arXiv:2303.07772v1 [stat.ME] 14 Mar 2023

自动局部平稳时间序列预测：应用于预测新冠疫情突发冲击下的英国增加值总额时间序列

Rebecca Killick兰卡斯特大学，英国兰卡斯特。
Marina I. Knight约克大学，英国约克。GuyP.
Nason伦敦帝国理工学院，英国伦敦。Matthew
A. Nunes†巴斯大学，英国巴斯。Idris A.
Eckley兰卡斯特大学，英国兰卡斯特。

摘要。准确预测英国总增加值（GVA）对于衡量英国经济的增长至关重要。GVA数据（例如ABML序列）常见的一种非平稳性是方差随时间增加，这由通货膨胀所致。经过变换或通胀调整的序列，对于依赖平稳性假设的传统预测方法而言，仍可能颇具挑战。我们采用一种不同的方法，直接处理GVA序列，并改进近期针对局部平稳时间序列的预测方法。我们的方法能够产生更准确、更可靠的预测，即使ABML序列在新冠疫情期间变得高度易变，也依然表现良好。

关键词：局部偏自相关、经典预测、谱估计、小波

1. 引言

关于平稳时间序列预测的文献已发展多年。例如，可参见 Gardner（1985）或 Box 和 Jenkins（1970）；此外，各种平台上都有易于实现的代码。相当令人意外的是，对于非平稳时间序列的预测，却不能如此轻易地得出相同结论。事实上，分析人员在预测时间序列时，假定其具有二阶平稳性却不进行检验，这种情况并不少见。然而，正如 Janeway（2009年）所述，这可能会造成严重后果

†通讯地址：Matthew A. Nunes，巴斯大学数学科学系，英国巴斯 BA2 7AY。电子邮件：m.a.nunes@bath.ac.uk

却忽略了这种非平稳结构。本文旨在解决这一问题，为非平稳序列提供实用且已实现的预测方法。

我们的研究源于准确预测经济时间序列这一问题。具体而言，我们考察 ABML 时间序列，其中包含英国总增加值（GVA）的数值；总增加值是英国国内生产总值（GDP）的重要组成部分。二者都是至关重要的经济统计数据，准确预测对于衡量英国经济的规模和增长至关重要。我们的 ABML 序列为季度数据，记录时间从 1955 年第一季度至 2020 年第四季度，共有 $T = 264$ 个观测值，绘于图 1。2008 年「金融大危机」和 2020 年新冠疫情的影响清晰可见。相关数据可从英国国家统计局网站 https://www.ons.gov.uk 获取。

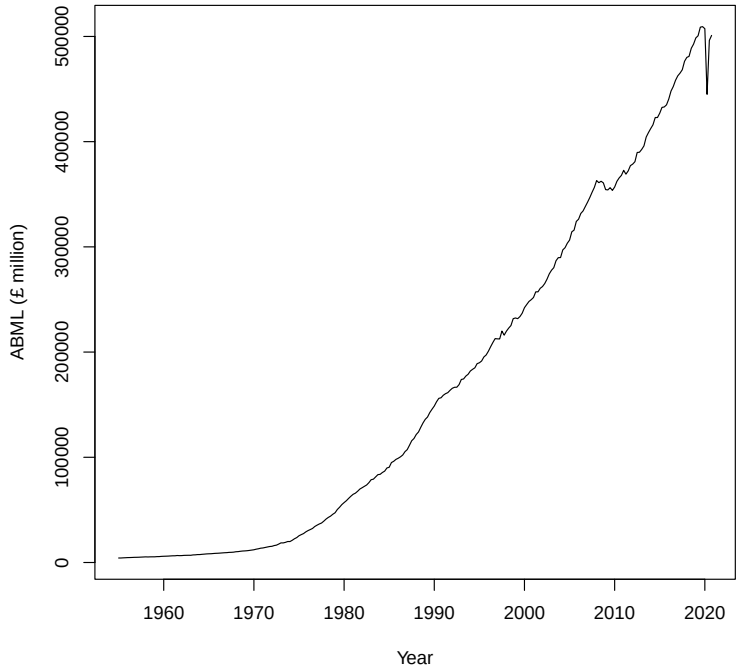
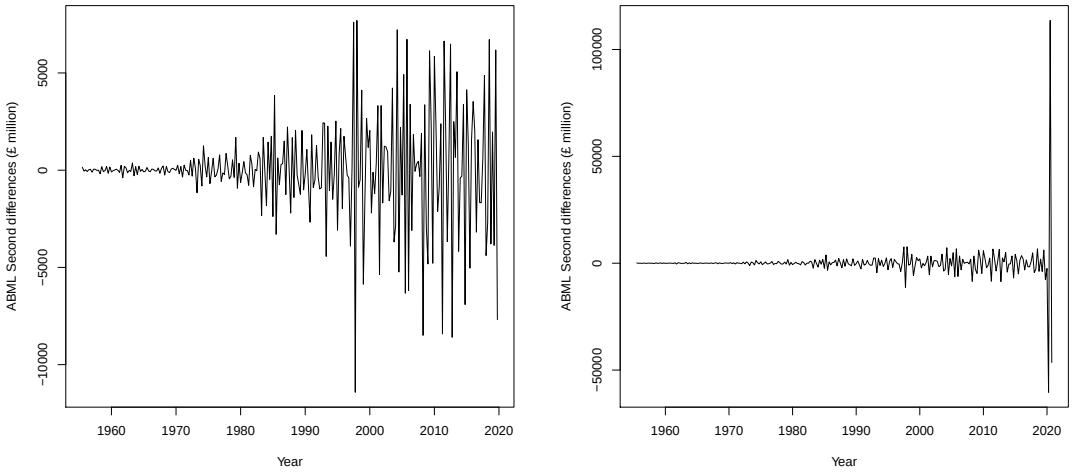


图 1. ABML 时间序列。

与许多经济时间序列一样，ABML 呈现出明显的类多项式趋势，这是积分经济时间序列的典型特征。按照标准的统计时间序列分析程序（例如 Chatfield（2003年）），我们通过二阶差分去除趋势。图 2 展示了 ABML 序列的二阶差分结果，包括新冠疫情时期的数据以及不包括该时期的数据（截至 2019 年第四季度）；后者充分展现了新冠疫情造成的巨大影响。

这两幅图都强烈表明，该序列并非二阶平稳，因为序列的方差随时间显著增加。Nason（2013b）的方法表明



(a) (b)

图2. ABML时间序列在（a）包含和（b）不包含COVID疫情时期时的二阶差分。

相关性也会随时间变化。图1中观察到的方差增幅很可能大部分是由通货膨胀造成的。不过，我们还分析了两个经过通货膨胀校正的 ABML 版本，其中一个由英国国家统计局提供；根据 Priestley和Subba Rao（1969）和Nason（2013b）的平稳性检验，这两个版本都拒绝了二阶平稳这一原假设。因此，鉴于我们的序列是非平稳的，要进行预测，我们应当采用专为此类序列设计的方法。

多位作者探讨了非平稳预测的基础，但大多从理论角度出发。例如，参见Whittle（1963）、Abdrabbo和Priestley（1967）、Subba Rao（1973）和Hallin（1986）。Dahlhaus（1996）将Kolmogorov公式（Brockwell 和 Davis，1991，定理5.8.1）的一种形式用于零均值局部平稳时间序列，这与Subba Rao（1973）针对振荡过程模型的结果相呼应。非平稳序列预测还有其他一些方法，例如Chow和Leung（1996）的神经网络方法、Mercurio和Spokoiny（2004）的方法，或 Van Bellegem和von Sachs提出的简单但有效的时变无条件方差模型

（2004年）。

Fryzlewicz 等人（2003）为 Nason 等人（2000）的局部平稳小波（LSW）模型推导了时变Yule-Walker方程，并提出了局部Yule-Walker估计量和求解器。作者仔细地确立了这些估计量的理论性质，并提出了一种实用的预测方法，其中包括参数选择建议。然而，作为一种基于网格搜索的方法，它在实践中实施起来可能需要大量计算。

本文旨在开发一种新的、易于实现的自动化方法，用于预测局部平稳小波时间序列。在这里，我们假设未来的观测值可以用

当前值和近期过去值来建模，并采用 Fryzlewicz 等人（2003）的立场，将关注范围限定在线性数据函数构成的预测器上，并力求使其相关的均方预测误差最小化。我们采用近期提出的局部偏自相关（Killick 等人，2020年），动态选择用于预测的过去时间序列观测值数量（下文记为 p），而不依赖 Fryzlewicz 等人（2003）提出的网格搜索方法。我们的方法在计算上更加简单，并且能显著改善预测效果；我们通过模拟数据和真实数据展示了这一点。

第2节详细介绍 Fryzlewicz 等人（2003）提出的 LSW 预测框架。第3节介绍我们的改进方法，即使用局部偏自相关函数估计预测所需的局部结构。第4节通过一系列模拟的平稳与非平稳时间序列，展示这一改进方法的性能。开展此类模拟研究是必要的，因为尽管我们强烈怀疑 ABML 增加值总额序列是非平稳的，却无法完全确定。因此，我们至少需要在平稳与非平稳序列上对新方法进行一些验证。第5节给出我们对 ABML 经济数据序列的预测结果。第6节进一步讨论并总结全文。

2. 局部平稳小波时间序列预测综述

我们首先回顾局部平稳小波（LSW）模型（Nason 等人，2000年）及其相关的预测框架（Fryzlewicz 等人，2003年）。局部平稳小波方法用于非平稳时间序列建模，已应用于许多领域，从气候学（Fryzlewicz，2003年）和海洋工程（Killick 等人，2013年）到生物学（Hargreaves 等人，2019年）、医学（Nason 和 Stevens，2015年；Embleton 等人，2022a）以及金融（Fryzlewicz，2005年）。

2.1. 局部平稳小波模型

局部平稳小波（LSW）模型（Nason 等人，2000年；Fryzlewicz，2003年）涵盖了双重索引随机过程序列 $\{X_{t,T}\}_{t=0,\ldots,T-1}$，$T = 2^J \geq 1$，其在均方意义下具有如下表示

$$X_{t,T} = \sum_{j=1}^{J} \sum_{k} w_{j,k;T} \psi_{j,k}(t) \xi_{j,k}, \tag{1}$$

其中 $\xi_{j,k}$ 是随机正交增量序列，$\{\psi_{j,k}(t)\}_{j,k}$ 构成了基于紧支撑母小波 $\psi(t)$ 的离散非抽取小波族。假设式（1）中的量满足若干关键性质。最值得注意的是，对于所有 j,k，$\mathbb{E}(\xi_{j,k}) = 0$，因此对于所有 t,T，$E(X_{t,T}) = 0$；此外还假设 $\mathrm{Cov}\,(\xi_{j,k},\xi_{\ell,m}) = \delta_{j,\ell}\delta_{k,m}$，其中 $\delta_{i,j}$ 是克罗内克δ函数。此外，Nason 等人（2000年）还提出了若干条件，以确保振幅 $\{w_{j,k;T}\}_k$ 在每个尺度内缓慢变化，从而控制过程的局部平稳程度。

在 LSW 框架中，演化小波谱（EWS）定义为$S_j(z) = |W_j(z)|^2$，在每个尺度 $j = 1, \ldots, J$和重标度时间 $z = k/T \in (0, 1)$ 下，其作用类似于平稳时间序列情形中的谱。演化小波谱（EWS）

它量化了过程功率在时间和尺度上的分布，并与针对每个（重标度）时间 z 和滞后 $\tau \in \mathbb{Z}$ 定义的局部自协方差函数相关，如下所示

$$c(z,\tau)=\sum_{j=1}^{\infty} S_j(z)\Psi_j(\tau). \tag{2}$$

The $\{\Psi_j(\tau)\}_j$ 是一族紧支撑自相关小波，见（Nason 等人，2000年）.

谱估计通常通过原始小波周期图进行，其定义为 $I_{j,\ k;T}=|d_{j,\ k;T}|^2$，其中 $d_{j,\ k;T}=\sum_{t=0}^{T} X_{t,\ T}\psi_{j,\ k}(t)$ 是经验非抽取小波系数。为简化记号，我们将原始周期图记为 $I_{j,\ k}$。

（经校正的）经验小波谱可提供演化小波谱的渐近无偏估计量

$$\mathbf{L}(z)=A^{-1}\mathbf{I}(z), \tag{3}$$

对所有 $z\in(0,\ 1)$，其中 $\mathbf{I}(z):=(I_{j,\ [zT]})_{j=1}^{J}$ 是原始小波周期图向量，A 是一个 $J\times J$ 对称矩阵，其元素为 $A_{j,\ \ell}=\sum_{\tau}\Psi_j(\tau)\Psi_\ell(\tau)$。与平稳情形相同，小波周期图并非小波谱的相合估计量（Nason 等人，2000年）。解决这一问题的一种方法是，在每个尺度上，将原始小波周期图作为（重标度）时间的函数进行平滑 j，然后按式（3）应用 A^{-1} 进行校正。

$\hat{}$ 一旦获得了性质良好的谱估计量 $\mathbf{L}$，即可利用方程（2）得到局部自协方差估计量 $\hat{c}(z,\tau)$；例如，按上述记法，$\hat{c}(z,\tau)=\sum_{j=1}^{J}\hat{L}_j(z)\Psi_j(\tau)$。

与其他方法相比，LSW 框架已证明在多种任务中都很有用，例如分类（Fryzlewicz 和 Ombao，2009年；Krzemieniewska 等人，2014）、聚类（Hargreaves 等人，2018年）、平稳性检验（Nason，2013b）、谱相等性（Hargreaves 等人，2019年）和重复效应（Embleton 等人，2022b）、变点检测（Nam 等人，2015年），以及白噪声和混叠检验（Eckley 和 Nason，2018）。本文聚焦于非平稳时间序列预测，尤其是 Fryzlewicz 等人（2003年）的研究。

2.2. 在局部平稳小波框架内进行预测

2.2.1. 已有研究

给定零均值局部平稳小波过程的观测值 $X_{0,\ T}$、……、$X_{t-1,\ T}$，Fryzlewicz 等人（2003）提出的方法（以下简称 FVBvS 算法）通过对最近的 p 个观测值进行线性组合，来预测下一个观测值 $X_{t,\ T}$

$$\hat{X}_{t,T}=\sum_{s=t-p}^{t-1} b_{t-1-s,T}X_{s,T}. \tag{4}$$

此处选择预测系数 $\boldsymbol{b}=(b_{0,\ T},\ \ldots\ldots,\ b_{p-1,\ T})$，以使均方预测误差（MSPE）最小。这与平稳情形下的典型预测方法类似，不同之处在于权重 $\boldsymbol{b}$ 取决于时间。直观而言，预测下一个观测值时不使用整个序列，原因在于该过程的非平稳

特性：序列开头的结构可能与末尾不同，因此对预测可能没有帮助。

Fryzlewicz 等人（2003）证明，MSPE($\hat{X}_{t,\ T}$，$X_{t,\ T}$) $= \mathbb{E}(\hat{X}_{t,\ T} - X_{t,\ T})^2$可以近似为 $\boldsymbol{b}^T B_t \boldsymbol{b}$，其中 B_t是一个 $(p+1) \times (p+1)$ 矩阵，其第 $(m,\ n)$ 个元素为 $(B_t)_{m,\ n} = \sum_{j=1}^{J} S_j\left(\frac{n+m}{2T}\right) \Psi_j (m-n) = c\left(\frac{m+n}{2T},\ m-n\right)$.随后可通过求解一组「广义」尤尔-沃克方程来得到权重 $\boldsymbol{b}$

$$\sum_{s=t-p}^{t-1} b_{t-1-s,T}\ c\left(\frac{n+s}{2T}, s-n\right) = c\left(\frac{n+t}{2T}, t-n\right), \forall n = t-p, \ldots, t-1, \qquad (5)$$

随后可将其扩展为 h 步超前预测。这些权重可通过代入局部自协方差函数的优良估计值来估计，而预测质量显然高度依赖于这些估计值的质量。

与第 2.1 节讨论的局部平稳小波估计常用方法不同，FVBvS 方法提出先不进行平滑，估计所有对应于观测时刻（直至 $(t-1)$）的重标度时间处的小波谱 $\{S_j(k/T)\}_j$，再在每个时刻 $k = t-p, \ldots, t-1$ 和滞后 τ处估计局部自协方差 $\tilde{c}(k/T, \tau)$。为保证相合性，Fryzlewicz 等人（2003）使用标准核平滑方法（采用正态核或箱形核），并以作者记为 g 的选定带宽平滑估计得到的局部自协方差。除为观测时刻提供相合估计量外，平滑局部自协方差还可进一步向前估计重标度时间 t/T处的局部自协方差。随后，可将这一平滑后的局部自协方差估计值用于广义尤尔-沃克方程（5），并据此推导权重 $\boldsymbol{b}$ 。接着得到预测值 $\hat{X}_{t,T} = \sum_{s=t-p}^{t-1} \hat{b}_{t-1-s,T} X_{s,T}$及其对应的预测误差。
Fryzlewicz 等人（2003）将上述一步超前预测推广到了 h 步超前预测。

2.2.2. 对FVBvS 方法的批评

尽管该方法在理论上易于处理，Xie 等人（2009）注意到，FVBvS 算法有时会产生异常大的预测。他们发现，原因是局部协方差矩阵偶尔会接近奇异，并提出对算法进行修改，以稳定预测。他们的方案将 Yule-Walker 解向量 $\boldsymbol{b}$ 约束为单位范数。作者指出，修订后的方法在各种预测时域下都能持续产生更好的预测。

计算公式（4）中的预测时，一个关键量是 p：用于预测的近期数据量。Fryzlewicz 等人（2003）和 Xie 等人（2009）采用自适应网格搜索法来选择 p，而这需要一个初始值 p_0。按照他们的方法，从一个时间点到下一个时间点，p 只能增加或减少一个单位，因此有时会导致对演化序列动态变化的适应速度较慢。

FVBvS 提出了一种程序，Xie 等人（2009）也采用了该程序，用于同时选择参数 p（用于提供预测信息的过去最近观测值的数量 $X_{t,\ T}$）和 g（平滑核的带宽）。简而言之，他们的算法从参数 p 和 g 的初始值开始，然后对参数对（p，g）

随后通过迭代过程进行更新，并评估它们在已知数据上的预测表现。其基本思想是，参数对（p，g）在序列末尾一段长度为 m 的数据上进行训练。Fryzlewicz 等人（2003）建议，将 m 选为观测序列末尾具有明显平稳行为的最长数据段的长度，并通过目视检查进行判断。选定参数 m 后，FVBvS 算法可概述如下

(a) 首先选定一组参数，例如 (p_0，g_0)，然后使用之前的 p_0 个过程观测值，通过公式 (4) 得到预测值 $\hat{X}_{t-m,\,T}$。(b) 还要利用 (p_0，g_0) 附近的参数对来预测 $X_{t-m,\,T}$，即对某个固定常数 δ，取 ($p_0 \pm 1$，$g_0 \pm \delta$)。(c) 选择使预测与观测到的过程最接近（即相对绝对预测误差最小）的参数对，记为 (p_1，g_1)。(d) 重复步骤 (a)–(c)。随后，通过利用之前的 p_1 个观测值预测 $X_{t-m+1,\,T}$，对更新后的参数对本身再次进行更新；重复这一过程，最终得到参数对 (p，g)，用于预测所需的 $X_{t,\,T}$。

因此，尽管采用了这种“自动”调参方式，实践者仍须决定初始参数对 (p_0，g_0)、训练长度 m，以及 FVBvS 方法所用的平滑核（正态核或 Box 核）。

3. 局部平稳小波预测的自动化

我们的方案通过自动化预测程序，突破了目前采用的做法。我们不再对局部自协方差函数进行平滑并据此开展前向估计，而是利用局部谱估计方面的最新进展（Nason, 2013b），提出对滑动平均周期图进行平滑，由此可以直接进行前向估计并加以校正。这种方法通过公式（2）实现局部自协方差估计，并可得到具有理想性质的估计量（Nason，2013b）。此外，这种方法也省去了初始带宽选择（g_0）和训练过程，因为我们提出的周期图平滑方法包含自动带宽选择。我们还提出采用针对 p 的局部化估计量来确定（随时间变化的）预测窗口，从而免去选择 p_0 和分段长度 m 的需要。具体而言，我们使用 Killick 等人（2020）提出的局部偏自相关函数（lpacf），作为局部化条件相关结构的度量。下文将介绍这一方法的细节。

3.1. 基于 *lpacf* 的预测（FORLAP）

直观而言，选择 p相当于确定一个（子）区间的长度，在该区间内，过程表现出平稳行为，因此该区间内的数据有望对线性预测有所贡献。这使人联想到平稳自回归设定：在这种设定下，未知的依赖阶数 p 通过偏自相关函数 q来选择，依据的是理论性质 $p = \min\{\tau : q(\tau) = 0\}$ (Tsay, 2002, p. 36)。当然，在实际应用中，会计算估计值 $\hat{q}(\tau)$，而由于这些估计值永远不会恰好

为零，因此可以利用相应的置信区间来获得估计量 $\hat{p}$（例如参见 Brockwell 和 Davis（1991）中的定理 8.1.2）。这种选择用于预测的过去观测值数量的方法被广泛采用，即使假定的底层过程并非自回归过程。

我们的方案是采用一种类似的方法，使用 p 的局部化版本（及其估计值）来确定预测窗口的长度。在我们的方法中，我们采用 Killick 等人（2020）近期提出的局部偏自相关函数（lpacf）及其对应的估计量。接下来，我们先定义其 lpacf，再说明如何将其用于非平稳预测。

在数学上，Killick 等人（2020）将重标度时间 z 和滞后 τ 处的局部偏自相关函数$q(z,\ \tau)$定义如下。

DEFINITION 3.1. 设 $\{X_{t,T}\}$ 为零均值局部平稳小波过程，其局部自协方差为 $c(z,\tau)$，谱为 $\{S_j(z)\}_j$，且满足

$$\sum_{\tau=0}^{\infty}\sup_z|c(z,\tau)|<\infty, C_1:=\operatorname{ess\,inf}_{z,\omega}\sum_{j>0}S_j(z)|\hat{\psi}_j(\omega)|^2>0,$$

其中 $\psi_j(\omega)=\sum_s\psi_{j,0}(s)\exp(i\omega s)$。那么，在（重标度）时间 z 和滞后 τ 处的局部偏自相关函数（*lpacf*）为：

$$q\left(z,\tau\right)=\varphi_{[zT],\tau,\tau}\left\{\frac{(\boldsymbol{b}_{[zT]}^{(b)})^T\mathrm{B}_{[zT]}^{(b)}\boldsymbol{b}_{[zT]}^{(b)}}{(\boldsymbol{b}_{[zT]+\tau}^{(f)})^T\mathrm{B}_{[zT]+\tau}^{(f)}\boldsymbol{b}_{[zT]+\tau}^{(f)}}\right\}^{1/2},\tag{6}$$

其中

（*a*）数量 $\varphi_{[zT],\ \tau,\ \tau}$是向量 $\boldsymbol{\varphi}_{[zT],\ \tau}$（长度为 τ）的最后一个元素，该向量是求解局部尤尔-沃克方程得到的，即 $\mathrm{B}_{[zT]}\boldsymbol{\varphi}_{[zT],\ \tau}=\boldsymbol{r}_{[zT]}$；（*b*）矩阵 $\mathrm{B}_{[zT]+\tau}^{(f)}$和 $\mathrm{B}_{[zT]}^{(b)}$是 $\Sigma_{[zT]+\tau}^{(f)};\ _T$和 $\Sigma_{[zT]};\ _T$的局部近似，详见 *Fryzlewicz* 等人（*2003*）引理 *A.1* 的证明。（*c*）系数向量 $\boldsymbol{b}_{[zT]+\tau}^{(f)}$和 $\boldsymbol{b}_{[zT]}^{(b)}$由求解预测和反向预测方程得到，或等价地，通过最小化均方预测误差得到。详情参见 *Fryzlewicz* 等人（*2003*）第 *3.1* 节和命题 *3.1*。

(6) 中根号下右侧的项是非平稳性的度量。对于平稳过程，根号项等于 1，局部化的 $q(z,\ \tau)$ 与经典偏自相关度量 $q(\tau)$ 一致。如果数据中存在一定程度的非平稳性，那么 $q(z,\ \tau)$ 将受到非平稳性因子的影响。

Killick 等人（2020）提出了两种估计 lpacf 的方法。为了进行预测，我们倾向于使用第二种、更稳定的窗口估计量，记作$\tilde{q}_W(z,\ \tau)$。研究表明，该估计量服从渐近正态分布，并且在模拟和真实数据情形下都具有良好的实际表现（Killick 等人，2020）。关键的是，这种窗口估计量能够对过程最后一个观测值处的偏自相关进行局部估计（$t-1$），因为预测正是围绕这一时点进行的

。Killick 等人（2020）的推论 1 随后使我们能够为局部偏自相关函数构造置信界限。回想一下，在平稳情形下选择 p ，相当于估计偏自相关函数中显著滞后阶的数量。我们借鉴这一思路，将估计值 $\hat{p}$设为在重标度时间$z = (t-1)/T$处， $\tilde{q}_W(z,\ \tau)$的置信区间内最大的显著滞后阶 τ。不过，我们强调，并不一定假设底层过程具有任何阶数的自回归结构。未来的研究可以探讨：如果底层过程确实是局部自回归的，那么 $\hat{p}$ 是否为真实值 p 若的相合估计量。

算法1详细说明了我们提出的预测算法 FORLAP 的步骤。虽然我们的理论框架基于 Fryzlewicz 等人（ 2003 ），但实际实现存在显著差异。具体而言，除了 (i) 使用 $\hat{p}$ 作为 p的适当取值外，我们还 (ii) 使用 Nason（2013b）提出并在 locits R 软件包（Nason，2013a）中实现的最新局部平稳小波协方差和带宽估计，并且 (iii) 将 Xie 等人（2009）的协方差矩阵正则化方法作为一个可选项。

基于局部偏自相关函数的预测算法（FORLAP）：假设
我们观测到 $\{X_{0,T}, \ldots, X_{t-1,T}\}$，且满足 $T = 2^J$。

(a) 通过局部偏自相关函数估计确定 p：获得对应于时间 $(t-1)$ 的 lpacf 估计值 $\tilde{q}_W$ （Killick 等人，2023a），并将其置信区间内最大的显著滞后设为 $\hat{p}$ 。(b) 谱估计：通过使用矩阵 A^{-1}（见公式 (3)）校正滑动平均平滑后的原始周期图$\tilde{I}_{j,k} = (2s+1)^{-1} \sum_{u=k-s}^{k+s} I_{j,u}$，估计观测信号的谱含量；带宽 s 按照 Nason（2013b,a）所述自动确定。请注意，该程序还对原始周期图进行前向平滑，因此能够估计 $S_j(k/T)$，其中 $k = 0, \ldots, t$。(c) 自协方差估计：根据广义尤尔-沃克方程 (5) 指定的滞后 τ，在与截至 $(t-1)$ 的观测时间相对应的重标度时间 z 处，利用公式 (2) 估计局部自协方差 $c(k/T, \tau)$。此外，利用外推谱 $S_j(t/T)$ 求得 $\hat{c}(t/T, \tau)$。(d) 求解广义尤尔-沃克方程：在最近的 $\hat{p}$ 个观测值上求解方程 (5)，得到估计的时变权重向量 $\hat{\boldsymbol{b}}$ ；如有需要，可采用 Xie 等人（2009）的正则化约束。(e) 预测 $X_{t,T}$：按照公式 (4)，使用最近 $\hat{p}$ 个观测值及其权重 $\hat{\boldsymbol{b}}$进行线性组合。 $1-\alpha$ 预测区间采用相应的均方预测误差估计值：$\hat{X}_{t,T} \pm \Phi^{-1}(1-\alpha/2) \left(\hat{\boldsymbol{b}}^T \hat{B} \hat{\boldsymbol{b}} \right)^{1/2}$。

算法1. 用于非平稳时间序列预测的 FORLAP 算法。

4. 模拟研究

我们通过对多种情形进行模拟来评估 FORLAP 的性能，其中包括平稳和非平稳示例，具体如下。我们的总体目标是展示所提出的 FORLAP 预测技术的多功能性，以及它在任何有意进行预测的数据分析师的“工具箱”中的实用价值。测试集既包括局部平稳小波过程，也包括无法用这一框架表示的过程。通过这种方式，我们旨在评估该方法在小波过程实现值以及其他多种重要模型类别上的预测表现。

下文将 FORLAP 与以下方法进行比较：(i) Fryzlewicz 等人（2003）的方法（FVBvS）；(ii) 使用二阶及更高阶时变自回归过程（TVAR）进行预测；(iii) Box-Jenkins 预测程序（B-J），该程序针对平稳时间序列设计，但分析人员也常将其用于非平稳数据（参见例如英国政府活动测量中心（2008）的报告）；以及 (iv) 常用的指数平滑（ES）（Hyndman 等人，2008）。

模拟以及后续章节中的真实数据示例，使用 R 统计编程语言（R 核心团队，2022）中的 forecast 软件包（Hyndman 和 Khandakar，2008）、tvReg 软件包（Casas 和 Fernandez-Casal，2019）和 smooth 软件包。具体而言，我们使用前一个软件包中的 auto.arima 函数自动选择并拟合 ARIMA 模型，并使用其 forecast 函数进行预测；时变自回归预测则使用后一个软件包中的 forecast 函数完成。我们的 FORLAP 算法在 R 中通过 forecastLSW 软件包（Killick 等人，2023b）实现。预测采用第 3 节所述的方法，并通过 forecast.lpacf 函数实现；该函数使用 lpacf R 软件包（Killick 等人，2023a）中实现的 lpacf 函数估计 $\tilde{q}_W$。

在模拟中，我们考虑对最后 20 个观测值进行一步超前预测，$h = 1$，不过也可以采用其他预测时域。此外，尽管下文的一些示例序列恰好具有二进制长度，但这些方法及其配套软件实现适用于任意长度的时间序列。

我们的研究针对所有预测方法，提供了通过实证计算得出的预测区间覆盖率和准确度指标。采用的名义覆盖率从 40% 到 90%，步长为 10%。我们采用的准确度指标是 Gneiting 和 Raftery（2007）的区间评分，该评分同时惩罚过宽的预测区间和覆盖不足。在此设置下，区间评分越低，预测区间越好。

表1、表2和表3中的结果是基于对 $K = 500$ 次运行取平均值所得。具体而言，每个表格的最后几列分别列出了各方法的：(i) 预测覆盖率比的均值（MCR）；(ii) 90%水平下的平均区间评分（MIS）；两者均以 Box-Jenkins 为基准。MCR 值大于1，说明相应方法的预测覆盖率优于经典的 Box-Jenkins 方法；而 MIS 值小于1，则表明相应方法给出的预测区间更优，能兼顾区间范围较窄和覆盖率。需要指出的是，表中仅展示了 TVAR2 方法的结果；采用更高阶数（例如5阶）时也能得到类似结果，因此此处不再报告。

表1. 经验预测区间覆盖率与准确性：平稳基础序列。MCR=平均预测覆盖率。MIS= 平均区间评分。（当 $MCR > 1, MIS < 1$ 时，相较于 B-J 表现更优。）

		名义值 40%	50%	60%	70%	80%	90%	MCR	MIS
模型A $N(0,\ 1)$	B-J	39.3	48.5	58.5	68.6	79.0	89.2		
	FORLAP	38.8	48.0	58.1	68.2	78.3	88.8	1.00	1.00
	FVBvS	36.7	46.4	55.7	65.4	74.9	86.1	0.97	1.09
	TVAR2	39.1	48.4	58.5	68.8	78.9	89.2	1.00	0.99
	ES	39.5	49.4	59.4	69.3	79.5	89.7	1.01	1.00
模型B 自回归模型（1阶）	B-J	38.9	48.9	58.2	68.2	78.7	88.9		
	FORLAP	36.8	46.0	54.9	65.0	75.1	85.5	0.96	1.38
	FVBvS	25.9	32.5	39.3	46.9	55.4	65.2	0.74	5.22
	TVAR2	29.4	37.2	45.3	53.4	62.8	74.7	0.84	1.66
	ES	39.7	49.4	59.3	69.0	79.3	89.9	1.01	1.05
模型C 移动平均模型（1阶）	B-J	39.2	49.3	59.1	69.1	79.8	89.4		
	FORLAP	36.7	45.8	56.0	65.9	76.3	87.0	0.97	1.11
	FVBvS	32.2	41.1	49.6	58.8	68.3	79.3	0.89	1.49
	TVAR2	35.9	45.0	54.5	64.7	74.9	86.2	0.96	1.10
	ES	40.1	50.2	60.2	70.4	80.7	90.6	1.02	1.09

4.1. 平稳序列

表1展示了三个模型的经验预测区间覆盖率，每个模型均具有$T = 128$和标准正态创新。模型A模拟相互独立的 $N(0, 1)$ 变量，模型B根据参数为 $\alpha = 0.7$的平稳AR(1)模型进行模拟，模型C则根据参数为 $\beta = -0.5$的平稳MA(1)模型进行模拟。

在所有模型中，Box-Jenkins 的预测覆盖率和准确度均最佳，而 FORLAP 和指数平滑在所有模型中的覆盖率几乎与之相当。对于模型A和模型C，FORLAP 和指数平滑的准确度接近其标称值（与 TVAR2 的表现非常相似）。对于模型B，指数平滑的准确度更高，但仍低于 B-J。尽管所有方法在模型A上的表现都不错，但 FVBvS 和 TVAR 在模型B上的表现明显较差，FVBvS 在模型C上的表现也在一定程度上较差。

由于我们专门设计此设置以纳入平稳过程，先验地 本来会预期 Box-Jenkins 的表现显著更好，因为它是为平稳序列设计的。然而，结果表明，尽管我们提出的FORLAP方法并非为平稳数据设计，但仍具有竞争力；与此同时，其他非平稳方法的表现不佳。

4.2. 非平稳序列

模型设定。 表2和表3展示了十种非平稳模型的覆盖率，概述如下。模型D和模型E分别是不同形式的 TVAR(1)过程的实现，而模型F和模型G分别是二阶和十二阶高阶TVAR过程。模型H–J对应不同的时变MA过程。模型 K 是均匀调制白噪声过程（Priestley, 1983，第826页），而模型L和模型M是局部平稳小波过程。完整的模型描述见附录A。在每种情况下，底层创新项均为相互独立的 $N(0,\ \sigma_Z^2)$ 随机

表 2. 模型 D–H。非平稳基础序列的经验预测区间覆盖率与准确性。MCR=平均预测覆盖率。MIS=平均区间评分。（当 $MCR > 1, MIS < 1$ 时，相较于 B-J 表现更优。）

		名义值							
		40%	50%	60%	70%	80%	90%	MCR	MIS
模型 D TVAR(1)	B-J	31.4	39.6	47.8	57.1	67.5	79.1		
	FORLAP	30.1	37.5	45.5	54.4	64.5	76.3	0.96	1.08
	FVBvS	21.6	27.3	33.3	39.7	47.6	57.7	0.73	3.88
	TVAR2	27.6	34.6	42.2	50.1	59.6	71.3	0.90	1.21
	ES	29.8	37.8	46.1	54.9	64.9	77.4	0.98	1.13
模型 E TVAR(1)	B-J	25.2	32.2	39.2	47.8	56.8	69.4		
	FORLAP	19.4	24.6	30.2	36.0	43.1	51.9	0.75	2.49
	FVBvS	22.9	28.5	35.1	41.5	49.1	57.9	0.84	502.36
	TVAR2	19.2	24.6	29.8	36.1	44.3	54.3	0.77	1.92
	ES	18.6	24.1	30.1	36.9	44.8	56.1	0.80	1.92
模型 F TVAR(2)	B-J	29.8	38.2	46.6	55.4	65.7	77.80		
	FORLAP	35.4	44.8	53.9	63.9	74.1	84.4	1.09	0.84
	FVBvS	29.5	37.4	46.3	55.0	64.8	76.0	0.98	1.45
	TVAR2	29.8	37.8	46.2	55.3	65.4	76.9	0.99	0.93
	ES	47.4	58.2	68.8	78.2	86.6	93.6	1.22	0.82
模型 G TVAR(12)	B-J	36.6	45.8	55.5	65.0	75.4	86.1		
	FORLAP	35.8	44.8	54.3	64.0	74.4	85.4	0.99	1.01
	FVBvS	33.3	41.7	50.2	59.5	69.4	80.5	0.94	1.32
	TVAR2	35.10	44.1	52.9	62.8	73.3	84.4	0.98	1.00
	ES	37.8	47.3	57.3	67.1	77.5	88.1	1.03	0.96
模型 H TVMA(1)	B-J	27.3	34.7	42.0	50.4	59.1	69.9		
	FORLAP	33.1	42.4	50.9	60.1	69.4	80.2	1.17	0.66
	FVBvS	30.7	38.9	47.0	55.4	64.7	74.8	1.09	5.53
	TVAR2	32.5	42.3	49.8	59.4	71.0	82.6	1.20	0.53
	ES	36.5	46.2	55.6	65.1	75.6	85.9	1.25	0.60

表3. 模型 I–M。非平稳底层序列的经验预测区间覆盖率和准确度。MCR=平均预测覆盖率。MIS=平均区间评分。（当 $MCR > 1$、$MIS < 1$ 时，相较于 B-J 表现更优。）

		名义值							
		40%	50%	60%	70%	80%	90%	MCR	MIS
模型 I TVMA(1)	B-J	33.1	41.9	50.7	60.2	70.6	82.3		
	FORLAP	33.2	41.7	50.4	59.9	70.2	82.1	1.00	0.93
	FVBvS	28.9	36.2	43.8	52.0	61.4	73.0	0.89	1.66
	TVAR2	30.8	38.5	46.9	55.8	65.9	78.1	0.95	1.01
	ES	34.1	42.8	51.6	61.4	72.0	83.9	1.02	0.96
模型 J TVMA(2)	B-J	22.2	28.2	34.7	41.5	49.7	60.6		
	FORLAP	28.0	35.3	42.9	51.6	60.9	73.0	1.22	0.80
	FVBvS	31.4	39.4	48.0	56.9	67.0	78.2	1.32	0.88
	TVAR2	22.0	28.2	34.5	42.0	50.7	61.7	1.03	0.96
	ES	22.6	29.1	35.4	43.0	51.6	62.9	1.05	0.96
模型 K TVWN	B-J	20.6	26.0	31.9	38.9	47.3	58.3		
	FORLAP	26.3	33.4	40.5	48.7	58.2	70.4	1.23	0.79
	FVBvS	29.8	37.9	46.3	55.4	65.6	77.0	1.35	1.00
	TVAR2	21.0	26.8	32.9	39.8	48.4	59.2	1.02	0.95
	ES	21.3	27.0	33.2	40.1	48.8	59.7	1.03	0.96
模型 L LSW-P3	B-J	41.6	51.4	61.1	71.2	81.5	91.0		
	FORLAP	41.9	52.3	62.5	72.6	82.4	91.7	1.01	1.05
	FVBvS	31.3	39.1	47.0	56.0	65.9	77.4	0.85	4.03
	TVAR2	41.5	51.0	61.1	71.2	81.2	91.0	1.00	1.02
	ES	43.3	53.8	64.4	74.7	84.5	93.4	1.03	1.02
模型 M LSW-P4	B-J	34.2	42.7	51.7	60.2	70.6	82.4		
	FORLAP	36.8	45.8	55.5	65.1	75.1	85.4	1.05	1.02
	FVBvS	33.7	42.1	50.9	59.7	69.7	80.8	0.99	2.24
	TVAR2	31.8	40.0	48.6	57.9	67.6	79.3	0.97	1.02
	ES	37.2	47.1	56.5	66.0	76.4	86.8	1.06	0.95

变量，且除模型 L（其中 $T = 512$）和模型 M（其中 $T = 350$，以增加多样性）外，所有实现的长度均为 $T = 128$。

模拟结果讨论。对于所考虑的五个模型（F、H、J、K、M），FORLAP方法的覆盖率（MCR ≥ 1.05）远高于 Box-Jenkins。对于模型 D、G、I、L，两种方法的表现大致相当。以 MIS 衡量的方法准确度呈现出大致类似的情况：在五个模型 F、H、I、J、K 上，FORLAP 优于 B-J（MIS ≤ 0.95）；在模型 G、L 和 M 上校准效果相近（MIS 在 0.95–1.05 范围内）；而在模型 D 和 E 上则较差（MIS ≥ 1.05）。

对于模型 E，没有一种方法表现得特别有竞争力。不过，这并不完全令人意外，因为模型 E 既非平稳，事实上也不满足带有 Lipschitz 平滑性约束的局部平稳性：它在仅有 $T = 128$ 个观测值的情况下，参数发生了六次变化，$\alpha(z)$。因此，显然不适合采用平稳预测系统；非平稳模型的估计也可能较差，因为每个局部平稳区域内可用于估计的观测值寥寥无几。

与 Box-Jenkins 方法相比，FVBvS 方法在所考察的三个模型（H、J、K）中提供了更好的覆盖率（平均预测覆盖率 ≥ 1.05）；其中，FORLAP 在模型 H 上优于 FVBvS（1.17 对 1.09），但在模型 J 和 K 上表现较差（分别为 1.22 对 1.32、1.23 对 1.35）。除模型 J（更优）和模型 K（相同）外，FVBvS 预测区间的准确度（MIS ≥ 1.05）在所有模型上均低于 B-J。

将 TVAR 的覆盖率与 Box-Jenkins 基准方法的覆盖率进行比较时，TVAR 在模型 H 上优于 B-J；在其他所有模型上，除模型 D 和模型 E 表现较差外，TVAR 的结果与之相当（平均预测覆盖率值在 0.95–1.05 范围内）。与 FVBvS 不同，TVAR 在模型 G、I、J、K、L、M 上的准确度与 B-J 相近（MIS 在 0.95–1.05 范围内），在模型 D、E 上准确度较差，在模型 F、H 上表现更好。

预测准确度指标（MIS）始终表明，与 FVBvS 相比，我们提出的 FORLAP 技术在所有模型上都能提供校准更好的预测区间，且 FORLAP 的表现优势相当明显。该指标表明，对于模型 G、L 和 M，FORLAP 与 TVAR 提供的预测区间准确度相当（比率在 0.95–1.05 范围内）；对于模型 D（1.08 vs 1.21）、F（0.84 vs 0.93）、I（0.93 vs 1.01）、J（0.80 vs 0.96）和 K（0.79 vs 0.95），FORLAP 表现更好；而对于模型 E（2.49 vs 1.92）和 H（0.66 vs 0.53），FORLAP 表现更差。根据覆盖率指标，除模型 E、G、H、I 和 L 的覆盖率相近（对应比率在 0.95–1.05 范围内）外，FORLAP 在所有模型上的表现都优于 TVAR。

模型 F 的模拟结果尤其能说明问题。其底层模型为 TVAR(2)，因此，基于该模型的预测方法（TVAR2）表现确实略优于 B-J 方法（MCR 为 0.99，MIS 为 0.93）。不过，值得注意的是，我们的新方法 FORLAP 的覆盖率最高（1.09），准确度也最高（MIS 为 0.84）。此外，另一种小波方法 FVBvS 的覆盖率（0.98）与 TVAR2 相当，但准确度有所牺牲（MIS 为 1.45）。

在 TVAR2 设定下，FORLAP 真正的竞争对手是指数平滑；就所有模型的覆盖率和准确度而言，其结果与 FORLAP 相当（对应比率在 0.95–1.05 范围内），但指数平滑的表现更优

表4. 在最近50个时间点中，Box-Jenkins方法和FORLAP方法的一步预测95%预测区间包含真实值的比例。

	ABML序列	
方法	有新冠疫情	无新冠疫情
Box-Jenkins	66	72
FORLAP	90	90

，而 FORLAP 在模型 J 和 K 上表现更优；在这些模型上，指数平滑的表现更接近 B-J 基准。

除了上述模拟外，我们还针对这些模型重复进行了模拟：对 B-J、FORLAP 和 FVBvS，采用经缩放后方差为单位方差的 t_4 分布创新项。对于尾部较厚的创新项，与 FORLAP 预测相比，Box-Jenkins 的相对表现几乎没有变化：MCR 最大变化为 0.05，且 70% 的变化小于 0.02。

总体而言，可以得出结论：对于零均值局部平稳序列，FORLAP方法在三分之二的情况下远优于 Box-Jenkins 方法，在其余三分之一的情况下表现大致相当；并且在我们考察的大多数模型中，它的表现都优于其他所有基于非平稳性的方法。

5. 英国国民账户时间序列预测

现在我们回过头来考察第 1 节中促使我们开展这项研究的 ABML序列。有时会使用 Box-Jenkins 方法预测 ABML序列，例如参见英国政府活动测量中心（2008）。表 4 显示，在提前一步预测 ABML序列的二阶差分时，FORLAP 的表现远胜于 Box-Jenkins 方法。这里，两种方法的输入数据均截至 $t = T - n$，并预测 $T - n + 1$；百分比表示在 $n = T - 51$、.....、$T - 1$ 上的平均成功率。

图3以与表4类似的方式比较了 FORLAP 和针对 ABML 的 Box-Jenkins 预测，唯一区别是最后20个时间点。可以看出，FORLAP 的表现优于 Box-Jenkins，例如在2020年第一季度和第四季度尤为明显；但疫情期间波动幅度过大，掩盖了图中较早部分的预测表现。因此，图4展示了类似的图表，只是纵轴采用带符号平方根变换尺度，以弱化新冠疫情时期的影响。由此可以清楚地看出，FORLAP 在20次中有16次预测成功（80%），而 Box-Jenkins 成功13次（65%）。

对 ABML 数据进行大量实验后，看来 Haar 小波的表现最佳。此外，FORLAP 在高步长超前预测中（例如 $h = 2,\ 3$）仍然具有优势，但预测的时间越远，这种优势就越小，表现也会越差。鉴于非平稳性相当强，而 Box-Jenkins 方法在这种情况下仍能在一定程度上提供一种“包罗万象”的预测准确度，这或许并不令人意外。

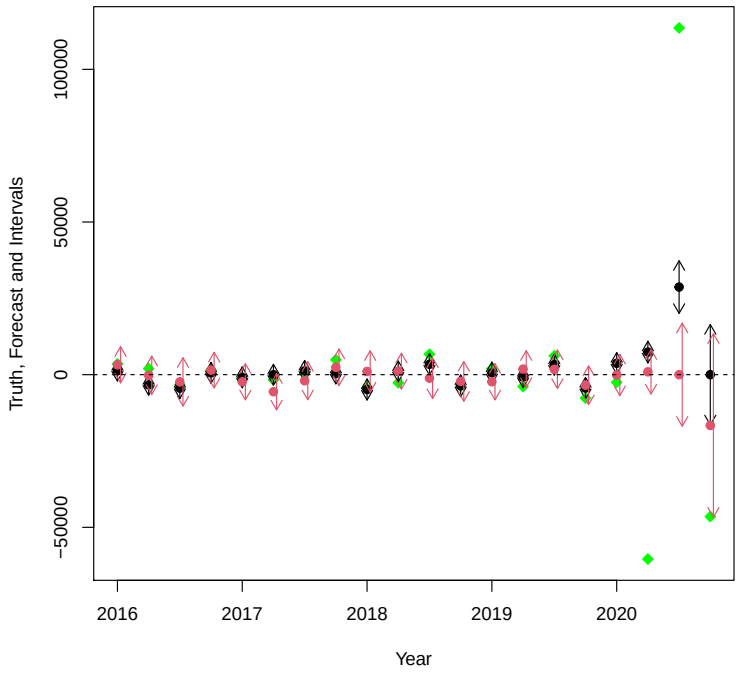


图3. 对 ABML 序列最后 20 个观测值（包括新冠疫情时期）进行一步超前预测的预测结果。绿色菱形=表示序列的真实值。黑色=表示 Box-Jenkins。红色=表示 FORLAP。实心圆表示点预测，双向箭头表示 95% 预测区间。

6. 讨论

我们展示了如何利用 Killick 等人（2020）提出的局部偏自相关函数，在 Fryzlewicz 等人（2003）的局部平稳预测方法中选择 p 参数，即确定近期数据在多大程度上与预测相关。我们随后改进的预测方法 FORLAP，在大多数模拟示例和实际数据应用中，不仅优于 Fryzlewicz 等人（2003）的原始方法，也优于基于直接时变自回归估计的方法和 Box-Jenkins 方法。

自助法检验或可作为一种替代方法，取代使用基于渐近理论的置信区间来选择 $\hat{p}$。即使底层过程并非自回归过程，也可以将 p 视为某种局部自回归模型阶数，并尝试建立理论，说明当底层过程为自回归过程时，$\hat{p}$ 对其的估计效果如何；但这超出了当前研究的范围。此外，第4节中的模拟结果很好地展示了 Kley 等人（2017）所强调的现象：非平稳时间序列的最佳预测器可能是平稳预测器，反之亦然，例如表 2中的模型 E。最后，预测区间覆盖率以及我们对

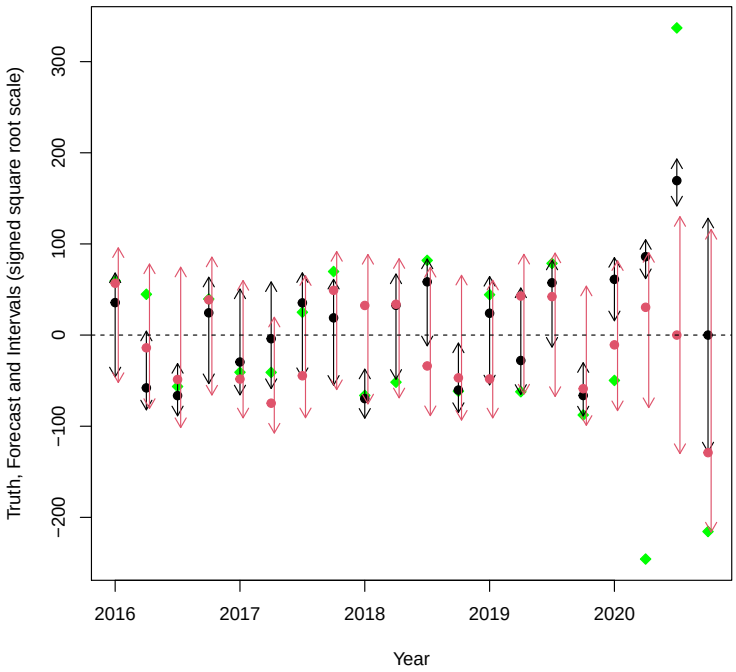


图4. 在带符号平方根尺度上绘制的 ABML 序列最后二十个观测值（包括新冠疫情时期）的一步预测结果。绿色菱形=序列的真实值。黑色=Box-Jenkins。红色=FORLAP。实心圆表示点预测，双向箭头表示 95% 预测区间。

最小二乘损失函数的使用，未必是评估预测性能的唯一或最佳方法；针对具体问题量身定制的度量也很有价值。更详细的讨论可参见 Gneiting（2011）等文献。

对于 ABML时间序列，FORLAP 的表现如此出色，甚至在显著变化时期（例如新冠疫情期间）也胜过 Box-Jenkins，着实令人惊叹。我们只能将此归因于这种方法所采用的灵活建模与预测方式：它明确承认时间序列的非平稳性。FORLAP 成功的部分原因在于，它能够更好地确定预测区间的位置；此外，它对方差变化的响应也快得多，这一点可以从图3和图4所示的预测区间中看出。

还需要进一步研究，以充分形成对所提出预测方法的成熟理解，尤其是将其与其他非平稳序列预测方法（这些方法的代码无法免费获取）进行比较、应用于不同类型的序列，以及考察除 $h = 1$ 之外的其他预测步长。

FORLAP 预测方法可通过 CRAN 上的 forecastLSW R 包使用。

致谢

作者获得了英国研究理事会能源计划的部分资助。该能源计划是由英国工程与自然科学研究委员会牵头、英国经济与社会研究理事会、英国自然环境研究理事会、英国生物技术与生物科学研究理事会和英国科学技术设施理事会共同参与的 RCUK 跨理事会计划。GPN 衷心感谢英国工程与自然科学研究委员会项目 K020951/1 提供的资助。

参考文献

Abdrabbo, N. 和 Priestley, M.（1967）论非平稳过程的预测。《英国皇家统计学会杂志》B，**29**，570–585。

Box, G. 和 Jenkins, G.（1970）时间序列分析：预测与控制。旧金山：Holden-Day。Brockwell, P. J. 和 Davis, R. A.（1991）时间序列：理论与方法。纽约：施普林格。Casas, I. 和 Fernandez-Casal, R.（2019）*tvReg*：单方程与多方程时变系数线性回归。网址：https://CRAN.R-project.org/package=tvReg。R软件包版本 0.4.2。Chatfield, C.（2003）时间序列分析：导论。伦敦：Chapman and Hall/CRC。Chow, T. W. S. 和 Leung, C. T.（1996）基于神经网络并采用天气补偿的短期负荷预测。*IEEE* 电力系统汇刊，**11**，1736–1742。Dahlhaus, R.（1996）关于局部平稳过程的 Kullback-Leibler 信息散度。随机过程及其应用，**62**，139–168。Eckley, I. A. 和 Nason, G. P.（2018）检验局部平稳小波时间序列中是否不存在混叠或局部白噪声。《生物计量学》，**105**，833–848。Embleton, J.、Knight, M. 和 Ombao, H.（2022a）有序多次试验中非平稳时间序列的多尺度谱建模。《应用统计学年刊》，**16**，2774–2803。—（2022b）有序多次试验中的重复效应小波检验。计算统计与数据分析，**174**，文章编号 107456。Fryzlewicz, P.（2005）将金融对数收益率建模并预测为局部平稳小波过程。《应用统计学杂志》，**32**，503–528。Fryzlewicz, P. 和 Ombao, H.（2009）利用随机小波表示对非平稳时间序列进行一致分类。《美国统计学会会刊》，**104**，299–312。

Fryzlewicz, P.、Van Bellegem, S. 和 von Sachs, R.（2003）通过小波过程建模预测非平稳时间序列。统计数学研究所年刊，**55**，737–764。Fryzlewicz, P. Z.（2003）时间序列与泊松数据的小波技术。博士论文，英国布里斯托尔大学。Gardner, E. S.（1985）指数平滑：现状。《预测杂志》，**4**，1–28。Gneiting, T.（2011）制定和评估点预测。《美国统计学会会刊》，**106**，746–762。Gneiting, T. 和 Raftery, A. E.（2007）严格适当评分规则、预测与估计。《美国统计学会会刊》，**102**，359–378。Hallin, M.（1986）非平稳 q 依赖过程与时变移动平均模型。《应用概率进展》，**18**，170–210。Hargreaves, J.、Knight, M.、Pitchford, J.、Oakenfull, R.、Chawla, S.、Munns, J. 和 Davis, S.（2019）小波谱检验：在非平稳植物昼夜节律中的应用。《应用统计学年刊》，**13**，1817–1846。Hargreaves, J.、Knight, M.、Pitchford, J.、Oakenfull, R. 和 Davis, S.（2018）利用局部平稳小波表示对非平稳植物昼夜节律进行聚类。《多尺度建模与仿真》，**16**，184–214。Hyndman, R.、Koehler, A.、Ord, K. 和 Snyder, R.（2008）指数平滑预测。施普林格统计学系列。施普林格，纽约。Hyndman, R. J. 和 Khandakar, Y.（2008）自动时间序列预测：R语言forecast软件包。《统计软件杂志》，**27**，1–22。Janeway, W.（2009）早餐前的六件不可能之事。《显著性》，**6**，28–31。Killick, R.、Eckley, I. 和 Jonathan, P.（2013）一种基于小波的方法，用于检测非平稳时间序列二阶结构的变化。《电子统计学杂志》，**7**，1167–1183。Killick, R.、Knight, M.、Nason, G. 和 Eckley, I.（2020）局部偏自相关函数及其若干应用。《电子统计学杂志》，**14**，3268–3314。Killick, R.、Nason, G. P.、Knight, M. I. 和 Nunes, M. A.（2023a）*lpacf*：局部平稳小波过程的局部偏自相关函数估计。R软件包版本 1.5。Killick, R.、Nason, G. P.、Nunes, M. A. 和 Knight, M. I.（2023b）*forecastLSW*：局部平稳小波过程的预测程序。R软件包版本 1.0。Kley, T.、Preuss, P. 和 Fryzlewicz, P.（2017）平稳与非平稳条件下时间序列的预测性有限样本模型选择。stats.lse.ac.uk/fryzlewicz/articles.html。

Krzemieniewska, K., Eckley, I. A. 和 Fearnhead, P.（2014）非平稳时间序列的分类。*Stat*，**3**，144–157。Mercurio, D. 和 Spokoiny, V.（2004）时间非齐次波动率模型的统计推断。《统计年鉴》，**32**，577–602。Nam, C., Aston, J., Eckley, I. 和 Killick, R.（2015）风暴季节变化的不确定性：量化自协方差变点的不确定性。*Technometrics*，**57**，194–206。Nason, G. P.（2013a）*locits*：平稳性检验与局部自协方差。网址：https://CRAN.R-project.org/package=locits。R软件包版本 1.4。——（2013b）局部平稳时间序列的二阶平稳性检验及局部自协方差的近似置信区间。《英国皇家统计学会杂志》B，**75**，879–904。Nason, G. P., von Sachs, R. 和 Kroisandt, G.（2000）小波过程与演化小波谱的自适应估计。《英国皇家统计学会杂志》B，**62**，271–292。Nason, G. P. 和 Stevens, K.（2015）对经 haar-fisz 变换的小波周期图进行贝叶斯小波收缩。*PLoS ONE*，**10**，e0137662。Priestley, M. B.（1983）《谱分析与时间序列》。伦敦：学术出版社。Priestley, M. B. 和 Subba Rao, T.（1969）时间序列平稳性检验。《英国皇家统计学会杂志》B，**31**，140–149。R 核心团队（2022）*R*：一种用于统计计算的语言和环境。R 统计计算基金会，维也纳，奥地利。网址：https://www.R-project.org/。Subba Rao, T.（1973）对 Priestley 和 Tong 论文的讨论。《英国皇家统计学会杂志》B，**35**，182–183。Tsay, R. S.（2002）《金融时间序列分析》。纽约：Wiley。英国政府活动测量中心（2008）从 Holt-Winters 到 ARIMA 建模：衡量预测误差对公共服务产出季度估计值各组成部分的影响。技术报告，英国国家统计局，英国。Van Bellegem, S. 和 von Sachs, R.（2004）利用无条件时变方差预测经济时间序列。《国际预测学杂志》，**20**，611–627。Whittle, P.（1963）非平稳过程预测器的递归关系。《英国皇家统计学会杂志》B，**27**，523–532。Xie, Y., Yu, J. 和 Ranneby, B.（2009）利用局部平稳小波过程进行预测。《统计计算与模拟杂志》，**79**，1067–1082。

附录A. 非平稳序列的模拟研究模型

模型 D 对应于时变自回归 TVAR($X_t = \alpha_t X_{t-1} +$) 模型，其中 ,,以及 ( )，且 ( ) 对于 ( )。 $Z_t \quad t = 1 \ldots 128 \quad \alpha_t = \alpha\ t/T \quad \alpha\ z\ = 1.8z - 0.9 \quad z \in\ 0, 1$

模型 E 对应于 TVAR(1) 模型，其规格与模型 D 相同，但

$$\alpha(z) = \begin{cases} 5.6z - 0.9 & \text{for } z \in (0, 1/8), \\ 4.8z - 0.8 & \text{for } z \in (1/8, 2/8), \\ 3.2z - 0.4 & \text{for } z \in (2/8, 3/8), \\ 0.8 & \text{for } z \in (3/8, 5/8), \\ -2.4z + 2.6 & \text{for } z \in (5/8, 6/8), \\ -7.2z + 5.4 & \text{for } z \in (6/8, 7/8), \\ -1.6z + 0.5 & \text{for } z \in (7/8, 1). \end{cases}$$

模型 F 对应于 TVAR(2) 模型 $X_t = \alpha_{1,\ t} X_{t-1} + \alpha_{2,\ t} X_{t-2} + Z_t$ 其中 $\alpha_{i,\ t} = \alpha_i(t/T)$ 适用于 $i = 1,\ 2$，且 $\alpha_1(z) = \alpha_2(z) = 1.6z - 1.1$ 适用于 $z \in (0,\ 1)$。

模型 G 对应于 TVAR($X_t = \alpha_{1\ t} X_{t-1} + \alpha_{2\ t} X_{t-2} + \alpha_{12\ t} X_{t-12} +$) 模型，其中，( ) 适用于 $Z_t \quad \alpha_{i\ t} = \alpha_{i\ t/T} \quad i = 1\ 2\ 12 \quad \alpha_1\ z\ = \alpha_2\ z\ = 0.7z - 0.4 \quad \alpha_{12}\ z\ = 0.3z$ ，且 ( ) ( ) 和 ( ) 适用于 $z \in (0,\ 1)$。

模型 H 对应 TVMA(1) 模型 $X_t = Z_t + \beta_t Z_{t-1}$ 其中 $\beta_t = \beta(t/T)$，其中 $\beta(z) = 1$ 当 $z \in (0,$ 0.9) 时，而 $\beta(z) = -1$ 当 $z \in (0.9,\ 1)$ 时。

模型 I 对应与模型 H 相同的 TVMA(1) 模型，但 $\beta(z) = 2z - 1$ 当 $z \in (0,\ 1)$ 时。

模型 J 对应 TVMA(2) 模型 $X_t = Z_t + \beta_{1,\ t} Z_{t-1} + \beta_{2,\ t} Z_{t-2}$ 其中 $\beta_{i,\ t} = \beta_i(t/T)$ 当 $i = 1,\ 2$ 时，其中 $\beta_1(z) = 2z - 1$ 且 $\beta_2(z) = 9z - 0.8$ 当 $z \in (0,\ 1)$ 时。

模型 K 对应均匀调制白噪声，参见 Priestley（1983，第826页），其中 $X_t = \sigma_t^2 Z_t$ 其中 $\sigma_t^2 = \sigma^2$ (t/T)，其中 $\sigma^2(z) = (9z + 1)^{3/2}$ 当 $z \in (0,\ 1)$ 时。注意，该模型可能适合第1节中的 ABML时间序列。

模型 L 是 Nason 等人（2000年）提出的一种局部平稳小波（LSW）过程，其谱 P3 来自 Nason（2013b），定义为 $S_j(z) = 0 \text{for } j > 2, S_1(z) = \frac{1}{4} - (z - \frac{1}{2})^2 \text{and} S_2(z) = S_1(z + \frac{1}{2}) \text{ for } z \in (0,\ 1)$，其中仅在构造谱时假设采用周期边界。

模型 M 是 Nason 等人（2000年）提出的一种 LSW 过程，其谱 P4 来自 Nason（2013b），定义为 $S_j(z) = 0 \text{for } j = 2,\ j > 4 \text{and } S_1(z) = \exp\{-4(z - \frac{1}{4})^2\}, S_3(z) = S_1(z - \frac{1}{4}) \text{ and } S_4(z) = S_1(z + \frac{1}{4}), \text{for } z \in (0,\ 1)$，其中仅在构造谱时假设采用周期边界。该过程 X_t 的计算范围为 $t = 1$、……、512，并返回前 $T = 350$ 个值。