单得多。

引理 5.9. 典范函子 $\mathrm{Mono}(X) \to \overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 是稠密的。

证明。根据引理 3.13，$\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中的对象 M 由态射 $h_{\mathsf{M}}\colon X(M) \to M$ in $\overline{\mathcal{C}}$ 给出。选取一个提升 $h'\colon X(M) \to M$ to $\mathcal{C}$ of h_{M}，并令 M′ 为 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 中与之对应的对象。根据定理 5.2，对象 ΩM′ 属于 $\mathrm{Mono}(X)$，且由构造可知，它在 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中必与 M 同构。这就证明了该断言。□

接下来，我们证明函子 $\mathrm{Mono}(X) \to \overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 是满的。

引理 5.10. 设 $\mathsf{M} \in \mathrm{Mono}(X)$ 且 $\mathsf{N} \in \mathcal{C}^{T(X)}$。那么，在 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中的任意态射 $\mathsf{M} \to \mathsf{N}$ 都可以提升为 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 中的一个态射。特别地，函子 $\mathrm{Mono}(X) \to \overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 是满的。

证明。设 $\overline{g}\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ 是 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中的一个态射，并设 $g'\colon M \to N$ 是 $f^*(\overline{g})$ 到 $\mathcal{C}$ 的任意提升。由于 $f^*(\overline{g}) \circ h_{\mathsf{M}}$ 和 $h_{\mathsf{N}} \circ X(f^*(\overline{g}))$ 在 $\overline{\mathcal{C}}$ 中相等，其差

$$g' \circ h_{\mathsf{M}} - h_{\mathsf{N}} \circ X(g')\colon X(M) \to N$$

等于一个复合态射 $X(M) \xrightarrow{u'} J \xrightarrow{v'} N$，其中 J 是内射。此外，由于 h_{M} 是一个单态射，映射 u' 可以提升为一个态射 $u_0\colon M \to J$。类似地，由于 $X(J)$ 是内射，映射 $X(u_0)\colon X(M) \to X(J)$ 可以提升为一个态射 $u_1\colon M \to X(J)$。重复这一论证，我们对每个 $i \geq 0$ 都得到映射 $u_i\colon M \to X^i(J)$，使得对所有 $i > 0$，$u_i \circ h_{\mathsf{M}} = X(u_{i-1})$。现在令 $I \coloneqq \bigoplus_{i\geq 0} X^i(J)$，并注意到 I 是内射的，因为 X 是局部幂零的，因此 $\bigoplus_{i\geq 0} X^i(J)$ 是一个有限和。令 $v\colon I \to N$ 为在分量 $X^i(J)$ 上由以下复合态射给出的唯一映射

$$X^i(J) \xrightarrow{X^i(v')} X^i(N) \xrightarrow{X^{i-1}(h_{\mathsf{N}})} X^{i-1}(N) \xrightarrow{X^{i-2}(h_{\mathsf{N}})} \dots \xrightarrow{h_{\mathsf{N}}} N.$$

此外，令 $u\colon M \to I$ 为唯一映射，其在分量 $X^i(J)$ 上由 $u_i\colon M \to X^i(J)$ 给出。若令 $g = g' - v \circ u$，则经简短计算可得 $g \circ h_{\mathsf{M}} = h_{\mathsf{N}} \circ X(g)$，因此 g 是 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 中从 M → 到 N 的态射。由于 g 在 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中等于 $\overline{g}$，且 $\overline{g}$ 是任意的，这就证明了该断言。□

引理 5.11. 典范函子 $\mathrm{Mono}(X) \to \overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 反映同构。

证明。设 $g\colon \mathsf{M} \to \mathsf{N}$ 是 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 中的一个态射，它在 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中变为同构。考虑具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & f_!X(M) & \xrightarrow{\iota_M - f_!(h_{\mathsf{M}})} & f_!(M) & \xrightarrow{\varepsilon_{\mathsf{M}}} & \mathsf{M} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle f_!Xf^*(g)} & & \downarrow{\scriptstyle f_!f^*(g)} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \\
0 & \longrightarrow & f_!X(N) & \xrightarrow{\iota_N - f_!(h_{\mathsf{N}})} & f_!(N) & \xrightarrow{\varepsilon_{\mathsf{N}}} & \mathsf{N} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

由于 $f^*(g)\colon M \to N$ 是 $\overline{\mathcal{C}}$ 中的同构，映射 $f_!f^*(g)$ 和 $f_!Xf^*(g)$ 是 $\mathrm{Mono}(X)$ 中的同构。现在，将 $\mathrm{Mono}(X)$ 视为如 [KV87]，（另见[BM94] 和 [ABM98]）所述的右三角范畴时，M 同构于 $\iota_M - f_!(h_{\mathsf{M}})$ 的锥，N 同构于 $\iota_N - f_!(h_{\mathsf{N}})$ 的锥。由于最左侧的两个竖直映射 $f_!Xf^*(g)$ 和 $f_!f^*(g)$ 是 Mono(X) 中的同构，因此锥之间的映射 g 也必定是 $\mathrm{Mono}(X)$ 中的同构，参见例如 [ABM98, Corollary 1.5] 的证明。这就证明了该断言。□

定理 5.7 的证明。由引理 5.9、引理 5.10 和引理 5.11 可得。□

注 5.12. 设 $\mathbb{K}$ 是一个域，Q 是一个有限无环箭图。考虑例 3.11 中的 $\mathrm{rep}(Q, \mathrm{mod}_{\mathbb{K}}[x]/(x^2))$。那么范畴 $\mathrm{Mono}(X)$ 等价于 [RZ17] 中讨论的完美微分kQ-模。此外，由于 $\mathrm{mod}_{\mathbb{K}}[x](x^2) \cong \mathrm{mod}\mathbb{K}$，可得

$$\mathrm{rep}(Q, \overline{\mathrm{mod}}_{\mathbb{K}}[x](x^2)) \cong \mathrm{rep}(Q, \mathrm{mod}_{\mathbb{K}}).$$

因此，我们有一个等价 $\overline{\mathrm{Mono}(X)} \to \mathrm{rep}(Q, \mathrm{mod}_{\mathbb{K}})$。复合态射

$$\mathrm{Mono}(X) \to \overline{\mathrm{Mono}(X)} \to \mathrm{rep}(Q, \mathrm{mod}_{\mathbb{K}})$$

可与 [RZ17, 定理 1.1 b)] 中的同调函子等同。

5.3. 遗传情形。回顾一下，若存在一个 $0 \to N \to I \to M \to 0$ 正合列 $\mathcal{C}$，其中 I 是内射的，则称对象 $M \in \mathcal{C}$ 为（对象 N 的）余 syzygy。若 $\mathcal{C}$ 中的任意余 syzygy 都是内射的，则称范畴$\mathcal{C}$ 为遗传的。我们的目标是证明，当 $\mathcal{C}$ 是遗传的时，定理 5.7 中的函子成为真正的等价。我们首先证明，在 Mono(X) 中，相对投射对象对余 syzygy 封闭。

命题 5.13. 假设我们有一个正合列

$$0 \to f_!(M) \xrightarrow{g} f_!(J) \to \mathsf{N} \to 0$$

在 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 中，其中 $\mathsf{N} \in$Mono(X) 且 $J \in \mathcal{C}$ 内射。则对某个 $N' \in \mathcal{C}$，$\mathsf{N} \cong f_!(N')$。

证明. 取一个正合列

$$0 \to M \xrightarrow{i} I \xrightarrow{q} M' \to 0$$

在 $\mathcal{C}$ 中，其中 I 内射。应用 $f_!(-)$，得到一个正合列

$$0 \to f_!(M) \xrightarrow{f_!(i)} f_!(I) \xrightarrow{f_!(q)} f_!(M') \to 0$$

在 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 中。这说明 N 和 $f_!(M')$ 都是 M 在 Mono(X) 中的余 syzygy。但一个对象的余 syzygy 在 Mono(X) 中是良定义的，见 [Hel60]。因此，存在内射对象 $J_1, J_2 \in \mathcal{C}$ 以及一个同构

$$\mathsf{N} \oplus f_!(J_1) \cong f_!(M') \oplus f_!(J_2).$$

特别地，N 是 $f_!(M' \oplus J_2)$ 的一个直和项，因此由命题 3.7 可知，对于某个 $N' \in \mathcal{C}$，存在同构 $\mathsf{N} \cong f_!(N')$。□

接下来我们证明，如果 Mono(X) 中的一个态射按分量经由一个内射对象分解，那么它必定经由一个相对投射对象分解。

命题 5.14. 设 g: M $\to$N 是 Mono(X) 中的一个态射，并假设 $f^*(g)$: $M \to N$经由 $\mathcal{C}$ 中的一个内射对象分解。那么 g 经由形如 $f_!(K)$ 的对象分解，其中K 是 $X(M)$ 的一个余 syzygy。

证明。设 r: $M \to J$是一个单态射，且 J 内射。由于 $f^*(g)$ 经由一个内射对象分解，它也必定经由 r分解，因此我们可以写成 $f^*(g) = s \circ r$，其中某个映射s: $J \to N$。令 K′为余单位 ε_{M}: $f_!(M) \to$M 沿 $f_!(r)$: $f_!(M) \to f_!(J)$ 的推出。于是我们得到如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} f_!(M) & \xrightarrow{f_!(r)} & f_!(J) & \xrightarrow{f_!(s)} & f_!(N) \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{\mathsf{M}}} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{\mathsf{N}}} \\ \mathsf{M} & \longrightarrow & \mathsf{K}' & \longrightarrow & \mathsf{N}, \end{array}$$

其中左侧方形是推出方形，右下方的态射被唯一确定，使得右侧方形交换，且复合态射 M $\to$ K′ $\to$ N 等于 g。注意，由于 $f_!(r)$ 是单态射，左侧方形也是拉回方形。因此，由于 ε_{M} 是一个核为 $f_!X(M)$ 的满态射，对于 $f_!(J) \to$ K′ 也必然如此，于是我们得到一个正合列

$$0 \to f_!X(M) \to f_!(J) \to \mathsf{K}' \to 0.$$

由命题 5.13 可知，对于某个对象 $K \in \mathcal{C}$，K′ $\cong f_!(K)$。对该正合列应用顶X，得到正合列

$$0 \to X(M) \to J \to K \to 0.$$

这表明 K 是 $X(M)$ 的余 syzygy，从而证明了这一断言。 □

现在我们可以证明本小节的主要结果。

定理 5.15. 以下各项等价：

(1) X 的像中的任意对象的内射维数至多为 1。

(2) $\overline{\mathrm{Mono}}(X) \to \overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ *is an equivalence.*

特别地，若 $\mathcal{C}$ 是遗传的，则此结论成立。

证明。我们已经知道 (2) 中的函子是满且稠密的，因此该陈述等价于函子是忠实的。根据命题 5.14，Mono(X) 中任何在 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中为 0 的态射 g，都必须经由形如 $f_!(K)$ 的对象分解，其中 K 是 $\mathcal{C}$ 中形如 $X(M)$ 的对象的余 syzygy。若 (1) 成立，则 K 必须是内射的，因此 g 在 M$\underline{\text{ono}}(X)$ 中必须为 0。

接下来假设 (2) 成立，并任取 $M \in \mathcal{C}$。选取一个正合列

$$0 \to X(M) \to J \to K \to 0$$

其中 J 是内射的。我们的目标是证明 K 是内射的。应用 $f_!$ 并沿 ι_M 作推出，得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & f_!(X(M)) & \longrightarrow & f_!(J) & \longrightarrow & f_!(K) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \iota_M} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & f_!(M) & \longrightarrow & \mathsf{E} & \xrightarrow{p} & f_!(K) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

其中各行正合。注意，E 属于 Mono(X)，因为它是 Mono(X) 中两个对象的扩张。由于 $f^*(\iota_M)$ 是一个分裂单态射，$f^*(g)$ 必须是分裂单态射，而 $f^*(p)$ 必须经由 $f^*f_!(J)$ 分解。因此，p 在 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中为 0。由假设 (2) 可知，p 经由一个形如 $f_!(I)$ 的对象分解，其中 I 在 $\mathcal{C}$ 中是内射的。因此，顶x(p) : 顶xE $\to K$ 经由 I 分解。我们断言，顶x(p) 也是一个分裂满态射。事实上，将顶x 应用于上图可得一个各行正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X(M) & \longrightarrow & J & \longrightarrow & K & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{top}_X(\iota_M)} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{top}_X(g)} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & \mathrm{top}_X\,\mathsf{E} & \xrightarrow{\mathrm{top}_X(p)} & K & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

由于 top$x$(ι_M) $= 0$且左侧方块是一个推出，映射 $M \to$top$x$E 是一个分裂单态射。因此，top$x$(p) 必须是一个分裂满态射。由于 top$x$(p) 可经由I分解，可知诱导映射 $I \to K$ 也是一个分裂满态射。因此，K 是一个内射对象的直和项，故必为内射对象。□

注记 5.16. 考虑有限无环箭图 Q 在 $\mathcal{B}$上的表示范畴 rep($Q, \mathcal{B}$)，如例 3.11 中所述，并假设 $\mathcal{B}$ 有足够多的内射对象。令 Mono($Q, \mathcal{B}$) 为单态射范畴，并考虑函子

$$\overline{\mathrm{Mono}}(Q, \mathcal{B}) \to \mathrm{rep}(Q, \overline{\mathcal{B}})$$

见定理 5.15。若 Q 至少有一条箭，则 X 的像包含至少一个$\mathcal{B}$的副本。由定理 5.15 可知，上述函子是等价，当且仅当 $\mathcal{B}$是遗传的。相反，若 Q 没有箭，则 X 是零函子，因此 (1) 自动成立；而在 (2) 中，两个范畴都与 $\prod_{\mathrm{i}\in Q_0} \overline{\mathcal{C}}$重合。

我们尤其关注 $\mathcal{C}$ 是遗传的且 $\underline{\overline{\mathcal{C}}}$ 是阿贝尔的情形。这意味着 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 是阿贝尔的，因此根据定理 5.15，Mono(X) 是阿贝尔的。由此可知，研究阿贝尔范畴中的不可分解对象，就能得到 Mono(X) 中不可分解的非内射对象。

注 5.17. 假设 $\mathcal{C}$ 是某个 Artin 代数 Λ上的左 Λ-模范畴。那么 $\mathcal{C}$ 是遗传的，当且仅当 Λ 是左遗传的。文献 [MZ15 的定理 9.5] 证明，对于这类环，$\mathcal{C}$ 模去投射对象所得的稳定范畴（记作 $\underline{\mathcal{C}}$）是阿贝尔范畴，当且仅当 Λ 的内射包是投射的。由 [Kra97 的命题 5.5], 可知，这也等价于 $\overline{\mathcal{C}}$是阿贝尔范畴。现在，Λ 的内射包是投射的，当且仅当 Λ 同构于有限个除环上的完全分块上三角矩阵代数的有限直积，见[MZ15 的注 7.6]。

注 5.18. 考虑表示范畴 $\mathsf{rep}(Q,\mathcal{B})$，其中对象是有限无环箭图 Q 在$\mathcal{B}$上的表示，如例 3.11 所示。进一步假设 $\mathcal{B}=\operatorname{Mod}{}_{\Bbbk}\mathbb{A}_n$，其中 ${}_{\Bbbk}\mathbb{A}_n$ 是域 $\Bbbk$ 上的线性定向 $\mathbb{A}_n$-箭图的路径代数。由于 $\mathsf{Mod}\,{}_{\Bbbk}\mathbb{A}_n\cong\mathsf{Mod}\,{}_{\Bbbk}\mathbb{A}_{n-1}$，我们得到

$$\mathcal{C}=\prod_{\mathsf{i}\in Q_0}\operatorname{Mod}{}_{\Bbbk}\mathbb{A}_n\quad\text{and}\quad\overline{\mathcal{C}}\cong\prod_{\mathsf{i}\in Q_0}\operatorname{Mod}{}_{\Bbbk}\mathbb{A}_{n-1}.$$

因此，由定理 5.15 可得一个等价

$$\overline{\operatorname{Mono}}(Q,\operatorname{Mod}{}_{\Bbbk}\mathbb{A}_n)\cong\operatorname{rep}(Q,\operatorname{Mod}{}_{\Bbbk}\mathbb{A}_{n-1}).$$

令 Q 为线性定向的 $\mathbb{A}_m$-箭图，即可得到 [BBOS20，定理 1.5] 的对偶。注意

$$\prod_{\mathsf{i}\in Q_0}\operatorname{Mod}{}_{\Bbbk}\mathbb{A}_n\cong\operatorname{Mod}\Lambda$$

其中 $\Lambda=\prod_{\mathsf{i}\in Q_0}{}_{\Bbbk}\mathbb{A}_n$ 满足注 5.17 中的条件。

注 5.19. 还有其他遗传范畴 $\mathcal{C}$，使得 $\overline{\mathcal{C}}$ 是阿贝尔的。事实上，令 $\mathcal{C}=\operatorname{\mathsf{art}}\Lambda$ 为戴德金整环 Λ上的阿廷模范畴。该范畴是阿贝尔的，在内射包下封闭 [Vó68，定理 2]，，并且是遗传的。我们断言，任意阿廷模都必定是不可分解内射模与有限长度模的有限和。事实上，由于 Λ 上的任意不可分解有限长度模都具有形式 $\Lambda/\mathfrak{m}^n$，其中 $\mathfrak{m}$ 是一个极大理想，因此有限长度模构成了 Kra22] 所说的单列范畴。根据 [Kra22，命题 2.4.20]，任意阿廷模都是有限长度模的滤过余极限，因此由 [Kra22，定理 13.1.28] 可得该断言。

考虑稳定范畴 $\overline{\mathcal{C}}$。由于戴德金整环上的任何内射模都有无限长度 [Har69，推论 2], 中的对象在同构意义下恰好是有限长度模。此外，由于 Λ 是遗传的，从内射模到有限长度模不存在非零态射，因此 $\overline{\mathcal{C}}$ 必须等价于 Λ 上有限长度模的阿贝尔范畴 $\operatorname{\mathsf{fl}}\Lambda$。

6. The Mimo-construction

我们固定一个 $\Bbbk$-线性阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$，它有足够多的内射对象；并固定一个正合函子 $X\colon\mathcal{C}\to\mathcal{C}$，该函子是局部幂零的，且保持内射对象。本节的目标是将 Ringel–Schmidmeier 的 Mimo 构造 [RS08b] 推广到我们的情形。特别地，我们证明它是一个极小右 $\mathsf{Mono}(X)$–逼近。

6.1. 定义与性质。我们从 Mimo 构造的定义开始。

定义 6.1. 设 M 是 $\mathcal{C}^{T(X)}$ 中的一个对象，并考虑定义 5.1 中的构造 $\Omega\,\mathsf{M}$。若 J是 L_1 顶$X\,\mathsf{M}$ 的一个内射包，则记 $\mathsf{Mimo}\,\mathsf{M}:=\Omega\mathsf{M}$，并称其为 M 的 Mimo 构造。

注意，除非 $\mathcal{C}$ 有内射包，否则并非对所有 M，$\mathsf{Mimo}\,\mathsf{M}$ 都存在。我们证明，若 $\mathsf{Mimo}\,\mathsf{M}$ 存在，则它是一个极小右逼近，因此在同构意义下唯一。

定理 6.2. 设 $\mathsf{M}\in\mathcal{C}^{T(X)}$，并假设 $\mathsf{Mimo}\,\mathsf{M}$ 存在。则典范态射$p_{\mathsf{M}}\colon\mathsf{Mimo}\,\mathsf{M}\to\mathsf{M}$ 是一个极小的 $\mathsf{Mono}(X)$-逼近。

证明。根据定理 5.2，我们只需证明 p_{M} 是右极小的。设 $\varphi\colon\mathsf{Mimo}\,\mathsf{M}\to\mathsf{Mimo}\,\mathsf{M}$ 是一个满足 $p_{\mathsf{M}}\circ\varphi=p_{\mathsf{M}}$的态射。考虑如下具有正合行的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & f_{\mathsf{I}}(J) & \longrightarrow & \mathsf{Mimo}\,\mathsf{M} & \xrightarrow{p_{\mathsf{M}}} & \mathsf{M} & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & f_{\mathsf{I}}(J) & \longrightarrow & \mathsf{Mimo}\,\mathsf{M} & \xrightarrow{p_{\mathsf{M}}} & \mathsf{M} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中， ψ 由右侧方块的交换性诱导而来。应用顶X ，得到交换图：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L_1 \operatorname{top}_X \mathsf{M} & \xrightarrow{j} & J & \longrightarrow & \operatorname{top}_X(\operatorname{Mimo}\mathsf{M}) & \longrightarrow & \operatorname{top}_X \mathsf{M} & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{top}_X(\psi)} & & \downarrow{\scriptstyle \operatorname{top}_X(\varphi)} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & L_1 \operatorname{top}_X \mathsf{M} & \xrightarrow{j} & J & \longrightarrow & \operatorname{top}_X(\operatorname{Mimo}\mathsf{M}) & \longrightarrow & \operatorname{top}_X \mathsf{M} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

由于 j 是极小左逼近，因此顶$x(\psi)$ 是同构。由此，根据引理 3.24 的第 (2) 部分， ψ 是同构。接着，五引理推出 φ 是同构。□

接下来，我们证明 Mimo M 的同构类仅取决于 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中 M 的同构类。这在第 7 节中发挥重要作用。首先，我们证明 Ω M 的一个类似结论。

引理 6.3. 设 M, N $\in \mathcal{C}^{T(X)}$。若 M $\cong$N 在 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中成立，则 ΩM$\cong \Omega$N 在 Mono(X) 中成立。

证明。考虑 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中 ΩM $\xrightarrow{\cong}$M $\xrightarrow{\cong}$N $\xrightarrow{\cong}$ ΩN 这些同构的复合态射。根据引理 5.10，函子 Mono(X) $\to \overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 是满的，因此该复合态射可提升为 Mono(X) 中从 ΩM 到 $\to \Omega$N 的一个态射。根据引理 5.11，函子 Mono(X) $\to \overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 反映同构，因此该提升必为 Mono(X) 中的同构。这就证明了该结论。□

注 6.4. 我们并未声称在引理 6.3 中， Ω 是 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 上的函子。正如证明中所见，同构 ΩM$\cong \Omega$N的选取并不唯一。

为了得到关于 Mimo 的类似结果，我们首先需要证明一个关于不存在非零内射直和项的结果。

引理 6.5. 假设 $\mathcal{C}$ 有内射包。令 M $\in \mathcal{C}^{T(X)}$，并假设 M 没有非零内射直和项。设 g: $f_!(I) \to$ Mimo M 是 Mono(X)中的一个态射。若 I是内射的，则 g 必属于 Mono(X)的根。特别地，Mimo M 在 add $f_!$(inj $\mathcal{C}$)中没有非零直和项。

证明. 根据定义，若对任意态射 g': Mimo M $\to f_!(I)$，差$1_{f_!(I)} - g' \circ g$ 都是同构，则 g属于根。为此，只需证明 $g' \circ g$属于根，因为这样根据定义，$1_{f_!(I)} - 1_{f_!(I)} \circ (g' \circ g) = 1_{f_!(I)} - g' \circ g$便是同构。令 r: $f_!(M) \to$Mimo M 和 s: $f_!(J) \to$Mimo M 如图 (5.1.1) 所示（其中以 Mimo M 替换 ΩM）。考虑该图

$$\begin{array}{ccccc} f_!(I) & \xrightarrow{g} & \operatorname{Mimo}\mathsf{M} & \xrightarrow{g'} & f_!(I) \\ & \overset{k}{\searrow} & \uparrow{\scriptstyle (r,s)} & \nearrow{\scriptstyle (g'\circ r, g'\circ s)} & \\ & & f_!(M) \oplus f_!(J) & & \end{array}$$

我们要证明存在一个态射 k，使左侧三角形交换。为此，注意到伴随 $f_! \dashv f^*$ 的三角恒等式表明 $f^*(\varepsilon_{\mathsf{M}})$ 是一个分裂满态射。因此，序列

$$0 \to f^* f_! X(M) \xrightarrow{f^*(\iota_M) - f^* f_!(h_{\mathsf{M}})} f^* f_!(M) \xrightarrow{f^*(\varepsilon_{\mathsf{M}})} M \to 0$$

是分裂正合的。因此， $f^*(\iota_M) - f^* f_!(h_{\mathsf{M}})$ 是一个分裂单态射。所以，短正合列（根据 MimoM 作为推出的定义得到）

$$0 \to f^* f_! X(M) \xrightarrow{\begin{pmatrix} f^* f_!(e) \\ f^*(\iota_M) - f^* f_!(h_{\mathsf{M}}) \end{pmatrix}} f^* f_!(J) \oplus f^* f_!(M) \xrightarrow{\begin{pmatrix} f^*(s) & f^*(r) \end{pmatrix}} f^*(\operatorname{Mimo}\mathsf{M}) \to 0$$

是分裂正合的。由此可得 $(f^*(s)\ \ f^*(r))$ 是一个分裂满态射。根据引理 3.5，这意味着存在上文所述的态射 k 。

接下来我们断言，态射 $(\operatorname{top}_X(g' \circ r), \operatorname{top}_X(g' \circ s))$ 属于根。事实上，态射 $\operatorname{top}_X(g' \circ r)$: $M \to I$ 属于根，这是由引理 2.5（2）得出的，因为 M 没有非零

内射直和项。此外，复合态射

$$L_1 \operatorname{top}_X \mathsf{M} \xrightarrow{j} J \xrightarrow{\operatorname{top}_X(g'\circ s)} I$$

根据 Mimo 的构造，这必为 0。因此，$\operatorname{top}_X(g'\circ s)$ 经由 j 的余核分解。根据引理 2.5 (1)，由于 j 是一个内射包，该余核是一个根态射。因此，$\operatorname{top}_X(g'\circ s)$ 本身必为根态射。这说明 $(\operatorname{top}_X(g'\circ r), \operatorname{top}_X(g'\circ s))$ 属于根。根据引理 3.25，态射 $(g'\circ r, g'\circ s)$ 属于 $\mathrm{Mono}(X)$ 的根。由于 $g'\circ g$ 经由 $(g'\circ r, g'\circ s)$ 分解，这就证明了所述结论。□

现在，我们可以证明一个关于 Mimo 构造、类似于引理 6.3 的结果。这与 [RS08b, 命题 4.1] 相对应。

推论 6.6. 假设 $\mathcal{C}$ 具有内射包。设 M 和 N 是 $\mathcal{C}^{T(X)}$中的对象。假设 M和 N没有非零内射直和项，且 M ≅N 在 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$中成立。那么 Mimo M ≅Mimo N 在 $\mathrm{Mono}(X)$ 中成立。

证明. 由引理 6.3 可知，Mimo M ≅Mimo N 在 $\mathrm{Mono}(X)$ 中成立。因此，存在内射对象 $I_1, I_2 \in \mathcal{C}$，使得 Mimo M $\oplus f_!(I_1)$ 和 Mimo N $\oplus f_!(I_2)$ 同构。由引理 6.5 和引理 2.6 即可得出结论。□

6.2. 调制的 Mimo。为了描述调制的 Mimo M，我们先将其描述为 $(X \Downarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ 中的一个对象，并将 (5.1.1) 中的 r, s 和 p_{M} 描述为 $\mathcal{C}$中的态射。回忆一下，$f^*f_!(J) = \bigoplus_{i\geq 0} X^i(J)$ 且 $f^*f_!(M) = \bigoplus_{i\geq 0} X^i(M)$。

引理 6.7。固定记号如定义 5.1。则存在一个同构

$$f^*(\Omega\,\mathsf{M}) \cong M \oplus \bigoplus_{i\geq 0} X^i(J)$$

使得：

(1) $f^*(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \bigoplus_{i\geq 0} X^i(J) \to M \oplus \bigoplus_{i\geq 0} X^i(J)$。(2) $f^*(r)$:

$\bigoplus_{i\geq 0} X^i(M) \to M \oplus \bigoplus_{i\geq 0} X^i(J)$ 由以下映射诱导

- $X^k(M) \xrightarrow{h_{\mathsf{M}}\circ\cdots\circ X^{k-1}(h_{\mathsf{M}})} M$ 对所有 $k \geq 0$ 均成立。（其中 $k = 0$ 给出恒等映射。）
- $X^{j+k+1}(M) \xrightarrow{X^j(e)\circ X^{j+1}(h_{\mathsf{M}})\circ\cdots\circ X^{j+k}(h_{\mathsf{M}})} X^j(J)$

对所有 $j, k \geq 0$ 均成立。(3) $f^*(p_{\mathsf{M}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} : M \oplus \bigoplus_{i\geq 0} X^i(J) \to M$。

(4) $h_{\Omega\,\mathsf{M}} : X(M) \oplus \bigoplus_{i\geq 0} X^{i+1}(J) \to M \oplus \bigoplus_{i\geq 0} X^i(J)$ 由以下映射诱导

- $X^{i+1}(J) \xrightarrow{1} X^{i+1}(J)$ 对所有 $i \geq 0$ 均成立。
- $X(M) \xrightarrow{h_{\mathsf{M}}} M$.
- $X(M) \xrightarrow{e} J$。

证明。设 $\mathsf{M}' \in (X \Downarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$ 是由 $f^*(\mathsf{M}') = M \oplus \bigoplus_{i\geq 0} X^i(J)$ 以及映射 $h_{\mathsf{M}'} : Xf^*(\mathsf{M}') \to f^*(\mathsf{M}')$ 定义的对象，如式 (4) 所示。回忆一下，$h_{f_!(M)} : \bigoplus_{i\geq 0} X^{i+1}(M) \to \bigoplus_{i\geq 0} X^i(M)$ 和 $h_{f_!(J)} : \bigoplus_{i\geq 0} X^{i+1}(J) \to \bigoplus_{i\geq 0} X^i(J)$ 分别由映射 $X^{i+1}(M) \xrightarrow{1} X^{i+1}(M)$ 和$X^{i+1}(J) \xrightarrow{1} X^{i+1}(J)$ 对 $i \geq 0$ 诱导。直接计算可得

$$h_{\mathsf{M}'} \circ X(r') = r' \circ h_{f_!(M)} \quad \text{and} \quad h_{\mathsf{M}'} \circ X(s') = s' \circ h_{f_!(J)}$$

其中 r' 和 s' 分别由公式 (2) 和 (1) 定义。因此，存在定义良好的态射 $r : f_!(M) \to \mathsf{M}'$和 $s : f_!(J) \to \mathsf{M}'$，它们属于 $\mathcal{C}^{T(X)} \cong (X \Downarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}})$，满足 $f^*(r) = r'$和 $f^*(s) = s'$。现在注意到该序列

$$0 \to f_!X(M) \xrightarrow{\begin{pmatrix} \iota_M - f_!(h_{\mathsf{M}}) \\ f_!(e) \end{pmatrix}} f_!(M) \oplus f_!(J) \xrightarrow{\begin{pmatrix} r & -s \end{pmatrix}} \mathsf{M}' \to 0$$

是正合的，因为应用 f^* 后它是正合的。这意味着在

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & f_!X(M) & \xrightarrow{\iota_M - f_!(h_{\mathsf{M}})} & f_!(M) & \xrightarrow{\varepsilon_{\mathsf{M}}} & \mathsf{M} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_!(e)} & & \downarrow{\scriptstyle r} & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & f_!(J) & \xrightarrow{s} & \mathsf{M}' & \xrightarrow{p_{\mathsf{M}}} & \mathsf{M} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

是一个推出方形。但由于 $\mathfrak{Q}\mathsf{M}$ 也由这个推出方形定义，因此我们得到一个同构 $\mathsf{M}' \cong \mathfrak{Q}\,\mathsf{M}$。最后，由于按 (3) 定义的 $f^*(p_{\mathsf{M}})$ 是 $f^*(s)$ 的余核，它必定可提升为一个映射 $p_{\mathsf{M}}\colon \mathsf{M}' \to \mathsf{M}$，使得图中的下方序列正合。由于 $f^*(p_{\mathsf{M}}) \circ f^*(r) = f^*(\varepsilon_{\mathsf{M}})$，右侧方形必定交换。这就证明了该结论。□

例 6.8. 设 Q 是一个有限无环箭图，且 $\mathfrak{B}$ 是由有足够多的内射对象的阿贝尔范畴和保持内射对象的正合函子构成的调制，见例 3.9。设 $(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha)_{\mathtt{i}\in Q_0,\ \alpha\in Q_1}$ 是一个 $\mathfrak{B}$-表示。我们想要按照定义 5.1 计算 $\mathfrak{Q}(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha)$。为此，对每个 $\mathtt{k} \in Q_0$ 选取一个内射对象 $J_{\mathtt{k}}$，使其属于 $\mathcal{B}_{\mathtt{k}}$，并取一个映射

$$e_{\mathtt{k}}\colon \bigoplus_{\alpha\in Q_1, t(\alpha)=\mathtt{k}} F_\alpha(B_{s(\alpha)}) \to J_{\mathtt{k}}$$

其在 L_1 顶 $x(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha)_{\mathtt{k}} = \ker B_{\mathtt{k},\ \mathrm{in}}$ 上的限制是一个单态射，参见例 3.26。由引理 6.7 可知

$$\mathfrak{Q}(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha)_{\mathtt{k}} = B_{\mathtt{k}} \oplus \bigoplus_{p\in Q_{\geq 0}, t(p)=\mathtt{k}} F_p(J_{s(p)})$$

由引理 6.7 (4)，与箭头 $\beta\colon \mathtt{j} \to \mathtt{k}$ 相关联的态射 $\mathfrak{Q}(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha)_\beta\colon\ \mathfrak{Q}(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha)_{\mathtt{j}} \to \mathfrak{Q}(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha)_{\mathtt{k}}$ 是映射

$$F_\beta(B_{\mathtt{j}}) \oplus \bigoplus_{p\in Q_{\geq 0}, t(p)=\mathtt{j}} F_\beta F_p(J_{s(p)}) \to B_{\mathtt{k}} \oplus \bigoplus_{q\in Q_{\geq 0}, t(q)=\mathtt{k}} F_q(J_{s(q)})$$

它由恒等映射 $F_\beta F_p(J_{s(p)}) \xrightarrow{1} F_q(J_{s(q)})$（对于 $q = \beta p$）、映射 $B_\beta\colon\ F_\beta(B_{\mathtt{j}}) \to B_{\mathtt{k}}$，以及复合态射 $F_\beta(B_{\mathtt{j}}) \to \bigoplus_{\alpha\in Q_1,\ t(\alpha)=\mathtt{k}} F_\alpha(B_{s(\alpha)}) \xrightarrow{e_{\mathtt{k}}} J_{\mathtt{k}}$ 诱导，其中第一个映射是包含映射。如果对于所有 $\mathtt{k} \in Q_0$，$e_{\mathtt{k}}$ 在 $\ker B_{\mathtt{k},\ \mathrm{in}}$ 上的限制都是一个内射包，那么 $\mathfrak{Q}(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha) = \mathrm{Mimo}(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha)$，由此得到 Mimo 构造的公式。

例 6.9. 考虑例 3.11 中的表示范畴 $\mathrm{rep}(Q, \mathcal{B})$。在此情形下，对象 $(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha)$ 的 Mimo 构造 $\mathrm{Mimo}(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha) = (B'_{\mathtt{i}}, B'_\alpha)$ 如下给出：对每个 $\mathtt{i} \in Q_0$，选取一个内射包 $j_{\mathtt{i}}\colon\ K_{\mathtt{i}} \to J_{\mathtt{i}}$，其中 $K_{\mathtt{i}}$ 是态射

$$B_{\mathtt{i},\mathrm{in}}\colon \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1 \\ t(\alpha)=\mathtt{i}}} B_{s(\alpha)} \xrightarrow{(B_\alpha)_\alpha} B_{\mathtt{i}}.$$

Let $e_{\mathtt{i}}\colon \bigoplus_{\alpha\in Q_1,\ t(\alpha)=\mathtt{i}} B_{s(\alpha)} \to J_{\mathtt{i}}$ 是经由包含映射 $K_{\mathtt{i}} \to \bigoplus_{\alpha\in Q_1,\ t(\alpha)=\mathtt{i}} B_{s(\alpha)}$ 对 j_i 的一个提升。Then

$$B'_{\mathtt{i}} = B_{\mathtt{i}} \oplus \bigoplus_{p\in Q_{\geq 0}, t(p)=\mathtt{i}} J_{s(p)}$$

其中 $Q_{\geq 0}$ 是 Q 中路径的集合，而 $s(p)$ 和 $t(p)$ 分别表示 p 的源和终点。对于箭头 $\beta\colon \mathtt{i} \to \mathtt{k}$，态射

$$B'_\beta\colon B_{\mathtt{i}} \oplus \bigoplus_{p\in Q_{\geq 0}, t(p)=\mathtt{i}} J_{s(p)} \to B_{\mathtt{k}} \oplus \bigoplus_{q\in Q_{\geq 0}, t(q)=\mathtt{k}} J_{s(q)}$$

由 $q = \beta p$ 上的恒等映射 $J_{s(p)} \xrightarrow{1} J_{s(q)}$、结构映射 $B_\beta\colon\ B_{\mathtt{i}} \to B_{\mathtt{k}}$ 以及复合态射 $B_{\mathtt{i}} \to \bigoplus_{\alpha\in Q_1,\ t(\alpha)=\mathtt{k}} B_{s(\alpha)} \xrightarrow{e_{\mathtt{k}}} J_{\mathtt{k}}$ 诱导，其中第一个映射是典范包含。

注意，这个公式已在 [LZ13, 第 3a 节] 中得出。在 [LZ13 的引理 3.2 和命题 3.3] 中，他们证明了它给出了一个右 $\mathrm{Mono}(X)$-逼近。在定理 5.2 中，我们

证明相同的结果。我们还证明了它是一个极小右逼近，这一点此前尚不为人知。值得注意的是，用我们的语言表述时，证明更简洁，也更加清晰。

7. A characterization of the indecomposable objects in 单态射(X)

由定理 5.7 可知，Mono(X) 中不可分解对象的同构类与 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 之间存在一个双射，该双射由等价诱导。

$$\overline{\mathrm{Mono}}(X) \to \overline{\mathcal{C}}^{T(X)}.$$

在某些温和的附加假设下，这也与 Mono(X) 中非内射不可分解对象的同构类之间存在双射。本节的目标是给出后一个双射的显式公式。更确切地说，我们证明 Mimo 构造可推广到 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中的对象，并且它给出 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中不可分解对象与 Mono(X) 中非内射不可分解对象之间的双射。我们在第 8 节的例子中展示这一结果的用途。要使该结果成立，$\mathcal{C}$ 必须具有极大内射直和项，见定义 7.1。因此，我们首先证明任意诺特、Artin 或局部诺特范畴都具有极大内射直和项。

7.1. 极大内射直和项。

定义 7.1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个具有内射包的阿贝尔范畴。如果对任意 $M \in \mathcal{C}$，都存在一个同构

$$M \cong M' \oplus I$$

其中 I 是内射的，且 M' 没有非零内射直和项。

注意，根据引理 2.5（2）和引理 2.6，M' 和 I 在同构意义下唯一。

回顾一下，若对象 $M \in \mathcal{C}$ 的任意下降子对象序列

$$\cdots \subseteq M_1 \subseteq M_0 \subseteq M$$

稳定，则称其为 Artin 对象；若任意上升序列

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M$$

子对象的链 M 稳定。若 $\mathcal{C}$ 中的每个对象都是 Artin 对象，则范畴 $\mathcal{C}$ 是 Artin 的；若 $\mathcal{C}$ 中的每个对象都是 Noether 对象，则范畴 $\mathcal{C}$ 是 Noether 的。最后，若 $\mathcal{C}$ 是一个带有由 Noether 对象组成的生成集的格罗滕迪克范畴，则称其为局部诺特范畴。注意，任何局部诺特范畴都有内射包，参见 [Kra22，推论 2.5。4]

命题 7.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个有内射包的阿贝尔范畴。若满足以下条件之一，则 $\mathcal{C}$ 有极大内射直和项：

(1) $\mathcal{C}$ 中的任何内射对象都可以写成不可分解对象的有限直和。(2) $\mathcal{C}$ 是 Artin 的。
(3) $\mathcal{C}$ 是 Noether 的。(4) $\mathcal{C}$ 是局部诺特范畴。

证明。假设性质 (1) 成立。由于 $\mathcal{C}$ 有内射包，根据 [Kra22，引理 2.5 的证明，$\mathcal{C}$ 中任何不可分解内射对象的自同态环都是局部自同态环。7]因此，$\mathcal{C}$ 中的内射对象构成一个克鲁尔–雷马克–施密特范畴，所以任何内射对象都可以唯一地写成不可分解对象之和（相差一个排列和同构）。

现在令 $M \in \mathcal{C}$ 为任意对象，并令 $M \to E(M)$ 为它的内射包。由于 M 的任何内射直和项都必须是 $E(M)$ 的内射直和项，因此 M 的不可分解直和项数必定不超过 $E(M)$ 的不可分解直和项数，而根据假设，后者是有限的。因此，我们可以选择 M 的一个内射直和项 I，使其不可分解直和项数达到最大。记作 $M \cong I \oplus M'$，我们看到 M' 没有内射直和项；否则就会存在一个 M 的内射直和项，其不可分解直和项数多于 I。这表明 $\mathcal{C}$ 存在极大内射直和项。

接下来，我们证明 $\mathcal{C}$ 为 Noether 对象或 Artin 对象蕴含条件 (1)。事实上，假设一个内射对象 I 不能写成不可分解内射对象的有限直和。那么，存在非零内射对象 I_n、I'_n，使得对于 $n \geq 0$，有 $I = I'_0 \oplus I_0$ 和 $I_n = I'_{n+1} \oplus I_{n+1}$。于是我们得到 I 的一个严格递减子对象序列和一个严格递增子对象序列

$$\cdots \subset I_2 \subset I_1 \subset I_0 \subset I \quad \text{and} \quad I'_0 \subset I'_0 \oplus I'_1 \subset I'_0 \oplus I'_1 \oplus I'_2 \subset \cdots \subset I.$$

因此，$\mathcal{C}$ 不可能是 Noether 或 Artin 的。

最后，假设 $\mathcal{C}$ 是局部诺特范畴。那么，内射对象在滤过余极限下封闭，见 [Kra22, 定理 11.2.12]。因此，由佐恩引理可知，M 有一个极大内射子对象 I。此外，包含映射 $I \to M$ 必定是分裂的，因为 I 是内射的。因此，对于某个对象 M'，我们有同构 $M \cong M' \oplus I$。若 M' 有一个非零内射直和项 J，那么 $I \oplus J$ 就是 M 的一个内射子对象，且严格包含 I。这与 I的极大性矛盾。因此，M' 没有非零内射直和项。□

例 7.3. 若 $\mathcal{C}$ 是诺特概形上的拟凝聚层范畴，或是诺特环上所有模组成的范畴，则 $\mathcal{C}$ 是局部诺特的。后一种情形中极大内射直和项的存在性最早由 [Mat58]证明。

例 7.4. 根据 [Jan69]，若环 Λ 的单右 Λ-模的内射包是 Artin 的，则称其为右余诺特环。由 [Vó68, 命题 2*]，这等价于阿廷右模的内射包是 Artin 的。因此，阿廷右 Λ-模范畴 $\mathcal{C} = \operatorname{art}\Lambda$ 是一个具有内射包的阿廷阿贝尔范畴，故存在极大内射直和项。余诺特环的例子包括交换诺特环[Mat60，命题 3]，；拟弗罗贝尼乌斯环 [Fai66，命题 1]，；诺特 PI 环 [Jat76，定理 2]，；交换诺特环上的有限模代数 [Hir00，推论 2.3],；右余诺特环的有限正规化扩张 [Hir00，定理 2.2]，；以及作为代数在整数上有限生成的交换环的第一魏尔代数 [Hir00，推论 2.7]。交换环是余诺特环，当且仅当它在任意极大理想处的局部化都是诺特环 [Vó68，定理 2]。

备注 7.5. 存在具有内射包但不满足定义 7.1 的阿贝尔范畴。事实上，取任意一个非局部诺特的格罗滕迪克范畴 $\mathcal{C}$，例如非诺特环上的所有模构成的范畴。由于 $\mathcal{C}$ 是格罗滕迪克范畴，它具有内射包，见 [Kra22，推论 2.5.4]。此外，由于 $\mathcal{C}$ 不是局部诺特的，存在一组内射对象 $\mathcal{J}$，其直和 $M = \bigoplus_{J\in\mathcal{J}} J$ 不是内射对象，见 [Kra22，定理 11.2.12]。我们断言 M 没有极大内射直和项。反设存在，即 $M \cong M' \oplus I$，其中 I 是内射对象，且 M' 没有非零内射直和项。令 $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$ 为一个有限子集，并令 $I' = \bigoplus_{J\in\mathcal{J}'} J$ 为相应的内射对象。取包含映射 $I' \to M$ 的一个左逆 $M \to I'$。通过同构 $M \cong M' \oplus I$，我们得到态射

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} : I' \to M' \oplus I \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} g'_1 & g'_2 \end{pmatrix} : M' \oplus I \to I'$$

使得 $g'_1 \circ g_1 + g'_2 \circ g_2 = 1_{I'}$。根据引理 2.5（2），态射 g_1 属于 $\mathcal{C}$ 的根，因此 $g'_2 \circ g_2 = 1_{I'} - g'_1 \circ g_1$ 必须是同构。特别地，$g_2 \colon I' \to I$ 是一个单态射。现在考虑态射 $\bigoplus_{J\in\mathcal{J}} J = M \cong M' \oplus I \to I$。我们已经证明，将其限制在 $\mathcal{J}$ 的任意有限子集的直和上时，它是一个单态射。由于 $\bigoplus_{J\in\mathcal{J}} J$ 是这些有限直和的滤过余极限，且 Grothendieck 范畴中的滤过余极限是正合的，因此态射 $\bigoplus_{J\in\mathcal{J}} J \to I$ 本身必须是一个单态射。显然它还是一个满态射，所以必定是同构。但这意味着 $M = \bigoplus_{J\in\mathcal{J}} J$ 是内射的，这就产生了矛盾。

7.2 构造与主要结果。设 $\mathcal{C}$ 是一个具有内射包和极大内射直和项的阿贝尔范畴，并设 $X\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 是一个局部幂零且保持内射对象的正合函子。我们的目标是在稳定范畴 $\overline{\mathcal{C}}$ 的 Eilenberg–Moore 范畴中，直接对对象定义 Mimo 构造。为此，我们需要以下引理。

引理 7.6. 设 M $\in \overline{\mathcal{C}}^{T}(X)$。则存在一个对象 $\widehat{\text{M}} \in \mathcal{C}^{T(X)}$，它在 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$中与 M 同构，且 $f^{*}(\widehat{\text{M}}) = \widehat{M}$没有内射直和项。

证明。由引理 3.13，$\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中对象 M 的数据与一个态射$\frown h_{\mathsf{M}}\colon X(M)\to M$在 $\overline{\mathcal{C}}$中的数据相同。取一个提升 $h'\colon X(M)\to M$到 $\mathcal{C}$，使其对应于 h_{M}，并写作 $M\cong \widehat{M}\oplus J$，其中 J是$\widehat{\ }$内射的，且 M没有内射直和项。现在，h'给出一个态射 $X(M)\oplus X(J)\to M\oplus J$。令$h''\colon X(\widehat{M})\to \widehat{M}$为 h'的限制，并令 $\widehat{\mathsf{M}}=(\widehat{M},h'')$为 $\mathcal{C}^{T(X)}$中对应的对象。显然，$\widehat{\mathsf{M}}$ 在 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中与 M 同构，且根据构造，$\widehat{M}$ 没有内射直和项。□

现在，我们可以将 Mimo 构造扩展到 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中的对象。这里，上标 $\cong$ 表示我们考虑的是对象的同构类。

命题 7.7. 对任意 $\mathsf{M}\in\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$，选取一个对象 $\widehat{\mathsf{M}}$，属于 $\mathcal{C}^{T(X)}$，且它在 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中与 M 同构，并满足 $f^*(\widehat{\mathsf{M}})=\widehat{M}$ 在 $\mathcal{C}$ 中没有非零内射直和项。那么，对应关系$\widehat{\mathsf{M}}\mapsto \mathsf{Mimo}\mathsf{M}$ 诱导出一个良定义映射

$$\{objects\ in\ \overline{\mathcal{C}}^{T(X)}\}^{\cong}\xrightarrow{\mathrm{Mimo}}\{objects\ in\ \mathrm{Mono}(X)\}^{\cong}. \tag{7.7.1}$$

$\widehat{\ }$此外，该映射与 M 的选取无关。

证明. 由推论 6.6 和引理 7.6 可知，该映射良定义，且与选取无关。 □

我们希望证明，命题 7.7 中的映射限制为 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中不可分解对象与 Mono(X) 中非内射不可分解对象之间的一个同构。首先，我们证明它可以用来构造下列双射的逆

$$\{\text{objects in }\overline{\mathrm{Mono}(X)}\}^{\cong}\to\{\text{objects in }\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}\}^{\cong} \tag{7.7.2}$$

来自定理 5.7 中的等价 $\mathrm{Mon}\overline{o(X)}\to\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$。

命题 7.8. 将 (7.7.1) 与函子 Mono(X) → Mono(X) 复合，得到双射 (7.7.2) 的逆。特别地，(7.7.1) 是内射的，并且保持不可分解对象。

证明. 设 $\mathsf{M}\in\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$。由于典范态射 Mimo $\widehat{\mathsf{M}}\to\widehat{\mathsf{M}}$ 是 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中的同构，并且存在典范同构 $\widehat{\mathsf{M}}\cong\mathsf{M}$（在 $\underline{\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}}$ 中），将 (7.7.1) 与函子 Mono(X) →Mono(X) 复合，必然得到 (7.7.2) 的逆。特别地，该复合是内射的，因此 (7.7.1) 必然是内射的。为说明 (7.7.1) 保持不可分解对象，注意它与函子 Mono(X) → Mono(~~X) 的~~复合保持不可分解对象，因为它是 (7.7.2) 的逆。$\widehat{\ }$此外，根据引理 6.5，Mimo M 没有非零内射直和项，因此若 M 在 $\underline{\mathrm{Mono}}(X)$ 中不可分解，则它必定在 Mono(X) 中不可分解。这就证明了该结论。□

现在我们刻画 Mono(X) 中的不可分解对象。这是一个非常有用的结果，特别是当 $\overline{\mathcal{C}}$ 是阿贝尔的，此时 $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 中的不可分解对象更容易计算。下一节中，我们将展示该结果在不同类 Artin 代数的箭图表示中的应用。

定理 7.9. 我们有如下双射

$$\left\{\begin{matrix}Indecomposable\ injective\\ objects\ in\ \mathcal{C}\end{matrix}\right\}^{\cong}\xrightarrow{\cong}\left\{\begin{matrix}Indecomposable\ injective\\ objects\ in\ \mathrm{Mono}(X)\end{matrix}\right\}^{\cong}\quad I\mapsto f_!(I). \tag{7.9.1}$$

$$\left\{\begin{matrix}Indecomposable\\ objects\ in\ \overline{\mathcal{C}}^{T(X)}\end{matrix}\right\}^{\cong}\xrightarrow{\cong}\left\{\begin{matrix}Indecomposable\ non\text{-}injective\\ objects\ in\ \mathrm{Mono}(X)\end{matrix}\right\}^{\cong}\quad \mathsf{M}\mapsto \mathrm{Mimo}\,\mathsf{M}. \tag{7.9.2}$$

证明. 根据命题 4.2 和推论 4.4，Mono(X) 中的内射对象恰好是形如 $f_!(J)$ 的对象，其中 J 在 $\mathcal{C}$ 中是内射的。此外，根据推论 3.8，$f_!(J)$ 不可分解当且仅当 J 不可分解。这说明映射 (7.9.1) 定义良好且为满射。为证明单射，注意到 $f_!(J)\cong f_!(J')$ 蕴含 $J\cong$ 的顶 $f_!(J)\cong$ 的顶 $f_!(J')\cong J'$。

接下来，考虑 (7.9.2) 中的映射。根据命题 7.8，它是良定义且内射的。为证明它是满射，任取一个不可分解的非内射对象 $\mathsf{M}'\in\mathrm{Mono}(X)$，并令 M 为 M' in $\overline{\mathcal{C}}^{T(X)}$ 的像。由于将 (7.7.1) 与函子 Mono(X) → $\underline{\mathrm{Mono}(X)}$ 复合

$\widehat{\ }$，根据命题 7.8 可得到 (7.7.2) 的逆，因此我们有 $\mathsf{M}' \cong \mathsf{MimoM}$ in $\mathsf{Mono}(X)$。于是，存在互为逆的同构

$$\begin{pmatrix}\phi_1 & \phi_2\\ \phi_3 & \phi_4\end{pmatrix}\colon \mathsf{M}' \oplus f_!(I) \to \operatorname{Mimo}\widehat{\mathsf{M}} \oplus f_!(J) \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix}\psi_1 & \psi_2\\ \psi_3 & \psi_4\end{pmatrix}\colon \operatorname{Mimo}\widehat{\mathsf{M}} \oplus f_!(J) \to \mathsf{M}' \oplus f_!(I)$$

在 $\mathsf{Mono}(X)$ 中，其中 I 和 J 是 $\mathcal{C}$中的某些内射对象。特别地，我们有

$$1_{\operatorname{Mimo}\widehat{\mathsf{M}}} = \phi_1 \circ \psi_1 + \phi_2 \circ \psi_3.$$

现在由引理 6.5，态射 ϕ_2属于 $\mathsf{Mono}(X)$ 的根，因此 $\phi_1 \circ \psi_1 = 1_{\operatorname{Mimo}\widehat{\ }\mathsf{M}} - \phi_2 \circ \psi_3$是$\widehat{\ }$一个同构。于是 $\phi_1\colon \mathsf{M}' \to \mathsf{Mimo}\ \mathsf{M}$ 是一个分裂满态射。由于 M'不可分解，它必定是一个同构。这说明 (7.9.2) 是满射。□

注 7.10. 定理 7.9 在注 5.12 的设定下恢复了 [RZ17，定理 2] 。

例 7.11. 设 Q 是一个有限无环箭图， $\mathfrak{B}$ 是由阿贝尔范畴 $\mathcal{B}_{\mathtt{i}}$和保内射对象的正合函子 F_α 组成的调制，见例 3.9。令 $\mathcal{C} = \prod_{\mathtt{i}\in Q_0} \mathcal{B}_{\mathtt{i}}$。那么，对于所有 $\mathtt{i} \in Q_0$， $\mathcal{C}$ 有内射包（分别为极大内射直和项）当且仅当 $\mathcal{B}_{\mathtt{i}}$ 有内射包（分别为极大内射直和项）。命题 7.7 中的 Mimo 映射从 $\mathsf{rep}\overline{\mathfrak{B}}$ 映到 $\mathfrak{B}$的单态射范畴，其中 $\overline{\mathfrak{B}}$ 是由稳定范畴调制而成，如例 3.14 所示。具体而言，它将 $(B_{\mathtt{i}}, B_\alpha)$ 映为 $\mathsf{Mimo}(B_{\mathtt{i}}, B'_\alpha)$，其中 $B_{\mathtt{i}}$ 是 $\mathcal{B}_{\mathtt{i}}$ 中的任一对象，它$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$没有非零内射直和项，并且在 $\overline{\mathcal{B}}_{\mathtt{i}}$ 中同构于 $B_{\mathtt{i}}$；而 $B'_\alpha\colon F_\alpha(B_{s(\alpha)}) \to B_{t(\alpha)}\widehat{\ }$是 B_α 到 $\mathcal{B}_{t(\alpha)}$的任一提升；$\mathsf{Mimo}(B_{\mathtt{i}}, B'_\alpha)$ 则是例 6.8 中所述的 Mimo 构造。

8. Applications to quiver representations over Artin algebras

本节的目标是利用我们的结果研究 Artin 代数上箭图的单态射范畴。在本节中， Q 表示一个有限无环箭图， $\mathbb{K}$ 是一个交换阿廷环，而 Λ 是一个 Artin $\mathbb{K}$-代数。 Q 的表示范畴分别记为 $\mathsf{rep}(Q, \operatorname{Mod}\Lambda)$ 和 $\mathsf{rep}(Q, \operatorname{mod}\Lambda)$，参见例 3.11。它们可分别与模范畴 $\operatorname{Mod}\Lambda Q^{\mathrm{op}}$ 和 $\operatorname{mod}\Lambda Q^{\mathrm{op}}$ 等同。若令 $\Lambda Q_0 \coloneqq \prod_{\mathtt{i}\in Q_0}\Lambda$，则得到

$$\operatorname{Mod}\Lambda Q_0 = \prod_{\mathtt{i}\in Q_0} \operatorname{Mod}\Lambda \quad \text{and} \quad \operatorname{mod}\Lambda Q_0 = \prod_{\mathtt{i}\in Q_0} \operatorname{mod}\Lambda.$$

我们有伴随函子

$$f_!\colon \operatorname{Mod}\Lambda Q_0 \to \operatorname{rep}(Q, \operatorname{Mod}\Lambda) \quad \text{and} \quad f^*\colon \operatorname{rep}(Q, \operatorname{Mod}\Lambda) \to \operatorname{Mod}\Lambda Q_0$$

它们限制为

$$f_!\colon \operatorname{mod}\Lambda Q_0 \to \operatorname{rep}(Q, \operatorname{mod}\Lambda) \quad \text{and} \quad f^*\colon \operatorname{rep}(Q, \operatorname{mod}\Lambda) \to \operatorname{mod}\Lambda Q_0.$$

Th表示范畴 $\mathsf{rep}(Q, \operatorname{Mod}\Lambda)$ 和 $\mathsf{rep}(Q, \operatorname{mod}\Lambda)$ 的单态射子范畴分别记为 $\mathsf{Mono}_Q(\Lambda)$ and $\mathsf{mono}_Q(\Lambda)$。它们由表示 $(M_{\mathtt{i}}, M_\alpha)_{\mathtt{i}\in Q_0,\ \alpha\in Q_1}$ 组成，其中

$$M_{\mathtt{i},\mathrm{in}}\colon \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1\\ t(\alpha)=\mathtt{i}}} M_{s(\alpha)} \xrightarrow{(M_\alpha)} M_{\mathtt{i}}$$

对所有 $\mathtt{i} \in Q_0$ 都是单态射，见例 3.26。接下来，我们回顾定理 7.9 中在此背景下的双射。对于 $M \in$ 模范畴 Λ，我们令 $M(\mathtt{i}) \in$模范畴 ΛQ_0 表示由下式给出的对象

$$M(\mathtt{i})_{\mathtt{j}} = \begin{cases} M, & \text{if } \mathtt{j} = \mathtt{i}\\ 0, & \text{if } \mathtt{j} \neq \mathtt{i}.\end{cases}$$

定理 8.1。我们有如下双射

$$\left\{\begin{array}{c}Indecomposable\ objects\\ in\ \mathrm{rep}(Q,\overline{\mathrm{Mod}}\,\Lambda)\end{array}\right\}^{\cong}\ \xrightarrow{\cong}\ \left\{\begin{array}{c}Indecomposable\ non\text{-}injective\\ objects\ in\ \mathrm{Mono}_Q(\Lambda)\end{array}\right\}^{\cong}\quad \mathsf{M}\mapsto \mathrm{Mimo}\,\mathsf{M}$$

$$\left\{\begin{array}{c}Indecomposable\ objects\\ in\ \mathrm{rep}(Q,\overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda)\end{array}\right\}^{\cong}\ \xrightarrow{\cong}\ \left\{\begin{array}{c}Indecomposable\ non\text{-}injective\\ objects\ in\ \mathrm{mono}_Q(\Lambda)\end{array}\right\}^{\cong}\quad \mathsf{M}\mapsto \mathrm{Mimo}\,\mathsf{M}$$

$$\left\{\begin{array}{c}Indecomposable\ injective\\ right\ \Lambda\text{-}modules\end{array}\right\}^{\cong}\times Q_0\ \xrightarrow{\cong}\ \left\{\begin{array}{c}Indecomposable\ injective\\ objects\ in\ \mathrm{mono}_Q(\Lambda)\end{array}\right\}^{\cong}\quad (I,\mathtt{j})\mapsto f_!(I(\mathtt{j}))$$

8.1. 稳定等价。 在本小节中，我们固定两个 Artin $\mathbb{K}$-代数 Λ 和 Γ。我们的目标是研究范畴 mono$_Q(\Lambda)$ 和 mono$_Q(\Gamma)$，其中 Λ 和 Γ 稳定等价。我们证明，这些范畴中的不可分解非内射对象之间存在一个双射，并研究此双射何时与 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 和 $\mathrm{mod}\,\Gamma$的分裂格罗滕迪克群上的诱导映射相交换，见定理 8.9。

我们首先证明，稳定等价会在单态射范畴中的不可分解非内射对象之间诱导一个双射。

定理 8.2. 假设给定一个等价 $\overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \xrightarrow{\sim} \overline{\mathrm{mod}}\,\Gamma$。那么，mono$_Q(\Lambda)$ 和 mono$_Q(\Gamma)$ 中不可分解非内射对象的同构类之间存在一个双射 ϕ_Q。

证明。等价 $\overline{\mathrm{mod}}\ \Lambda \cong \overline{\mathrm{mod}}\ \Gamma$诱导出等价 $\mathrm{rep}(Q,\mathrm{mod}\,\Lambda) \cong \mathrm{rep}(Q,\overline{\mathrm{mod}}\ \Gamma)$。由于根据定理 8.1，$\mathrm{rep}(Q,\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda)$（分别为 $\mathrm{rep}(Q,\underline{\mathrm{mod}}\ \Gamma)$）中的不可分解对象的同构类与 mono$_Q(\Lambda)$（分别为 mono$_Q(\Gamma)$）中的非内射不可分解对象之间存在双射，因此得到双射 ϕ_Q。□

推论 8.3。假设 Λ 和 Γ 稳定等价。那么，mono$_Q(\Lambda)$ 是表示有限的，当且仅当 mono$_Q(\Gamma)$ 是表示有限的。

证明。由于 mono$_Q(\Lambda)$ 和 mono$_Q(\Gamma)$ 在同构意义下只有有限多个不可分解内射对象，因此 mono$_Q(\Lambda)$ 和 mono$_Q(\Gamma)$ 是表示有限的，当且仅当它们在同构意义下只有有限多个不可分解非内射对象。由定理 8.2 立即可得结论。□

接下来，我们考察如何将定理 8.2 中的 ϕ_Q 扩展为所有不可分解对象之间的双射。

定理 8.4。假设 Λ 和 Γ 是自内射且导出等价的。那么，mono$_Q(\Lambda)$ 与 mono$_Q(\Gamma)$ 中不可分解对象的同构类之间存在一个双射。

证明。根据 Rickard 的一个结果 [Ric89，推论 2.2]，，自内射代数之间的导出等价会诱导一个稳定等价，因此由定理 8.2 可知，mono$_Q(\Lambda)$ 与 mono$_Q(\Gamma)$ 中不可分解非内射对象之间存在一个双射 ϕ_Q。此外，由于 Λ 和 Γ 导出等价，不可分解投射 Λ-模与 Γ-模的数量相同。因此，不可分解内射 Λ-模与 Γ-模的数量也相同。由此，根据定理 8.1，mono$_Q(\Lambda)$ 与 mono$_Q(\Gamma)$ 中不可分解内射对象的数量相等。因此，ϕ_Q 可扩展为所有不可分解对象之间的双射，从而证明了此结论。□

一般而言，即使 Λ and Γ 内射稳定等价，mono$_Q(\Lambda)$ 和 mono$_Q(\Gamma)$ 中不可分解内射对象的数量也不一定相同，如下例所示：

例 8.5. 设 $\Lambda = \Bbbk(1 \to 2)$，并设 $\Gamma = \Bbbk[x]/(x^2)$，再设 Q 为只有一个顶点且没有箭的箭图。于是 $\overline{\mathrm{mod}}\ \Lambda \cong \overline{\mathrm{mod}}\ \Gamma \cong \mathrm{mod}\ \Bbbk$。然而，$\overline{\mathrm{mono}}_Q(\Lambda) \cong \overline{\mathrm{mod}}\ \Lambda$有两个不可分解内射对象，而 mono$_Q(\Gamma) \cong \mathrm{mod}\,\Gamma$ 只有一个。

然而，对于代数闭域上的某些自内射代数，这一结论仍然成立 s:

推论 8.6. 设 Λ 和 Γ 是有限表示型的两个连通自内射 $\Bbbk$-代数，其中 $\Bbbk$ 是代数闭域。假设 Λ 和 Γ 稳定等价。那么，$\mathrm{mono}_Q(\Lambda)$ 与 $\mathrm{mono}_Q(\Gamma)$ 中不可分解对象的同构类之间存在双射。

证明。由 [Asa99，推论 2.2] 有限表示型的两个自内射代数稳定等价，当且仅当它们导出等价。结论现由定理 8.4 得出。□

接下来，我们考察 ϕ_Q 何时与模范畴 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 和 $\mathrm{mod}\,\Gamma$ 的分裂格罗滕迪克群之间的诱导映射可交换。为此，我们需要一些预备结果。

回忆一下，模 M 的底记作 $\mathrm{soc}\,M$，是其所有单子模之和。它诱导出一个左正合函子 $\mathrm{soc}(-)\colon \mathrm{mod}\,\Lambda \to \mathrm{mod}\,\Lambda$，该函子将态射 $g\colon M \to N$ 映为其限制 $\mathrm{soc}(g)\colon \mathrm{soc}\,M \to \mathrm{soc}\,N$。令 $\mathcal{S}_\Lambda$ 和 $\mathcal{S}_\Gamma$ 分别表示由没有非零内射直和项的半单 Λ-模和 Γ-模构成的子范畴。对于对象 $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$，我们 $\widehat{\ }$ 将 M 记作一个没有非零内射直和项且在模范畴 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中与 M 同构的 Λ-模。注意，$\widehat{M}$ 在同构意义下唯一。

引理 8.7。这些对应

$$M \mapsto \mathrm{soc}\,\widehat{M} \quad and \quad (M \xrightarrow{g} N) \mapsto (\mathrm{soc}\,\widehat{M} \xrightarrow{\mathrm{soc}(\widehat{g})} \mathrm{soc}\,\widehat{N})$$

诱导出一个函子 $\mathrm{soc}\colon \overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \to \mathcal{S}_\Lambda$，其中 $\widehat{g}$ 是 g 到 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 的任意一个提升。此外，该函子是包含函子 $\mathcal{S}_\Lambda \to \mathrm{mod}\,\Lambda$ 的右伴随。

证明。设 M、$N \in \overline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$。为证明我们得到的是一个定义良好的函子，只需证明映射

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\widehat{M}, \widehat{N}) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{soc}\,\widehat{M}, \mathrm{soc}\,\widehat{N}) \qquad g \mapsto \mathrm{soc}(g)$$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 在任何经过内射对象的态射上都为零。因此，设 $g\colon M \to N$ 可以写成复合态射 $\widehat{M} \xrightarrow{g_1} I \xrightarrow{g_2} \widehat{N}$，其中 I 是一个内射 Λ-模。由引理 2.5（2），我们知道包含映射 $\ker g_2 \to I$ 是一个内射包。由于内射包的底是同构，映射 $\mathrm{soc}\ker g_2 \to \mathrm{soc}\,I$ 是同构。由于底是左正合的，我们得到 $\mathrm{soc}(g_2) = 0$，进而 $\mathrm{soc}(g) = 0$。

要证明 $\mathrm{soc}\colon \overline{\mathrm{mod}\,\Lambda} \to \mathcal{S}_\Lambda$ 是包含函子的右伴随，只需证明存在一个自然同构

$$\overline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(S, M) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_\Lambda(S, \mathrm{soc}\,\widehat{M})$$

当 S 是非内射单模且 $M \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ 时。首先注意，存在一个同构

$$\overline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(S, M) \xrightarrow{\cong} \overline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(S, \widehat{M})$$

$\widehat{\ }$ $\overline{\ }$ $\widehat{\ }$，因为 M 和 $\widehat{M}$ 在模范畴 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中同构。设 $g\colon S \to M$ 是模范畴 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中一个经过内射模分解的态射。那么它可经由一个态射 $\frown I \to M$ 通过 S 的内射包 I 分解。若 g 非零，则它必为单态射，因此诱导的态射 $\frown I \to M$ 也必为单态射。由于 I 是内射的，该单态射必分裂，所以 I 必须 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 是 M 的直和项。这与 M 的定义矛盾。因此，不存在经过内射对象分解的非零态射 $\frown S \to M$。由此可知，典范映射

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(S, \widehat{M}) \xrightarrow{\cong} \overline{\mathrm{Hom}}_\Lambda(S, \widehat{M})$$

$\widehat{\ }$是一个同构。最后，从单模到 M 的任意态射都必须经过 $\widehat{M}$ 的底。因此，我们得到一个同构 $\mathrm{Hom}_\Lambda(S, \widehat{M}) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_\Lambda(S, \mathrm{soc}\ \widehat{M})$。结合这些同构，即得所需结果。□

下文中，记 $K_0(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ 和 $K_0(\mathrm{mod}\ \Gamma)$ 分别为范畴 $\mathrm{mod}\ \Lambda$ 和 $\mathrm{mod}\,\Gamma$ 的分裂格罗滕迪克群。模 M 在分裂格罗滕迪克群中的像记为 $[M]$。令 G_Λ 和 G_Γ 分别为 $K_0(\mathrm{mod}\ \Lambda)$ 和 $K_0(\mathrm{mod}\ \Gamma)$ 的自由子群，它们由所有满足以下条件的元素 $[M]$ 生成：M 不可分解且不是单内射。

引理 8.8. 假设给定一个等价 $\Phi\colon \operatorname{mod}\Lambda \cong \operatorname{mod}\Gamma$，它将单非内射 Λ-模与 Γ-模之间的等价限制为等价。那么存在一个同构

$$\phi\colon G_\Lambda \xrightarrow{\cong} G_\Gamma$$

由以下条件唯一确定：

- 若 $[M]\in G_\Lambda$ 是不可分解的非内射对象，则 $\phi([M])=[N]$，其中 N 是不可分解的非内射 Γ-模，其在模范畴 $\operatorname{mod}\Gamma$ 中的像与 $\Phi(M)$ 同构。
- 若 $[I]\in G_\Lambda$，其中 I 是不可分解、内射且非单对象，则 $\phi([I])=[J]$，其中 J 是不可分解内射 Γ-模，其底与模范畴 $\operatorname{mod}\Gamma$ 中的 $\Phi(\operatorname{soc} I)$ 同构。

此外，若存在一个双射 ψ，对应于单内射 Λ-模与 Γ-模的同构类，则 ϕ 可唯一扩展为一个同构

$$\phi\colon K_0(\operatorname{mod}\Lambda)\xrightarrow{\cong} K_0(\operatorname{mod}\Gamma).$$

令 $\phi([S])=[\psi(S)]$，其中 S 是任意单内射 Λ-模。

证明。根据构造可知，ϕ 在非单内射的不可分解 Λ-模与 Γ-模的同构类集合之间给出一个双射。由于 G_Λ 和 G_Γ 是这些集合上的自由群，这表明 $\phi\colon G_\Lambda\to G_\Gamma$ 是一个同构。假设ψ 存在，则可见 ϕ 限制为所有不可分解Λ-模与 Γ-模的同构类之间的一个双射。因此，$\phi\colon K_0$(模范畴 Λ) $\to K_0$(模范畴 Γ)必定是一个同构。□

定理 8.9. 假设给定一个等价 Φ: 模范畴 $\Lambda \xrightarrow{\cong}$ 模范畴 Γ，它限制为单非内射 Λ-模与 Γ-模之间的一个等价。令 ϕ_Q 表示定理 8.2 中的双射，并令 ϕ 表示引理 8.8 中的同构。以下结论成立：

(1) ϕ_Q 与 ϕ逐点交换，即

$$[\phi_Q(\mathsf{M})_{\mathtt{i}}]=\phi([\mathsf{M}_{\mathtt{i}}]).$$

(2) 假设单内射 Λ-模与 Γ-模之间存在双射，并且令 $\phi\colon K_0$(模范畴 Λ) $\xrightarrow{\sim} K_0$(模范畴 Γ)为引理 8.8中给出的扩张。于是 ϕ_Q 可以唯一地扩展为单射范畴$\mathcal{Q}(\Lambda)$与单射范畴$\mathcal{Q}(\Gamma)$中所有不可分解对象的同构类之间的双射，使得

$$[\phi_Q(\mathsf{M})_{\mathtt{i}}]=\phi([\mathsf{M}_{\mathtt{i}}]).$$

证明。考虑引理 8.7中的函子 soc: 模范畴 $\Lambda\to\mathcal{S}_\Lambda$ 和 soc: 模范畴 $\Gamma\to\mathcal{S}_\Gamma$。我们断言，下面的方块

$$\begin{array}{ccc}\overline{\operatorname{mod}}\,\Lambda & \xrightarrow{\operatorname{soc}} & \mathcal{S}_\Lambda \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \overline{\operatorname{mod}}\,\Gamma & \xrightarrow{\operatorname{soc}} & \mathcal{S}_\Gamma\end{array} \tag{8.9.1}$$

在自然同构意义下交换，其中竖直函子由 Φ 及其在非内射简单模上的限制给出。事实上，这是因为根据引理 8.7，水平函子是到包含函子 $\mathcal{S}_\Lambda\to$ 模范畴 Λ 和 $\mathcal{S}_\Gamma\to$ 模范畴 Γ 的左伴随，并且竖直函子与包含函子交换。因此，与(8.9.1)中的函子复合后，我们得到一个图表

$$\begin{array}{ccc}\operatorname{rep}(Q,\overline{\operatorname{mod}}\,\Lambda) & \xrightarrow{\operatorname{soc}} & \operatorname{rep}(Q,\mathcal{S}_\Lambda) \\ \downarrow\cong & & \downarrow\cong \\ \operatorname{rep}(Q,\overline{\operatorname{mod}}\,\Gamma) & \xrightarrow{\operatorname{soc}} & \operatorname{rep}(Q,\mathcal{S}_\Gamma)\end{array} \tag{8.9.2}$$

在自然同构意义下交换的函子。

现在令 M 为 $\operatorname{rep}(Q,\operatorname{mod}\Lambda)$ 中的一个不可分解对象，并令 N 为根据 (8.9.2) 中的左侧垂直等价所对应的 $\operatorname{rep}(Q,\operatorname{mod}\Gamma)$ 中的不可分解对象。令 M 和

$\widehat{\mathsf{N}}$ 为引理 7.6 中的对象，使得 Mimo M $=$Mimo M 且 Mimo N $=$Mimo N。根据构造，我们有 ϕ_Q(Mimo M) $=$Mimo N。此外

$$(\mathrm{Mimo}\,\mathsf{M})_{\mathtt{k}} \cong \widehat{\mathsf{M}}_{\mathtt{k}} \oplus I_{\mathtt{k}} \quad \text{and} \quad (\mathrm{Mimo}\,\mathsf{N})_{\mathtt{k}} \cong \widehat{N}_{\mathtt{k}} \oplus I'_{\mathtt{k}}$$

对所有 $\mathtt{k} \in Q_0$，其中 $I_{\mathtt{k}}$ 和 $I'_{\mathtt{k}}$ 分别是内射 Λ-模和 Γ-模。由 ϕ 的构造可知，$\phi([\mathsf{M}_{\mathtt{k}}]) = [\mathsf{N}_{\mathtt{k}}]$，因此我们只需证明 $\phi[I_{\mathtt{k}}] = [I'_{\mathtt{k}}]$。现在，根据例 6.8 中的 Mimo 构造，我们得到

$$I_{\mathtt{k}} \cong \bigoplus_{\substack{p\in Q_{\geq 0}\\ t(p)=\mathtt{k}}} J_{s(p)} \quad \text{and} \quad I'_{\mathtt{k}} \cong \bigoplus_{\substack{p\in Q_{\geq 0}\\ t(p)=\mathtt{k}}} J'_{s(p)}$$

其中 $J_{\mathtt{i}}$ 和 $J'_{\mathtt{i}}$ 分别是 $\ker M_{\mathtt{i},\mathrm{in}}$ 和 $\ker N_{\mathtt{i},\mathrm{in}}$ 的内射包。由于 ϕ 是可加的，只需证明对每个 $\mathtt{i} \in Q_0$，$\phi([J_{\mathtt{i}}]) = [J'_{\mathtt{i}}]$。根据 ϕ的定义，这等价于要求 ϕ([底 $J_{\mathtt{i}}$]) $=$ [底 $J'_{\mathtt{i}}$]。由于模的底与其内射包的底同构，可知 [底 $J_{\mathtt{i}}$] $=$ [底 $\ker M_{\mathtt{i},\mathrm{in}}$]，且 [底 $J'_{\mathtt{i}}$] $=$ [底 $\ker N_{\mathtt{i},\mathrm{in}}$]。因此，我们需要证明 ϕ([底 $\ker M_{\mathtt{i},\mathrm{in}}$]) $=$ [底 $\ker N_{\mathtt{i},\mathrm{in}}$]。但这由 8.9.2 的交换性立即可得，从而证明了 (1)。

现在假设我们有如 (2) 所示的简单 Λ-模与 Γ-模之间的双射。我们希望将 ϕ_Q 扩展为 mono$_Q(\Lambda)$ 与 mono$_Q(\Gamma)$ 中所有不可分解对象之间的双射。为此，我们需要在内射对象上定义该映射。假设 $\mathsf{M} \in \mathrm{mono}_Q(\Lambda)$ 是不可分解内射对象。那么根据定理 8.1，它具有 $f_!(J(\mathtt{i}))$ 的形式，其中 Λ 是一个不可分解内射 J-模，且 i 是 Q 中的一个顶点。我们定义 $\phi_Q(f_!(J(\mathtt{i}))) = f_!(J'(\mathtt{i}))$，其中 J' 是满足 $[J'] = \phi([J])$ 的 Γ-模，且在同构意义下唯一。显然，这给出了 mono$_Q(\Lambda)$ 与 mono$_Q(\Gamma)$ 中不可分解内射对象之间的双射，因而也给出了所有不可分解对象之间的双射。最后，由例 3.9 中的公式 (3.9.2)，我们有

$$f_!(J(\mathtt{i}))_{\mathtt{k}} = \bigoplus_{\substack{p\in Q_{\geq 0}\\ s(p)=\mathtt{i},t(p)=\mathtt{k}}} J$$

因此，对于所有 $\mathtt{k} \in Q_0$，$[\phi_Q(f_!(J(\mathtt{i})))_{\mathtt{k}}] = \phi([f_!(J(\mathtt{i}))_{\mathtt{k}}])$，这就证明了 (2)。 □

注 8.10. 定理 8.9 中的假设相当严格：设 $\mathbb{K}$ 是完美域，且 Λ 和 Γ 是非半单、连通且自内射的 $\mathbb{K}$-代数。设 Φ: 模范畴 $\Lambda \xrightarrow{\cong}$ 模范畴 Γ 是一个等价，并假设它将简单非内射的 Λ-模与 Γ-模之间的等价限制为等价。我们断言，若 Φ 由一个保持投射对象的正合函子 F: 模范畴 $\Lambda \to$ 模范畴 Γ 诱导，则 Λ 和 Γ 必定 Morita 等价。

事实上，由于 F 是右正合的，$F \cong - \otimes_\Lambda M$，其中 $M := F(\Lambda)$ 是一个 Λ-Γ-双模。由于 F是正合的并且保持投射对象，M 作为左 Λ-模和右Γ-模都必定是投射的。按照 Lin96 命题 2.4] 中相同的论证，我们有一个同构

$$M \cong M' \oplus M''$$

其中，M'是不可分解非射影的，而 M''作为 Λ-Γ-双模是投射的。由于 M''作为双模是投射的，$- \otimes_\Lambda M''$ 会将任意 Λ-模映为投射的 Γ-模，因此在稳定范畴上诱导零函子。因此，$- \otimes_\Lambda M'$ 在稳定范畴上诱导的函子与$- \otimes_\Lambda M$相同，即函子 Φ。现在，若 S是一个简单的 Λ-模，则根据 [Lin96，命题 2.3]，$S \otimes_\Lambda M'$没有非零射影直和项。由于 $S \otimes_\Lambda M'$在稳定范畴 mod Γ中同构于一个简单的 Γ-模，它本身必定是一个简单的 Γ-模。因此，根据 [Lin96，命题 2.5] 的证明，函子 $-\otimes_\Lambda M'$: mod $\Lambda \to$ mod Γ 必定是一个等价。这表明 Λ 与 Γ Morita 等价。

类似地，假设给定一个导出等价 $- \otimes^{\mathbb{L}}_\Lambda T$: $D^b(\Lambda) \xrightarrow{\cong} D^b(\Gamma)$，它由一个倾斜复形 T 给出。那么根据 [Ric91，推论 5.5]，由此诱导的稳定范畴之间的等价 mod $\Lambda \xrightarrow{\cong}$ mod Γ由一个正合函子 mod $\Lambda \to$ mod Γ给出。因此，如果由该导出等价诱导的稳定等价在简单对象之间给出双射，那么 Λ 和 Γ 必须 Morita 等价。

由此可知，定理 8.4 和推论 8.6 中大多数有趣的稳定等价例子都不满足定理 8.9。我们满足定理 8.9 的主要例子是 Loewy 长度 3 的局部单列代数，我们将在下一小节讨论它们。

8.2. Loewy 长度 3 的局部单列环。设 Λ 和 Γ 是交换局部环，且均为单列环，即它们各自只有一条合成列。进一步假设它们的 Loewy 长度为 3，且具有相同的剩余域。特别地，Λ 和 Γ 是交换阿廷环。存在三个不可分解的 Λ-模和 Γ-模，且它们由长度唯一确定。例如，可以利用 [ARS95，定理 VI.2.1 a)]得到这一结论。我们分别用 M_1、M_2、M_3 和 N_1、N_2、N_3表示不可分解的 Λ-模和 Γ-模，使得 M_i 和N_i 的长度为 i。

我们的目标是按照定理 8.9，构造 mono 中不可分解对象之间的一个双射$\mathcal{Q}(\Lambda)$ 和 mono$\mathcal{Q}(\Gamma)$。当 $\Lambda = \mathbb{Z}/(p^3)$ 和 $\Gamma = \mathbb{K}[x]/(x^3)$，其中 $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/(p)$ 时，这一点尤其有用，因为通常计算 mono$\mathcal{Q}(\Gamma)$ 中的不可分解对象，比计算 mono$\mathcal{Q}(\Lambda)$ 中的对象更容易。例如，对于 mono$\mathcal{Q}(\Gamma)$，可以使用覆盖理论（例如参见 [Moo09]和 [RS08a]）。据我们所知，目前还没有适用于 mono$\mathcal{Q}(\Lambda)$ 的此类方法。

命题 8.11. 设 Λ和 Γ 是剩余域为$\mathbb{K}$、Loewy 长度小于或等于 3 的交换局部单列环。则存在一个等价 $\operatorname{mod}\Lambda \cong \operatorname{mod}\Gamma$，它保持简单对象不变。

证明. 我们只证明 Loewy 长度为 3 的情形。Loewy 长度为 2 和 1 的情形可类似证明。首先注意到，Λ 和 Γ 是自内射的，且分别有唯一的内射模 M_3 和N_3。因此，$\operatorname{mod}\Lambda$ 和 $\operatorname{mod}\Gamma$ 中的不可分解对象分别为 M_1, M_2 和 N_1, N_2。此外，它们的同态空间为

$$\overline{\operatorname{Hom}}_\Lambda(M_i, M_j) \cong \mathbb{K} \quad \text{and} \quad \overline{\operatorname{Hom}}_\Gamma(N_i, N_j) \cong \mathbb{K} \tag{8.11.1}$$

对于 $1 \le i, j \le 2$。设 $f_{i,j}$和 $g_{i,j}$ 分别是 $\operatorname{Hom}_\Lambda(M_i, M_j)$ 和 $\operatorname{Hom}_\Gamma(N_i, N_j)$ 的基向量，使得 $f_{i,i} = \mathrm{id}_{M_i}$ 和 $g_{i,i} = \mathrm{id}_{N_i}$ 对应于 $i = 1, 2$。于是我们有如下关系

$$f_{2,1} \circ f_{1,2} = 0 \quad \text{and} \quad f_{1,2} \circ f_{2,1} = 0$$
$$g_{2,1} \circ g_{1,2} = 0 \quad \text{and} \quad g_{1,2} \circ g_{2,1} = 0$$

因此，关联 $M_i \mapsto N_i$ 和 $f_{i,\,j} \mapsto g_{i,\,j}$ 扩展为等价 $\operatorname{mod}\Lambda \xrightarrow{\cong} \operatorname{mod}\Gamma$。由于该等价保持简单对象不变，结论得证。□

注 8.12. 当 Loewy 长度大于 3 时，命题 8.11 不成立。例如，考虑 $\Lambda = \mathbb{Z}/(p^n)$ 和 $\Gamma = \Bbbk[x]/(x^n)$，其中 $\Bbbk = \mathbb{Z}/(p)$ 和 $n \ge 4$。那么

$$\overline{\operatorname{Hom}}_\Lambda(\mathbb{Z}/(p^2), \mathbb{Z}/(p^2)) \cong \mathbb{Z}/(p^2)$$

而在 $\operatorname{mod}\Gamma$ 中不存在具有该自同态环的对象。

设 Λ 是 Loewy 长度 3 的局部单列环。则有限生成的 Λ-模与满足 $3 \ge \alpha_1$ 的分拆 ($\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \cdots \ge \alpha_s$) 之间存在双射。具体而言，它将分拆 $\alpha = (\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \cdots \ge \alpha_s)$ 映为模

$$M(\alpha) = \bigoplus_{i=1}^{s} M_{\alpha_i}$$

其中，M_{α_i} 是 Loewy 长度为 α_i 的不可分解 Λ-模。给定一个表示 $\mathrm{M} \in \operatorname{rep}(Q, \operatorname{mod}\Lambda)$，M 的分拆向量是元组 $(\alpha^i)_{i \in Q_0}$，其中 α^i 是唯一的分拆，使得 $M(\alpha^i) \cong \mathrm{M}_i$。注意，在 [Sch08] 中，这称为 M 的类型。

定理 8.13. 设 Λ 和 Γ 是 Loewy 长度小于或等于 3 且具有相同剩余域 $\mathbb{K}$ 的交换局部单列环。那么，存在一个保持分拆向量不变的双射，将 mono$\mathcal{Q}(\Lambda)$ 中的不可分解对象对应到 mono$\mathcal{Q}(\Gamma)$ 中的不可分解对象。

证明。由命题 8.11 和定理 8.9 可得。□

表示 M $\in$ rep(Q,Λ) 的长度向量定义为元组 $\ell(\mathrm{M}) =(\ell(\mathrm{M_i}))_{i\in Q_0}$ 其中 $\ell(\mathrm{M_i})$ 表示 Λ-模 $\mathrm{M_i}$ 的长度。

例 8.14. 设 $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/(p)$ 为含有 p 个元素的有限域。我们使用定理 8.13，比对不同箭图 Q 对应的 mono$_Q$($\mathbb{F}_p[x]/(x^3)$) 和 mono$_Q$($\mathbb{Z}/(p^3)$)。

对于 $Q = 1 \to 2$ mono$_Q$($\mathbb{F}_p[x]/(x^3)$) 中的不可分解对象，RS08a 第 6 节 3] 已对其进行分类。它们是以下形式的唯一表示：

$$\mathbb{F}_p[x]/(x^i) \xrightarrow{f_{j,i}} \mathbb{F}_p[x]/(x^j)$$

其中 $f_{j,i}$ 是一个单态射，且 $0 \le i \le j \le 3$ 满足 $j \neq 0$，并且

$$\mathbb{F}_p[x]/(x^2) \xrightarrow{\begin{pmatrix}\pi\\ \iota\end{pmatrix}} \mathbb{F}_p \oplus \mathbb{F}_p[x](x^3)$$

其中 π 是典范投影，ι 是典范包含。因此，mono$_Q$($\mathbb{Z}/(p^3)$) 中的不可分解对象是以下形式的表示：

$$\mathbb{Z}/(p^i) \xrightarrow{g_{j,i}} \mathbb{Z}/(p^j)$$

其中 $g_{j,i}$ 是一个单态射，且 $0 \le i \le j \le 3$ 满足 $j \neq 0$，并且

$$\mathbb{Z}/(p^2) \xrightarrow{\begin{pmatrix}\pi'\\ \iota'\end{pmatrix}} \mathbb{Z}/(p) \oplus \mathbb{Z}/(p^3).$$

其中 π' 和 ι' 分别是典范投影和包含映射。现在，[HRW84，定理 1.2] 表明，mono$_Q$($\mathbb{Z}/(p^n)$) 中的不可分解对象 $M_1 \to M_2$（其中 $M_1 \neq 0$）与不可分解的有限生成赋值 p-群（按 [RW79] 的定义，其赋值不超过 n）之间存在双射。利用这一结果，以及上述分类中顶点 1 处的群 M_1 总是循环群这一事实，我们得到了 [HRW84，推论 4.3]。

对于 $Q = 1 \to 2 \to 3$，mono$_Q$($\mathbb{F}_p[x]/(x^3)$) 中不可分解对象的同构类由其维数向量唯一确定 [Moo09，定理 3.2]。在同构意义下共有 23 个不可分解对象，出现的不同维数向量为

$$\{001, 002, 011, 012, 111, 112, 122, 222, 003, 013, 023$$ 113，123，223，333，024，124，224，234，244，135，245，$246\}$.

由于定理 8.13 中的双射保持分拆向量，因此也保持长度向量。因此我们可以得出结论：mono$_Q$($\mathbb{Z}/(p^3)$) 中的不可分解对象由其长度向量唯一确定，且出现的不同长度向量如上表所列。mono$_Q$($\mathbb{F}_p[x]/(x^3)$)（因而也包括 mono$_Q$($\mathbb{Z}/(p^3)$））中不可分解对象的分拆向量列表，见 [XZZ14]，第 6 节的图 1；另见 [Lu20，例 5.1]。

对于 $Q_1 = 1 \to 2 \leftarrow 3$ 和 $Q_2 = 1 \leftarrow 2 \to 3$，我们有等价

$$\overline{\mathrm{mono}}_{Q_1}(\mathbb{F}_p[x]/(x^3)) \cong \overline{\mathrm{mono}}_{Q}(\mathbb{F}_p[x]/(x^3)) \cong \overline{\mathrm{mono}}_{Q_2}(\mathbb{F}_p[x]/(x^3))$$

根据 [LS22, Theorem 1]，，其中 Q 是前一段中考虑的箭图 $1 \to 2 \to 3$。特别地，mono$_{Q_1}$($\mathbb{F}_p[x]/(x^3)$)、mono$_Q$($\mathbb{F}_p[x]/(x^3)$) 和 mono$_{Q_2}$($\mathbb{F}_p[x]/(x^3)$) 中的不可分解对象数量相同。mono$_{Q_1}$($\mathbb{F}_p[x]/(x^3)$) 和 mono$_{Q_2}$($\mathbb{F}_p[x]/(x^3)$) 中的不可分解对象分别在 [LS22, Figure 7] 和 [LS22, Figure 8]，中按照其分拆向量进行了分类。利用这一点，我们得到 mono$_{Q_1}$($\mathbb{Z}/(p^3)$) 和 mono$_{Q_2}$($\mathbb{Z}/(p^3)$) 中的不可分解对象。

对于 $Q = 1 \to 2 \to 3 \to 4$，mono$_Q$($\mathbb{F}_p[x]/(x^3)$) 中有 84 个不可分解对象的同构类，其列表见 [XZZ14]，第 6 节的图 2；另见 [Lu20，例 5.2]。这些不可分解对象是按照它们在各个顶点上的限制来描述的，这等价于给出它们的分拆向量。因此，我们得到了 mono$_Q$($\mathbb{Z}/(p^3)$) 中不可分解对象的列表，并以其分拆向量表示。

若 $Q = 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$，则由 [Sim02，定理 1。3] 可知，范畴 $\mathrm{mono}_{\mathcal{Q}}(\mathbb{F}_p[x]/(x^3))$ 和 $\mathrm{mono}_{\mathcal{Q}}(\mathbb{Z}/(p^3))$ 有无穷多个不可分解对象。此外，若 $\mathbb{K}$ 是代数闭域，则根据 [Sim02，定理 1.5]，$\mathrm{mono}_{Q}(\mathbb{K}[x]/(x^3))$ 具有温和表示型。因此，可以尝试采用与 [Moo09] 和 [RS08a] 类似的方法，确定 $\mathrm{mono}_{\mathcal{Q}}(\mathbb{F}_p[x]/(x^3))$ 中的不可分解对象。然后可以利用定理 8.13，将结果转用于确定 $\mathrm{mono}_{\mathcal{Q}}(\mathbb{Z}/(p^3))$ 中的不可分解对象。

8.3. 根^{2}为零的中山代数的单态范畴。回顾一下，若 Artin 代数 Λ 的所有不可分解左、右 Λ模都是单列的，即都只有唯一的合成列，则称其为中山代数。本节将描述当 Λ 是根平方为零的中山代数时 $\mathrm{mono}_{\mathcal{Q}}(\Lambda)$ 的不可分解对象。我们从以下著名引理开始，并为方便起见给出证明。

引理 8.15. 设 Λ 是根平方为零的中山代数。那么 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 是半单的。更准确地说，它等价于斜域直积的模范畴，其斜域的个数等于非内射简单模的同构类个数。

证明。由于 Λ 是中山代数，众所周知（例如参见 [ARS95, Theorem VI.2.1], ），每个不可分解的 Λ模 M 都具有形式 $P/\mathrm{rad}^m P$，其中 P是不可分解投射模。由于 $\mathrm{rad}^2\,\Lambda = 0$，可知 $m \leq 1$。假设 M 不是单模。那么，对某个不可分解投射模，有 $m = 0$且 $M \cong P$。然而，在这种情况下，[ARS95, Lemma IV.2.15]表明 M 也是内射的。因此，$M = 0$ 在 $\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中。由此可知，$\mathrm{mod}\,\Lambda$ 中的每个对象都同构于若干单模的直和。因此，$\mathrm{mod}\,\Lambda$ 是一个半单范畴。结论得证。□

我们需要 Gabriel 定理的以下变体，它适用于斜域上的路径代数，是 [DR76]主要结果的一个特例。

定理 8.16. 设 D 是一个斜域， Q 是一个有限箭图。那么，若且唯若 Q 是 Dynkin 图，模范畴 $\mathrm{mod}\,DQ$ 具有有限表示型。在此情形下，不可分解 DQ-模的同构类集合与相应 Dynkin 图的正根集合 Φ^+ 之间存在双射。

结合这些结果，我们得到 $\mathrm{mono}_{\mathcal{Q}}(\Lambda)$ 中不可分解对象的分类。若 $\Lambda = \mathbb{K}[x]/(x^2)$，且 k 代数闭，则第一部分等价于 [Lu20, 定理 4.6 (i)]。

定理 8.17. 设 Q 是一个有限连通无圈箭图， Λ 是一个非半单根平方为零的 Nakayama 代数。设 m 为简单 Λ-模的个数， t 为非内射简单 Λ-模的个数。以下结论成立。

(1) 范畴 $\mathrm{mono}_{\mathcal{Q}}(\Lambda)$ 是有限表示型，当且仅当 Q是 Dynkin 型。(2) $\mathrm{mono}_{\mathcal{Q}}(\Lambda)$ 中不可分解内射对象的数量为 $m \cdot |Q_0|$。(3) 不可分解非内射对象的数量为 $t \cdot |\Phi^+|$，其中 Φ^+ 是（相应）Dynkin 图的正根集。

证明。令 $\mathbb{L}$ 为所有简单非内射 Λ-模（每个同构类取一个）的直和的自同态环。结合定理 7.9 与引理 8.15，$\mathrm{mono}_{\mathcal{Q}}(\Lambda)$ 中的不可分解非内射对象与 $\mathrm{mod}\,\mathbb{L}Q$ 中的不可分解对象之间存在一一对应。由于 $\mathrm{mono}_{\mathcal{Q}}(\Lambda)$ 中只有有限个不可分解内射对象，因此 $\mathrm{mono}_{\mathcal{Q}}(\Lambda)$ 是有限表示型，当且仅当 $\mathrm{mod}\,\mathbb{L}Q$ 是有限表示型。

在这种情况下，我们来计数不可分解对象。在 $\mathrm{mono}_{\mathcal{Q}}(\Lambda)$ 中恰有 $m \cdot |Q_0|$ 个不可分解内射模，因为它们每一个都具有 $f_!(J)$ 的形式，其中某个模范畴 $\mathrm{mod}\,\Lambda Q_0$ 中的对象是不可分解内射模。根据定理 8.16，$\mathrm{mono}_{\mathcal{Q}}(\Lambda)$ 中恰有 $t \cdot |\Phi^+|$ 个不可分解的非内射模，因此结论成立。□

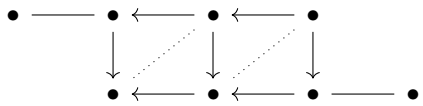
注 8.18. 众所周知， $\mathbb{A}_n$ 的正根数量为 $\binom{n+1}{2}$。根据定理 8.17，当 Q 的底层图为 $\mathbb{A}_n$ 时，这也是 $\mathrm{Mono}_{\mathcal{Q}}(\mathbb{K}[x]/(x^2))$ 中不可分解非内射对象的数量。这重新得到了 [XZZ14, 6.1 (i)] 中的一个观察结果。

注释 8.19. 根据前面的定理，一个显而易见的问题是，这是否是 mono$_Q(\Lambda)$ 的特殊性质，还是说对 mod ΛQ 也成立。然而事实并非如此。对于这条注释，我们将范围限制在代数闭域 $\Bbbk$ 上的有限维代数 Λ 。进一步假设 Λ 和 Q 连通。需要区分三种情况：$\Lambda \cong \Bbbk$、 $\Lambda \cong \left(\begin{smallmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \end{smallmatrix}\right)$，以及其余情况。

如果 $\Lambda \cong \Bbbk$，那么 Gabriel 定理确实指出， ΛQ 是有限表示型，当且仅当 Q 是 Dynkin。

如果 $\Lambda \cong \left(\begin{smallmatrix} \Bbbk & \Bbbk \\ 0 & \Bbbk \end{smallmatrix}\right)$，那么 $\Lambda Q \cong T_2(\Bbbk Q)$ 。有限维代数 A 的表示型 $T_2(A)$ 已在 [LS00] 中研究；由其中的定理 4 可知， ΛQ 是有限表示型，当且仅当对于任意定向的 $n \leq 4$， Q 是 A_n 型。对于 A_2 或非线性定向的 A_3，关于表示有限性的证明已见于 [AR76，命题 1.2，定理 1。3]，对于线性定向的 A_3，参见 [Les94，定理 2.4(a)]。

最后，若 Λ 是任意另一个根平方为零的中山代数，则 ΛQ 为有限表示型，当且仅当 Q 对于 $n \leq 3$是 A_n 类型。对于 $\Lambda \cong \Bbbk[x]/(x^2)$ ，这由 [GLS17，命题 13.1] 得出。对于一般的 Λ （代数闭域上的线性代数），利用覆盖理论和编织算法可给出类似的证明，从而得到该结论。（关于 $Q = A_2$ 或线性定向的 A_3 的情形，也可参见 [AR76，命题 1.2] 以及 [Les94，定理 2.4(b)]。在 $Q = A_4$的情形下，可利用 Happel–Vossieck 列表 [HV83] 找到一个形如以下形式的带关系子箭图



从而得出该代数是表示无限的。）

例 8.20. 设 $\Bbbk$ 为一个域，且设 $\Lambda = \Bbbk[x]/(x^2)$ 。设 Q 为一个类型为 $\mathbb{A}_n$的线性定向箭图。在这种情况下，只有一个非内射的简单 Λ-模。根据定理 8.1，有 n 个不可分解内射模，由 $f_!(\Lambda$ (i)）给出，其中 Λ(i)表示由 $\mathbb{A}_n$ 给出的表示，它在顶点 i 处取值为 Λ ，在其他顶点处为零。作为一个表示，它们如下所示：

$$0 \to \cdots \to 0 \to \Lambda \xrightarrow{\mathrm{id}} \Lambda \xrightarrow{\mathrm{id}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{id}} \Lambda$$

另一方面，不可分解非内射对象可通过对模范畴 $\Bbbk\mathbb{A}_n$中的对象应用 Mimo 构造得到，因为模范畴 $\Lambda \cong$ 模范畴 $\Bbbk$。模范畴 $\Bbbk\mathbb{A}_n$ 中的不可分解对象由区间模给出

$$0 \to \cdots \to 0 \to \Bbbk \xrightarrow{\mathrm{id}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{id}} \Bbbk \to 0 \to \cdots \to 0.$$

其中最后一个 $\Bbbk$ 位于位置 j。容易验证，对于这样的区间模 M ，我们有 $\ker M_{\mathrm{k},\ \mathrm{in}} = 0$，除非 k =j $+1$；在这种情况下，$\ker M_{\mathrm{k},\ \mathrm{in}} = \Bbbk$，其内射包为 Λ。因此，根据例 6.9 中对 Mimo 构造的明确描述，我们得到 Mono$_{\mathbb{A}_n}(\Lambda)$ 中的不可分解非内射对象由以下对象给出

$$0 \to \cdots \to 0 \to \Bbbk \xrightarrow{\mathrm{id}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{id}} \Bbbk \xrightarrow{\iota} \Lambda \xrightarrow{\mathrm{id}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{id}} \Lambda,$$

其中 ι 是 $\Bbbk$ 到 Λ的一个选定嵌入。这还原了 Moo09 定理 3.1]中 $n = 3$的不可分解对象的描述。对于任意 n，通过计数不可分解非内射对象的数量，我们发现其等于 $\binom{n+1}{2}$ ，正如注 8.18 中所述。

由定理 8.13 可知，mono$_Q(\Bbbk[x]/(x^2))$ 和 mono$_Q(\mathbb{Z}/(p^2))$ 中形式相同的不可分解对象数量相同。事实上，当 $\Bbbk = \mathbb{Z}/(p)$ 和 $\Lambda = \mathbb{Z}/(p^2)$ 时，按照上述相同步骤也可以得出这一结论。

更一般地，同样的论证表明，对于任意的根平方为零的中山代数 Λ 和线性定向的 $\mathbb{A}_n$ 型箭图 Q ，mono$_Q(\Lambda)$ 的不可分解内射对象为

$$0 \to \cdots \to 0 \to I \xrightarrow{\mathrm{id}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{id}} I,$$

其中 I 遍历不可分解内射 Λ-模，而 mono$_Q(\Lambda)$ 的不可分解非内射对象为

$$0 \to \cdots \to 0 \to L \xrightarrow{\mathrm{id}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{id}} L \xrightarrow{\iota} I(L) \xrightarrow{\mathrm{id}} \ldots \xrightarrow{\mathrm{id}} I(L)$$

其中 L 遍历同构意义下的简单非内射 Λ-模，$I(L)$ 表示 L的内射包，其中 $\iota\colon\ L \to I(L)$ 是选定的嵌入。若令 $n=2$ 或 $n=3$ 并设 Λ^{α}为代数 1 2 ，其关系为 $\alpha\circ\beta=0=\beta\circ\alpha$，那么这就重新得到了$_{\beta}$XZZ14 ~~第 6 节~~中得到的不可分解对象的描述 [。2]。

例 8.21. 设 Q 为箭图 $1 \to 2 \leftarrow 3 \to 4$。令 $\Lambda = \Bbbk[x]/(x^2)$。与前一个例子类似，4 个不可分解内射对象为

$$f_!(\Lambda(1)) = (\Lambda \xrightarrow{1} \Lambda \leftarrow 0 \to 0), \qquad f_!(\Lambda(2)) = (0 \to \Lambda \leftarrow 0 \to 0),$$
$$f_!(\Lambda(3)) = (0 \to \Lambda \xleftarrow{1} \Lambda \xrightarrow{1} \Lambda), \qquad f_!(\Lambda(4)) = (0 \to 0 \leftarrow 0 \to \Lambda).$$

另一方面，不可分解非内射对象可通过对 mod $\Bbbk Q$ 中以下不可分解对象应用 Mimo- 构造得到，因为 mod $\Lambda \cong$ mod $\Bbbk$:

$$0 \to \Bbbk \leftarrow 0 \to 0, \qquad 0 \to 0 \leftarrow 0 \to \Bbbk, \qquad \Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk \leftarrow 0 \to 0, \qquad 0 \to \Bbbk \xleftarrow{1} \Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk,$$
$$\Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk \xleftarrow{1} \Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk, \qquad 0 \to \Bbbk \xleftarrow{1} \Bbbk \to 0, \qquad 0 \to 0 \leftarrow \Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk,$$
$$\Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk \xleftarrow{1} \Bbbk \to 0, \qquad 0 \to 0 \leftarrow \Bbbk \to 0, \qquad \Bbbk \to 0 \leftarrow 0 \to 0.$$

由此得到 mono$_Q(\Lambda)$ 中的以下不可分解对象：

$$0 \to \Bbbk \leftarrow 0 \to 0, \qquad 0 \to 0 \leftarrow 0 \to \Bbbk, \qquad \Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk \leftarrow 0 \to 0, \qquad 0 \to \Bbbk \xleftarrow{1} \Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk,$$
$$\Bbbk \xrightarrow{\binom{1}{\iota}} \Bbbk \oplus \Lambda \xleftarrow{\binom{1}{0}} \Bbbk \xrightarrow{1} \Bbbk, \qquad 0 \to \Bbbk \xleftarrow{1} \Bbbk \xrightarrow{\iota} \Lambda, \qquad 0 \to \Lambda \xleftarrow{\iota} \Bbbk \to \Bbbk,$$
$$\Bbbk \xrightarrow{\binom{1}{\iota}} \Bbbk \oplus \Lambda \xleftarrow{\binom{1}{0}} \Bbbk \xrightarrow{\iota} \Lambda, \qquad 0 \to \Lambda \xleftarrow{\iota} \Bbbk \xrightarrow{\iota} \Lambda, \qquad \Bbbk \xrightarrow{\iota} \Lambda \leftarrow 0 \to 0.$$

由此以及前一个例子可知，mono$_Q(\Lambda)$ 的维数向量取决于 Q 的定向。将 Λ 替换为一般的根平方为零的中山代数，做法与前一个例子类似。

8.4. 克罗内克箭图。假设 $\mathbb{K}$ 是代数闭的。令 $Q = \quad 1 \quad \rightrightarrows 2$ 为克罗内克箭图，并令~~$\Lambda =$~~ $\mathbb{K}[x]/(x^2)$。mono$_Q(\Lambda)$ 中的一个对象由三元组 (U,V,T) 组成，其中 V 是有限维 $\mathbb{K}$-向量空间，$U \oplus U$ 是 V 的一个 $\mathbb{K}$-子空间，而 T 是 V 上满足 $T^2=0$ 的线性算子，并且其限制为如下形式的线性算子

$$\begin{pmatrix} T' & 0 \\ 0 & T' \end{pmatrix} : U \oplus U \to U \oplus U$$

在 $U \oplus U$ 上。我们利用定理 8.1 描述 mono$_Q(\Lambda)$ 中的不可分解对象。事实上，不可分解内射对象由下式给出

$$f_!(\Lambda(1)) = \ \Lambda \underset{i_2}{\overset{i_1}{\rightrightarrows}} \Lambda^2 \quad \text{and} \quad f_!(\Lambda(2)) = \ 0 \rightrightarrows \Lambda$$

其中 i_1 和 i_2 分别是 Λ^2的第一和第二个直和项的包含映射。根据定理 8.1，我们可以从 rep(Q, mod Λ) $\cong$ rep(Q, mod$^{\mathbb{K}}$) 中的不可分解对象，得到 mono$_Q(\Lambda)$ 中的不可分解非内射对象。后者就是 $\mathbb{K}$ 上克罗内克箭图的表示范畴。它具有温和表示型，其不可分解有限维表示是众所周知的，例如参见 [ARS95，第 VIII.7] 节。为描述这些表示，令 V_n 表示由变量 y 和 z 构成的 n 次齐次多项式的向量空间，并且

我们令 V_n^*表示其 $\mathbb{K}$-对偶。那么，$\mathsf{rep}(Q,\mathsf{mod}^{\mathbb{K}})$ 的不可分解对象是预投射表示和预内射表示

$$P_n = \; V_{n-1} \underset{z}{\overset{y}{\rightrightarrows}} V_n \quad \text{and} \quad I_n = \; V_n^* \underset{(z)^*}{\overset{(y)^*}{\rightrightarrows}} V_{n-1}^* \qquad n \geq 0$$

以及正则表示

$$R_{p^n} = \; V_{n-1} \underset{z}{\overset{y}{\rightrightarrows}} V_n/_{\mathbb{K}} p^n \quad \text{where } n \geq 1 \text{ and } 0 \neq p \in V_1.$$

这里，$R_{p^n} \cong R_{q^n}$当且仅当 $p = ay + bz$且 $q = cy + dz$，其中 $(a\colon b) = (c\colon d)$ 在 $\mathbb{P}^1$ 中。因此，正则表示由射影直线索引。由于存在正合列

$$0 \to V_{n-2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -z \\ y \end{pmatrix}} V_{n-1} \oplus V_{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix}} V_n \to 0 \quad n \geq 1 \tag{8.21.1}$$

$$0 \to V_{n+1}^* \xrightarrow{\begin{pmatrix} -(z)^* \\ (y)^* \end{pmatrix}} V_n^* \oplus V_n^* \xrightarrow{\begin{pmatrix} (y)^* & (z)^* \end{pmatrix}} V_{n-1}^* \to 0 \quad n \geq 1 \tag{8.21.2}$$

$$0 \to V_{n-2} \oplus_{\mathbb{K}} p^{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} -z & a \\ y & b \end{pmatrix}} V_{n-1} \oplus V_{n-1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} y & z \end{pmatrix}} V_n/_{\mathbb{K}} p^n \to 0 \quad n \geq 1 \tag{8.21.3}$$

我们得到

$$L_1 \operatorname{top}_X(P_n) = (0, V_{n-2}) \qquad L_1 \operatorname{top}_X(I_n) = (0, V_{n+1}^*) \qquad L_1 \operatorname{top}_X(R_{p^n}) = (0, V_{n-2} \oplus_{\mathbb{K}} p^{n-1}).$$

利用例 6.9 中的公式，我们可以计算 P_n、 I_n 和 R_{p^n}的 Mimo。为简便起见，对于一个 -向量空间 V，我们将 $V[x]/(x^2) = V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[x]/(x^2)$ 记作$_{\mathbb{K}}V$。于是

$$\operatorname{Mimo} P_n \cong \; (V_{n-1} \underset{g_2}{\overset{g_1}{\rightrightarrows}} V_n \oplus V_{n-2}[x]/(x^2)) \quad \text{with} \quad g_1 = \begin{pmatrix} y \\ g_1' \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad g_2 = \begin{pmatrix} z \\ g_2' \end{pmatrix}$$

其中， V_{n-1}和 V_n 视为带有 x平凡作用的$_{\mathbb{K}}\mathbb{K}[x]/(x^2)$-模，且 $g_1' = xg_1''$和 $g_2' = xg_2''$和 $\begin{pmatrix} g_1'' & g_2'' \end{pmatrix}\colon V_{n-1} \oplus V_{n-1} \to V_{n-2}$ 是正合列 (8.21.1) 中最左侧映射的一个回缩选择。类似地，

$$\operatorname{Mimo} I_n \cong \; (V_n^* \underset{h_2}{\overset{h_1}{\rightrightarrows}} V_{n-1}^* \oplus V_{n+1}^*[x]/(x^2)) \quad \text{with} \quad h_1 = \begin{pmatrix} (y)^* \\ h_1' \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad h_2 = \begin{pmatrix} (z)^* \\ h_2' \end{pmatrix}$$

其中 $h_1' = xh_1''$和 $h_2' = xh_2''$和 $\begin{pmatrix} h_1'' & h_2'' \end{pmatrix}\colon V_n^* \oplus V_n^* \to V_{n+1}^*$ 是正合列 (8.21.2) 中最左侧映射的一个回缩选择。最后，Mimo R_{p^n} 由下式给出

$$\operatorname{Mimo} R_{p^n} \cong \; (V_{n-1} \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightrightarrows}} V_n \oplus (V_{n-2} \oplus_{\mathbb{K}} p^{n-1})[x]/(x^2)) \quad \text{with} \quad k_1 = \begin{pmatrix} y \\ k_1' \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad k_2 = \begin{pmatrix} z \\ k_2' \end{pmatrix}$$

其中 $k_1' = xk_1''$和 $k_2' = xk_2''$和 $\begin{pmatrix} k_1'' & k_2'' \end{pmatrix}\colon V_{n-1} \oplus V_{n-1} \to V_{n-2} \oplus_{\mathbb{K}} p^{n-1}$ 是正合列 (8.21.3) 中最左侧映射的一个回缩选择。由定理 8.1 可知

$$f_!(\Lambda(1)),\ f_!(\Lambda(2)),\ \operatorname{Mimo} P_n,\ \operatorname{Mimo} I_n,\ \text{and}\ \operatorname{Mimo} R_{p^n}$$

对于所有可能的 n 和 p，它们在同构意义下构成 $\mathsf{mono}_Q(\Lambda)$ 中全部不可分解对象 .

我们还可以考虑由所有单表示构成的范畴 $\mathsf{Mono}_Q(\Lambda)$，其对象是上述形式的三元组 (U, V, T)，但其中 U和 V不一定是有限维的。根据定理 8.1，$\mathsf{Mono}_Q(\Lambda)$ 中的不可分解非内射对象可以通过 Mimo 构造，从 ~~$\mathsf{rep}(Q, \operatorname{Mod}\Lambda)$~~ $\cong \mathsf{rep}(Q, \operatorname{Mod}_{\mathbb{K}})$ 中的不可分解对象得到。例如，对于泛模

$$G = \; _{\mathbb{K}}(t) \underset{1}{\overset{t}{\rightrightarrows}} {}_{\mathbb{K}}(t)$$

我们有一个正合列

$$0 \to \mathbb{K}(t) \xrightarrow{\begin{pmatrix}-1\\ t\end{pmatrix}} \mathbb{K}(t) \oplus \mathbb{K}(t) \xrightarrow{\begin{pmatrix}t & 1\end{pmatrix}} \mathbb{K}(t) \to 0$$

因此，我们得到 Mono$_Q(\Lambda)$ 中的一个不可分解对象

$$\operatorname{Mimo} G = \ (\mathbb{K}(t) \underset{l_2}{\overset{l_1}{\rightrightarrows}} \mathbb{K}(t) \oplus k(t)[x]/(x^2)) \quad \text{with} \quad l_1 = \begin{pmatrix} t \\ -x \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad l_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

一般而言，分类 Mono$_Q(\Lambda)$ 中的所有不可分解对象是困难的，因为 rep$(Q, \operatorname{Mod}^{\mathbb{K}})$ 范畴的分类本身就很困难。例如，3-Kronecker 箭图的表示范畴可以正合嵌入 rep$(Q, \operatorname{Mod}_{\mathbb{K}})$，参见 [Rin99]。

9. 调制

本节将我们的结果应用于 $\mathbb{K}$ 上根平方为零的自内射 Nakayama 代数的调制表示。特别地，我们重新得到 [LW22], 中的结果，并刻画在对称化子的各项为 ≤ 2 的假设下， [GLS17] 中引入的 GLS 代数何时具有有限 Cohen–Macaulay 型。

9.1. 根平方为零的循环 Nakayama 代数的拟种。固定一个域 $\mathbb{K}$、一个有限无环箭图 Q，以及其上的一个拟种 Q，其含义见 [K¨ul17], : 即对每个顶点 $\mathsf{i} \in Q_0$，给定一个有限维 $\mathbb{K}$-代数 Λ_i；对每个箭头 $\alpha\colon \mathsf{i} \to \mathsf{j} \in Q$，给定一个 Λ_j-Λ_i-双模 M_α，它作为左 Λ_j-模和右 Λ_i-模均为投射模。由此，我们得到 Q 上的一个调制 $\mathfrak{B}$，其中 $\mathcal{B}_\mathsf{i} = \operatorname{mod} \Lambda_\mathsf{i}^{\mathrm{op}}$ 是有限维左 Λ_i-模的范畴，并且

$$F_\alpha = M_\alpha \otimes_{\Lambda_\mathsf{i}} -\colon \operatorname{mod} \Lambda_\mathsf{i}^{\mathrm{op}} \to \operatorname{mod} \Lambda_\mathsf{j}^{\mathrm{op}}$$

由张量积给出，见例 3.9。我们还有张量代数

$$T(M) \coloneqq \Lambda \oplus M \oplus (M \otimes_\Lambda M) \oplus \dots$$

其中 $\Lambda = \prod_{\mathsf{i} \in Q_0} \Lambda_\mathsf{i}$ 和 $M = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} M_\alpha$ 以自然方式构成一个 Λ-双模。表示范畴 rep $\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{B}$-表示的范畴 mod $T(M)^{\mathrm{op}}$ 等价，后者是有限生成左$T(M)$-模的范畴，见 [Geu17，引理 2.3.4]。如果这些 Λ_i是域$\mathbb{K}$的乘积，那么 $T(M)$就是一个箭图的路径代数，我们将在下文对其进行描述。

定义 9.1。设 $\mathcal{M} = (t_\mathsf{i}, m^\alpha_{k,l})$ 是一个元组：对 Q 中的每个顶点 i，给定一个非负整数 t_i；对 Q 中的每个箭头 $\alpha\colon \mathsf{i} \to \mathsf{j}$ 以及每一对整数 $1 \leq k \leq t_\mathsf{i}$ 和 $1 \leq l \leq t_\mathsf{j}$，给定一个非负整数 $m^\alpha_{k,l}$。箭图 $Q(\mathcal{M})$ 定义如下：

- $Q(\mathcal{M})_0 = \{(\mathsf{i}\ m) \mid \mathsf{i} \in Q_0 \text{ 和 } 1 \leq m \leq t_\mathsf{i}\}$。
- 从 $(\mathsf{i}\ k)$ 到 $(\mathsf{j}\ l)$ 的箭头数为 $\sum m^\alpha_{k,\,l}$ 其中求和遍历所有源为 i 且终点为 j 的箭头α。

引理 9.2。假设 $\Lambda_\mathsf{i} \cong \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ 对每个 $\mathsf{i} \in Q_0$都是 t_i个 $\mathbb{K}$的直积。令 e^i_m为对应于 m个 $\mathbb{K}$副本中第 m 个的幂等元，其中副本取自 Λ_i。对于 Q中的箭头 $\alpha\colon \mathsf{i} \to \mathsf{j}$ 以及整数 $1 \leq k \leq t_\mathsf{i}$和 $1 \leq l \leq t_\mathsf{j}$，令 $m^\alpha_{k,\,l} \coloneqq \dim_{\mathbb{K}} e^\mathsf{j}_l M_\alpha e^\mathsf{i}_k$。则 $T(M) \cong \mathbb{K}(Q(\mathcal{M}))$。

证明。由于 $\Lambda = \prod_{\mathsf{i} \in Q_0} \Lambda_\mathsf{i}$ 和 Λ_i 是 t_i 个 $\mathbb{K}$副本的直积，代数 Λ 是以 $Q(\mathcal{M})$ 的顶点集为指标集的 $\mathbb{K}$ 的直积。根据 [ARS95 命题 III.1.3]，结论得证。□

根据假设，函子 $F_\alpha = M_\alpha \otimes_{\Lambda_\mathsf{i}} -$ 是正合的，并保持投射模不变。如果代数 Λ_i 是自内射的，那么这些函子也保持内射模不变。因此，由调制定义的自函子 X 满足本文中的基本假设。此外，在这种情况下， $\mathfrak{B}$ 的单态射范畴 Mono(X) 与有限生成 Gorenstein 投射右 $T(M)$-模的范畴 Gproj $T(M)$ 一致，见 [K¨ul17，命题 3.8]。特别地，由定理 5.7 可得等价 Gproj $T(M)^{\mathrm{op}} \to$ rep $\overline{\mathfrak{B}}$，其中 $\overline{\mathfrak{B}}$ 表示例 3.14 中的调制。由于 $T(M)$ 是 1-Gorenstein，见 [K¨ul17，命题 3.5],，稳定范畴 Gproj $T(M)$ 与 $T(M)$ 的奇点范畴等价 [Buc21]。

现在我们考虑根平方为零的循环 Nakayama 代数的调制。这涵盖了 [GLS17] 和 [LW22]中的调制。这里，根平方为零的循环 Nakayama 代数是指循环箭图的路径代数

$$\tilde{A}_n = \ 1 \longleftrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n$$

对于某个整数 n，模去使任意两个箭头的复合为零的理想。

定理 9.3. 假设 Λ_{i} 要么是根平方为零的循环 Nakayama 代数，要么是 $\mathbb{K}$（对 $\mathsf{i} \in Q_0$）。令

$$t_{\mathsf{i}} = \begin{cases} 0, & \text{if } \Lambda_{\mathsf{i}} = \mathbb{K} \\ \text{number of simples of } \Lambda_{\mathsf{i}}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

对于 $1 \leq k \leq t_{\mathsf{i}}$，令 e_k^{i} 为 Λ_{i}在顶点 k 处的幂等元。对于每个箭头 $\alpha\colon \mathsf{i} \to \mathsf{j}$，记作 $M_\alpha \cong M'_\alpha \oplus M''_\alpha$，其中 M''_α是 M_α作为 Λ_{j}-Λ_{i}双模的极大投射直和项。对于$1 \leq k \leq t_{\mathsf{i}}$和 $1 \leq l \leq t_{\mathsf{j}}$，令 $m^\alpha_{k,l}$为由 Λ_{i}中的箭头 $k \to (k+1)$ 所诱导的线性变换 $e_l^{\mathsf{j}} M'_\alpha e_{k+1}^{\mathsf{i}} \to e_l^{\mathsf{j}} M'_\alpha e_k^{\mathsf{i}}$的余秩（其中 $t_{\mathsf{i}}+1$ 被视为 0）。令 $\mathcal{M} = (t_{\mathsf{i}}, m^\alpha_{k,l})$为由这些整数构成的元组。以下结论成立：

(1) 我们有一个等价 $\operatorname{rep}\overline{\mathfrak{B}} \cong \operatorname{mod}_{\mathbb{K}}(Q(\mathcal{M}))^{\mathrm{op}}$ (2) 我们有一个等价

$$\overline{\operatorname{Gproj}} T(M)^{\mathrm{op}} \to \operatorname{mod}_{\mathbb{K}}(Q(\mathcal{M}))^{\mathrm{op}}.$$

(3) $T(M)$ 是 Cohen–Macaulay 有限的，当且仅当 $Q(\mathcal{M})$ 是 Dynkin。(4) 我们得到一个双射

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Indecomposable objects} \\ \text{in } \operatorname{mod}_{\mathbb{K}}(Q(\mathcal{M}))^{\mathrm{op}} \end{matrix} \right\}^{\cong} \xrightarrow{\cong} \left\{ \begin{matrix} \text{Indecomposable non-injective} \\ \text{objects in } \operatorname{Gproj} T(M) \end{matrix} \right\}^{\cong}$$

通过将 (1) 中的等价与例 7.11 中描述的 Mimo 构造复合得到。

证明。由于 Gorenstein 投射模与单态表示相同，(2) 和 (4) 由 (1) 以及定理 5.7 和 7.9 得出。此外，由于等价会在不可分解对象之间诱导双射，(3) 由 (2) 得出。因此，我们只需证明 (1)。由于 Λ_{i} 是根平方为零的中山代数，$\operatorname{mod}\Lambda_{\mathsf{i}}^{\mathrm{op}}$ 等价于若干个 $\mathbb{K}$的乘积的模范畴。因此，~~我~~我们可以将引理 9.2 应用于 $\overline{\mathfrak{B}}$，故只需证明定理中定义的整数 t_{i} 和 $m^\alpha_{k,\,l}$ 与引理 9.2 中的相等。对于 t_{i}'s，这显然成立，因为 $\operatorname{mod}\Lambda_{\mathsf{i}}^{\mathrm{op}} \cong \operatorname{mod}\, k^{t_{\mathsf{i}}}$，其中 $t_{\mathsf{i}} = 0$ 给出零范畴。令S_k^{i} 为 Λ_{i} 中集中在顶点 k 的简单 Λ_{i}-模。注意，引理 9.2 中 $\overline{\mathfrak{B}}$对应的整数 $m^\alpha_{k,\,l}$ 等于 S_l^{j} 在 $M_\alpha \otimes_{\Lambda_{\mathsf{i}}} S_k^{\mathsf{i}}$ 中的直和项数。由于 M''_α 是双模上的投射模， $M''_\alpha \otimes_{\Lambda_{\mathsf{i}}} S_k^{\mathsf{i}}$ 必须是投射 Λ_{j}-模，因此没有形如 S_l^{j} 的直和项。因此，引理 9.2 中 $\overline{\mathfrak{B}}$ 对应的整数 $m^\alpha_{k,\,l}$ 等于S_l^{j} 在 $M'_\alpha \otimes_{\Lambda_{\mathsf{i}}} S_k^{\mathsf{i}}$ 中的直和项数。根据 [Lin96, Proposition 2.3],, $M'_\alpha \otimes_{\Lambda_{\mathsf{i}}} S_k^{\mathsf{i}}$ 没有投射直和项，因此该数必等于 $e_l^{\mathsf{j}} M'_\alpha \otimes_{\Lambda_{\mathsf{i}}} S_k^{\mathsf{i}}$的维数。将 $e_l^{\mathsf{j}} M'_\alpha$ 与正合列$\Lambda e_{k+1}^{\mathsf{i}} \to \Lambda e_k^{\mathsf{i}} \to S_k^{\mathsf{i}} \to 0$ 张量，得到一个正合列

$$e_l^{\mathsf{j}} M'_\alpha e_{k+1}^{\mathsf{i}} \to e_l^{\mathsf{j}} M'_\alpha e_k^{\mathsf{i}} \to e_l^{\mathsf{j}} M'_\alpha \otimes_{\Lambda_{\mathsf{i}}} S_k^{\mathsf{i}} \to 0.$$

由于最左侧映射的余秩等于其余核的维数，即 $e_l^{\mathsf{j}} M'_\alpha \otimes_{\Lambda_{\mathsf{i}}} S_k^{\mathsf{i}}$，因此得证。□

注 9.4. 如证明中所述，定理 9.3 中的整数 $m^\alpha_{k,l}$ 也可以等价地定义为 $M_\alpha \otimes_{\Lambda_{\mathsf{i}}} S_k^{\mathsf{i}}$ 中 S_l^{j} 的直和项数，或定义为 $e_l^{\mathsf{j}} M'_\alpha \otimes_{\Lambda_{\mathsf{i}}} S_k^{\mathsf{i}}$ 的维数。它们也等于与箭头 $(k-1) \to (k-2)$ 对应的线性变换 $e_l^{\mathsf{j}} M'_\alpha e_{k-1}^{\mathsf{i}} \to e_l^{\mathsf{j}} M'_\alpha e_{k-2}^{\mathsf{i}}$ 的零度（其中 0 和 -1 分别与 t_{i} 和 $t_{\mathsf{i}} - 1$ 视为相同）。

9.2. 箭图代数及与可对称化 Cartan 矩阵相关的代数。设 Q 是一个有限无环箭图，带有一个保持箭头的对合自同构 τ。在 [LW22] 中，他们称这样的二元组 (Q,τ) 为 $\imath$ 箭图，并与之关联一个代数 $\Lambda^\imath$。他们的目标是将 Bridgeland 关于通过 Hall 代数实现量子群的工作推广到 $\imath$ 量子群。特别地，形如 $\Lambda^\imath$ 的代数的半导出 Hall 代数同构于有限型 [的泛拟分裂 $\imath$ 量子群]LW22，定理 G 和 I。

结果表明，有限生成 $\Lambda^\imath$-模范畴等价于满足定理 9.3 中条件的拟种表示范畴，参见 [LW22, 第 2.4] 节。此外，相应调制的单态射范畴等于 Gorenstein 投射 $\Lambda^\imath$-模范畴，因此在计算半导出 Hall 代数时发挥重要作用，参见 [LW22，定理 C]。对于 Dynkin 箭图，单态射范畴还等价于 [LW21b] 中所讨论的正则 Nakajima–Keller–Scherotzke 范畴上的有限生成投射模范畴。

具体而言，他们考虑的拟种如下：为 Q 中每个 τ-轨道选取一个顶点代表元，并令 $\mathbb{I}_\tau$ 为这些代表元的集合。箭图 Q' 的顶点集为 $\mathbb{I}_\tau$，其中没有重箭；当且仅当存在一条从 τ-轨道中的某个顶点指向 τ-轨道中的某个顶点的箭时，Q' 中才有一条从 i 指向 j 的箭。Q' 上的拟种由一个元组 $(\mathbb{H}_\mathtt{i}, {}_\mathtt{j}\mathbb{H}_\mathtt{i})$ 给出，其中

$$\mathbb{H}_\mathtt{i} = \begin{cases} \mathbb{K}[x]/(x^2), & \text{if } \tau(\mathtt{i}) = \mathtt{i} \\ \mathbb{K}(\ 1 \underset{x}{\overset{y}{\leftrightarrows}} 2\ )/(xy, yx) & \text{if } \tau(\mathtt{i}) \neq \mathtt{i}. \end{cases}$$

关于双模 ${}_\mathtt{j}\mathbb{H}_\mathtt{i}$ 的描述，参见 [LW22] 第 16 页。

命题9.5. 设 (Q,τ) 是一个 $\imath$箭图，设 $(\mathbb{H}_\mathtt{i}, {}_\mathtt{j}\mathbb{H}_\mathtt{i})$ 是如上所述与该箭图关联的拟种，并设 $\mathcal{M} = (t_\mathtt{i}, m^\alpha_{k,l})$ 是定理 9.3 中关联的整数元组。则 $Q'(\mathcal{M}) = Q$。

证明. 首先注意到，该对应关系

$$(\mathtt{i}, 1) \mapsto \mathtt{i} \quad \text{and} \quad (\mathtt{i}, 2) \mapsto \tau(\mathtt{i})$$

给出了 $Q'(\mathcal{M})_0$ 与 Q_0 之间的双射。此外，所有非零 ${}_\mathtt{j}\mathbb{H}_\mathtt{i}$ 作为 $\mathbb{H}_\mathtt{j}$-$\mathbb{H}_\mathtt{i}$-双模的 Loewy 长度均为 1，因为它们与 $\mathbb{H}_i$ 和 $\mathbb{H}_j$ 中的任意两个幂零元 $\varepsilon_\mathtt{i}$ 和 $\varepsilon_\mathtt{j}$ 的组合相乘时都为零；参见 [LW22] 第 16 页中的描述。由于所有非零投射 $\mathbb{H}_\mathtt{j}$-$\mathbb{H}_\mathtt{i}$-双模的 Loewy 长度均为 2，因此 ${}_\mathtt{j}\mathbb{H}_\mathtt{i}$ 没有非零的投射直和项。因此，根据定理 9.3，$Q'(\mathcal{M})$ 中从 (i k) 到 (j l) 的箭的数目等于定理 9.3 中的 $\mathbb{K}$-态射 $e^\mathtt{j}_l {}_\mathtt{j}\mathbb{H}_\mathtt{i} e^\mathtt{i}_{k+1} \to e^\mathtt{j}_l {}_\mathtt{j}\mathbb{H}_\mathtt{i} e^\mathtt{i}_k$ 的余秩。利用 [LW22], 第 16 页上双模 ${}_\mathtt{j}\mathbb{H}_\mathtt{i}$ 的 $\mathbb{K}$-线性基，我们看到这等于 Q 中从顶点 τ^{k-1}(i) 到 τ^{l-1}(j) 的箭数。断言得证。□

注记 9.6. 由定理 9.3 可知，我们有一个等价

$$\overline{\mathrm{Gproj}}\,(\Lambda^\imath)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{mod}(\mathbb{K}Q)^{\mathrm{op}}.$$

特别地，它诱导出从不可分解非射影 Gorenstein 投射$\Lambda^\imath$-模到不可分解 $\mathbb{K}Q$-模的一个双射，从而重获 [LW22, 推论 3.21]。此外，根据定理 9.3 (4)，我们可以明确描述这个双射的逆。研究如何利用这个逆来考察 $\Lambda^\imath$ 及其 Hall 代数将会很有意思。

给定一个对称 Cartan 矩阵 $C = (c_{\mathtt{i},\mathtt{j}})_{\mathtt{i},\mathtt{j}\in I}$ 及其（无环）定向 $\Omega \subset I \times I$，可以关联一个路径代数 $\mathbf{k}Q$，其箭图 Q 的顶点集为 I，并且如果 $(j,i) \in \Omega$，则存在 $|c_{\mathtt{i},\mathtt{j}}|$ 条从 i 到 j 的箭。在 [GLS17], 中，这一构造得到推广：他们将代数 $H = H(C,D,\Omega)$ 与如下数据相关联：一个可对称化 Cartan 矩阵 $C = (c_{\mathtt{i},\mathtt{j}})_{\mathtt{i},\mathtt{j}\in I}$，其对称化子为 $D = \mathrm{diag}(d_\mathtt{i} \mid \mathtt{i} \in I)$，以及（无环）定向 $\Omega \subset I \times I$。$H(C,D,\Omega)$ 上有限生成左模的范畴等价于箭图 Q'上的拟种 $(H_\mathtt{i}, {}_\mathtt{j}H_\mathtt{i})$ 的表示。具体而言，箭图 Q' 的顶点集为 I，其中没有重箭；若 $(j,i) \in \Omega$，则存在一条从 i 到 j 的箭。代数 $H_\mathtt{i}$ 等于 $\mathbf{k}[x]/(x^{d_\mathtt{i}})$，而双模 ${}_\mathtt{j}H_\mathtt{i}$ 在 [GLS17, 第 5] 节中有描述。如果

$d_{\mathrm{i}} \leq 2$ 对所有 $\mathrm{i} \in I$均成立，则可以对这个拟种应用定理 9.3。下面的命题给出了这种情况下 $Q(\mathcal{M})$ 的描述。我们利用它推导出引言中的定理 E。

命题 9.7. 设 $C = (c_{\mathrm{i},\ \mathrm{j}})_{\mathrm{i},\ \mathrm{j}\in I}$ 是一个可对称化 Cartan 矩阵，其对称化子为 $D = \mathrm{diag}(d_{\mathrm{i}} \mid \mathrm{i} \in I)$，并设 $\Omega \subset I \times I$ 是 C的一个定向。假设对所有 $\mathrm{i} \in I$，$d_{\mathrm{i}} \leq 2$。令$I' \subset I$为由所有满足 $d_{\mathrm{i}} = 2$ 的 i 组成的子集，并令 $\mathcal{M} = (t_{\mathrm{i}}, m_k^{\alpha,\ i})$ 为由拟种 $(H_{\mathrm{i}}, {}_{\mathrm{j}}H_{\mathrm{i}})$ 按照定理 9.3 所定义的元组。那么 $Q'(\mathcal{M})$ 等于由对称 Cartan 矩阵 $C|_{I'\times I'}$ 及定向 $\Omega|_{I'\times I'}$所定义的箭图。

证明。根据定义，若 $\mathrm{i} \in I'$，则 $t_{\mathrm{i}} = 1$；否则为 $t_{\mathrm{i}} = 0$。因此，顶点集 $Q'(\mathcal{M})_0$ 可与 I'等同。现在假设 $t_{\mathrm{i}} = 1 = t_{\mathrm{j}}$。注意，所有非零的 ${}_{\mathrm{j}}H_{\mathrm{i}}$ 作为H_{j}-H_{i}-双模的 Loewy 长度均为 1，因为用 H_i 和 H_j中的任意两个幂零元 ε_{i} 和 ε_{j} 的任意组合相乘时，它们都为零，参见 [GLS17 第 5] 节中的描述。由于所有非零的投射 H_{j}-H_{i}-双模的 Loewy 长度均为 2，因此 ${}_{\mathrm{j}}H_{\mathrm{i}}$ 没有非零的射影直和项。因此，根据定理 9.3，$Q'(\mathcal{M})_0$ 中从 i 到 j 的箭数等于映射 ${}_{\mathrm{j}}H_{\mathrm{i}} \to {}_{\mathrm{j}}H_{\mathrm{i}}$ 的余秩，该映射由右乘 x 给出。现在，作为右 H_{i}-模，${}_{\mathrm{j}}H_{\mathrm{i}} \cong H^{|c_{\mathrm{i}},\ {}_{\mathrm{i}}\ {}_{\mathrm{j}}|}$，参见 [GLS17]中的第 5 节。因此，余秩等于$|c_{\mathrm{i},\ \mathrm{j}}|$，这就证明了结论。□

定理 E 的证明。由于代数 $H = H(C, D, \Omega$ 由 [GLS17, 定理 1.2]（另见上文讨论）是 1-Gorenstein，因此根据 H Buchweitz 定理 HBuc [，其奇点范畴等价于稳定范畴 Gproj 21]。由定理 9.3，存在从 Gproj H到模范畴$\mathbb{K}(Q'(\mathcal{M}))^{\mathrm{op}}$的等价，因此它们的不可分解对象之间存在双射。由命题 9.7，箭图 $Q'(\mathcal{M})$ 是由带有定向 $\Omega|_{I'\times I'}$ 的对称 Cartan 矩阵 $C|_{I'\times I'}$ 得到的。因此，根据 Gabriel 定理，$C|_{I'\times I'}$ 为 Dynkin 当且仅当存在有限多个不可分解 $\mathbb{K}Q'(\mathcal{M})$- 模的同构类；在此情况下，这些同构类与 $C|_{I'\times I'}$ 的正根一一对应。这就证明了所述结论。□

Acknowledgements

我们谨此感谢 Karin M. Jacobsen 提出促成定理 5.15 的问题。我们也感谢 Henning Krause 指出如何在注 5.19 中将 [Kra22, 定理 13.1.28] 应用于戴德金整环。我们谨此感谢审稿人提出的有益意见和建议。

References

[ABM98] Ibrahim Assem、Apostolos Beligiannis 和 Nikolaos Marmaridis。具有右半等价的右三角范畴。载于 *Algebras and modules, II (Geiranger, 1996), CMS Conf. Proc.*第 24 卷，第 17–37 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1998 年。[AR76] Maurice Auslander 和 Idun Reiten。关于三角矩阵环的表示型。

J. London，(): –/。[Arn00] David M.

Math. Soc. (2) 12 3 371 382, 1975 76

Arnold。 *Abelian groups and representations of finite partially ordered sets* 2 *CMS*，第 卷。施普林格出版 *Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC* 2000

社，纽约，。[ARS95] Maurice Auslander、Idun Reiten 和 Sverre Olaf Smalø。 *Representation Theory of Artin Algebras*。剑桥大学出版社，1995 年。[Asa99] Hideto Asashiba。表示有限自内射代数的导出等价分类。

J.，(): –。[Aus71] Maurice

Algebra 214 1 182 221, 1999

Auslander。Artin 代数的表示维数。 *Queen Mary College Mathematics*

Notes 1971 *Selected works of Maurice Auslander* 1999 ，。再版于 。美国数学会，普罗

维登斯。[Bau95] Hans Joachim Baues。同伦类型。载于 *Handbook of algebraic topology*，第 1–72 页。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1995 年。[BBOS20] Ulrich Bauer、Magnus B. Botnan、Steffen Oppermann 和 Johan Steen。余挠挠三元组与滤过层次聚类的表示论。*Adv. Math.*，369：107171，51，2020 年。[Bir35] Garrett Birkhoff。《阿贝尔群的子群》。 *Proc. London Math. Soc. (2)*，38：385–401，1935 年。[BM94] Apostolos Beligiannis 和 Nikolaos Marmaridis。由反变有限子范畴导出的左三角范畴。 *Comm. Algebra*，22(12)：5021–5036，1994 年。[Bor94] Francis Borceux。 *Handbook of categorical algebra. 2*，第

51 *Encyclopedia of Mathematics and its* 卷。剑桥大学出版社，剑桥，。

Applications 1994

范畴与结构。

[Buc21] Ragnar-Olaf Buchweitz。 *Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate cohomology* 262 *Math-*，第 卷。美 *ematical Surveys and Monographs* [2021] 2021 国数学会，罗得岛州普罗维登斯，© 。[B¨uh10] Theo B¨uhler。正合范畴。 *Expo. Math.*，28(1)：1–69，2010 年。[Che11] Xiao-Wu Chen。弗罗贝尼乌斯范畴的稳定单态射范畴。 *Math. Res. Lett.*，18 1 125( )：–137，2011 年。[Che12] Xiao-Wu Chen。关于弗罗贝尼乌斯范畴的三个结果。 *Math. Z.*，270(1-2)：43–58，2012 年。[CL20] Xiao-Wu Chen 和 Ming Lu。张量环的 Gorenstein 同调性质。 *Nagoya Math. J.*，237 188：–208，2020 年。[DELO21] Zhenxing Di、Sergio Estrada、Li Liang 和 Sinem Odaba.sı。左根箭图的 Gorenstein 平坦表示。 *J. Algebra*, 584：180–214，2021 年。[DLLY22] Zhenxing Di、Liping Li、Li Liang 和 Nina Yu。范畴图上的表示与阿贝尔模型结构，2022 年。arXiv:2210.08558。[DR76] Vlastimil Dlab 和 Claus Michael Ringel。图与代数的不可分解表示。 *Mem oirs of the American Mathematical Society* 6 +57 1976 ，:v，。[EE05] Edgar Enochs 和 Sergio Estrada。箭图的投射表示。 *Comm. Algebra*，33(10)：3467–3478，2005 年。[EEGR 09] E. Enochs、S. Estrada 和 J. R. Garc´ía Rozas。无限箭图的内射表示。应用。*Canad. J. Math.*，61(2)：315–335，2009 年。[EHHS13] Hossein Eshraghi、Rasool Hafezi、Esmaeil Hosseini 和 Shokrollah Salarian。箭图表示范畴中的余挠理论。 *J. Algebra Appl.*，12(6)：1350005，16，2013 年。[EM65] Samuel Eilenberg 和 John C. Moore。伴随函子与三元组。 *Illinois Journal of Mathematics*，9 381：–398，1965 年。[EOT04] Edgar Enochs、Luis Oyonarte 和 Blas Torrecillas。箭图的平坦覆盖与平坦表示。*Comm. Algebra*，32(4)：1319–1338，2004 年。[Fai66] Carl Faith。关于 K¨othe 环。 *Math. Ann.*，164：207–212，1966 年。[FGR75] Robert M. Fossum、Phillip A. Griffith 和 Idun Reiten。 *Trivial extensions of abelian categories*，第 *Lecture Notes in Mathematics* 卷第 456 卷。施普林格出版社，柏林—纽约，1975 年。阿贝尔范畴平凡扩张的同调代数及其在环论中的应用。[FS79] Ferdinand Georg Frobenius 和 Ludwig Stickelberger。关于可交换元素群。 *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. [Crelle's Journal]*，86：217–262，1879 年。[Gab72] Peter Gabriel。不可分解表示 I。 *Manuscripta Mathematica*，6：71–103，1972 年。[Geu17] Jan Geuenich。 *Quiver modulations and potentials*。博士论文，2017 年。[GK05] Peter B. Gothen 和 Alastair D. King。扭曲箭图丛的同调代数。 *J. London Math.* , ( ): –。[*Soc. (2)* 71 1 85 99, 2005 GKKP22] Nan Gao、Julian K¨ulshammer、Sondre Kvamme 和 Chrysostomos Psaroudakis。物种单态射范畴的函子性方法 I。 *Communications in Contemporary Mathematics*，24(6)：论文编号 2150069，55，2022 年。[GLS17] Christof Geiss、Bernard Leclerc 和 Jan Schr¨oer。可对称化 Cartan 矩阵的带关系箭图 I：基础。 *Inventiones Mathematicae*，209(1)：61–158，2017 年。[Hap87] Dieter Happel。关于有限维代数的导出范畴。 *Commentarii Mathematici Helvetici* 62 3 339 389, 1987 , ( ): –。[Har69] Hideki Harui。关于内射模。 *J. Math. Soc. Japan*，21：574–583，1969 年。[Hel60] Alex Heller。同调代数中的环路空间函子。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，96：382–394，1960 年。[Hil07] Harold Hilton。关于有限阿贝尔群的子群。 *Proc. London Math. Soc. (2)*，5：1–5，1907 年。[Hir00] Y. Hirano。关于单模的内包。 *J. Algebra*，225(1)：299–308，2000 年。[HJ19] Henrik Holm 和 Peter Jørgensen。箭图表示范畴中的余挠对。 *Kyoto J.* , ( ): – *Math.* 59 3 575 606，2019 年。[HMA21] Rasool Hafezi 和 Intan Muchtadi-Alamsyah。单态射范畴上的不同正合结构。 *Appl. Categ. Structures*，29(1)：31–68，2021 年。[HRW84] Roger Hunter、Fred Richman 和 Elbert Walker。有界阿贝尔群的子群。载于 *Abelian groups and modules (Udine, 1984)* 287 *CISM Courses and Lect.* 17 35 ，第 卷，页 码 –。施普林格出版社，维也纳，1984 年。[HV83] Dieter Happel 和 Dieter Vossieck。具有预投射分量的无限表示型极小代数。 *Manuscripta Math.*，42(2-3)：221–243，1983 年。[Jan69] J. P. Jans。关于余诺特环。 *J. London Math. Soc. (2)*，1：588–590，1969 年。[Jat76] Arun Vinayak Jategaonkar。某些内射对象是 Artin 模。载于 *Noncommutative ring theory (Internat.* , 数学 *Conf., Kent State Univ., Kent, Ohio, 1975)* 545, 128 139 讲义，第 卷，页码 –。施普林格出版社，柏林，1976 年。[Kel64] G. M. Kelly。关于范畴的根。 *J. Austral. Math. Soc.*，4：299–307，1964 年。[Kel90] Bernhard Keller。链复形与稳定范畴。 *Manuscripta Math.*，67(4)：379–417，1990 年。[Kel91] Bernhard Keller。导出范畴与泛性质问题。 *Comm. Algebra*，19(3)：699–747，1991 年。[Kel96] Bernhard Keller。导出范畴及其用途。载于 *Handbook of algebra, Vol. 1*，第 1 卷，第 671–701 页。1996 年。

[KLM13] Dirk Kussin、Helmut Lenzing 和 Hagen Meltzer。幂零算子与加权射影直线。*J. Reine Angew. Math.*，685:33–71，2013。[Kra97] Henning Krause。稳定等价保持表示型。 *Comment. Math. Helv.*，72(2):266–284，1997。[Kra15] Henning Krause。Krull–Schmidt 范畴与投射覆盖。 *Expositiones Mathematicae*，33 4 535 549，2015 ( ): – . [Kra22] Henning Krause。

Homological theory of representations 195 *Cambridge Studies in Advanced* ，卷号，。*Mathematics* 2022
剑桥大学出版社，剑桥，。[Kro70] Leopold Kronecker。关于复数理想类数若干性质的讨论。
Monatsbericht der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin，第881–889页，1870。[KS15] Justyna Kosakowska 和 Markus Schmidmeier。线性算子不变子空间的弧图运算与退化。
Trans. Amer. Math. Soc.，367(8):5475–5505，2015。[KS22] Justyna Kosakowska 和 Markus Schmidmeier。底层表作为 Littlewood-Richardson 杨图的对偶版本。 *J. Lond. Math. Soc. (2)*，106(2):1357–1379，2022。[K¨ul17] Julian K¨ulshammer。代数的 pro-种 I：基本性质。 *Algebras and Representation Theory*，20 5 1215( ): –1238，2017。[KV87] Bernhard Keller 和 Dieter Vossieck。导出子范畴。 *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*，305 6 225( ): –228，1987。[Kva20] Sondre Kvamme。中山函子的推广。 *Algebr. Represent. Theory*，23(4):1319–1353，2020。[Les94] Zbigniew Leszczy´nski。关于张量积代数的表示型。 *Fund. Math.*，144(2):143–161，1994。[Lin96] Markus Linckelmann。自内射代数的 Morita 型稳定等价以及

p *Math.* -群。，( ): –*Z.* 223 1 87
100，1996。[LO17] Boris Lerner 和 Steffen Oppermann。关于 Geigle-Lenzing 加权射影簇的拼接方法。
Nagoya Mathematical Journal，226:71–105，2017。[LS00] Zbigniew Leszczy´nski 和 Andrzej Skowro´nski。温和三角矩阵代数。 *Colloq. Math.*，86 2 259( ): –303，2000。[LS22] Xiu-Hua Luo 和 Markus Schmidmeier。Gorenstein-投射箭图表示的反射等价，2022。预印本，arXiv:2204.04695。[Lu20] Ming Lu。局部环上代数表示的奇点范畴。 *Colloq. Math.*，161(1):1–33，2020。[LW21a] Ming Lu 和 Weiqiang Wang。Hall代数与量子对称对 II：反射函子。*Comm. Math. Phys.*，381(3):799–855，2021。[LW21b] Ming Lu 和 Weiqiang Wang。Hall代数与量子对称对 III：箭图簇。

Adv. ，：论文编*Math.* 393 108071, 70, 2021
号。[LW22] Ming Lu 和 Weiqiang Wang。Hall代数与量子对称对 I：基础。

Proc. Lond. ，( ): – 。附*Math. Soc. (3)* 124 1 1 82, 2022
录由 Lu 撰写。[LZ10] Zhi-Wei Li 和 Pu Zhang。Gorenstein-投射模的一种构造。 *J. Algebra*，323(6):1802–1812，2010。[LZ13] Xiu-Hua Luo 和 Pu Zhang。单表示与 Gorenstein-投射模。 *Pacific Journal of Mathematics* 264 1 163 194, 2013 ，( ): – 。[Mac98] Saunders Mac Lane。

Categories for the working mathematician 5 *Graduate Texts in Math-* ，卷号，。*ematics* 1998
施普林格出版社，纽约，第二版，。[Mat58] Eben Matlis。诺特环上的内射模。 *Pacific J. Math.*，8:511–528，1958。[Mat60] Eben Matlis。满足降链条件的模。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，97:495–508，1960。[Mil04] G. A. Miller。关于阿贝尔群的子群。 *Ann. of Math. (2)*，6(1):1–6，1904。[Mil05] G. A. Miller。任意阿贝尔群所有特征子群的确定。
Amer. J. Math.，27 1 15 24，1905 ( ): – 。[Moo09] Audrey Moore。
Auslander-Reiten theory for systems of submodule embeddings。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2009。博士论文——佛罗里达大西洋大学。[Moz20] Sergey Mozgovoy。阿贝尔范畴中的箭图表示。 *J. Algebra*，541:35–50，2020。[MZ15] Alex Martsinkovsky 和 Dali Zangurashvili。左遗传环的稳定范畴。

J. Pure Appl. ，( ): – 。[*Algebra* 219 9 4061 4089, 2015
Pla76] V. V. Plahotnik。交换环上偏序集的表示。

Izv. Akad. Nauk ，( ): – 。[*SSSR Ser. Mat.* 40 3 527 543, 709, 1976
Ric89] Jeremy Rickard。导出范畴与稳定等价。 *J. Pure Appl. Algebra*，61(3):303–317，1989。[Ric91] Jeremy Rickard。作为导出函子的导出等价。 *J. London Math. Soc. (2)*，43(1):37–48，1991。[Rin99] Claus Michael Ringel。温和代数是野性的。 *Algebra Colloq.*，6(4):473–480，1999。[RS06] Claus Michael Ringel 和 Markus Schmidmeier。野表示型的子模范畴。*Jounal of Pure and Applied Algebra*，205(2):412–422，2006。[RS08a] Claus Michael Ringel 和 Markus Schmidmeier。幂零线性算子的不变子空间。I。

J. ，： –。*Reine Angew. Math.* 614 1 52, 2008

[RS08b] Claus Michael Ringel 和 Markus Schmidmeier。子模范畴中的 Auslander-Reiten 平移。 *Transactions of the American Mathematical Society*，360(2):691–716，2008。[RS24] Claus Michael Ringel 和 Markus Schmidmeier。幂零算子的不变子空间。层、均值与余层：三角形 $\mathbb{T}(n)$，2024。[RW79] Fred Richman 和 Elbert A. Walker。赋值群。 *J. Algebra*，56(1):145–167，1979。[RW99] Fred Richman 和 Elbert A. Walker。 p^5 *Abelian groups and modules* -有界群的子群。 *(Dublin, 1998)* 55 73 ¨ 1999 载于《数学趋势》丛书，页码 – 。巴塞尔：Birkhauser，。[RZ14] Claus Michael Ringel 和 Pu Zhang。从子模范畴到预射影代数。 *Math. Z.*，278 1 2 55 73，2014 (-): – 。[RZ17] Claus Michael Ringel 和 Pu Zhang。对偶数代数上的箭图表示。 *Journal of Algebra*，475:327–360，2017。[Sch05] Markus Schmidmeier。亚交换群的一种构造。 *Arch. Math. (Basel)*，84(5):392–397，2005。[Sch08] Markus Schmidmeier。子模系统与 Auslander-Reiten 箭图的一个同构问题。 *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*，15(3):523–546，2008。[Sch11] Markus Schmidmeier。LR-杨图中的条目。 *Math. Z.*，268(1-2):211–222，2011。[Sch12] Markus Schmidmeier。通过短正合列的自同构得到 Hall 多项式。 *Algebr. Represent.* , ( ): – 。[Sim02] *Theory* 15 3 449 481, 2012 Daniel Simson。模的链范畴与单列代数上偏序集的次投射表示。载于 *Proceedings of the Second Howland Conference on Abelian Groups and Modules (Honolulu, HI, 2001)* 32, 1627 1650, 2002 , 卷，页码 – 。[Sim18] Daniel Simson。幂零线性算子的表示有限 Birkhoff 型问题。 *J. Pure Appl.* , ( ): – 。[Vá68] P. *Algebra* 222 8 2181 2198, 2018 V´amos。“有限生成”的对偶概念。 *J. London Math. Soc.*，43:643–646，1968。[XZ12] Bao-Lin Xiong 和 Pu Zhang。三角矩阵 Artin 代数上的 Gorenstein-投射模。*Journal of Algebra and its Applications*，11(4):1250066，14，2012。[XZZ14] Bao-Lin Xiong、Pu Zhang 和 Yue-Hui Zhang。单态射范畴中的 Auslander-Reiten 平移。 *Forum Mathematicum*，26(3):863–912，2014。[Zha11] Pu Zhang。单态射范畴、余倾斜理论与 Gorenstein-投射模。 *J. Algebra*，339 181: –202，2011。[Zha13] Pu Zhang。Gorenstein-投射模与对称再拼接。 *J. Algebra*，388:65–80，2013。

Nan Gao, Departement of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, PR China *Email address*: nangao@shu.edu.cnJulian Külshammer, Department of Mathematics Uppsala University, Box 480, 75106 Uppsala, Sweden*Email address*: julian.kuelshammer@math.uu.seChrysostomos Psaroudakis, Department of Mathematics Aristotle University of Thessaloniki, Thes-saloniki, 54124, Greece *Email address*: chpsaroud@math.auth.grSondre Kvamme, Department of Mathematical Sciences, Norwegian University of Science and Tech-nology, 7491 Trondheim, Norway*Email address*: sondre.kvamme@ntnu.no