arXiv:2303.07844v1 [math.GT] 14 Mar 2023

正标量曲率与指标理论中的一致性

为获得哥廷根乔治-奥古斯特大学自然科学博士学位而提交的论文

哥廷根乔治-奥古斯特大学科学学院（GAUSS）数学科学博士项目

由来自哥廷根的
Thorsten Hertl 提交

哥廷根，2022

指导委员会

Thomas Schick 教授、博士数学研究所，哥廷根乔治-奥古斯特大学

Wolfgang Steimle 教授、博士数学研究所，奥格斯堡大学

考试委员会成员

主审人：**Thomas Schick 教授、博士**数学研究所，哥廷根乔治-奥古斯特大学

副主审人：**Wolfgang Steimle 教授、博士**数学研究所，奥格斯堡大学

考试委员会其他成员

维克托·皮德斯特里加赫教授哥廷根乔治-奥古斯特大学数学研究所

弗兰克·古内拉斯教授哥廷根乔治-奥古斯特大学数学研究所

多萝西娅·巴恩斯教授哥廷根乔治-奥古斯特大学数学研究所

斯特凡·胡克曼教授哥廷根乔治-奥古斯特大学数学随机过程研究所

口试日期：2022年9月2日

致谢：

这篇博士论文是我一段美好时光的成果，其中既有充满创造力的时期，也有艰难的低谷。若没有两位导师 Thomas Schick 教授和 Wolfgang Steimle 教授的陪伴，这篇论文绝不可能问世。他们给予我信任，让我参与重点项目“微分同胚与正标量曲率的拓扑”。在此期间，他们给予我自由空间，让我尝试自己的想法；而当进展不如预期时，他们也总会为我出谋划策、鼎力相助。博士研究刚开始时，我与 Wolfgang 定期交流，这帮助我不至于迷失方向，也没有被大量需要学习的新知识压垮。Thomas 的专业知识与直觉，在我认识他的 12 年里从未出错；尽管前期工作花费了 1.5 年多，我始终没有怀疑过这篇论文中指标理论项目的成功。我对两位导师感激不尽；万分感谢！

除了导师之外，我还得到了许多校对者的帮助。谨向 Jonas Baltes、Tim Höpfner、Collin Mark Joseph、Alexei Kudryashov、Simon Naarmann、Daniel Räde、Hemanth Saratchandran 和 Julian Seipel 致以诚挚谢意。特别感谢 Georg Frenck，他找出的错误比我希望的还要多，也提出了改进手绘图的好点子；还要感谢 Moritz Meisel，他通读了整篇论文的大部分内容。

在奥格斯堡的两年半里，如果没有在微分几何教席受到如此热情的接纳，我的生活就不会如此舒心。我永远不会忘记湖边的聚会，也不会忘记高等研讨课前的蛋糕。特别要感谢 Mauricio Bustamante、Benedikt Hunger、Alexei Kudryashov、Moritz Meisel、Hemanth Saratchandran、Eric Schlaarmann 和 Alexandra Linde，我与他们进行了许多热烈的数学及非数学讨论；此外，还要感谢课题组之外的 Pavel Hajek，以及 Nick Wittig 和他的伙伴们。

每当我对数学感到厌倦时，都很庆幸自己有一个安稳的避风港。Gerstenacker 一家和我的室友 Franz Korn 让我在 Gersthofen 找到了新的家园。

在哥廷根的12年里，我结识了许多挚友，他们以各种方式给予我支持；我也无比珍视与他们相识的缘分。谨在此列出他们的名字：Simone Cecchini、Jakob Dittmer、Anne Prepeneit、Simon Naarmann、Mehran Seyed Hosseini、Jonas Breustedt、Joel Meier 和 Tim Höpfner，以及从一开始就陪伴着我的 Christian Döring 和 Elias Most。

若没有家人的支持，让我按照自己的条件求学并追求自己的兴趣，这篇论文便不可能完成。谨以此向你们致谢。

摘要

我们将通过块微分同胚研究微分同胚的策略应用于正标量曲率（psc）度量领域。对于每个闭正标量曲率流形 M，$\widetilde{\ }$，我们构造由所有正标量曲率块度量组成的立方集合 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$；它在其同伦型中仅编码正标量曲率度量的共边信息。我们证明 $\sim \mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 是一个立方 Kan 集，给出组合同伦群群结构的几何描述，并构造一个比较映射，将 M 上正标量曲率度量空间的立方模型 $\widetilde{\ } \mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 映射到 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$。接下来，我们基于可逆 $\widetilde{\ }$ 块狄拉克算子的概念，构造一个以共边为主题的实 K-理论模型，并利用它将指标差分解经过 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$。在本文最后一部分，我们构造正标量曲率 Hatcher 谱序列，这是一种非指标理论工具，可用于获取关于 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 与 $\sim \mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 之差的信息。

目录

1 引言 1

2 立方集合理论 11

2.1 立方集合基础.112.2 立方集合示例.232.2.1 奇异集的块版本.232.2.2 块映射的拓扑空间.272.2.3 态射集与路径集.30

3 正标量曲率的立方化版本 33

3.1 基础.34

3.2 特殊子流形的构造.393.3 同伦集的Kan性质.503.4 几何加法.53

4 算子协调集 61

4.1 自旋几何基础.624.2 块算子.834.3 块算子的解析性质.924.4 算子同伦集的基础.1064.5 比较映射.1144.6 算子协调集的Kan性质.1304.7 符号映射是Kan纤维化.1354.8 算子理论加法.1504.9 与实 K-理论的比较.160

5 指标差的分解181

5.1 分解定理.1815.2 应用.190

6 正标量曲率 Hatcher 谱序列 19 **3**

6.1 几何基础.1936.2 谱序列的抽象构造.2086.3 缺陷纤维化的应用.213

7 追忆似水年华 215

A 索伯列夫空间 217B 伪微分算子的基础 223C 黎曼几何中的公式 239C.1 等值集叶状结构的标量曲率.239

符号表 **245**

第1章

引言

本论文的总体目标是从共边的视角，系统研究闭流形上的正标量曲率（psc）度量空间。

背景

标量曲率$\mathrm{scal}(g)$ 黎曼度量 g 是黎曼流形(M,g) 的一个几何量，用来衡量该黎曼度量偏离平坦状态的程度。在黎曼几何中常考虑的曲率（截面曲率、里奇曲率和标量曲率）中，标量曲率是最弱的一种。它是一个取值为标量的函数$\mathrm{scal}(g)$:
$M \to \mathbb{R}$ 用来衡量在小尺度上，测地球的体积相较于欧几里得空间中的球体积增长得有多快。更准确地说， $p \in M$ 处的标量曲率出现在泰勒级数展开中Gra73, 定理 3。1]

$$\frac{\mathrm{vol}(B_\varepsilon(p) \subseteq M^d)}{\mathrm{vol}\big(B_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^d\big)} = 1 - \frac{\mathrm{scal}(g)(p)}{6(d+2)}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

特别是，如果标量曲率为正，那么在二阶项支配高阶项的尺度范围内，体积增长较慢。

对于曲面，即 dim $M = 2$，标量曲率是高斯曲率的两倍，因此假设其为正是一个严格条件。事实上，高斯-博内定理

$$\int_M \mathrm{scal}(g)\mathrm{d}\,\mathrm{vol}_g = 4\pi\chi(M) = 4\pi\big(2 - 2\mathrm{genus}(M)\big)$$

再加上闭曲面分类定理，这意味着只有球面S^2 和实射影平面 $\mathbb{R}P^2$ 能够承载正标量曲率度量，而它们确实可以!

在高维中，曲率的概念各不相同，而存在阻碍正标量曲率度量存在的因素，这多少有些令人惊讶。Lichnerowicz [Lic63] 发现，在自旋流形上，也就是说，在第二斯蒂费尔-惠特尼类为零的可定向黎曼流形上，（Clifford 线性）狄拉克算子 $\not{D}_g$ 与其底层黎曼度量的标量曲率密切相关:

$$\not{D}_g^2 = \nabla^*\nabla + \frac{\mathrm{scal}(g)}{4}.$$

该公式表明，若标量曲率为正，则狄拉克算子可逆。在闭流形上，狄拉克算子是一个（无界）Fredholm 算子，其核生成实 K 理论中的一个类。根据 Hitchin 对 Atiyah-Singer 指数定理的推广，这个类是 d 维流形 M 的一个纯拓扑量，即所谓的 α-不变量 或拓扑指标$\alpha(M) \in KO^{-d}$(pt)。特别地，这个类与用于定义狄拉克算子的度量无关，因此可推知，$\alpha(M)$ 非零是正标量曲率存在的障碍。

在构造性方面，Gromov-Lawson 的手术结果 [GL80] 是构造具有正标量曲率度量的流形实例的重要工具。最简单地说，若 M_2 由 M_1 经过余维 ≥ 3 的手术得到，且 M_1 具有正标量曲率度量，那么 M_2 也具有正标量曲率度量。手术结果表明，维数为 ≥ 5 的自旋流形具有正标量曲率度量，当且仅当其奇异配边类 $[M, f] \in \Omega^{\mathrm{Spin}}(B\pi_1(M))$ 有一个代表元具有正标量曲率度量。这里，$f\colon M \to B\pi_1(M)$ 是一个到 M 的基本群的分类空间的连续映射，它在基本群之间诱导恒等函数。

Stephan Stolz 在 [Sto92] 中运用手术结果证明，对于维数为 ≥ 5的单连通自旋流形，α-不变量的消失不仅是必要条件，而且也是充分条件；他通过证明所有α-不变量的核中的元素

$$\alpha\colon \Omega_*^{\mathrm{Spin}}(\mathrm{pt}) \to KO^{-*}(\mathrm{pt})$$

可由正标量曲率流形表示。对于其他基本群，类似的问题——（高阶）α不变量是否也是存在性的充分条件（此处不作定义）——后来被称为 Gromov-Lawson-Rosenberg 猜想。Thomas Schick 的反例 [Sch98]证明该猜想一般而言是错误的。

稳定的 Gromov-Lawson-Rosenberg 猜想声称，如果高阶 α不变量消失，那么 $M \times \mathrm{Bott}^N$ 对于所有充分大的 $N \in \mathbb{N}$都具有正标量曲率度量，详见 [Ros06, 第19页及后续内容] 。这里，Bott 是一个八维、单连通的闭流形，且 $\alpha(\mathrm{Bott}) = 1 \in KO^{-8}(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{Z}$，因此它不能承载正标量曲率度量。这个流形称为***Bott*** 流形，并且可以选为 Ricci 平坦。稳定的 Gromov-Lawson-Rosenberg 猜想提出于20世纪90年代，是 Novikov 猜想的推论，也是关于存在性问题的最新进展。

尽管尚未完全解决，但关于 M 是否带有正标量曲率度量的问题已经得到了相当充分的理解：它受稳定 Gromov-Lawson- Rosenberg 猜想的支配。因此，研究重点转向了以下问题：

> 如果一个流形至少带有一个正标量曲率度量，那么它能够带有多少个本质不同的正标量曲率度量?

更准确地说，在闭流形 M 上，我们考虑所有具有正标量曲率的黎曼度量所构成的集合 $\mathrm{Riem}^+(M)$。这是一个截面子集，定义在

M 上，其取值为切空间上的双线性形式，因此我们赋予它光滑惠特尼拓扑——即截面空间上的通常拓扑。我们关注 $\mathrm{Riem}^+(M)$ 的同伦型。

若 $\dim M = 2$ 大于 3，则空间 $\mathrm{Riem}^+(M)$ 或为空，或为可缩空间，见 [RS01, Theorem 3.4] 和 [BK19, Theorem 1.1]。若 $\dim M \geq 4$ 且 M 是自旋的，情况则截然不同。利用 α-不变量的次级版本，即所谓的指标差，人们发现了 $\mathrm{Riem}^+(M)$ 的同伦群中许多非平凡元素，例见 [Hit74], [Car88], [HSS14], [BERW17], 和 [Fre21]。先验地，指标差有两个版本，一个由 Hitchin 提出 [Hit74], ，另一个由 Gromov-Lawson 提出 [GL83]。现在让我们依次描述这两个版本。

回顾一下，$\mathrm{Fred}^{d,0}(H)$ 是具有 $Cl_{d,0}$-模结构的可分希尔伯特空间上 $Cl_{d,0}$-线性 Fredholm 算子构成的空间，它是实K-理论的分类空间。这意味着存在一个自然同构

$$[X; \mathrm{Fred}^{d,0}(H)] \cong KO^{-d}(X)$$

对所有有限 CW 复形 X。这里，$Cl_{d,0}$ 表示实 Clifford 代数，即由 e_1、……、e_d 生成并满足关系 $e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij}$的泛代数。

固定一个基点 $g_0 \in$ 黎曼度量$^+(M)$。对于每个正标量曲率度量 $g \in$ 黎曼度量$^+(M)$，凸组合给出一条黎曼度量路径 g_t（其间的度量可能不具有正标量曲率）。这条路径相应地产生一条狄拉克算子路径 $\not{D}_{g_t}$，该路径在端点附近可逆。其有界变换是一条两端可逆的 Fredholm 算子路径[1]。根据 Kuiper 定理，可逆算子空间是可缩的；关于 Clifford 线性版本，参见 [Ebe17，引理 2。8] 因此，我们可以将这条路径闭合成一个环。此过程给出一个连续映射

$$\mathrm{inddif}_H(-, g_0)\colon \mathrm{Riem}^+(M) \to \Omega\mathrm{Fred}^{d,0}(H).$$

Gromov-Lawson 版本的构造方式有所不同。对于正标量曲率度量 $g \in$Riem$^+(M)$，我们考虑 $M \times \mathbb{R}$ 上的度量 G，其定义为

$$G = \begin{cases} g_0 + \mathrm{d}t^2, & \text{on } M \times \mathbb{R}_{\geq -1}, \\ \frac{1-t}{2} g_0 + \frac{(1+t)}{2} g + \mathrm{d}t^2, & \text{on } M \times [-1, 1], \\ g + \mathrm{d}t^2, & \text{on } M \times \mathbb{R}_{\geq 1}. \end{cases}$$

它的狄拉克算子仍然是一个无界弗雷德霍姆算子，因此其有界变换是 $\mathrm{Fred}^{d+1,0}(H)$ 中的一个元素。这给出了一个连续映射

$$\mathrm{inddif}_{GL}(-, g_0)\colon \mathrm{Riem}^+(M) \to \mathrm{Fred}^{d+1,0}(H).$$

文献 [Ebe17] 的主要结果表明，这两个版本本质上是一致的，也就是说，将 Gromov-Lawson 版本的指标差映射与弱同伦等价 $\mathrm{Fred}^{d+1,0}(H) \to \Omega\mathrm{Fred}^{d,0}(H)$ 复合后，它与 Hitchin 版本同伦。

[1]此处我们暂且忽略希尔伯特空间本身也依赖于度量这一点。

Gromov-Lawson 版本的重要特点是它在共边 下保持不变，而不仅仅是在同痕下保持不变。下面回顾这些概念。两个正标量曲率度量之间的同痕不过是它们之间的一条光滑路径，因此，同痕一词只是光滑同伦的同义词。另一方面，两个正标量曲率度量之间的共边，是指一个正标量曲率度量 G定义在 $M\times[-1,1]$ 上，且在端点 $M\times\{j\}$ 附近与度量 $g_j+\mathrm{d}t^2$ 一致。如果两个正标量曲率度量之间存在同痕／共边，我们就称它们为同痕／共边的。同痕意味着共边。反过来是否也成立，目前仍是一个开放猜想。

猜想（共边蕴含同痕）。若 $g_0, g_1\in\mathrm{Riem}^+(M)$ 共边，则它们也同痕。

在4维中，这一猜想存在反例，参见 [Rub01], 但这一猜想在更高维中或许仍然成立。

我们注意到一个巨大的差异：尽管我们关注空间 $\mathrm{Riem}^+(M)$ 的同伦型（其同痕类型），但我们现有的不变量在共边下保持不变。因此，从共边的角度系统地考察 $\mathrm{Riem}^+(M)$是有意义的。然而，这方面的结果相当少。Stolz [Sto98] 考察了 $\mathrm{Riem}^+(M)$ 的共边类集合，并证明它仅取决于第一斯蒂费尔–惠特尼类 $w_1(M)$ 以及群扩张

$$1\longrightarrow\mathbb{Z}_2\longrightarrow\hat{\pi}\longrightarrow\pi_1(M)\longrightarrow 1$$

该群扩张由第二斯蒂费尔-惠特尼类 $w_2(M)$分类，详情参见 [Sto98] 。

受这一差异以及 Stolz 的结果启发，我们在这篇论文中从共边的视角系统地研究正标量曲率度量空间。我们的研究思路借鉴了上世纪 60 年代末兴起的高维流形微分同胚群研究，下面我们将回顾这一研究。

作为蓝图的块微分同胚理论

研究紧流形上微分同胚群空间的关键思路 M是通过较大的群 块$\widetilde{\text{微分同胚}}$ $\mathbf{Diff}(M)$ 来“逼近”微分同胚群 $\mathbf{Diff}(M)$。这个块微分同胚群无法用闭式表达写出，而需要借助组合拓扑中的工具来构造，例如单纯集合或立方集合。这里我们使用立方集合，因为在本论文的正文部分也会$\widetilde{\text{用到它们}}$。因此，群 $\mathbf{Diff}(M)$ 是如下立方群的几何实现：其 n-立方由$M\times[-1,1]^n$ 上的微分同胚给出，这些微分同胚将每个面 $M\times\{x_i=\varepsilon\}$（其中 $\varepsilon=\pm1$）映到自身。它包含 $\mathbf{Diff}(M)$，或者更准确地说，包含其组合对应物，即由满足以下图表交换条件的 $M\times[-1,1]^n$ 上的 φ 微分同胚构成的立方子群，其 n-立方为：

$$\begin{array}{ccc} M\times[-1,1]^n & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & M\times[-1,1]^n \\ & {\scriptstyle \mathrm{pr}_2}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle \mathrm{pr}_2} & \\ & [-1,1]^n. & \end{array}$$

$\widetilde{\text{}}$与 Diff(M) 相比，Diff (M) 的优势在于，可以更好地借助代数拓扑中的工具来处理它，例如同伦论或外科理论。为了解释这一点，我们首先需要引入同伦自同构的拓扑幺半群 hAut(M)，它由所有连续自映射组成，而这些映射都是同伦等价-$\widetilde{\text{}}$。此外还有块版本 hAut(M)，它与 hAut(M) 的关系$\widetilde{\text{}}$和 Diff (M) 与 Diff(M) 的关系相同；但根据 [Dol63 定理 6.1]，典-$\widetilde{\text{}}$范包含映射 hAut(M) $\to$ hAut(M) 是同伦等价。包含映射$\widetilde{\text{}}$ $\widetilde{\text{}}$Diff (M) $\to$hAut(M) $\simeq$h Aut(M) 导出一个同伦纤维化

$$\mathrm{hAut}(M)/\widetilde{\mathrm{Diff}}(M) \longrightarrow B\widetilde{\mathrm{Diff}}(M) \longrightarrow B\mathrm{hAut}(M).$$

分类空间 $B\mathrm{hAut}(M)$ 是一个纯粹的同伦论对象，可以借助代数拓扑中的工具（如阻碍理论）来研究 [Rut97]。该$\widetilde{\text{}}$纤维$\mathrm{hAut}(M)$/Diff (M) 与外科理论密切相关，因为它与 Quinn 外科纤维化中的纤维弱同伦等价

$$\mathrm{hAut}(M)/\widetilde{\mathrm{Diff}}(M) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{S}(M) \longrightarrow \mathrm{Maps}(M, G/O) \longrightarrow \mathbb{L}(\mathbb{Z}[\pi_1 M]),$$

参见 [BM12第 3] 节，其中对外科纤维化及弱等价这一结论作了清晰简洁的讨论。同伦群长正合列$\widetilde{\text{}}$表明，该纤维化的 $\pi_k(\mathrm{hAut}(M)/$Diff (M)) 出现在外科长正合列中

$$\begin{array}{ccccccc} L_{k+d+1}(\mathbb{Z}[\pi_1 M]) & \longrightarrow & S_\partial(M \times D^k) & \longrightarrow & \mathcal{N}_\partial(M \times D^k) & \to & L_{k+d}(\mathbb{Z}[\pi_1 M]) \\ & & \uparrow \cong & & & & \\ & & \pi_k\big(\mathrm{hAut}(M)/\widetilde{\mathrm{Diff}}(M)\big). & & & & \end{array}$$

关于外科序列的详情，请参阅 [LM20] 。

L-群 $L_*(\mathbb{Z}[\pi_1(M)])$ 有完全的代数描述，而正规配边群 $\mathcal{N}_\partial(M \times D^k)$ 则可通过（稳定）同伦论来研究。$\widetilde{\text{}}$总而言之，尽管 Diff (M) 起源于微分拓扑学，但只需运用代数和同伦论工具，就能从 Diff (M) 中提取大量信息，从而在实践中降低问题的难度。

为了解 Diff(M)（研究对象）$\widetilde{\text{}}$与 Diff (M)（较易研究的对象）之间的差异，人们会使用纤维化

$$\widetilde{\mathrm{Diff}}(M)/\mathrm{Diff}(M) \longrightarrow B\mathrm{Diff}(M) \longrightarrow \mathrm{Diff}(M).$$

$\widetilde{\text{}}$在 [Hat78],Hatcher 研究纤维 Diff (M)/Diff(M)，借助伪同痕

$$C(M) \coloneqq \{\varphi \in \mathrm{Diff}(M \times [0,1]) \,:\, \varphi = \mathrm{id} \text{ near } M \times \{0\} \cup \partial M \times [0,1]\}.$$

更准确地说，他构造了一个第一象限谱序列，它以$\widetilde{\text{}}$$E^1_{p,\ q} = \pi_q$($C$($M \times [0,1]^p$))为起点，并收敛到 π_{p+q+1}(Diff (M)/Diff(M))。

如果 $q \ll$ 维数 M，那么实际上可以计算 Hatcher 谱序列中的微分$d^1_{p,\,q}$并将结果与 Waldhausen 的代数 K-理论联系起来。Farell 和 Hsiang [FH78] 利用这些工具计算了有理同伦群$\pi_k(B\mathrm{Diff}(S^n)) \otimes \mathbb{Q}$，其中 $k \ll n$。为完整起见，精确结果如下：

$$\pi_k(B\mathrm{Diff}(S^n)) \otimes \mathbb{Q} = \begin{cases} \mathbb{Q}, & \text{if } k \equiv 0 \mod 4, n \text{ even}, \\ \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, & \text{if } k \equiv 0 \mod 4, n \text{ odd}, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

在范围 $0 < k < n/6 - 7$ 内。

结果陈述

本论文的总体目标是建立理论基础，将上一节所述的微分同胚群研究策略推广到正标量曲率度量领域。我们将引入正标量曲率分块度量的空间 $\widetilde{\mathcal{R}^+}(M)$，它应被视为正标量曲率领域中 Diff (M) 的对应物。

与之前一样，空间 $\widetilde{\mathcal{R}^+}(M)$ 无法以闭式写出，而需要通过构造得到。我们的构造工具是立方集合论，因为我们认为，由于存在规范识别 $I^n \times I^m = I^{n+m}$，立方体比单形更适合研究与曲率相关的问题。事实上，我们主要将在立方集范畴中工作，而非拓扑空间范畴。这没有问题，因为在本论文中，我们只关注同伦论问题，而这两个范畴具有相同的同伦范畴。

为使论文内容自成一体，我们回顾一下将要用到的立方集合论基础。我们首先概述立方集合论，并梳理现有文献，随后讨论专为本论文调整的一般概念的实例与变体。

接下来，我们将近似空间 $\widetilde{\mathcal{R}^+}(M)$用立方集合 $\widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M)$建模，其中$n$-立方体可视为定义在 $M \times [-1,1]^n$ 上的正标量曲率度量，它们在每个面$M \times \{x_i = \varepsilon\}$ 附近都与乘积度量 $g|_{M\times\{x_i=\varepsilon\}} \oplus \mathrm{d}x_i^2$一致，其中 $\varepsilon = \pm 1$。

通常，立方集合论只有在所谓的*Kan* 集上才能很好地发挥作用；这类集合可理解为“拥有足够多立方体”的立方集合。本论文的第一个主要结果可视为开启组合世界的一扇门：

定理 A. 若 M 是闭正标量曲率流形，则 $\widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M)$ 是 *Kan* 集。

这一结果的一个重要推论是，$\widetilde{\mathcal{R}^+}(M)$的同伦群可以用纯粹的组合方式描述。例如，道路连通分支集合$\pi_0(\widetilde{\mathcal{R}^+}(M))$恰好是 $\mathrm{Riem}^+(M)$ 的共边类集合，而基本群 $\pi_1(\widetilde{\mathcal{R}^+}(M),\ g_0)$则是自协调类 g_0的共边类集合。根据 Stolz 在 [Sto98] 中的结果，我们知道，如果 M 是自旋的，那么 $\pi_0(\widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M))$只取决于 M 的基本群；我们预计 $\pi_n(\widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M))$的高阶同伦群也有类似的结果。

立方集合论还为同伦群的组合版本提供了一种抽象的群结构。然而，这种群结构是隐含的，而且在

实际计算中并不真正实用。因此，我们给出一种更具几何意味且明确的描述。对于基本群而言，两个位于 $M \times [-1,1]$ 上的 g_0 的自协调 G_1，G_2 的几何乘积可以看作 $M \times [-1,3]$ 上的并集$G_1 \cup G_2$，随后将其重新认定为 $M \times [-1,1]$。

当然，我们希望将原始空间 $\mathsf{Riem}^+(M)$ 与 $\widetilde{\mathcal{R}^+}(M)$ 联系起来。$\mathsf{Riem}^+(M)$ 的一个立方模型是立方集合 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$，其 n-立方体是光滑映射 $[-1,1]^n \to \mathsf{Riem}^+(M)$，并且在每个超面 $\{x_i = \varepsilon\}$ 附近都与 $\sim x_i$ 无关。立方映射 $\mathcal{R}^+_\bullet(M) \to \mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 将每个正标量曲率度量的映射对应到它的伴随度量，

$$\big(g\colon [-1,1]^n \to \mathrm{Riem}^+(M)\big) \mapsto g(-) + \mathrm{d}x_1^2 + \cdots + \mathrm{d}x_n^2 \in \mathrm{Riem}^+(M \times [-1,1]^n)$$

由于伴随度量可能具有非正标量曲率，因此该映射定义不良。不过，若将此映射限制到 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 的一个同伦等价立方子集上，其中的立方体参数化得足够缓慢，那么伴随度量也具有正标量曲率，因此我们最终得到一个定义良好的映射，它定义在一个弱 $\widetilde{\ }$ 等价子集 $\mathsf{susp}_\bullet$ 上：$\mathcal{R}^+_\bullet(M) \dashrightarrow \widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M)$。

接下来的任务当然是弄清楚指标差（或者更确切地说，$\widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M)$ 它的立方模型）是否经由 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 分解。如果确实如此，那么只要 $\dim M \geq 6$，$\widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M)$ 就会有许多非平凡的同伦群，因为指标差会诱导非平凡的同态

$$\pi_n(\mathrm{inddif}(-, g_0))\colon \pi_k(\mathrm{Riem}^+(M^d), g_0) \to KO^{-(d+k+1)}(\mathrm{pt})$$

只要其目标群非平凡；参见 [BERW17]。

出发点是 [Ebe17] 所作的观察：闭自旋正标量曲率流形 M（维数为d）上的可逆伪狄拉克算子 $\Psi\mathsf{Dir}^\times(M)$ 的空间是 KO^{-d}的分类空间。我们更倾向于采用这个模型，而不是 $\mathsf{Fred}^{d,\,0}(H)$，因为在这一图景中，指标差是连续映射 $\mathsf{Riem}^+(M) \to \Psi\mathsf{Dir}^\times(M)$，它将正标量曲率度量 g 映射为相应的狄拉克算子 $\not{D}_g$。至于正标量曲率度量空间，$\Psi\mathsf{Dir}^\times(M)$ 的一个立方模型由如下立方集合给出：其 n-立方是光滑映射 $[-1,1]^n \to \Psi\mathsf{Dir}^\times(M)$，且在每个超面附近 $\{x_i = \varepsilon\}$ 均不依赖于 x_i；连续映射 $g \mapsto \not{D}_g$ 在这些立方模型之间诱导一个立方映射，因此我们最终得到两个立方映射

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^+_\bullet(M) & \xrightarrow{\not{D}_\bullet} & \Psi\mathrm{Dir}^\times_\bullet(M) \\ {\scriptstyle \mathsf{susp}_\bullet}\downarrow & & \\ \widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M) & & \end{array}$$

我们希望用一个立方映射 $\widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M) \to \Psi\mathsf{Dir}^\times_\bullet(M)$ 补全该同伦交换图表。

如果这样的映射存在，那么它必定有着复杂的描述，因为 $\widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M)$ 中的一个元素是 $M \times [-1,1]^n$上的度量，而 $\Psi\mathsf{Dir}^\times_n(M)$ 中的一个元素则是映射 $[-1,1]^n \to \Psi\mathsf{Dir}^\times(M)$。为了解决这个问题，我们采用相同的

$\widetilde{\ }$方法，将空间 $\mathrm{Riem}^+(M)$ 构造为立方集合 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$，并将其应用于空间 $\Psi\mathrm{Dir}^\times(M)$。由此得到可逆分块狄拉克算子的立方集合 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^\times_\bullet(M)$，其中的 n-立方体可以看作 $M\times[-1,1]^n$上的伪狄拉克算子，它们在边界附近的分解方式与块度量的狄拉克算子相同。

$\widetilde{\ }$完全类似于映射 $\mathrm{susp}_\bullet\colon \mathcal{R}^+_\bullet(M) \dashrightarrow \mathcal{R}^+_\bullet(M)$，存在一个立方映射 $\mathrm{susp}_\bullet\colon \Psi\mathrm{Dir}^\times_\bullet(M) \dashrightarrow \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^\times_\bullet(M)$。该映射仅在 $\Psi\mathrm{Dir}^\times_\bullet(M)$ 的一个同伦等价子集上良定义，并将算子映射 $[-1,1]^n \to \Psi\mathrm{Dir}^\times(M)$ 赋予其在 $M\times[-1,1]^n$ 上的“伴随算子”。

现在我们可以表述本文的下一个主定理。

定理B。 映射 $\mathrm{susp}_\bullet\colon \Psi\mathrm{Dir}^\times_\bullet(M) \dashrightarrow \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^\times_\bullet(M)$ 是弱同伦等价。

该定理的一个重要推论是，$\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^\times_\bullet(M)$ 是实 K 理论分类空间的另一种模型，其容量足以容纳一般正标量曲率分块度量的狄拉克算子$\widetilde{\ }$。因此，我们得到一个立方映射 $\mathcal{D}_\bullet\colon \mathcal{R}^+_\bullet(M) \to \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^\times_\bullet(M)$，将正标量曲率分块度量映射到其狄拉克算子。

定理 C。该图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^+_\bullet(M) & \xrightarrow{\mathcal{D}_\bullet} & \Psi\mathrm{Dir}^\times_\bullet(M) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{susp}_\bullet} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{susp}_\bullet} \\ \widetilde{\mathcal{R}}^+_\bullet(M) & \xrightarrow[\mathcal{D}_\bullet]{} & \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^\times_\bullet(M) \end{array}$$

在同伦意义下交换。

由于构造的性质，我们将 $\mathcal{D}_\bullet\colon \mathcal{R}^+_\bullet(M) \to \Psi\mathrm{Dir}^\times_\bullet(M)$ 视为 Hitchin 指数差的立方模型，并将 $\mathcal{D}_\bullet\colon \widetilde{\mathcal{R}}^+_\bullet(M) \to \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^\times_\bullet(M)$ 视为 Gromov-Lawson 指标差的立方模型。

定理 C的一个直接推论是 [Ebe17] 的主要结果，即 Hitchin 版本和 Gromov-Lawson 版本的指标差一致。不过，定理 C还揭示了更多内容，因为该指标差经由.....分解 $\sim\pi_n(\mathcal{R}^+_\bullet(M))$，我们认为这只取决于自旋流形 M的基本群。因此，指标差在实 K理论中的像只取决于基本群。

当然，正如在微分同胚群的情形中一样，我们想知道 $\widetilde{\mathrm{Riem}}^+(M)$ 和 $\mathcal{R}^+(M)$，或者等价地，它们的立方模型 $\widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet(M)}$ 和 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$，彼此相差多大。一致蕴含同痕猜想$\widetilde{\ }$可表述为：悬挂$_\bullet\colon \mathcal{R}^+_\bullet(M) \dashrightarrow \mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 在道路连通分支集合上诱导一个单射（因而也是双射）。更大胆地说，我们可以猜想：

猜想 （强一致蕴含同痕）。立方映射

$$\mathrm{susp}_\bullet\colon \mathcal{R}^+_\bullet(M) \dashrightarrow \widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M)$$

是一个弱同伦等价。

尽管当 维数 $M \leq 3$ (因为 $\mathrm{Riem}^+(M)$ 可缩）时，一致蕴含同位猜想成立，但更强的版本并不成立。我们将在第 5章给出反例。事实上，我们还将证明更强的结论：

定理 D。 若 M 是维数为2 或3的正标量曲率流形，则悬挂映射 $\widetilde{\text{悬挂}}_\bullet$： $\mathcal{R}^+_\bullet(M) \dashrightarrow \mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 不是弱同伦等价。

$\widetilde{\ }$为了了解 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 与 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 之间的差异，尤其是对于我们尚无反例的高维流形，我们借鉴了研究微分同胚群时采用的方法，并考察比较映射 $\mathrm{susp}_\bullet\colon \mathcal{R}^+_\bullet(M) \dashrightarrow \mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 的 $\widetilde{\ }$同伦纤维 $\mathrm{hofib}_\bullet$。受 Hatcher 的结果 [Hat78], 启发，我们构造了正标量曲率版本的 Hatcher 谱序列，用空间中正标量曲率伪同痕 $C^{\mathrm{psc}}(M \times I^p)$ 的同伦群来近似该同伦纤维的同伦群。这个集合由 $M \times [-1,1]^{p+1}$ 上所有满足以下条件的正标量曲率块度量组成：除最后一个前面 $M \times \{x_{p+1} = 1\}$ 附近外，它们在每个超面 $M \times \{x_i = \varepsilon\}$ 附近都与基点 $g_0 \in \mathrm{Riem}^+(M)$ 和欧几里得度量的乘积度量 $g_0 \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^p}$一致，其中 $\varepsilon = \pm 1$。

定理 E。 存在一个第一象限谱序列 $E^r_{p,q}$ ，它以同伦群 $E^1_{pq} = \pi_q\big(C^{\mathrm{psc}}(M \times I^p)\big)$ 为起始项，并收敛到 $\pi_{p+q}(\mathrm{hofib}_\bullet)$ ，若 $p + q \geq 2$。

论文概要

本文概要如下（更详细的介绍请参见各章的引言）。第2章讨论立方集合论所需的材料。第2.1节总结所需的一般理论并概述现有文献，而第2.2节则介绍为本文所需的一般理论的适当修订及相关示例。第3章聚焦于 $\widetilde{\ }(M)$ 的构造、其 Kan 性质（即定理 A）以及几何上的补充内容。第4章是第3章的算子理论类比。在该章中，我们构造 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_\bullet(M)$，证明它是一个 Kan 集，并证明它是实 K-理论的一个模型。特别地，定理B是第4.9节的主要结果。在第5章中，我们证明 $\widetilde{\ }$指标差经由 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 分解，即定理 C。作为应用，我们 $\widetilde{\ }$ 更深入地讨论本文和立方集合 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 与正标量曲率度量领域既有工作的关系。特别是，我们通过定理 D 的证明给出了反例，反驳了“共边蕴含同痕”猜想。最后，在第6章中，我们构造正标量曲率 Hatcher 谱序列，由此证明定理 E。为使本文内容自足，我们在附录中详细讨论索伯列夫空间和伪微分算子。本文末尾列出了多个章节中使用的符号。

第2章

立方集合论

立方集合论是组合拓扑中的基础工具，我们用它来$\widetilde{\text{构造}}$本文的主要对象——共边集 $\mathcal{R}^{+}_{\bullet}(M)$，见第3$\widetilde{\text{章}}^{\times}$；以及算子协调集 $\Psi\mathbf{Dir}_{\bullet}(M)$，见第4章。这些 $\mathbf{Riem}^{+}(M)$ 和 $KO^{-(\dim M+1)}$ 的“近似空间”无法用闭式表达，而需要构造；立方集合正是我们选择的工具。虽然单纯集合更为流行，但立方集合更适合我们的几何设定，这也是我们采用它们的原因。

我们将在第2.1 节阐述本文所需的立方集合基础。主要结果是定理2.1.32。粗略地说，该定理指出，拓扑空间范畴与立方集合范畴所承载的信息相同，且这些信息在同伦下保持不变。换句话说，如果研究的是同伦理论问题，那么原则上可以在这两个范畴中同样顺利地开展工作[1]。

在第2.2节中，我们将介绍一些概念性示例，并在本文后续部分加以应用。

2.1 立方集合的基础

本节的阐述主要参考了 Rosa Antolini [Ant00]和 John Jardine [Jar02], [Jar的文章。不同作者对立方集合采用了不同的约定。本文所使用的立方集合没有联络。我们努力汇集了所需的全部内容，因为关于立方集合的文献相当分散，而且与单纯集合不同，目前没有标准参考文献。尽管 Kan [Kan55] 的原始文章包含了此处介绍的大部分结果，但大多数定理都没有给出证明。本节并不声称有任何原创性；我们的贡献仅在于用统一的记号整理所有内容，并在需要时给出证明概要，或提示单纯集合论中的类似命题，以便直接修改其证明。

在本节中，我们采用约定 $I=[-1,1]$ 和 $\mathbb{Z}_2=\{\pm 1\}$。

[1]在实践中，哪种范畴更方便取决于具体问题。在本文中，使用立方集范畴会更方便。

定义 2.1.1. 盒范畴 $\square$是这样一个范畴，其对象为所有$n \in \mathbb{N}_0$ 的 I^n ，其态射由以下态射生成：

- 态射 δ_i^ε: $I^{n-1} \hookrightarrow I^n$ 将 ε 插入元组的第 i 个位置。这里，$(i,\ \varepsilon)$ 遍历 $\{1,\dots,n\} \times \mathbb{Z}_2$。
- 态射 p_i: $I^n \to I^{n-1}$ 将第 i 个分量投影掉。这里，i 在 $n>1$ 时遍历 $\{1,\dots,n\}$。若 $n=1$，则 p_1: $I^1 \to I^0 = \{0\}$ 是零映射。

几何直观是，δ_i^ε 将 I^{n-1} 与 I^n 的面 $\{x_i = \varepsilon\}$ 对应起来，而p_i沿着 x_i 轴将 n 维立方体投影到（$n-1$）维立方体。所有 δ_i^ε 都是仿射映射 δ_i^ε: $\mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ 的限制，所有 p_i 都是线性映射的限制。我们也将这些映射在其他子集上的限制记作 δ_i^ε和 p_i。更一般地，我们将 $s \in \mathbb{R}$ 插入第 i 个位置记作 δ_i^s。

组合计算得出下面的引理。

引理 2.1.2。 映射 δ_i^ε 和 p_i 满足余立方恒等式

$$\begin{aligned}
\delta_j^\omega \delta_i^\varepsilon &= \delta_i^\varepsilon \delta_{j-1}^\omega, && \text{if } i<j,\\
p_j p_i &= p_i p_{j+1}, && \text{if } i \le j,\\
p_j \delta_i^\varepsilon &= \begin{cases} \delta_i^\varepsilon p_{j-1}, & \text{if } i<j,\\ \mathrm{id}, & \text{if } i=j,\\ \delta_{i-1}^\varepsilon p_j, & \text{if } i>j. \end{cases}
\end{aligned}$$

这些恒等式的一个重要推论是对盒范畴中态射的如下刻画。

引理 2.1.3。 对于每个态射 $\varphi \in \mathrm{Hom}_\square(I^n, I^m)$ ，存在一个 $r \in \mathbb{N}_0$、自然数 $n \ge j_1 \ge \cdots \ge j_{n-r}$，以及若干对$(i_1,\varepsilon_{i_1}),\dots,(i_{m-r},\varepsilon_{m-r})$，使得 $i_1 \le i_2 \cdots \le i_{m-r}$

$$\varphi = \delta_{i_{m-r}}^{\varepsilon_{i_{m-r}}} \circ \cdots \circ \delta_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} \circ p_{j_1} \circ \cdots \circ p_{j_{n-r}}.$$

定义 2.1.4。 立方集合 $X_\bullet$ 是一个反变函子 X: $\square \to$ **集合**。一个立方映射 $f_\bullet$: $X_\bullet \to Y_\bullet$ 是反变函子 $X_\bullet$ 和 $Y_\bullet$之间的自然变换。

换言之，定义2.1.4 表述如下。

定义 2.1.5. 立方集合 $X_\bullet$ 是一个集合序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ，并配有连接映射 $\partial_i^\varepsilon := X(\delta_i^\varepsilon)$: $X_n \to X_{n-1}$，对所有满足$n \ge 1$的 $(i,\varepsilon) \in \{1,\dots,n\} \times \mathbb{Z}_2$ 均成立，以及 $\sigma_i := X(p_i)$: $X_n \to X_{n+1}$，对所有满足 $n \ge 0$的 $i \in \{1,\dots,n+1\}$ 均成立，并且满足立方恒等式

$$\begin{aligned}
\partial_i^\varepsilon \partial_j^\omega &= \partial_{j-1}^\omega \partial_i^\varepsilon, && \text{if } i<j,\\
\sigma_i \sigma_j &= \sigma_{j+1} \sigma_i, && \text{if } i \le j,\\
\partial_i^\varepsilon \sigma_j &= \begin{cases} \sigma_{j-1} \partial_i^\varepsilon, & \text{if } i<j,\\ \mathrm{id}, & \text{if } i=j,\\ \sigma_j \partial_{i-1}^\varepsilon, & \text{if } i>j. \end{cases}
\end{aligned}$$

立方映射 $f_\bullet\colon X_\bullet \to Y_\bullet$ 是一个映射序列 $f_n\colon X_n \to Y_n$，对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 均成立，并且与所有连接映射交换。

我们将 X_n 的一个元素称为 $X_\bullet$ 的 n-立方体，有时也将 X_n 称为（$X_\bullet$ 的）所有 n-立方体组成的集合。所有立方集合及其立方映射构成一个范畴，我们将其记作**cSet**。

例 2.1.6。设 X 是一个拓扑空间。奇异集 $S_\bullet(X)$ 是由以下元素构成的立方集合：

$$S_n(X) \coloneqq \{s\colon I^n \to X \text{ continuous }\}$$

其连接映射为

$$\partial_i^\varepsilon s = s \circ \delta_i^\varepsilon \qquad \text{and} \qquad \sigma_i s = s \circ p_i.$$

换言之，连接映射是通过将奇异立方体与盒范畴中的一个态射作复合而给出的。

连续映射 $f\colon X \to Y$ 通过与奇异立方体作后复合，诱导出一个立方集合的映射。这样，奇异集就是一个函子 $S_\bullet\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{cSet}$。

例 2.1.7。设 $X_\bullet$ 是一个立方集合，且 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 是 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的一个子集序列，连接映射限制在这些子集上。这些限制使该子集序列成为一个立方集合 $A_\bullet$，且逐层包含映射是一个立方映射。我们称 $A_\bullet$ 为 $X_\bullet$ 的立方子集。例如，若 $Y \subseteq X$ 是一个拓扑子空间，则 $S_\bullet(Y)$ 是 $S_\bullet(X)$ 的立方子集。

设 $f_\bullet\colon X_\bullet \to Y_\bullet$ 是一个立方映射，且 $A_\bullet \subseteq X_\bullet$ 和 $B_\bullet \subseteq Y_\bullet$ 是立方子集。原像 $f_\bullet^{-1}(B_\bullet)$ 和像 $f_\bullet(A_\bullet)$ 分别是 $X_\bullet$ 和 $Y_\bullet$ 的立方子集。此外，立方子集的交集是立方子集，立方子集的并集也是立方子集。

在这篇论文中，我们以立方集合为蓝图，通过将立方体粘合在一起来构造拓扑空间。这种理解引出了一个问题：如何以这种方式对标准立方体建模。

例 2.1.8。该（立方）n-立方体 $\square[n]_\bullet$ 是由如下函子给出的立方集合：该函子将对象 I^m 映为 $\mathrm{Hom}_\square(I^m, I^n)$，并将态射 $\varphi\colon I^k \to I^m$ 映为其前复合 $\varphi^*\colon \mathrm{Hom}_\square(I^m, I^n) \to \mathrm{Hom}_\square(I^k, I^n)$。我们通常简写为 $*$，表示$\square[0]_\bullet$。$\square$中的态射 $\psi\colon I^n \to I^r$ 通过后复合诱导出立方映射 $\psi_*\colon \square[n]_\bullet \to \square[r]_\bullet$。由此，$\square[-]_\bullet\colon \square \to \mathbf{cSet}$ 是一个协变函子。

立方体立方可以视为立方集合的构造基元。下一个引理是米田引理的直接应用，它将这一说法表述得更加精确。

引理 2.1.9. 在 I^n 处的求值是一个自然双射

$$\mathrm{ev}_{I^n}\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{cSet}}(\square[n]_\bullet, X_\bullet) \to X_n$$

对于每个立方集合 $X_\bullet$。

示例 2.1.10。立方集合的基点 x_0 X_0 是一个立方映射 $x_0\colon\ \square[0]_\bullet \to X_\bullet$。利用引理 2.1.9，我们可以将该立方映射与其像 $x_0 \in X_0$等同。该映射的像是立方子集 $\{x_0\}_\bullet$，由 $\{x_0\}_n = \{\sigma_{n-1}\dots\sigma_1 x_0\}$给出。

为便于阅读，如果 x_0 充当基点，我们将 $\sigma_{n-1}\dots\sigma_0 x_0$ 再记作 x_0。

例 2.1.11。对于 $(i,\varepsilon) \in \{1,\dots,n\}\times\mathbb{Z}_2$，立方 n角 $\sqcap^n_{(i,\varepsilon)}$ 是 $\square[n]_\bullet$ 的立方子集，由下式给出：

$$\sqcap^n_{(i,\varepsilon)} \coloneqq \bigcup\Big\{\delta^\omega_j(\square[n-1]_\bullet)\ :\ (j,\omega)\in\{1,\dots,n\}\times\mathbb{Z}_2\setminus\{(i,\varepsilon)\}\Big\}.$$

它是 的边界的组合模型， I^n 去掉开面 $\delta^\varepsilon_i(I^{n-1})^\circ$后所得。根据引理 2.1.9，每个立方映射 $f_\bullet\colon\ \sqcap^n_{(i,\varepsilon)} \to X_\bullet$ 都唯一确定一组元素

$$\{x_{(j,\omega)}\in X_{n-1}\ :\ \partial^\omega_j x_{(k,\eta)} = \partial^\eta_{k-1}x_{(j,\omega)} \text{ for } j<k,\ (j,\omega),(k,\eta)\neq(i,\varepsilon)\},$$

其中 (j,ω) 遍历 $\{1,\dots,n\}\times\mathbb{Z}_2\setminus\{(i,\varepsilon)\}$。反过来，这类集合中的每一个都唯一确定一个立方映射 $f_\bullet\colon\ \sqcap^n_{(i,\varepsilon)}\to X_\bullet$。

例 2.1.12. $\partial\square[n]_\bullet$ 是由下式给出的立方集合：立方球面

$$\partial\square[n]_\bullet \coloneqq \bigcup\Big\{\delta^\omega_j(\square[n-1]_\bullet)\ :\ (j,\omega)\in\{1,\dots,n\}\times\mathbb{Z}_2\Big\}.$$

它是边界 $\partial I^n = S^{n-1}$ 的组合模型。根据引理 2.1.9，每个立方映射 $f_\bullet\colon\ \partial\square[n]_\bullet\to X_\bullet$ 都唯一确定一组元素

$$\{x_{(j,\omega)}\in X_{n-1}\ :\ \partial^\omega_j x_{(k,\eta)} = \partial^\eta_{k-1}x_{(j,\omega)} \text{ for } j<k\},$$

其中 (j,ω) 遍历 $\{1,\dots,n\}\times\mathbb{Z}_2$。反过来，每个这样的元素集合都唯一确定一个立方映射 $f_\bullet\colon\ \partial\square[n]_\bullet\to X_\bullet$。

如果我们把立方集合看作构造拓扑空间的蓝图，那么最终就希望由它构造出这个拓扑空间。这正是几何实现函子的作用。

定义 2.1.13. 设 $X_\bullet$ 为一个立方集合。为每个集合 X_n 赋予离散拓扑。其几何实现 是通过在集合上赋予.....而得到的拓扑空间

$$|X_\bullet| = \left(\bigsqcup_{n=0} I^n\times X_n\right)\Big/\sim$$

赋予商拓扑。这里，$\sim$是由 $(\varphi(v)\ x)\sim(v,\ X(\varphi)(x))$ 对所有 $v\in I^m$、$x\in X_n$ 以及 $\varphi\in\mathrm{Hom}_\square(I^m,\ I^n)$ 生成的等价关系。

立方映射 $f_\bullet\colon\ X_\bullet\to Y_\bullet$ 的几何实现是连续映射$|f_\bullet|\colon\ |X_\bullet|\to|Y_\bullet|$，它由连续映射序列 $\mathrm{id}\ \times f_n\colon\ I^n\times X_n\to I^n\times Y_n$ 诱导。

以下引理的证明见 [Jar06，第89]页。

引理 2.1.14。几何实现是一个函子 $|\text{-}|\colon \mathbf{cSet} \to \mathbf{Top}$。它是奇异集函子的左伴随算子

$$|\text{-}|\colon \mathbf{cSet} \rightleftarrows \mathbf{Top} : S_\bullet.$$

例 2.1.15。正如预期的那样，我们有 $|\square[n]_\bullet| = I^n$ 和 $\partial|\sqcap^n_{(i,\varepsilon)}| = I^n \setminus \delta^\varepsilon_i(I^{n-1})^\circ$。然而，只有少数连续映射 $I^n \to I^m$ 是立方映射 $\square[n]_\bullet \to \square[m]_\bullet$的几何实现，即盒范畴中的态射。

现在我们来讨论立方集合的积。两个立方集合 $X_\bullet$ 和 $Y_\bullet$ 的（范畴）积是立方集合 $(X \times Y)_\bullet$，其 n-立方体集合定义为

$$(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$$

其连接映射逐分量应用。与单纯集合不同，范畴积与几何实现不交换。事实上，Jardine 在 [Jar02] 中证明了 $|\square[1]_\bullet \times \square[1]_\bullet| \simeq S^1$ 而非 $I^1 \times I^1$。这就是 Kan 在 [Kan55] 中引入另一种积以符合几何预期的原因。

定义 2.1.16。设 $X_\bullet$ 和 $Y_\bullet$ 为立方集合。定义约化积$(X \otimes Y)_\bullet$为这样一个立方集合：其 n-立方体的集合为以下等价关系生成的等价类集合

$$(X \otimes Y)_\bullet = \bigcup_{k=0}^{n} X_k \times Y_{n-k} \Big/ \sim,$$

：对所有 $x \in X_k$、$y \in Y_{n-k}$和 $0 \le k \le n$，都有 $(\sigma_{k+1}x, y) \sim (x, \sigma_1 y)$。连接映射定义为

$$\partial^\varepsilon_i(x,y) = \begin{cases} (\partial^\varepsilon_i x, y), & \text{if } i \le k, \\ (x, \partial^\varepsilon_{i-k} y), & \text{if } i > k, \end{cases} \quad \text{and} \quad \sigma_i(x,y) = \begin{cases} (\sigma_i x, y), & \text{if } i \le k, \\ (x, \sigma_{i-k} y), & \text{if } i > k. \end{cases}$$

例 2.1.17。正如预期，立方集合 $(\square[m] \otimes \square[n])_\bullet$ 和 $\square[m+n]_\bullet$ 同构。一个同构由唯一的立方映射给出，该映射将元素 $\mathrm{id}_{I^{m+n}} \in \square[m+n]_\bullet$ 映到等价类 $(\mathrm{id}_{I^m}, \mathrm{id}_{I^n})$。其逆映射是由以下映射诱导的立方映射

$$\begin{aligned} \square[m]_k \times \square[n]_l &\to \square[m+n]_{k+l}, \\ (\varphi, \psi) &\mapsto (\varphi \circ p_{k+1} \circ \cdots \circ p_{k+l}, \psi \circ p_1^{\circ k}). \end{aligned}$$

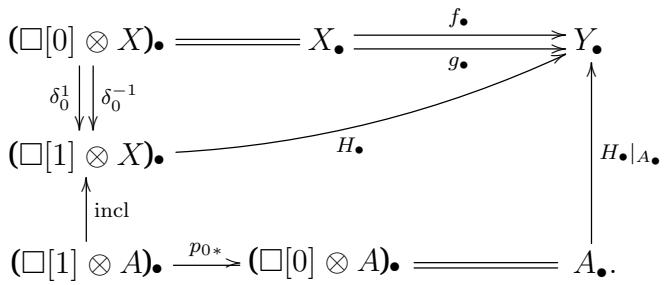
要验证这两个映射确实互为逆映射，只需验证它们将 $\mathrm{id}_{I^{m+n}}$ 和 $(\mathrm{id}_{I^m}, \mathrm{id}_{I^n})$ 相互映射即可，因为这些立方集合中的所有其他元素都可以通过复合连接映射，从 $\mathrm{id}_{I^{m+n}}$ 或 $(\mathrm{id}_{I^m}, \mathrm{id}_{I^n})$ 得到。

引理 2.1.18. 对于所有立方集合 $X_\bullet, Y_\bullet$，几何实现 $|(X \otimes Y)_\bullet|$ 与 $|X_\bullet| \times |Y_\bullet|$ 同胚，前提是后者赋予 *CW* 拓扑。

证明. 关于证明，请参阅 Jardine [Jar06，第92], 他以不同但等价的方式引入了 $\otimes$。 □

我们可以用约化积以组合方式刻画同伦。

定义 2.1.19。设 $f_\bullet, g_\bullet\colon X_\bullet \to Y_\bullet$ 是两个立方映射，且 $A_\bullet \subseteq X_\bullet$ 是一个立方子集。在 $A_\bullet$ 上静止的 $f_\bullet$ 与 $g_\bullet$ 之间的同伦是一个立方映射 $H_\bullet\colon (\square[1]\otimes X)_\bullet \to Y_\bullet$，使得下图交换：



映射 $f_\bullet$ 和 $g_\bullet$ 称为相对于 $A_\bullet$同伦，若存在一个连接它们的同伦，并且该同伦在 $A_\bullet$ 上是静止的。

前述定义中的图表实际上是由两个图表组合而成。上方的三角形描述两个给定立方映射之间的同伦，下方的正方形则描述静止的含义。

根据引理 2.1.9，我们可以说，两个元素 x_{-1}，$x_1 \in X_n$ 同伦，当且仅当它们的表示映射 $f_{x_i}\colon \square[n]_\bullet \to X_\bullet$ 在 $\partial\square[n]_\bullet$ 上相同，且相对于 $\partial\square[n]_\bullet$同伦。

对于具体计算，下面这种用元素表述的等价描述更为方便。

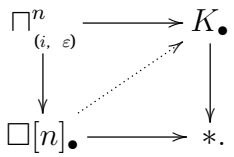
定义 2.1.20. 两个元素 x_{-1}，$x_1 \in X_n$ 若满足以下条件，则称为同伦的：$\partial_i^\varepsilon x_{-1} = \partial_i^\varepsilon x_1$ 对所有 $(i,\ \varepsilon) \in \{1,\dots,n\}\times\mathbb{Z}_2$，并且存在一个满足以下条件的 $h \in X_{n+1}$

$$\partial_1^{\pm 1} h = x_{\pm 1} \qquad \text{and} \qquad \partial_i^\varepsilon h = \sigma_1 \partial_{i-1}^\varepsilon x_{\pm 1}.$$

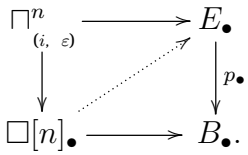
我们称这样的元素 h 为 x_{-1} 和 x_1之间的同伦。

一般而言，同伦性并不是 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{cSet}}(X_\bullet,\ Y_\bullet)$ 上的等价关系。不过，如果目标满足 Kan 在 [Kan55]提出的扩张条件，那么它就是等价关系。

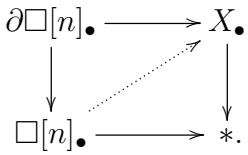
定义 2.1.21。立方集合 $K_\bullet$ 是一个*Kan* 集，或者说满足*Kan* 延拓性质，如果每个交换外方块都有一个虚线填充子



更一般地，立方映射 $p_\bullet\colon E_\bullet \to B_\bullet$ 是一个*Kan*纤维化，如果每个交换外方块都有一个虚线填充子



立方集合 $X_\bullet$ 是组合可缩的，当且仅当每个交换外方块都有一个虚线填充子。



“组合可缩”这一名称源于命题 2.1.33。根据米田引理（另见例 2.1.11 和例 2.1.8），我们可以逐元素描述 Kan 集和 Kan 纤维化。

引理 2.1.22. 立方集合 $K_\bullet$ 是 *Kan* 集，当且仅当对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个集合

$$\big\{x_{(j,\omega)} \in K_{n-1} \,:\, \partial^\omega_j x_{(k,\eta)} = \partial^\eta_{k-1} x_{(j,\omega)} \text{ for } j<k; (j,\omega),(k,\eta) \neq (i,\varepsilon)\big\},$$

存在一个元素 $x \in K_n$ 使得 $\partial^\omega_j x = x_{(j,\omega)}$。这里，$(j,\omega)$ 遍历$\{1,\dots,n\} \times \mathbb{Z}_2 \setminus \{(i,\varepsilon)\}$。

更一般地，映射 $p_\bullet\colon E_\bullet \to B_\bullet$ 是 Kan纤维化 当且仅当，对于每个集合

$$\big\{e_{(j,\omega)} \in E_{n-1} \,:\, \partial^\omega_j e_{(k,\eta)} = \partial^\eta_{k-1} e_{(j,\omega)} \text{ for } j<k; (j,\omega),(k,\eta) \neq (i,\varepsilon)\big\}$$

以及每个满足 $p_{n-1}(e_{(j,\omega)}) = \partial^\omega_j b$的 $b \in B_n$，都存在一个 $e \in E_n$ 满足 $\partial^\omega_j e = e_{(j,\omega)}$和 $p_n(e) = b$。同样，(j,ω) 遍历 $\{1,\dots,n\} \times \mathbb{Z}_2 \setminus \{(i,\varepsilon)\}$。

立方集合 $X_\bullet$ 是组合可缩的，当且仅当对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个集合

$$\big\{x_{(j,\omega)} \in X_{n-1} \,:\, \partial^\omega_j x_{(k,\eta)} = \partial^\eta_{k-1} x_{(j,\omega)} \text{ for } j<k\big\},$$

存在一个元素 $x \in X_n$ 使得 $\partial^\omega_j x = x_{(j,\omega)}$。此处，$(j,\omega)$ 遍历$\{1,\dots,n\} \times \mathbb{Z}_2$。

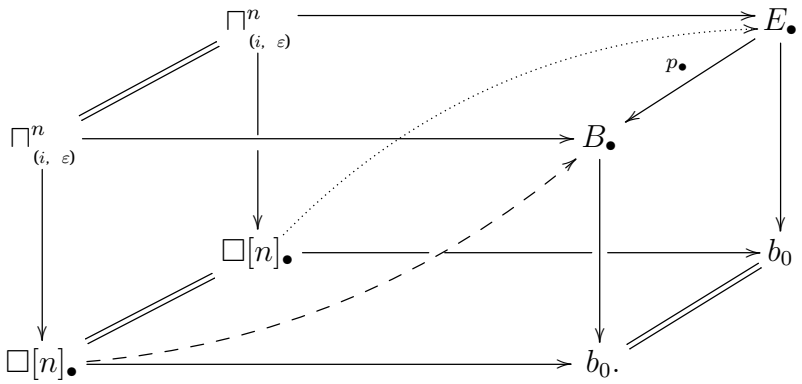
还有一些进一步的形式推论，可以用类似于其单纯对应物的方法证明。

引理 2.1.23. 设 $p_\bullet\colon E_\bullet \to B_\bullet$ 是一个 *Kan*纤维化，并设 b_0 是$B_\bullet$的一个基点。

(i) 如果底 $B_\bullet$ 是 *Kan* 集，那么总集合 $E_\bullet$ 是 *Kan* 集。

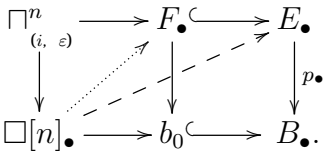
(ii) The fibre $F_\bullet \coloneqq p_\bullet^{-1}(\{b_0\})$ *is a Kan set.*

证明。 为了证明第一个断言，我们考虑如下交换图



虚线箭头之所以存在，是因为 $B_\bullet$ 是 Kan。由于 $p_\bullet$ 是 Kan纤维化，我们可以提升这条虚线箭头，从而得到点线箭头。

第二个断言的证明体现在图表中



虚线箭头存在，是因为 $p_\bullet$ 是 Kan纤维化。根据构造，它的取值落在纤维中，因此点线箭头存在。 □

例 2.1.24。 拓扑空间 X 的奇异集 $S_\bullet(X)$是一个 Kan 集。事实上，每个奇异立方 n-角 $f_\bullet\colon \sqcap^n_{(i,\varepsilon)} \to S_\bullet(X)$都会给出一个连续映射$f\colon |\sqcap^n_{(i,\varepsilon)}| \to X$。显然，$|\sqcap^n_{(i,\varepsilon)}| = \partial I^n \setminus (\delta^\varepsilon_i(I^{n-1}))^\circ$ 是 I^n的形变收缩。若$r\colon I^n \to |\sqcap^n_{(i,\varepsilon)}|$ 是一个收缩，那么 $f \circ r \in S_n(X)$就是给定奇异n-角 $f_\bullet$的延拓。

用类似的论证可以证明，如果 $p\colon E \to B$ 是塞尔纤维化，那么 $S_\bullet(p)\colon S_\bullet(E) \to S_\bullet(B)$是 Kan纤维化。

引理 2.1.25. 对于所有 *Kan* 集 $K_\bullet$ 和所有立方集合 $X_\bullet$，同伦是 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{cSet}}(X_\bullet, K_\bullet)$ 上的等价关系。

证明. 证明类似于 [Cur71, 引理1.15ff]中略述的单纯对应物的证明。

□

我们将立方集合的第 n 个同伦群定义为其几何实现的第 n 个同伦群。不过，如果该立方集合是 Kan 集，那么同伦群有一种纯粹的组合描述。以下记号取自 [Ant00]。

定义 2.1.26。 设 k_0 是 Kan 集 $K_\bullet$ 的一个基点。回顾一下，我们约定将 $\sigma_{n-1}\dots\sigma_0 k_0 \in K_n$ 简写为 k_0。对于 $n \geq 1$，定义 n 重环路集合如下：

$$\Omega^n_{k_0} K_\bullet \coloneqq \left\{k \in K_n \,:\, \partial^\varepsilon_i k = k_0 \in K_{n-1} \text{ for all } (i,\varepsilon) \in \{1,\dots,n\} \times \mathbb{Z}_2\right\}.$$

Kan 集合对也有相应的版本，参见 [Ant00]。

定义 2.1.27。 对于每个立方集合 $X_\bullet$，定义 $\pi_0(X_\bullet)$ 为所有（组合）路径分支的集合

$$\pi_0(X_\bullet) \coloneqq X_0/\sim_{\text{homotopy}}.$$

若 $K_\bullet$ 是一个以 k_0 为基点的 Kan 集，则通过下式定义高阶（组合）同伦群 $\pi_n(K_\bullet, k_0)$：

$$\pi_n(K_\bullet, k_0) \coloneqq \Omega^n_{k_0}(K_\bullet)/\sim_{\text{homotopy}},$$

其中 $\sim_{\text{homotopy}}$ 表示定义 中的逐元素同伦关系。

对于所有 $n > 0$，我们可以利用 Kan 条件在 $\pi_n(K_\bullet)$ 上赋予纯组合群结构。对于给定的两个元素 $[a], [b] \in \pi_n(K_\bullet, k_0)$，我们分别选取代表元 $a, b \in \Omega^n_{k_0} K_\bullet$。这两个元素与 $k_{(1,-1)} = a$、$k_{(2,1)} = b$ 以及所有其他 $(j,\omega) \in \{1,\dots,n+1\} \times \mathbb{Z}_2 \setminus (1,1)$ 的 $k_{(j,\omega)} = k_0$ 一起构成一个 $\sqcap^{n+1}_{(1,1)}$-角。根据 Kan 延拓性质，这个立方角有一个填充子 $x \in K_{n+1}$，而立方恒等式推出 $\partial^1_1 x \in \Omega^n_{k_0} K_\bullet$。我们定义 $[a] + [b] \coloneqq [\partial^1_1 x]$。

引理 2.1.28. [Kan55，定理 7] 此运算与所有选择无关，并使 $\pi_n(K_\bullet, k_0)$ 对所有 $n \geq 1$ 都成为一个群。

此外，还有相对同伦群和连接映射 $\partial_n\colon \pi_n(K_\bullet, L_\bullet) \to \pi_{n-1}(L_\bullet)$，它们构成一个长正合列，详情参见 [Ant00]。此外，在同一道路连通分支内选择不同的基点会得到同构的群，参见 [Kan55，定理 8]（不过这些同构并非典范的）。

将 [Cur71]的定理 2 的直接（但繁琐的）证明改写到立方集合的情形，我们得到以下纤维化结果。

引理 2.1.29. 设 $E_\bullet \to B_\bullet$ 是一个 *Kan*纤维化，b_0 是 *Kan* 集 $B_\bullet$ 的一个基点，并设 $F_\bullet = p_\bullet^{-1}(b_0)$ 为其纤维。那么，对于所有 $n \geq 1$，都有基点集之间的映射 $\partial_n\colon \pi_n(E_\bullet) \to \pi_{n-1}(F_\bullet)$；当 $n \geq 2$ 时，这些映射是群同态，并且它们构成一个同伦群长正合列

$$\cdots \longrightarrow \pi_n(F_\bullet) \longrightarrow \pi_n(E_\bullet) \longrightarrow \pi_n(B_\bullet) \longrightarrow \pi_{n-1}(F_\bullet) \longrightarrow \cdots.$$

最后，我们想了解立方集合是否包含与拓扑空间相同的同伦信息。

定理 2.1.30. [Ant00，定理 2.9] 设 $K_\bullet$ 是一个 *Kan* 集。引理*2.1.14*中伴随的单位，

$$\psi_\bullet \colon K_\bullet \to S_\bullet(|K_\bullet|) \quad given\ by \quad k \mapsto \big(x \mapsto [x,k]\big),$$

在所有同伦群上诱导同构。

虽然证明同伦群 $\pi_n(S_\bullet(X))$ 与 $\pi_n(X)$同构并不难，但定理本身相当深刻。例如，它意味着每个在边界上为常值的立方映射 $\square[n]_\bullet \to S_\bullet(|K_\bullet|)$ 都与一个立方映射在其边界上相对同伦 $\square[n]_\bullet \to K_\bullet$。在 [Ant00], 中并未证明该定理。相反，原文通过类比引用了 May 的著作 [May92]。我们也不会详细证明这个定理，而是引导读者查阅现有文献，这些文献可作为蓝图，帮助按照 Milnor 的策略证明该定理 [Mil57]。

证明。 我们先证明 $K_\bullet$ 与 $S_\bullet(|K_\bullet|)$ 具有相同的同调群。若采用 [Mil57 的引理 5] ，那么只需按照 [DFN90] 中的思路定义立方集合的同调群，其证明便可原样沿用。

下一步是证明 $K_\bullet$ 和 $S_\bullet(|K_\bullet|)$ 的基本群同构。按照 [Mil57], ，首先注意到，每个立方 Kan 集 $K_\bullet$ 都有一个极小子复形 $M_\bullet$；根据定义，它是满足 Kan 延拓性质的立方子集，也就是说，它是 $K_\bullet$的（组合）强形变收缩，并且其中每个元素 $x \in M_n$ 对于所有 $n \in \mathbb{N}$都是其同伦类[2]的唯一代表元。存在性证明可以例如沿着 [Cur71, Prop 1.23]的思路进行。由极小性可知， $M_\bullet$ 在每个道路连通分支中仅包含一个顶点，因此其几何实现 $|M_\bullet|$ 是一个每个道路连通分支只有一个零胞腔的 CW 复形。这样的 CW 复形的基本群每条边对应一个生成元，每个粘附映射对应一个关系。而 $\pi_1(M_\bullet)$ 的组合群结构只是对这些关系的重新表述，因此单位映射诱导出同构 $\pi_1(M_\bullet) \to \pi_1(S_\bullet(|M_\bullet|)) = \pi_1(|M_\bullet|)$，因为它将组合基本群的每个元素映到一条边。

由于单位 $\psi_\bullet$ 关于立方映射具有自然性，且包含映射 $M_\bullet \hookrightarrow K_\bullet$ 是同伦等价，因此 $K_\bullet$ 的单位在基本群上诱导出一个同构，这可由交换图得出

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(K_\bullet) & \xrightarrow{\pi_1(\psi_\bullet)} & \pi_1(S_\bullet(|K_\bullet|)) \\ {\scriptstyle \pi_1(\mathrm{incl}_\bullet)}\uparrow\cong & & \cong\uparrow{\scriptstyle \pi_1(S_\bullet(|\mathrm{incl}_\bullet|))} \\ \pi_1(M_\bullet) & \xrightarrow[\pi_1(\psi_\bullet)]{\cong} & \pi_1(S_\bullet(|M_\bullet|)). \end{array}$$

我们通过在立方集范畴中对这一对万有覆盖 $(S_\bullet(|K_\bullet|) \to K_\bullet)$ 应用相对 Hurewicz 定理，证明单位映射在高阶同伦群上诱导同构，并由此说明所有相对同伦群都消失。注意，这一对立方集合的同调也通过类似于

[2]定义意义下的同伦类2.1.27

单纯集的单纯同调与奇异同调相同的论证[3] 而消失，参见[Hat02，第2章。1]。

立方集合的相对 Hurewicz 定理可按如下方式证明。首先，按照 [Cur71定理 24]，建立同伦加法定理的立方版本，并利用它证明立方集合的绝对 Hurewicz 定理，如 [Cur71定理 312]所述。随后，通过修改 [SZ94]中的相对 Hurewicz 定理证明，可推导出相对 Hurewicz 定理。 □

本章的主定理是立方扩张定理，该定理证明见 [Ant00]。其证明的关键要素是定理2.1.30。

定理 2.1.31 （立方逼近定理）。 [Ant00，定理 2。11]设 $(X_\bullet,\ A_\bullet)$ 是一对立方集合，且 $K_\bullet$ 是一个 *Kan* 集。对于每个连续映射 $g\colon\ |X_\bullet| \to |K_\bullet|$，若其在 $|A_\bullet|$ 上的限制是立方映射 $f_\bullet\colon\ A_\bullet \to K_\bullet$的几何实现，则存在一个立方映射 $F_\bullet\colon X_\bullet \to K_\bullet$，使得 $F_\bullet|_{A_\bullet} = f_\bullet$ 并且$|F_\bullet|$ 与 g 相对于 $|A_\bullet|$同伦。

这一（相对）同伦延拓定理的一个直接推论是，立方集合与 CW 复形的（朴素）同伦范畴是同构的。换句话说，如果我们只关心同伦论问题，那么在哪个范畴中工作并不重要。

定理 2.1.32。

1. 对所有 *CW* 复形 X，拓扑空间与立方集合之间伴随的余单位

$$\phi\colon |S_\bullet X| \to X, \quad given\ by \quad [t,\sigma] \mapsto \sigma(t),$$

是一个同伦等价。

2. 若 $K_\bullet$ 是一个 *Kan* 集，且 $X_\bullet$ 是任意立方集合，则几何实现会在映射的同伦类之间诱导一个双射

$$|-|\colon [X_\bullet; K_\bullet] \to [|X_\bullet|; |K_\bullet|].$$

3. 奇异集函子会在映射的同伦类之间诱导一个双射

$$S_\bullet\colon [X,Y] \to [S_\bullet(X), S_\bullet(Y)]$$

对于所有 *CW* 复形。

证明。 要证明第一个断言，注意根据定义，当且仅当 $S_\bullet(\phi)\colon\ S_\bullet(|S_\bullet X|) \to S_\bullet X$ 在所有（组合）同伦群上诱导同构时，余单位 ϕ 才是弱同伦等价。由分解

$$S_\bullet X \xrightarrow{\psi_\bullet} S_\bullet(|S_\bullet X|) \xrightarrow{S_\bullet\phi} S_\bullet X, \qquad \mathrm{id}$$

[3]Hatcher 将其称为 Δ-集或半单纯复形。然而，它们不过是单纯集的几何实现。

我们推得， $S_\bullet(\phi)$ 在所有（组合）同伦群上都诱导出同构，因为 $\psi_\bullet$ 和恒等函数具有这一性质。根据怀特海德定理， ϕ是一个同伦等价。

第二个断言直接由立方逼近定理得出：为证明满射性，我们将其应用于给定的连续映射 $g\colon |X_\bullet| \to |Y_\bullet|$。为证明单射性，我们将立方逼近定理应用于一个将 $|f_\bullet|$ 与 $|g_\bullet|$ 联系起来的同伦 H，从而将 H 相对于 $|X_\bullet| \times \partial I = |(X \otimes \partial\square[1])$ 变形为一个立方同伦 $|H_\bullet|_\bullet|$。

第三个断言由第一个断言通过伴随得出

$$[X,Y] \xrightarrow{S_\bullet} [S_\bullet X, S_\bullet Y] \xrightarrow[\cong]{\mathrm{Ad}} [|S_\bullet X|, Y]. \qquad -\circ\phi$$

由于 ϕ 是一个同伦等价，它在同伦类之间诱导出一个双射， $S_\bullet$ 也如此。

□

作为一个应用，我们证明组合可缩立方集合的几何实现是可缩的。

命题 2.1.33. 设 $X_\bullet$ 是组合可缩的。那么 $X_\bullet$ 是 *Kan* 集合，且其几何实现是可缩的。

证明。 给定一个立方 n-角

$$\begin{array}{ccc} \sqcap^n_{(i,\ \varepsilon)} & \xrightarrow{f} & X_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \square[n]_\bullet & \longrightarrow & *, \end{array}$$

立方映射 f 可如下延拓至 $\partial\square[n]_\bullet$：立方子集 $\sqcap^n_{(i,\varepsilon)} \cap \delta^\varepsilon_i(\square[n-1]_\bullet)$ 可识别为 $\partial\square[n-1]_\bullet$。由于 $X_\bullet$ 是组合可缩的， f 在 $\sqcap^n_{(i,\varepsilon)} \cap \delta^\varepsilon_i(\square[n-1]_\bullet)$ 上的限制可延拓为映射$f_{(i,\varepsilon)}$： $\delta^\varepsilon_i(\square[n-1]_\bullet) \to X_\bullet$。再次利用 $X_\bullet$ 是组合可缩的这一点，我们得到延拓

$$\begin{array}{ccccc} \sqcap^n_{(i,\ \varepsilon)} & \hookrightarrow & \partial\square[n]_\bullet & \xrightarrow{f\cup f_{(i,\varepsilon)}} & X_\bullet \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \square[n]_\bullet & = & \square[n]_\bullet & \longrightarrow & *, \end{array}$$

这表明 $X_\bullet$ 是 Kan。

为证明 $X_\bullet$ 可缩，我们证明所有同伦群都是平凡的。对于 π_0，这一点显然成立，因为 $n=1$ 的组合可缩定义明确指出，任意两点都可以由一条路径连接。对于高阶同伦群，设给定 $x \in \Omega^n_{x_0}(X_\bullet)$。它可以表示为一个映射 f_x: $\square[n]_\bullet \to X_\bullet$，其在 $\partial\square[n]_\bullet$ 上的限制是以 k_0 为值的常值映射。如果

我们将 $\square[n]_\bullet$ 与 $\delta_1^{-1}(\square[n]_\bullet) \subseteq \partial\square[n+1]_\bullet$ 识别，那么就可以用以 x_0 为值的常值映射，将 f_x 延拓到立方集合 $\partial\square[n+1]_\bullet$。由于 $X_\bullet$ 是组合可缩的，该延拓有一个填充子 $h\colon \square[n+1]_\bullet \to X_\bullet$。在识别 $\square[n+1]_\bullet \cong (\square[1] \otimes \square[n])_\bullet$ 下，这个填充子对应于常值映射 x_0 与 f 之间的一个同伦。因此，x 表示零元，而 $\pi_n(X, x_0)$ 因而是平凡的。

定理2.1.30及其下方的注记表明 $|X_\bullet|$ 是一个同伦群全为零的 CW 复形，因此根据怀特海德定理，它是可缩的。 □

定理2.1.32 实际上还可以进一步改进。Cisinski 在 [Cis02], 另见 Jardine [Jar06], 中证明，立方集范畴具有模型结构。弱等价是指几何实现诱导所有（拓扑）同伦群同构的立方映射。纤维化由 Kan 纤维化给出。余纤维化就是逐层单射的立方映射。几何实现与奇异集函子在 **cSet**（赋予上述模型结构）和 **Top**（赋予 Quillen 模型结构的拓扑空间范畴）之间构成 Quillen 等价。[4]

2.2 立方集合的示例

本小节将讨论一些我们在本文后文中需要用到的概念性例子。我们先构造一种不同的模型来表示拓扑空间的奇异集。

2.2.1 奇异集的块版本

定义 2.2.1。设 X 是一个拓扑空间。连续映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to X$ 若存在一个 $\rho > 0$，使得对所有 $1 \le i \le n$，映射 f 满足以下条件，则称其为块映射

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, \operatorname{sgn}(x_i)\rho, \dots, x_n)$$

若 $|x_i| \ge \rho$。

我们将块映射视为边长未知的奇异立方体 2ρ。

定义 2.2.2。对于拓扑空间 X，令 $S^{bl}_\bullet(X)$ 为一个立方集合，其 n-立方体的集合定义如下：

$$S^{bl}_n(X) \coloneqq \{f\colon \mathbb{R}^n \to X \ : \ f \text{ block map}\}$$

且其连接映射由以下给出

$$\partial^\varepsilon_i f = \lim_{R\to\infty} f \circ \delta_i^{R\varepsilon} \quad \text{and} \quad \sigma_i f = f \circ p_i.$$

存在一个由延长给出的典范包含 $\iota_\bullet\colon S_\bullet(X) \hookrightarrow S^{bl}_\bullet(X)$。

[4]简单来说：Quillen 模型结构更倾向于拓扑空间的 CW 近似，而非空间本身。

引理 2.2.3。 立方集合 $S^{bl}_{\bullet}(X)$ 是一个 *Kan* 集，且典范包含 $\iota_{\bullet}$是一个弱同伦等价。

证明。 很容易验证，包含映射是一个立方映射。

对于给定的奇异立方 n-角 $f_{\bullet}\colon \sqcap^n_{(i,\varepsilon)} \to S_{\bullet}(X)$，它由有限个块映射 $\{f_{(j,\omega)}\}_{(j,\omega)\neq(i,\varepsilon)}$ 表示，我们可以找到一个一致的 ρ，使得每个 $f_{(j,\omega)}$ 都是其在 ρI^{n-1} 上的限制的延长。相容性 $\partial^{\omega}_{j} f_{(k,\eta)} = \partial^{\eta}_{k-1} f_{(j,\omega)}$ 意味着我们可以将这些映射合并为一个连续映射 $f\colon \rho|\sqcap^n_{(i,\varepsilon)}| \to X$。取一个收缩 $r\colon \rho I^n \to \rho|\sqcap^n_{(i,\varepsilon)}|$。将 $f\circ r$ 沿法向常值延拓到每个超曲面 $\{\varepsilon x_i = \rho\}$，便可得到给定立方 n-角的填充子。因此，$S^{bl}_{\bullet}(X)$ 是一个 Kan 集。

我们将使用组合同伦群证明包含映射 $\iota_{\bullet}$ 是弱同伦等价。显然，对于 $S_0(X) = S^{bl}_0(X) = X$，该包含映射在道路连通分支的集合上诱导出一个满射映射。它是单射的，因为对于连接 x_{-1} 和 x_1 的每条块道路 $y \in S^{bl}_1(X)$，都存在一个 $\rho > 0$，使得 y 是 $y|_{\rho I}$ 的延长。于是，$y(\rho\cdot)\colon I \to X$ 是 $S_1(X)$ 中的一个元素，它连接 x_{-1} 与 x_1。

对于高阶情形，证明类似。我们先证明满射性。$\pi_n(X_{\bullet}, x_0)$中的每个元素都由一个块映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to X$ 表示，该映射将某个 ρI^n之外的每个点映到 x_0。将 $f|_{\rho I^n}(\rho\cdot -)\colon I^n \to X$ 在 ι_n 下的像简记为 $\hat{} f$。可以如下构造一个连接同伦 $h \in S^{bl}_{n+1}(X)$。取一个光滑函数 $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使其在 $\{t \le -1\}$上恒等于 1，并在 $\{t \ge 1\}$上恒等于 ρ。那么 $h(t,x) \coloneqq f(\chi(t)x)$ 是一个块映射，满足 $\partial_1^{-1} h = f, \partial_1^1(h) = \hat{} f$，且当 $j > 1$时 $\partial^{\varepsilon}_{j} h = x_0$。

我们通过将前面的论证应用于同伦来证明单射性。设 $h \in S^{bl}_{n+1}(X)$ 是一个将延长后的奇异立方体 $\iota_n(f_1)$ 和 $\iota_n(f_{-1})$ 联系起来的同伦。存在一个 $\rho > 0$，使得 h 是 $h|_{\rho I^n}$ 的延长。因此，$h(\rho\cdot -)\colon I^{n+1} \to X$ 是 $\iota_n(f_1)|_{\rho I^n}(\rho\cdot -)$ 与 $\iota_n(f_{-1})|_{\rho I^n}(\rho\cdot -)$ 之间的同伦。但是，对于所有连续映射 $f \in S_n(X)$，$\iota(f)^{\rho I^n}(\rho\cdot -)$ 都与 f 相对 ∂I^n 同伦。一个同伦的例子由 $\iota(f)|_{\rho_t I^n}(\rho_t\cdot -)$ 给出，其中 $\rho_t = t\rho + (1-t)\cdot 1$。因此，$f_1$ 和 f_{-1} 在 $\pi_n(S_{\bullet}(X))$ 中已经表示同一个元素，单射性得证。 □

如果参考空间 X 是一个光滑对象，也就是说，在我们的语境中，X 是有限维光滑流形或仿射弗雷歇空间的开子集，[5]，那么我们也可以讨论光滑块映射。映射 $\mathbb{R}^n \to X$ 到弗雷歇空间 X 中，如果它的所有偏导数都存在，则称其为光滑。我们用 $S^{bl}_{\bullet}(X)$ 表示 $\mathcal{S}^{\infty}_{\bullet}(X)$中由所有光滑块映射组成的立方子集。

引理 2.2.4。 立方集合 $\mathcal{S}^{\infty}_{\bullet}(X)$ 是 *Kan* 的，且包含映射 $\mathcal{S}^{\infty}_{\bullet}(X) \hookrightarrow S^{bl}_{\bullet}(X)$是弱同伦等价。

该引理的证明需要将 Whitney 逼近定理推广到弗雷歇空间值函数。我们采用 [Lee13中的表述，即定理 6.21 和定理 6。26]。

[5]我们遇到的所有仿射弗雷歇空间都是某个环境弗雷歇空间的闭仿射子空间，因此读者只需考虑这类空间即可。

命题 2.2.5（Whitney 逼近定理）。设 M 是一个带角的光滑流形，X 是仿射弗雷歇空间的一个开子集，配备弗雷歇度量 d，且 $f\colon\ M \to X$ 是一个连续映射。则以下两个断言成立：

1. 对于每个连续函数 $\delta\colon\ M \to \mathbb{R}_{>0}$，都存在一个光滑映射 $g\colon\ M \to X$，满足 $d(f,\ g) < \delta$。如果 f 在闭子集 $A \subset M$ 附近已经是光滑的，那么可以选择 g 使得 $f|_A = g|_A$。

2. 函数 f 与一个光滑函数 g 同伦。如果 f 在 A 附近已经是光滑的，那么可以选择 g 使其在 A 上等于 f，并且可以选择同伦使其在 A 上保持静止。

证明。Lee [Lee13] 中定理 6.21 的证明不费太大力气便可推广。不过，由于我们必须处理数量无界的不同半范数，因此需要更加仔细；这也是我们要完整详细地给出论证的原因。

回顾一下，弗雷歇空间的可数个半范数可通过以下构造导出一个度量 d：

$$d(x,y) \coloneqq \sum_{k=1} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{||x-y||_k}{1+||x-y||_k}.$$

由此可知，对于所有的 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个 $N_n \in \mathbb{N}$，使得如果

$$||x-y||_k < \frac{1}{2(n+1)} \text{ for all } k \leq N_n \Longrightarrow d(x,y) < \frac{1}{2n}.$$

注意，$d(x,\ y) < 1$，并且我们可以不失一般性地假设 $\delta < 1$，因为否则我们可以用 $\delta \cdot (1+\delta)^{-1}$ 替换 δ。对于所有的 $n \in \mathbb{N}$，我们令 $M_n \coloneqq \delta^{-1}([1/(n+1)\ 1/n))$，使得 M 是所有 M_n 的不交并。

令 V 为 A 的一个开邻域，在该邻域上 f 已经光滑，并令 $V_n \coloneqq \{x \in V\colon\ 1/n > \delta(x) > 1/(2n)\}$。对于给定的 $x \in M \setminus A$，我们在 $M \setminus A$ 中找到一个小的开邻域 U_x，使得所有的 $y \in U_x$ 都满足

$$\frac{1}{n}\delta(y) > \frac{1}{2n} \quad \text{and} \quad ||f(y)-f(x)||_k < \frac{1}{2(n+1)} \text{ for all } k \leq N_n.$$

取 $\{U_x\colon\ x \in M \setminus A\}$ 的一个局部有限可数子覆盖 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，并用 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 将其扩充为 M 的一个局部有限可数覆盖。将 V_i 重命名为 $U_{-(i-1)}$，使得该开覆盖为 $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$。

取一个从属于该覆盖的单位分解 $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，并定义

$$g(y) \coloneqq \sum_{i>0} \varphi_i(y) f(x_i) + \sum_{i\leq 0} \varphi_i(y) f(y).$$

当然，根据构造，我们有 $f|_A = g|_A$。

如果 $y \in M \setminus A$，那么我们可以观察到

$$d\left(g(y), f(y)\right) = d\left(\sum_{i>0} \varphi_i(y) f(x_i), \sum_{i>0} \varphi_i(y) f(y)\right).$$

根据假设，$\varphi_i(y) \neq 0$ 仅对有限多个 $i \in \mathbb{N}$成立。令 $\bar{i}$ 为具有该性质的最小数。这意味着 $1/\bar{i} > \delta(y) > 1/(2\bar{i})$。因此，只需证明

$$\left\| \sum_{i>0} \varphi_i(y) f(x_i) - \sum_{i>0} \varphi_i(y) f(y) \right\|_k < \frac{1}{2(\bar{i}+1)}$$

对所有 $k \leq N_{\bar{i}}$ 均成立。但这可直接由

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i>0} \varphi_i(y) f(x_i) - \sum_{i>0} \varphi_i(y) f(y) \right\|_k &= \left\| \sum_{i>0} \varphi_i(y)(f(x_i) - f(y)) \right\|_k \\ &= \sum_{i>0} \varphi_i(y) ||f(x_i) - f(y)||_k \\ &< \sum_{i>0} \varphi_i(y) \frac{1}{2(i+1)} \\ &< \sum_{i>0} \varphi_i(y) \frac{1}{2(\bar{i}+1)} = \frac{1}{2(\bar{i}+1)} \end{aligned}$$

这便推出

$$d(g(y), f(y)) = d\left(\sum_{i>0} \varphi_i(y) f(x_i), \sum_{i>0} \varphi_i(y) f(y) \right) < \frac{1}{2\bar{i}} < \delta(y).$$

第二个陈述可由第一个陈述立即推出。由于 X 是仿射弗雷歇空间中的一个开子集，存在一个正函数 $\delta\colon M \to \mathbb{R}$，使得所有取值于该仿射弗雷歇空间的函数 f，只要满足 $d(f,\ f) < \delta$，其取值仍在 X 中。若 g 是第一个陈述中的函数，则 f 与 g 之间的同伦可由凸组合给出：

$$H\colon M \times [0,1] \to X, \qquad (m,t) \mapsto (1-t)f(m) + tg(m).$$

（第一个陈述的证明稍作调整即可得出

$$d(H(m,s), f(m)) < \delta(m),$$

从而 H 的取值确实在 X 中）。若 f 与 g 在 A 上一致，则 H 在 A 上是静止的。

□

引理的证明 *2.2.4*. 很容易验证，该包含映射是一个立方映射。

对于给定的奇异立方 n-角 $f_\bullet\colon \sqcap^n_{(i,\varepsilon)} \to S_\bullet(X)$，它由有限个块映射 $\{f_{(j,\omega)}\}_{(j,\omega)\neq(i,\varepsilon)}$ 表示，我们找到一个 ρ，使得每个 $f_{(j,\omega)}$ 都是其在 ρI^{n-1} 上的限制的延长。令 $\mathrm{Cub}^{\rho}_{n,\ i,\ \varepsilon} := \{x \in \mathbb{R}^n :\ \varepsilon x_i \geq -\rho,\ \ x_j \in \rho I^n$，若 $j \neq i\}$，则它是一个在第 i 个坐标方向朝 $\varepsilon\infty$ 开放的无限长方体。相容性 $\partial^{\omega}_j f_{(k,\eta)} = \partial^{\eta}_{k-1} f_{(j,\omega)}$ 意味着我们可以将这些映射合并为一个连续映射 $f\colon \left(\mathrm{Cub}^{\rho}_{n,\ i,\ \varepsilon}\right)^c \to X$。取一个开子集 $U \subset \left(\mathrm{Cub}^{\rho}_{n,\ i,\ \varepsilon}\right)^c$，使得

其中包含 $\left(\mathrm{Cub}_i^{R,\epsilon}\right)^c$，对于某个 $R>\rho$，且相对于 $\left(\mathrm{Cub}_i^{R,\epsilon}\right)^c$ 与 $\mathbb{R}^n$ 微分同胚。若将该微分同胚记为 ϕ，则 $f\circ\phi^{-1}\colon \mathbb{R}^n\to X$ 为给定的立方 n-角提供了一个填充子。

我们将使用组合同伦群来证明该包含映射是弱等价。

对于满射性，我们使用命题 2.2.5，找出一个光滑块映射，使其与给定元素的任意选定代表元 $\mathcal{C}^0$足够接近，该元素属于 $\pi_n(X)$。给定代表元与其近似之间的同伦可由凸组合给出。

对于单射性，我们将前面的论证应用于同伦。 □

以下判据有助于构造奇异集的立方子集。回忆一下，$p_j\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n-1}$ 是将第 j 个分量投影掉的线性映射。

定义 2.2.6。设 X 是一个光滑流形或仿射弗雷歇空间的开子集。对于 $0\le k\le\infty$，设 $f_n\colon \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n,X)\to\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 是一列映射。若对所有 $1\le j\le n$，都有 $f_n(\psi\circ p_j)=f_{n-1}(\psi)\circ p_j$，则称该序列为稳定的 。若对于任意开集 $U\subset\mathbb{R}^n$，等式 $f_n(\psi|_U)=f_n(\psi)|_U$ 成立，则称该序列为局部的 。

为明确起见，我们接下来的引理只在光滑情形下表述。当然，它也适用于微 Of 分性的任意其他程度。

引理 2.2.7。设 X 是一个仿射弗雷歇空间的开子集。设 U 是 $\mathbb{R}$ 的一个开子集，且 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是映射 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,X)\to\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$的一个局部稳定序列。那么，原像 $f_n^{-1}(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n,U))\cap\mathcal{S}_n^\infty(X)$ 构成 $\mathcal{S}_\bullet^\infty(X)$的一个立方子集。

证明。设 $\varphi\colon \mathbb{R}^n\to X$是一个块映射，满足 $f_n(\varphi)\colon \mathbb{R}^n\to U$。我们需要证明，$f_{n-1}(\partial_i^\varepsilon\varphi)$ 和 $f_{n+1}(\sigma_i\varphi)$ 的像也属于 U。由稳定性可得

$$f_{n+1}(\sigma_i\varphi)(y)=f_{n+1}(\varphi\circ p_i)(y)=f_n(\varphi)(p_i(y))\in U$$

对所有 $y\in\mathbb{R}^{n+1}$均成立。由于 φ 是一个块映射，存在充分大的 $R>0$，使得 $\varphi|_{\{\varepsilon x_i>R\}}=\partial_i^\varepsilon\varphi\circ p_i|_{\{\varepsilon x_i>R\}}$。由于 f_n 是局部且稳定的，我们有

$$\begin{aligned}f_{n-1}(\partial_i^\varepsilon\varphi)(y)&=f_{n-1}(\partial_i^\varepsilon\varphi)(p_i\delta_i^{2R\varepsilon}y)\overset{\text{stab}}{=}f_n((\partial_i^\varepsilon\varphi)\circ p_i)(\delta_i^{2R\varepsilon}y)\\&=f_n(\varphi|_{\{\varepsilon x_i>R\}})(\delta_i^{2R\varepsilon}y)\overset{\text{loc.}}{=}f_n(\varphi)(\delta_i^{2R\varepsilon}(y))\in U\end{aligned}$$

对所有 $y\in\mathbb{R}^{n-1}$。 □

2.2.2 块映射的拓扑空间

构造正标量曲率 Hatcher 谱序列时，我们需要将块映射的集合视为一个拓扑空间（采用不同于离散拓扑的拓扑）。本小节的主要结果是，光滑块环空间到环空间（以连续块映射为模型）的包含映射是弱同伦等价。在本小节中，X 表示光滑流形或仿射弗雷歇空间的开子集。

定义 2.2.8。对每个 $R > 0$ 集合

$$ {}_R\Omega^q X \coloneqq \{f \colon RI^q \to X \,:\, f = x_0 \text{ near } \partial RI^q\} $$

and

$$ {}_R\Omega^{q,\infty} X \coloneqq \{f \colon RI^q \to X \,:\, f \text{ smooth}, f = x_0 \text{ near } \partial RI^q\} $$

赋予光滑惠特尼拓扑。

对于所有 $R < S$，我们都有由延长给出的嵌入 ${}_R\Omega^{p,(\infty)} X \hookrightarrow {}_S\Omega^{p,(\infty)} X$。我们用这些空间来定义（光滑）环空间的块版本。

定义 2.2.9。令

$$ \Omega^q X \coloneqq \{f \colon \mathbb{R}^q \to X \,:\, f \text{ block map}, f = x_0 \text{ near } \infty\} $$

and

$$ \Omega^{q,\infty} X \coloneqq \{f \colon \mathbb{R}^q \to X \,:\, f \text{ smooth block map}, f = x_0 \text{ near } \infty\} $$

赋予由嵌入 ${}_R\Omega^{p,(\infty)} X \hookrightarrow {}_S\Omega^{p,(\infty)} X$ 诱导的余极限拓扑。

我们希望证明典范包含映射 $\Omega^{q,\infty} X \hookrightarrow \Omega^q X$ 是弱同伦等价。证明基于指数律的以下加强形式。

引理 2.2.10. 设 X 是仿射弗雷歇空间或有限维流形的一个开子集，且 M、N 是光滑紧流形（可以带面）。那么伴随映射

$$ \mathcal{C}^\infty(M, \mathcal{C}^\infty(N, X)) \to \mathcal{C}^\infty(M \times N; X) $$

是光滑空间之间的微分同胚。

证明. 我们先考虑 X 是仿射弗雷歇空间的开子集这一情形，因为这是我们感兴趣的情形。我们可以假设 X 是弗雷歇空间，因为光滑性是局部性质，且在通过固定元素进行平移后保持不变。根据 Kriegl-Michor [KM97，定理 2.14(7)]，每个弗雷歇空间都是一个便捷空间。因此，它成为一个弗勒利歇空间，其光滑曲线恰好是无穷次可微的曲线 [KM97，第 23 节。1]。若 M 是紧流形，则 [KM97，引理 42。5]给出如下结论：具有先验不同光滑结构的光滑映射集合之间的集合论恒等映射

$$ \mathfrak{C}^\infty(M, X) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{Frö}}(M, X) $$

是弗勒利歇空间范畴中的一个同构。此外，集合论意义下的恒等函数

$$ \mathfrak{C}^\infty(M, X) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{Fréchet}}(M, X), $$

其中右侧赋予光滑弱拓扑，根据 [KM97]中引理 42.5 上方的注记，这是局部凸向量空间之间的一个同构。现在，由 [KM97定理 232], 可知，指数映射

$$\mathcal{C}^\infty_{\text{Frö}}(Y_1 \times Y_2, Z) \cong \mathcal{C}^\infty_{\text{Frö}}(Y_1, \mathcal{C}^\infty_{\text{Frö}}(Y_2, Z))$$

对于所有弗勒利歇空间 X、Y和 Z，它都是弗勒利歇空间之间的同构。因此，我们有

$$\mathcal{C}^\infty_{\text{Fréchet}}(M, \mathcal{C}^\infty_{\text{Fréchet}}(N, X)) \cong \mathcal{C}^\infty_{\text{Fréchet}}(M \times N, X). \qquad \square$$

为完整起见，如果 X 是有限维光滑流形，那么引理 2.2.10 中的相应结论仍然成立，前提是为 $\mathcal{C}^\infty(N, X)$ 赋予适当的光滑结构。更多细节请参阅 [KM97, §42]，尤其是[KM97，定理 42。14]

引理 2.2.11。 如果 X 是有限维光滑流形或仿射弗雷歇空间的开子集，那么典范包含映射 $\Omega^q_{\infty} X \hookrightarrow \Omega^q X$ 是弱同伦等价。

证明过程中，我们会遇到拓扑空间范畴的一个麻烦：一般而言，从紧空间到余极限的连续映射 $f\colon K \to$ 余极限$_{i\in\mathcal{I}} X_i$ 未必经由图表中的某个元素分解。然而，根据 [DI04，引理 A3]的以下结果，在大多数我们感兴趣的情形下，这一结论成立。

引理 2.2.12。 设$(\varphi_{ij}\colon X_i \to X_j)$ 是一个由包含映射组成的序列图表，这些映射都是相对 T_1，*i.e.*的。对于所有 $U \subseteq X_i$ 开集以及所有 $y \in X_j \setminus \varphi_{ij}(U)$，都存在一个开$V \subseteq X_j$，使得 $\varphi_{ij}^{-1}(V) \subseteq U$ 且 $y \notin V$。

那么，对于每个从紧定义域 K到 $K \to \operatorname{colim} X_i$ 的连续映射 $f\colon$ ，都存在一个 X_i，使得 f 经由它分解。

由于以下初等观察，该引理可应用于我们的设定。

引理 2.2.13。 设 $X_1 \hookrightarrow X_2 \hookrightarrow X_3 \hookrightarrow \cdots$ 是由 T_1-空间的嵌入组成的序列。那么，每个嵌入都是相对 T_1的。

证明。 固定一个复合映射 $\varphi_{ij}\colon X_i \hookrightarrow X_j$。它仍是一个嵌入。设 $U \subseteq X_i$ 为一个开集，并给定 ˜和 $y \in X_j \setminus \varphi_{ij}(U)$。集合 V..= $X_j \setminus \{y\}$是开的，因为 X_j是 T_1。由于 φ_{ij}是一个嵌入，我们可以找到一个开子集 $\tilde{U} \subseteq X_j$，使得 $\varphi_{ij}^{-1}(\tilde{U}) = U$.˜ ˜因此， V..= $U \cap V$仍是开集，满足 $y \notin V$，并且

$$\varphi_{ij}^{-1}(V) = \varphi_{ij}^{-1}(\tilde{U}) \cap \varphi_{ij}^{-1}(\tilde{V}) = U \cap \varphi_{ij}^{-1}(\tilde{V}) \subseteq U. \qquad \square$$

引理的证明 *2.2.11*。 只需验证，对于每个连续映射 $\varphi\colon M \to \Omega^q X$，其中 M 是一个紧致有限维流形，都可以将其变形为一个取值于 $\Omega^q_{\infty} X$ 的映射，且在其已取值于 $\Omega^q_{\infty} X$的每个闭子集上保持不变。

由于 $\Omega^q X$ 是豪斯多夫空间之间嵌入的序列余极限，因此存在一个 $R > 0$ 使得 φ 经由.....分解 $_R\Omega^q X$，由引理 2.2.13 和 2.2.12。在

指数律下，它对应于一个连续映射 $\mathrm{Ad}(\varphi)\colon M \times RI^n \to X$，该映射在（拓扑）边界 ∂RI^n附近为常值。逼近理论（参见命题 2.2.5）给出一个同伦 H：$M \times RI^n \times [0,1] \to X$，连接 $\mathsf{Ad}(\varphi)$ 与一个光滑映射 $\psi\colon M \times RI^n \to X$，且该映射在（拓扑）边界附近仍为常值。如果 ψ 在 A上光滑，则可将 H 选为在该处静止。现在，根据引理 2.2.10，$\mathsf{Ad}^{-1}(H)$ 是连接 φ 与 $\mathsf{Ad}^{-1}(\psi)$ 的同伦。根据 H 的选取，它相对于给定的闭子空间；在该子空间上，φ 的取值已经属于 $\Omega^q{}_\infty X$。

□

2.2.3 态射集与路径集

对于两个立方集合 $X_\bullet$ 和 $Y_\bullet$，我们将构造一个立方集合 $\mathbf{Hom}_\bullet(X,Y)$，其 0-立方体为 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{cSet}}(X_\bullet, Y_\bullet)$。定义 $\mathbf{Hom}_\bullet(X,Y)$ 为如下立方集合：

$$\mathbf{Hom}_n(X,Y) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbf{cSet}}((\square[n]\otimes X)_\bullet, Y_\bullet)$$

其连接映射由下式给出

$$\partial_i^\varepsilon \coloneqq - \circ (\delta_{i*}^\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \qquad \text{and} \qquad \sigma_i \coloneqq - \circ (p_{i*} \otimes \mathrm{id}).$$

它是约化积的右伴随函子

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{cSet}}((X\otimes Z)_\bullet, Y_\bullet) \overset{1:1}{\rightleftarrows} \mathrm{Hom}_{\mathbf{cSet}}(X_\bullet, \mathbf{Hom}_\bullet(Z,Y)),$$

参见 [Jar06，第96], 页。这与单纯集合的情形不同，在单纯集合中，$\mathbf{Hom}_\bullet$ 是（范畴意义下）积的右伴随。

我们主要关注立方体路径集

$$P_\bullet X \coloneqq \mathbf{Hom}_\bullet(\square[1], X).$$

它配有两个立方映射

$$\mathrm{ev}_\varepsilon \coloneqq - \circ \delta_{1*}^\varepsilon \colon P_\bullet X = \mathbf{Hom}_\bullet(\square[1],X) \to \mathbf{Hom}_\bullet(\square[0],X) \cong X_\bullet.$$

后一个识别来自米田引理。这两个立方映射有一个截面

$$s \coloneqq - \circ p_{1*} \colon X_\bullet \cong \mathbf{Hom}_\bullet(\square[0],X) \to P_\bullet X,$$

可以将其理解为把一个元素映射到以该元素为唯一取值的常值路径。

引理 2.2.14。 如果 $X_\bullet$ 是一个 *Kan* 集，那么

$$(\mathrm{ev}_1, \mathrm{ev}_{-1})\colon P_\bullet X \to (X\times X)_\bullet$$

是 *Kan*纤维化。

证明。 设有一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \sqcap^n_{(i,\varepsilon)} & \xrightarrow{y} & P_\bullet X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \square[n]_\bullet & \xrightarrow[(f,g)]{} & (X\times X)_\bullet \end{array}$$

设定。借助 $\otimes$ 与$\mathbf{Hom}_\bullet$之间的伴随，映射 y 对应于一个立方映射 $\mathrm{Ad}(y):(\sqcap^n_{(i,\varepsilon)}\otimes\square[1])_\bullet\to X_\bullet$。我们使用以下分解

$$\sqcap^{n+1}_{(i,\varepsilon)}=\sqcap^n_{(i,\varepsilon)}\otimes\square[1]_\bullet\cup\square[n]_\bullet\otimes\delta_1^1(\square[0]_\bullet)\cup\square[n]_\bullet\otimes\delta_1^{-1}(\square[0]_\bullet)$$

将 $\mathrm{Ad}(y)$ 延拓到 $\sqcap^{n+1}{}_{(i,\ \varepsilon)}$，如下所示：

$$\mathrm{Ad}(y)\cup f\cup g\colon\sqcap^{n+1}_{(i,\varepsilon)}\to X_\bullet.$$

由于 $X_\bullet$是 Kan 的，这个映射可以延拓为一个填充子 $F\colon\ \square[n+1]_\bullet\to X_\bullet$。不难验证，在同构 $\square[n+1]_\bullet\cong(\square[n]\otimes\square[1])_\bullet$ 以及与$\mathbf{Hom}_\bullet$的伴随下，填充子 F给出初始图表的一个填充子 $\mathrm{Ad}^{-1}(F)\colon\ \square[n]_\bullet\to P_\bullet X$。 □

与拓扑空间的情形类似，我们将使用立方体路径集，通过用一个同伦等价的立方集合替换定义域，把任意两个 Kan 集之间的立方映射转化为 Kan 纤维化。

对于每个 Kan 集之间的立方映射 $f_\bullet\colon\ X_\bullet\to K_\bullet$，我们将映射路径空间 $P_\bullet(f)$定义为如下拉回

$$\begin{array}{ccc} P_\bullet(f) & \longrightarrow & P_\bullet K \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle(\mathrm{ev}_1,\mathrm{ev}_{-1})} \\ X_\bullet\times K_\bullet & \xrightarrow[f_\bullet\times\mathrm{id}]{} & K_\bullet\times K_\bullet. \end{array}$$

拉回的泛性质蕴含 $P_\bullet(f)\to X_\bullet\times K_\bullet$ 是一个 Kan纤维化。将其与到 $X_\bullet$ 和 $K_\bullet$ 的投影复合，分别得到映射 $p_\bullet$ 和 $q_\bullet$。容易看出，从 Kan 集的积到其中一个因子的投影是 Kan纤维化，并且纤维化在复合下封闭。因此，映射 $p_\bullet$和 $q_\bullet$ 也是 Kan纤维化。映射 $p_\bullet$ 有一个截面 $s_\bullet\colon\ X_\bullet\to P_\bullet(f)$，它由 $(\mathrm{id}\ f_\bullet,\ s\circ f_\bullet):X_\bullet\to X_\bullet\times K_\bullet\times P_\bullet K$诱导。

根据米田引理2.1.9，我们有立方集合的识别 ts

$$P_\bullet X\cong X_{\bullet+1},$$

其中，后者立方集合的连接映射与 $X_\bullet$ 的连接映射一致，只是指标平移了 1，例如 ${}_{X_{\bullet+1}}\partial^\varepsilon_i={}_{X_\bullet}\partial^\varepsilon_{i+1}$。在此识别下，以及$\mathbf{Hom}_\bullet(\square[0],X)\cong X_\bullet$，纤维化 ev_ε 对应于 ∂^ε_1。因此，映射路径空间可以识别为

$$P_n(f)\cong\{(x,k)\in X_n\times K_{n+1}\ :\ f_n(x)=\partial^1_1(k)\}.$$

引理 2.2.15。 映射 $s_\bullet \circ p_\bullet \colon P_\bullet(f) \to P_\bullet(f)$ 与恒等函数同伦。

证明。 令 $F_\bullet = p_\bullet^{-1}(\{x_0\})$ 为 $p_\bullet$ 的纤维。它明确地定义为

$$F_n \coloneqq \{(x_0, k) \in X_n \times K_{n+1} \,:\, \partial_1^1 k = f_n(x_0)\},$$

因此它与带基点路径空间$P_{f(x_0)}K_\bullet$一致。通过类似于证明引理 2.2.14 的论证可知，后者是组合可缩的；该引理证明 $(\mathrm{ev}_1,\mathrm{ev}_{-1})$ 是 Kan 纤维化。Kan 集之间的 Kan 纤维化所对应的长正合列表明，$p_\bullet$ 必定是弱同伦等价。由怀特海德定理可得，$|p_\bullet| \colon |P_\bullet(f)| \to |X_\bullet|$是同伦等价。立方逼近定理蕴含 $p_\bullet$ 也必定是同伦等价。再结合等式 $p_\bullet \circ s_\bullet = \mathrm{id}$，可知 $s_\bullet$ 是 $p_\bullet$的同伦逆。

□

定义 2.2.16。 设 $f_\bullet \colon X_\bullet \to K_\bullet$ 是 Kan 集之间的一个立方映射。$f_\bullet$ 在点 $k_0 \in K_0$ 处的同伦纤维是 Kan 集

$$\mathrm{hofib}_\bullet(f_\bullet; k_0) \coloneqq q_\bullet^{-1}(\{k_0\}) = \{(x, k) \in X_n \times K_{n+1} \,:\, \partial_1^1 k = f_n(x),\, \partial_1^{-1} k = k_0\}.$$

注记 2.2.17。 与单纯集合不同，作者不知道 Kan 纤维化的几何实现 $F_\bullet \xrightarrow{\iota} E_\bullet \xrightarrow{p} B_\bullet$ 是否为塞尔纤维化。不过，引理2.1.29和定理 2.1.32表明它是同伦纤维化，这意味着复合映射 $|p| \circ |\iota|$ 同伦于常值映射 const_{b_0}，并且对于某个零伦 h，诱导的纤维比较映射

$$|F_\bullet| \to \mathrm{hofib}(|p_\bullet|) \quad \text{given by} \quad f \mapsto \big(h(b_0, -), f, b_0\big)$$

是弱同伦等价。特别地，典范映射

$$|\mathrm{hofib}_\bullet(f_\bullet; k_0)| \to \mathrm{hofib}(|f_\bullet|; |k_0|)$$

是一个弱同伦等价。通俗地说，立方同伦纤维刻画了正确的对象！

第3章

正标量曲率的立方版本

我们将把第2章中发展的立方集合理论应用于正标量曲率。立方集合论使我们能够构造本$\widetilde{\ }$论文的核心对象——正标量曲率度量的共边集 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$，它无法写成闭式表达。这个立方集合附带一个比较映射$\widetilde{\ }$$\mathrm{susp}_\bullet\colon \mathcal{R}^+_\bullet(M) \dashrightarrow \mathcal{R}^+_\bullet(M)$，其定义在$\mathcal{R}^+_\bullet(M)$的一个弱等价立方子集上；该立方集合是正标量曲率度量空间 $\mathrm{Riem}^+(M)$ 的立方集合类比。虽然本节已经描述了 $\mathrm{susp}_\bullet$ 的映射规则，但其定义域$\widetilde{\ }$（即弱等价子集）的构造，以及证明 $\mathrm{susp}_\bullet$ 的取值属于 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$，将在第5章中进行，因为届时我们已经发展出指标理论方面的对应部分（指标理论方面的对应构造也会影响弱等价子集构造中的选择）。

本章的主要内容是证明协和集满足 Kan 延拓性质。这是一项重要性质，因为它使我们能够将立方集合论中的工具应用于协和集。例如，Kan$\widetilde{\ }$性质为 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 的同伦群提供了组合描述，这是在第 6 章构造正标量曲率 Hatcher 谱序列时不可或缺的工具。

在第3.1节中，我们引入 $M \times \mathbb{R}^n$ 上块度量的概念，并介绍它们的一些基本性质。我们描述 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 的立方类比$\widetilde{\ }$$\mathrm{Riem}^+(M)$，并将协和集 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 构造为由所有具有正标量曲率的块度量组成的立方集合。第3.2节是准备性章节，内容相当技术化。在那里，我们将为每个块度量构造一种超平面叶状结构，这些超平面位于 $\mathbb{R}^n$ 中，并能很好地适配所选的块度量。随后，我们将在第3.3节利用这一叶状结构，修改具有正标量曲率的块度量，使所得块度量仍具有正标量曲率。这一修改是证明 Kan 性质的关键步骤，我们将在第3.3节末尾完成证明。本章最后，我们将在第3.4节给出对 $\pi_n(\mathcal{R}^+_\bullet(M))$ 上群结构的一种不同且受几何启发的描述$\widetilde{\ }$。

在本节中，令 M 为一个维数为 d 的光滑闭流形。

3.1 基础

首先，我们不直接考虑正标量曲率度量空间和正标量曲率度量空间 $\mathrm{Riem}^+(M)$ 本身，而是考察取值于黎曼度量空间 $\mathrm{Riem}(M)$ 和正标量曲率度量空间 $\mathrm{Riem}^+(M)$ 的块映射立方集合，从而将正标量曲率度量空间转化为组合对象。

定义 3.1.1. 令 $\mathcal{R}_\bullet(M)$ 表示这样一个立方集合：其 n-立方体由光滑块映射 $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{Riem}(M)$ 构成。连接映射定义为

$$\partial_i^\varepsilon g = \lim_{R\to\infty} g\circ\delta_i^{R\varepsilon} \qquad \text{and} \qquad \sigma_i g = g\circ p_i.$$

令 $\mathcal{R}_\bullet^+(M)$ 表示由所有取值于 $\mathrm{Riem}^+(M)$ 的光滑块映射构成的立方子集。

这些立方集合确实是正确的模型，因为由引理 2.2.3 和2.2.4 以及定理2.1.32（1）可得以下弱等价的锯齿链

$$|\mathcal{R}_\bullet^{(+)}(M)| \xrightarrow{\simeq} \left|S_\bullet^{bl}\left(\mathrm{Riem}^{(+)}(M)\right)\right| \xleftarrow{\simeq} \left|S_\bullet\left(\mathrm{Riem}^{(+)}(M)\right)\right| \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Riem}^{(+)}(M),$$

其中，第一个映射是从光滑块映射到连续块映射的包含映射；第二个映射是引理2.2.3之前所述的从奇异立方体到连续块映射的包含映射；最后一个映射则是 $|\vdash|$ 与 $S_\bullet(-)$ 之间伴随的余单位，该伴随见定理2.1.30。

现在，我们将构造组合参考空间。首先需要给出一些组织性定义。为便于直观理解，请参见图 3.1。

定义 3.1.2. 集合 $\mathbf{n}_{\cdot\cdot} = \{1,\dots,n\}$。我们定义，对于 $\varepsilon\colon \operatorname{dom}\varepsilon \subseteq \mathbf{n} \to \mathbb{Z}_2$，这些集合

$$\begin{aligned} U_\rho(\varepsilon) &\coloneqq M \times \{x\in\mathbb{R}^n \,:\, \varepsilon(i)x_i > \rho \text{ for } i\in\operatorname{dom}\varepsilon\},\\ \mathbb{R}^n(\varepsilon) &\coloneqq \mathrm{Map}(\mathbf{n}\setminus\operatorname{dom}\varepsilon,\mathbb{R}) \cong \{x\in\mathbb{R}^n \,:\, \varepsilon(i)x_i = \rho\},\\ \mathbb{R}^\varepsilon_\rho &\coloneqq \{x\in\mathbb{R}^{|\operatorname{dom}\varepsilon|} \,:\, \varepsilon(i_j)x_j > \rho;\ j\mapsto i_j \text{ strictly monotone}\}. \end{aligned}$$

一旦固定 ρ，该同构便是典范的。利用坐标置换，我们可以将 $U_\rho(\varepsilon)$ 与 $M\times\mathbb{R}^n(\varepsilon)\times\mathbb{R}^\varepsilon_\rho$ 识别。确切地说，所有这些识别都具有 $\mathrm{id}_M \times A$ 的形式，其中 $A\in GL_n(\mathbb{R})$ 是一个置换矩阵。

对于每个 ε 以及所有 ρ，我们设 $\delta^{\rho\varepsilon}\colon \mathbb{R}^{n-|\operatorname{dom}\varepsilon|}\to\mathbb{R}^n$，它将 $\rho\varepsilon(i)$ 放入元组的第 i 个位置，其中所有 $i\in\operatorname{dom}\varepsilon$ 均成立。其像是仿射超平面$\{x\in\mathbb{R}^n \colon \varepsilon(i)x_i=\rho\}$。

定义 3.1.3。 g 上的黎曼度量 $M\times\mathbb{R}^n$ 是块度量，若存在一个 $\rho>0$，使得 g 在所有 $U_\rho(\varepsilon)$ 上的限制为以下乘积度量

$$g|_{U_\rho(\varepsilon)} = \delta^{\rho\varepsilon *} g \oplus \langle\cdot,\cdot\rangle =: g\restriction_{M\times\mathbb{R}^n(\varepsilon)} \oplus \langle\cdot,\cdot\rangle.$$

我们称 g 在 $M\times\rho I^n$之外分解。

事实上，我们可以弱化这个定义。

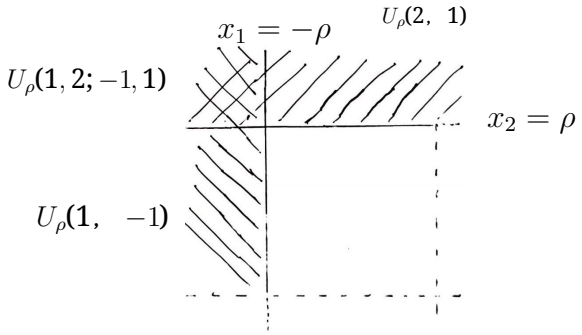


图 3.1：情形 $\varepsilon = 1 \mapsto -1$ 的一个例子，记作 $(1,\ -1)$；情形 $\varepsilon = 2 \mapsto 1$ 的一个例子，记作 $(2,\ 1)$；以及这两个映射的并集，记作 $(1,\ 2; 1,\ -1)$，

引理 3.1.4。设 g 是 $M \times \mathbb{R}^n$上的一个黎曼度量。若存在一个 $\rho > 0$ 使得

$$g|_{\{\varepsilon x_i > \rho\}} = \delta_i^{\rho\varepsilon *} g \oplus \mathrm{d}x_i^2 = g|_{\{x_i = \varepsilon\}} \oplus \mathrm{d}x_i^2$$

对于所有$(i, \varepsilon) \in \{1, \ldots, n\} \times \mathbb{Z}_2$，那么 g是一个块度量。

非正式地说，我们将块度量视为 $M \times \rho I^n$ 上的一种度量，它在每个超面 $\{x_i = \rho\varepsilon\}$附近都是乘积度量。

由于 $M \times \mathbb{R}^n$ 是开流形，我们必须确保块度量不受 Gromov 的 h-原理所涵盖。从这个角度来看，下一个命题告诉我们，块度量确实值得研究。

命题 3.1.5. 每个定义在 $M \times \mathbb{R}^n$ 上的块度量 g 都具有以下性质：

1. 度量 g 是完备的。

2. 若$\mathrm{scal}(g) > 0$，则存在一个常数 $c > 0$，使得$\mathrm{scal}(g) \geq c$。

证明。对于第一条，我们将证明，$M \times \mathbb{R}^n$ 关于由 g诱导的路径长度度量是完备的。考虑 $M \times \mathbb{R}^n$中的点所组成的柯西序列 $\{(m_j, p_j)\}$。假设 g 在立方体 $M \times \rho I^n$之外分解。那么，要么有无穷多个点落在集合 $M \times Q_k^\varepsilon$之一中，其中 $Q_k^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \varepsilon \cdot x_k \geq 1.2\rho\}$；要么有无穷多个点落在立方体 $M \times 2\rho I^n$中。后一种情况下，由于紧致性，极限存在。对于前一种情况，我们利用这样一点：g 是定义在 $M \times \delta_k^{2\rho\varepsilon}$ ($\mathbb{R}^{n-1}$)上的块度量与定义在 $\mathbb{R}$上的欧几里得度量的乘积度量。由于两个完备度量的乘积度量仍然完备，因此我们得出存在一个极限点。由此，给定的块度量是完备的。

对于第二个结论，我们对维数进行归纳。由于 M 是紧的，$M \times \mathbb{R}^0 = M$ 上的块度量满足该结论显然成立。现在设 $M \times \mathbb{R}^n$ 上的块度量 g在 $M \times \rho I^n$ 之外分解，且具有正标量曲率。由紧致性可知，对于某个$\tilde{c} > 0$，在 $M \times 2\rho I^n$ 上有 $\mathrm{scal}(g) \geq \tilde{c}$。根据归纳假设，在 $\{\varepsilon x_j > \rho\}$上，$\mathrm{scal}(g)$也满足同样的结论。若 c 是这些定义域上 $\mathrm{scal}(g)$ 的下确界中的最小值，则 c 为正，且满足 $\mathrm{scal}(g) \geq c$。

□

定义3.1.6。 设 $\mathcal{R}_\bullet(M)$为一个立方集合，其 n-立方体的集合定义为

$$\widetilde{\mathcal{R}_n}(M) \coloneqq \{g \in \mathrm{Riem}(M \times \mathbb{R}^n) \,:\, g \text{ block metric } \}$$

且其连接映射为

$$\partial_i^\varepsilon g = \lim_{R\to\infty} \delta_i^{R\varepsilon *} g \qquad \text{and} \qquad \sigma_i g = p_j^* g + \mathrm{d}x_i^2.$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$共边集 $\mathcal{R}_\bullet^+(M)$ 是 $\mathcal{R}_\bullet(M)$ 的子集序列，其中的 n-立方体具有正标量曲率。

引理3.1.7。 $\mathcal{R}_\bullet(M)$ 的连接映射定义良好，并满足$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$立方恒等式。连接映射限制到 $\mathcal{R}_\bullet^+(M)$，因此 $\mathcal{R}_\bullet^+(M)$是 $\mathcal{R}_\bullet(M)$的立方$\widetilde{\ }$子集。

证明。 如果 g 是一个在 $M \times \rho I^n$之外分解的块度量，那么它的所有面 $\partial_i^\varepsilon g$也如此。因此，

$$\partial_i^\varepsilon \partial_j^\omega g = \left(\delta_j^{\rho\omega}\delta_i^{\rho\varepsilon}\right)^* g = \left(\delta_i^{\rho\omega}\delta_{j-1}^{\rho\varepsilon}\right)^* g = \partial_{j-1}^\omega \partial_i^\varepsilon g$$

对所有 $i<j$ 都成立。恒等函数

$$\delta_i^{R\varepsilon *}\mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_j \circ D\delta_i^{R\varepsilon} = \begin{cases} \mathrm{d}x_{j-1}, & \text{if } i<j \\ 0, & \text{if } i=j, \\ \mathrm{d}x_j, & \text{if } i>j \end{cases}$$

意味着

$$\begin{aligned} \partial_i^\varepsilon \sigma_j g &= \lim_{R\to\infty} \delta_i^{R\varepsilon *}\left(p_j^* g + \mathrm{d}x_j^2\right) = \lim_{R\to\infty} \delta_i^{R\varepsilon *} p_j^* g + \delta_i^{R\varepsilon *}\mathrm{d}x_j^2 \\ &= \begin{cases} \lim_{R\to\infty} p_{j-1}^* \delta_i^{R\varepsilon *} g + \mathrm{d}x_{j-1}^2, & \text{if } i<j, \\ g, & \text{if } i=j, \\ \lim_{R\to\infty} p_j \delta_{i-1}^{R\varepsilon\ *} g + \mathrm{d}x_j^2 & \text{if } i>j. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma_{j-1}\partial_i^\varepsilon g, & \text{if } i<j, \\ g, & \text{if } i=j, \\ \sigma_j \partial_{i-1}^\varepsilon g, & \text{if } i>j. \end{cases} \end{aligned}$$

最后，该方程

$$p_i^*\mathrm{d}x_j = \mathrm{d}x_j \circ p_i = \begin{cases} \mathrm{d}x_{j+1}, & \text{if } i \le j, \\ \mathrm{d}x_j, & \text{if } i>j, \end{cases}$$

对于 $i \le j$，得到方程

$$\begin{aligned} \sigma_i\sigma_j g &= p_i^*(p_j^* g + \mathrm{d}x_j^2) + \mathrm{d}x_i^2 \\ &= p_i^* p_j^* g + p_i^* \mathrm{d}x_j^2 + \mathrm{d}x_i^2 \\ &= p_{j+1}^*(p_i^* g + \mathrm{d}x_i^2) + \mathrm{d}x_{j+1}^2 \\ &= \sigma_{j+1}\sigma_i g, \end{aligned}$$

因此，第一个断言得证。

连接映射将正标量曲率度量映射为正标量曲率度量，因为标量曲率在取乘积时具有可加性，见下文引理C.1.1 。具体来说，

$$\mathrm{scal}(\sigma_i g) = \mathrm{scal}(p_i^* g + \mathrm{d}x_i^2) = \mathrm{scal}(g \oplus \langle\cdot,\cdot\rangle) = \mathrm{scal}(g) > 0,$$

并且，由于 $g|_{\{\varepsilon x_i > \rho\}}$ 是 $\partial_i^\varepsilon g$ 与欧几里得度量的乘积度量，我们有

$$\mathrm{scal}(\partial_i^\varepsilon g) = \mathrm{scal}(p_i^* \partial_i^\varepsilon g + \mathrm{d}x_i^2)|_{\{\varepsilon x_i > \rho\}} = \mathrm{scal}(g)|_{\{\varepsilon x_i > \rho\}} > 0,$$

这就证明了第二个结论。 □

$\widetilde{\mathcal{R}}_\bullet(M)$ 和 $\widetilde{\mathcal{R}}_\bullet^+(M)$ 是否为 Kan 集。对于 $\widetilde{\mathcal{R}}_\bullet(M)$，甚至有更强的结论。

命题 3.1.8. 立方集合 $\widetilde{\mathcal{R}}_\bullet(M)$ 是组合可缩的。

该命题可由下面两个初等引理立即推出。

引理 3.1.9。 设 U, V是未必紧的流形 N的一个开覆盖。假设存在子流形 H，使得 $U \cap V$与 $H \times (-1,1)$微分同胚。若 g_U 和 g_V 分别是 U 和 V上的黎曼度量，则 N 上存在一个黎曼度量 g，使得

$$g|_{U\setminus\overline{V}} = g_U|_{U\setminus\overline{V}} \quad \textit{and} \quad g|_{V\setminus\overline{U}} = g_V|_{V\setminus\overline{U}}.$$

证明。 取一个光滑函数 $\chi\colon (-1,\ 1) \to [0,1]$，使其在 -1附近恒为零，并在 1 附近恒为 1。令 $\phi\colon U \cap V \to H \times (-1,\ 1)$ 为一个微分同胚。在 $U \cap V$ 上定义黎曼度量

$$g|_{U\cap V} \coloneqq (\chi \circ \mathrm{pr}_2 \circ \phi) \cdot g_U + (1 - \chi \circ \mathrm{pr}_2 \circ \phi) \cdot g_V$$

可以借助 g_U 和 g_V 将其延拓到 M 的其余部分，所得结果 g 即为所需的度量。 □

引理 3.1.10。 对于 (j,ω) 和 $(k,\eta) \in \{1,\dots,n\} \times \mathbb{Z}_2$，在 $M \times \mathbb{R}^n$ 上取两个块度量$g_{(j,\omega)}$ 和 $g_{(k,\eta)}$，使它们在 $M \times \rho I^n$之外分解。假设 $j \le k$且 $\partial_j^\omega g_{(k,\eta)} = \partial_{k-1}^\eta g_{(j,\omega)}$。那么，度量 $\sigma_j g_{(j,\omega)}$ 和 $\sigma_k g_{(k,\eta)}$ 在集合$\{\omega x_j > \rho, \eta x_k > \rho\}$上相同。

证明。 将 $\{\omega x_j > \rho, \eta x_k > \rho\}$ 简称为 U。若 $j = k$，则无须证明，因为 U 为空，或 $(j,\omega) = (k,\eta)$。对于 $j < k$，计算为

$$\begin{aligned}
\sigma_j g_{(j,\omega)}|_U &= \sigma_k \partial_k^\eta \sigma_j g_{(j,\omega)}|_U \\
&= \sigma_j \sigma_{k-1} \partial_{k-1}^\eta g_{(j,\omega)}|_U \\
&= \sigma_j \sigma_{k-1} \partial_j^\omega g_{(k,\eta)}|_U \\
&= \sigma_j \partial_j^\omega \sigma_k g_{(k,\eta)}|_U = \sigma_k g_{(k,\eta)}|_U
\end{aligned}$$

证明了该断言。这里，第一行用到了$g_{(j,\omega)}$ 的块形式，第二行用到了立方恒等式，第三行用到了假设的相容性。 □

$\widetilde{}$命题的证明 3.1.8。 设 $\partial\square[n]_\bullet \to \mathcal{R}_\bullet(M)$ 由块度量族给出

$$\{g_{(j,\omega)} \in \widetilde{\mathcal{R}_{n-1}}(M) : \partial_j^\omega g_{(k,\eta)} = \partial_{k-1}^\eta g_{(j,\omega)} \text{ for } j<k\},$$

其中 (j,ω)、$(k,\eta) \in \{1,\dots,n\}\times\mathbb{Z}_2$。由于给定的块度量只有有限个，我们可以选取一个足够大的 $\rho>0$，使得所有 $g_{(j,\omega)}$ 都在 $M\times\rho I^{n-1}$之外分解。根据引理 3.1.10，相容性假设保证度量 $\sigma_j g_{(j,\omega)}|_{\{\omega x_j>\rho\}}$在其定义域的交集上相互一致。因此，这些度量在 $M\times\mathbb{R}^n\setminus\rho I^n$上构成一个黎曼度量 g。在 $M\times(\rho+2)I^n$ 上选取某个黎曼度量 g_0，并应用引理 3.1.9。结果 g_{fill} 显然是一个块度量，因为它在某个紧子集之外与 g 一致，因而满足$\partial_j^\omega g_{fill} = g_{(j,\omega)}$。因此，它就是最初给定的立方球面的所需填充子，所以$\sim\mathcal{R}_\bullet(M)$是组合可缩的。

□

$\widetilde{}$要证明 $\mathcal{R}_\bullet^+(M)$ 是一个 Kan 集，要复杂得多。在下一节中，我们将做一些准备工作，并在第 3.3 节完成证明。

我们在本节最后介绍 $\mathcal{R}_\bullet(M)$ 与$\sim\mathcal{R}_\bullet(M)$ 之间的比较映射。

定义 3.1.11。 对于每个光滑块映射 $g\in\mathcal{R}_n(M)$，我们将 $\mathrm{susp}_n(g)$ 定义为 $M\times\mathbb{R}^n$ 上的伴随度量。更确切地说，我们令

$$\mathrm{susp}_n(g)_{(m,x)} = g(x)_m + \mathrm{d}x_1^2+\cdots+\mathrm{d}x_n^2$$

并称其为 g 的悬挂。

引理 3.1.12。 每个 $g\in\mathcal{R}_n(M)$ 的悬挂都是块度量，并且所有$\widetilde{}$悬挂映射共同构成一个立方映射 $\mathrm{susp}_\bullet\colon \mathcal{R}_\bullet(M)\to\mathcal{R}_\bullet(M)$。

证明。 由于 g 是一个块映射，因此存在一个 $\rho>0$ 使得 $g|_{\{\pm x_i>\rho\}}$ 不再依赖于 x_i。于是，在 $\{\varepsilon x_i>\rho\}$上，悬挂映射 $\mathrm{susp}_n(g)$ 是 $\delta_i^{\rho\varepsilon}\,\mathrm{susp}_n(g)$与 $\mathrm{d}x_i^2$ 的乘积。引理 3.1.4 表明 $\mathrm{susp}_n g$ 是一个块度量。

第二个陈述可由计算得出

$$\begin{aligned}
\partial_i^\varepsilon \mathrm{susp}_n(g)_{(m,x)} &= \lim_{R\to\infty} \delta_i^{R\varepsilon *}\left(g(-)_{(-)} + \mathrm{d}x_1^2+\cdots+\mathrm{d}x_n^2\right)_{(m,x)}\\
&= \lim_{R\to\infty} g(\delta_i^{R\varepsilon}(x))_m + \delta_i^{R\varepsilon *}\mathrm{d}x_1^2+\cdots+\delta_i^{R\varepsilon *}\mathrm{d}x_n^2\\
&= \lim_{R\to\infty} (\partial_i^\varepsilon g)_m(x) + \mathrm{d}x_1^2+\cdots+\mathrm{d}x_{n-1}^2\\
&= \mathrm{susp}_{n-1}(\partial_i^\varepsilon g)_{(m,x)}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\sigma_i \mathrm{susp}_n(g)_{(m,x)} &= p_i^*\left(g(-)_{(-)} + \mathrm{d}x_1^2+\cdots+\mathrm{d}x_n^2\right)_{(m,x)} + \mathrm{d}x_i^2\\
&= g(p_i(x))_m + p_i^*\mathrm{d}x_1^2+\cdots+p_i^*\mathrm{d}x_n^2+\mathrm{d}x_i^2\\
&= \mathrm{susp}_{n+1}(\sigma_i g)_{(m,x)}.
\end{aligned}$$

□

遗憾的是，悬挂并不限制为立方映射 $\widetilde{\text{susp}}_\bullet\colon \mathcal{R}^+_\bullet(M) \to \mathcal{R}^+_\bullet(M)$。如果块映射 g 的参数“变化过快”，那么 $\text{susp}_n(g)$ 的标量曲率在某些点处可能非正。这可以

。已在以下例子中见过：$2D^n \setminus D^n$ 上的欧几里得度量用极坐标表示时，是曲线 $[1,2] \to \text{Riem}^+(S^{n-1})$ 的悬挂，该曲线由 $r \mapsto r^2 \cdot g_{S^{n-1}}$ 给出，其中 $g_{S^{n-1}}$ 是标准圆度量。

稍后我们将构造一个弱等价的 Kan 子集 $A_\bullet$，属于 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$，使得 $\widetilde{\text{悬挂}}_\bullet|_{A_\bullet}$ 的取值落在 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$中。但我们希望这个立方子集 $A_\bullet$ 能适应我们将在第 4 章发展的指标理论。因此，我们将 $A_\bullet$ 的构造推迟到第 5 章。

3.2 特殊子流形的构造

本节的主要结果——定理 3.2.2——是一个嵌入结果。对于每个给定的块度量，它使我们能够找到一族规整嵌入的超平面：这些平面只沿着块度量为欧几里得度量的方向弯曲。更准确地说，这些超平面的单位法向量场始终位于一个子空间中，而给定的块度量在该子空间上的限制就是欧几里得度量。

该定理在证明 Kan 性质中的应用有两方面。存在这些超平面，就能得到一个开柱状邻域，我们可以在其中以一种方式变形块度量，使结果在圆柱的一端具有乘积结构。其次，该定理给出了一个微分同胚，我们将用它把给定初始 n-角上的（某个开邻域内的）修改后度量“推送”到整个立方体上。

我们先定义一些 $\mathbb{R}^n$ 的特定子集，这些子集将在证明嵌入定理以及整篇论文中用到。

定义 3.2.1. 对于每个 $\boldsymbol{\alpha}\colon \{1,\dots,n\} \to \mathbb{Z}_3 = \{0,\pm 1\}$ 和每个 $\rho > 0$，我们定义开子集

$$V_\rho(\boldsymbol{\alpha}) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \boldsymbol{\alpha}(i)x_i > \rho - 1 \text{ if } i \in \operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}, x_i \in (-\rho,\rho) \text{ if } \boldsymbol{\alpha}(i) = 0\}.$$

对于 $\rho > 0$和 $(i,\varepsilon) \in \{1,\dots,n\} \times \mathbb{Z}_2$，定义朝向无限半立方体开集$(i,\varepsilon)$ 为

$$\text{Cub}^\rho_{n,i,\varepsilon} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \varepsilon x_i \geq -\rho,\ x_j \in [-\rho,\rho] \text{ if } j \neq i\}.$$

开子集 $V_\rho(\boldsymbol{\alpha})$ 应视为 $\mathbb{R}^n$ 的一个开分割，其中只有一个相对紧集 $V_\rho(\mathbf{0})$，参见图 3.2 ，图中我们选择了 ρ 足够大，使得 ρ 与 $\rho - 1$ 之间的差异不可见。

对于每个 $\boldsymbol{\alpha}\colon \{1,\dots,n\} \to \mathbb{Z}_3$，令 $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}|_{\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}}$。元组 $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$参数化这些方向上的坐标 $V_\rho(\boldsymbol{\alpha})$ 无界；更重要的是，就我们的目的而言，它指出了块度量在哪个坐标方向上分解。另请注意，$U_{\rho-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 是所有满足 $\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}' \supseteq \operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}$ 的 $V_\rho(\boldsymbol{\alpha}')$ 的并集。

定理 3.2.2 (嵌入定理)。 对于所有 $\rho > 5$，存在一个光滑超曲面 $H \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Cub}_{n\,1}^{\rho-4}{}_{,,1}$ 以及一个嵌入 $\Phi\colon \quad H \times [1,2] \to \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Cub}_{n\,1}^{\rho-4}{}_{,,1}$，满足以下性质：对于所有 $\boldsymbol{\alpha}$:

1. (i) 将 $V_{\rho-4}(\boldsymbol{\alpha})$ 与 $(-\rho+4, \rho-4)^{\mathrm{Null}(\boldsymbol{\alpha})} \times \mathbb{R}^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_{\rho-5}$识别的置换，将 $H \cap V_{\rho-4}(\boldsymbol{\alpha})$ 与 $(-\rho+4, \rho-4)^{|\mathrm{Null}(\boldsymbol{\alpha})|} \times H^{\hat{}\boldsymbol{\alpha}}$ 识别，其中某个超曲面为 $H^{\hat{}\boldsymbol{\alpha}} \subseteq \mathbb{R}^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_{\rho-5}$。*(ii)* 在此识别下，嵌入 Φ 对应于 恒等函数 $\times\, \Phi^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}$。*(iii)* 在一个紧集之外， $\Phi_t(x) = x - (t-1.9)e_1$。

2. 超曲面 H 将 $\mathbb{R}^n$ 分为两个无界开子集。若 U_{left}表示包含 $\Phi(H \times \{2\})$的那个分支，则存在一个微分同胚

$$\Psi_n \colon U_{left} \cup \Phi(H \times [1,2]) \to \{x_1 \leq \rho + 1\}$$

它在 $\Phi(H \times [1.8, 2])$ 上以及在 $\Phi(H \times [1,2])$的某个紧子集之外均为恒等函数。

3. 存在光滑映射 $h\colon [1,2] \to \mathrm{Riem}(H)$ 和 $f\colon [1,2] \to \mathbb{R}_{>0}$，它们在紧集 K 之外为常值，分别取值于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^{n-1}}$ 和 1，使得

$$(\Phi^* \langle\cdot,\cdot\rangle)_{(p,t)} = h(t)_p + f^2(p,t)\mathrm{d}t^2.$$

事实上，在 $\Phi^{-1}(H \cap V_{\rho-4}(\boldsymbol{\alpha}))$上，度量曲线 h 分解为 $t \mapsto \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n(\hat{}\boldsymbol{\alpha})} \oplus h^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}(t)$，而映射 f经由 $\mathbb{R}^{\hat{}\boldsymbol{\alpha}}_{\rho-5}$分解。

遗憾的是，这个定理的证明相当技术性，整节内容都专门用于证明它。因此，定理的表述方式使读者在初读时可以放心地暂且接受它，而不必深究。之后我们不会用到其证明中的细节，以下定义是唯一的例外。不过，看看这里展示的图片或许会有所帮助。

定义 3.2.3. 对于 $\rho > 2$，令 $\mathsf{aux}_\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 为满足以下条件的光滑凸函数

$$\mathrm{aux}_\rho^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}_{\leq \rho-2} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{aux}_\rho|_{\mathbb{R}_{\geq \rho}} = \mathrm{id} - (\rho - 1).$$

定义骰子函数 $\mathrm{dice}_{n,\rho}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 如下

$$\mathrm{dice}_{n,\rho}(x) \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \mathrm{aux}_\rho(|x_j|).$$

取值约为 $\mathrm{dice}_{n,\rho}$ 的水平集1 看起来像一个角经过圆滑化的立方体，见图3.3，因此得名。下文中，我们将 $\mathsf{dice}_{2,\rho}$ 简记为 dice。固定 $0 < \varepsilon < (\rho-2)/2$ 并令

$$\mathrm{dice}^l \coloneqq \mathrm{dice}|_{\{x_1 < \varepsilon\}}.$$

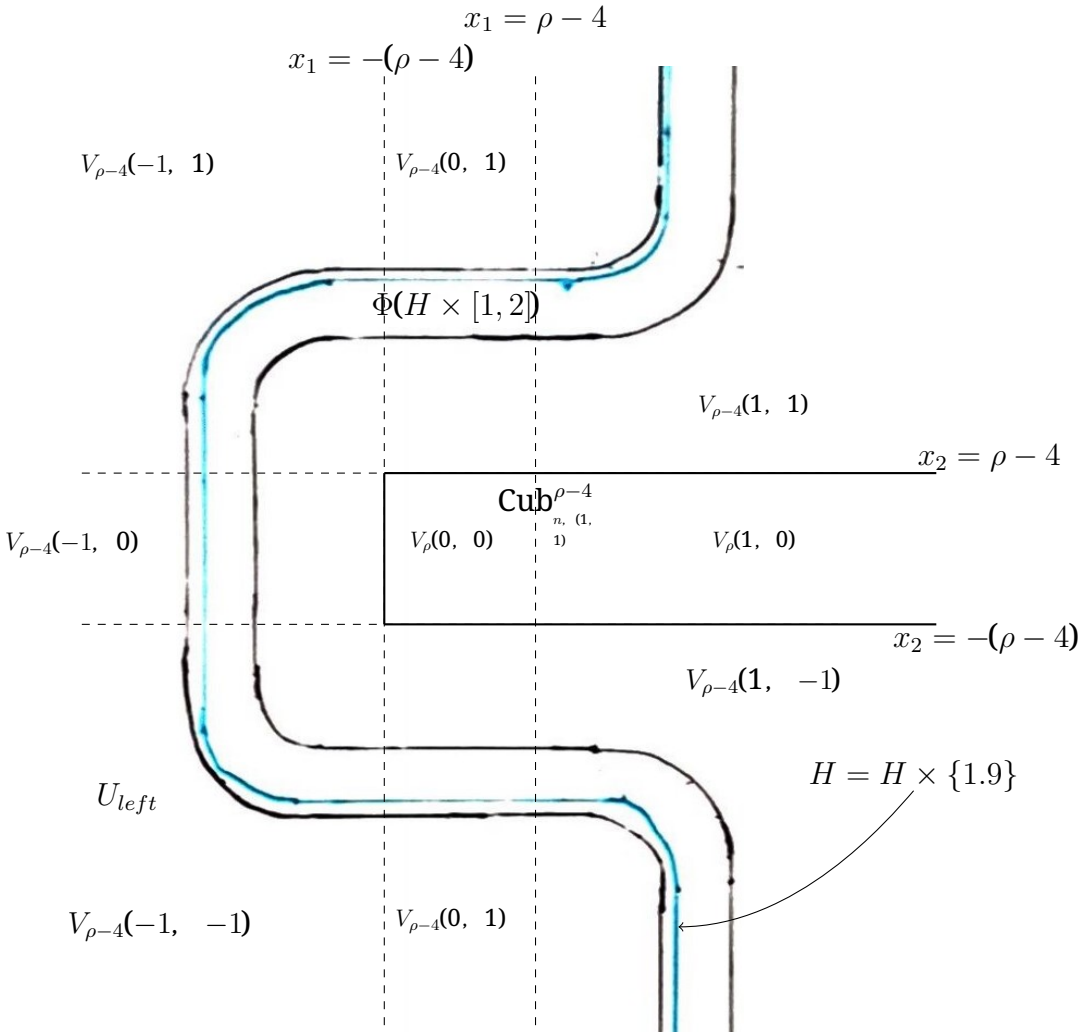


图 3.2： $\Phi(H \times [1,2])$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的形状，此处取 $n = 2$。集合 H 与 $\Phi(H \times \{1.9\})$ 有典范同一性。

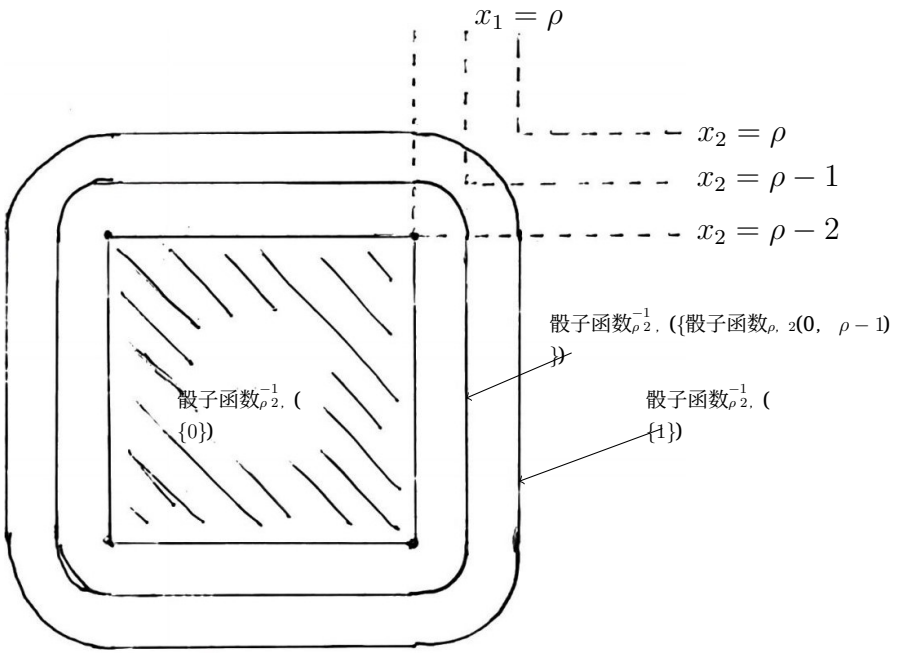


图3.3：骰子函数的水平集。回想一下，骰子函数$_{\rho,\ 2}$(0, ρ) $= 1$ 是通过构造得到的。

此外，我们定义

$$\begin{aligned}\mathrm{dice}^o(x_1, x_2) &\coloneqq -\mathrm{dice}(x_1, x_2 - (2\rho + 1)) + 3 \quad \text{on } (-\varepsilon, \rho + 1] \times [\rho, \rho + 4],\\ \mathrm{dice}^u(x_1, x_2) &\coloneqq -\mathrm{dice}(x_1, x_2 + (2\rho + 1)) + 3 \quad \text{on } (-\varepsilon, \rho + 1] \times [-\rho, -(\rho + 4)]\\ &= \mathrm{dice}^o(x_1, -x_2).\end{aligned}$$

引理3.2.4。 函数 dice^l和 dice^o在 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [\rho, \rho+1]$上一致，而 dice^l和 dice^u 在 $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [-(\rho + 1)\ -\rho]$上一致。

证明。 对于 $(x_1, x_2) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [\rho, \rho + 1]$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{dice}^o(x_1, x_2) &= -\mathrm{dice}(x_1, x_2 - (2\rho + 1)) + 3 = -\mathrm{aux}_\rho(|x_2 - (2\rho + 1)|) + 3\\ &= -\left(|x_2 - (2\rho + 1)| - (\rho - 1)\right) + 3\\ &= -\left(2\rho + 1 - x_2 - (\rho - 1)\right) + 3\\ &= x_2 - (\rho - 1) = \mathrm{dice}^l(x_1, x_2),\end{aligned}$$

这里我们使用了 $|x_2 - (2\rho + 1)| \in [\rho, \rho + 1]$，从第一行得到第二行。第二个结论由第一个结论推出，因为 $\mathrm{dice}^l(x_1, x_2) = \mathrm{dice}^l(x_1, -x_2)$ 且 $\mathrm{dice}^u(x_1, x_2) = \mathrm{dice}^o(x_1, -x_2)$。 □

在 $[\rho, \rho + 1] \times [\rho + 3, \rho + 4]$ 上，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{dice}^o(x_1, x_2) &= -\left(\mathrm{aux}_\rho(|x_1|) + \mathrm{aux}_\rho(|x_2 - (2\rho + 1)|)\right) + 3\\ &= -\left(x_1 - (\rho - 1)\right) + 0 + 3\\ &= -(x_1 - \rho) + 2\end{aligned}$$

类似地，在 $[\rho,\rho+1]\times[-(\rho+4)\ -(\rho+3)]$ 上，我们有

$$\mathrm{dice}^u(x_1,x_2)=-(x_1-\rho)+2.$$

这使我们能够合并这些函数。对于

$$\begin{aligned}Q_1&\coloneqq\big([-\varepsilon,\rho]\times[\rho,\rho+1]\big)\cup\big([\rho-2,\rho+1]\times[\rho,\rho+4]\big),\\ Q_2&\coloneqq\big([-\varepsilon,\rho]\times[-(\rho+1),-\rho]\big)\cup\big([\rho-2,\rho+1]\times[-(\rho+4),\rho]\big),\end{aligned}$$

我们定义

$$\mathtt{d}_\rho(x)\coloneqq\begin{cases}\mathrm{dice}^o(x), & \text{if } x\in Q_1,\\ \mathrm{dice}^u(x), & \text{if } x\in Q_2,\\ \mathrm{dice}^l, & \text{if } x\in\{x_1<\varepsilon\},\\ -(\mathrm{pr}_1-\rho)+2, & \text{if } x\in[\rho,\rho+1]\times[-(\rho+3),\rho+3]^c.\end{cases}$$

引理 3.2.5. $\mathrm{dice}_{n,\ \rho}$ 的正则值集合为 $\mathbb{R}_{>0}$。区间 $[1,2]$ 是 $\mathtt{d}_\rho$的一个正则值集合。

证明。由于 aux_ρ 是一个光滑的凸函数，其导数单调递增。由于它的零点集为 $\mathbb{R}_{\rho-2}$，导数 aux'_ρ 在 $\mathbb{R}_{>\rho-2}$上必为正。第一个断言由此可得

$$\mathrm{d}\,\mathrm{dice}_{n,\rho}=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{sgn}(x_j)\mathrm{aux}'_\rho(|x_j|)\mathrm{d}x_j.$$

只需对每个加项证明第二个断言。对于

$$-(\mathrm{pr}_1-\rho)+2\colon[\rho,\rho+1]\times[-(\rho+3),\rho+3]^c\to\mathbb{R},$$

无需证明。第一个断言意味着 dice^o 和 dice^u 只有一个奇异值，即 3。由于 dice^l 是 dice 在 $\{x_1<\varepsilon\}$ 上的限制，它只有一个奇异值，即 0。因此，$[1,2]$ 确实是 $\mathtt{d}_\rho$ 的正则值集合。

□

类似的论证还可得到以下引理。

引理 3.2.6。若 $\partial_j\mathtt{d}_\rho(x)\neq0$，则 $|x_j|>\rho-2$。

证明。只需对每个加项证明该结论。对于 $-(\mathrm{pr}_1-\rho)+2$，无需证明，因为其定义域中的所有点都满足所述不等式。

所有 $x\in\mathrm{dom}(\mathrm{dice}^o)$ 都满足 $|x_2|>\rho-2$，因此只需对 $\partial_1\mathrm{dice}^o$ 检查该结论。由于 aux'_ρ 单调递增，且 $\mathrm{aux}_\rho^{-1}(\{0\})=\mathbb{R}_{\rho-2}$，条件

$$(\partial_1\mathrm{dice}^o)(x)=\partial_1\mathrm{aux}(|x_1|)=\mathrm{sgn}(x_1)\mathrm{aux}'_\rho(|x_1|)\neq0$$

等价于 $|x_1|>\rho-2$。

由于 $\mathrm{dice}^u(x_1,x_2)=\mathrm{dice}^o(x_1,-x_2)$，该结论对于 dice^u 也成立。

对于 dice^l，我们由

$$\partial_j\mathrm{dice}^l(x)=\mathrm{sgn}(x_j)\mathrm{aux}'_\rho(|x_j|)\neq0,$$

即 $|x_j|>\rho-2$。

□

我们希望以一种“骰子旋转”的方式将这一构造推广到任意维数。为此，我们需要一个抽象的延拓结果。

引理 3.2.7. 对于所有 $\rho > 5$，存在一个函数 $\mathrm{dice}_{n-1,\rho}\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 满足：

(i) $\mathbb{R}_{\geq \rho-2}$ 在 $\mathrm{dice}_{n-1,\rho}$ 和 $\mathrm{dice}_{n-1,\rho-2} + \rho - 3$ 下的原像相同。此外，这两个函数在 $\widetilde{\mathrm{dice}}^{-1}_{n-1,\rho}(\mathbb{R}_{\geq \rho-2})$ 上相同。

(ii) $\mathrm{ddice}_{n-1,\rho} \neq 0$ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上。

(iii) 原点是 $\mathrm{dice}_{n-1,\rho}$ 唯一的局部极小值，其值为 0。

证明。 取一个光滑函数 $\chi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$，使其单调递增，满足 $\chi' \leq 1.2$，并具有以下原像： $\chi^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}_{\leq \rho-3}$ 和 $\chi^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}_{\geq \rho-2}$。 再取 $\mathtt{C}^{-1} > (n-1)\cdot(\rho-2)^2/(\rho-3)$，并将 $\mathrm{dice}_{n-1,\rho-2} + (\rho-3)$ 简记为 φ。定义

$$\widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(x) \coloneqq \varphi(x)\cdot\chi(\varphi(x)) + \mathtt{C}(1-\chi(\varphi(x)))\cdot||x||^2.$$

这两个函数 $\mathrm{dice}_{n-1,\ \rho}$ 和 φ 在 $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_{\geq \rho-2})$上相等。要证明（$i$），只需证明在补集 $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_{<\rho-2})$上 $\mathrm{dice}_{n-1,\ \rho} < \rho - 2$，从而两个函数的原像 $\mathbb{R}_{\geq \rho-2}$ 相同。根据 $\mathtt{C}$的选取，我们在 $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_{\leq \rho-2})$上有 $\mathtt{C}||x||^2 < \rho - 3$，因此第二个加项满足

$$\mathtt{C}(1-\chi(\varphi(x)))\cdot||x||^2 < \rho - 3.$$

S 由于 $\varphi \geq \rho - 3$，我们得出 $\mathrm{dice}_{n-1,\ \rho} < \varphi$，只要 $\chi\circ\varphi \neq 0$，于是（i）成立。显然，$\widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\ \rho} \geq 0$ 且原点映射到零。因此，（iii）由（ii）得出。

为证明（ii），我们计算

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_x\widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho} &= \big(\chi(\varphi(x)) + (\varphi(x) - \mathtt{C}||x||^2)\chi'(\varphi(x))\big)\mathrm{d}_x\varphi \\
&\qquad + 2\mathtt{C}(1-\chi(\varphi(x)))\cdot\sum_{j=1}^{n-1} x_j\cdot\mathrm{d}x_j \\
&= \sum_{j=1}^{n-1}\Big(\big(\chi(\varphi(x)) + (\varphi(x) - \mathtt{C}||x||^2)\chi'(\varphi(x))\big)\mathrm{aux}'_{\rho-2}(|x_j|)\mathrm{sgn}(x_j) \\
&\qquad\qquad + 2\mathtt{C}x_j(1-\chi(\varphi(x)))\Big)\mathrm{d}x_j.
\end{aligned}$$

由于 $(\varphi - \mathtt{C}||x||^2) \geq 0$ 在 $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_{\leq \rho-2})$ 上，特别是在支集 $(\chi'\circ\varphi)$ 上，这两项具有相同的奇偶性。第二项 $\mathtt{C}x_j(1-\chi(\varphi(x)))$ 仅当 $x_j = 0$ 或 $\varphi(x) \geq \rho - 2$时才为零。在后一种情况下，第一项不为零。因此，$\mathrm{d}_x\widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\ \rho}$ 仅在原点处为零。

□

我们使用此函数来定义

$$\mathfrak{d}_{n,\rho}(x) \coloneqq \mathtt{d}_\rho(x_1, \widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(x_2,\dots,x_n))$$

作为定义域为……的实值映射

$$\mathrm{dom}(\mathfrak{d}_{n,\rho}) = \left\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, (x_1, \widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(x_2,\dots,x_n)) \in \mathtt{d}_\rho^{-1}([1,2])\right\}.$$

注意到 $\mathfrak{d}_{2,\rho} = \mathtt{d}_\rho$ 因为 $\mathrm{dice}_{1,\rho-2}(x_2) + \rho - 3 = |x_2|$ 在 $\mathrm{dice}_{1,\rho-2}^{-1}(\mathbb{R}_{\geq\rho-2})$ 上，因为 $\mathtt{d}_\rho(x_1, x_2) = \mathtt{d}_\rho(x_1, |x_2|)$，且 $\mathtt{d}_\rho$ 在 $\mathrm{dom}\,\mathtt{d}_\rho \cap \{|x_2| < \rho - 2\}$ 上与 x_2 无关。

引理 3.2.8。 限制在 $\mathfrak{d}_{n,\rho}^{-1}([1,2])$ 上时，映射 $\mathfrak{d}_{n,\rho}$ 满足：

(i) 若 $\partial_j\mathfrak{d}_{n,\rho}(x) \neq 0$，则 $|x_j| > \rho - 4$。

(ii) $\mathfrak{d}_{n,\rho}^{-1}([1,2])$ 中的每一点都是正则点。

证明。 我们先证明第一个结论。对于 $j = 1$，假设

$$(\partial_1\mathfrak{d}_{n,\rho})(x) = (\partial_1\mathtt{d}_\rho)(x_1, \widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(x_2,\dots,x_n)) \neq 0,$$

推出 $|x_1| > \rho - 2$ 由引理 3.2.6。

对于 $j \geq 2$，假设

$$\partial_j\mathfrak{d}_{n,\rho}(x) = (\partial_2\mathtt{d}_\rho)(x_1, \widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(\dots)) \cdot \partial_j\widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(x_2,\dots,x_n) \neq 0$$

$\widetilde{\ }$ 意味着第一个因子不为零，由此得到 $\mathrm{dice}_{n-1,\rho}(x_2, \dots\dots, x_n) > \rho - 2$。由于在此定义域上 $\mathrm{dice}_{n-1,\rho} = \mathrm{dice}_{n-1,\rho-2} + (\rho - 3)$，我们有

$$\begin{aligned}\partial_j\widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(x_2,\dots,x_n) &= \partial_j\mathrm{dice}_{n-1,\rho-2}(x_2,\dots,x_n)\\ &= \mathrm{sgn}(x_j)\mathrm{aux}'_{\rho-2}(|x_j|) \neq 0,\end{aligned}$$

这意味着 $|x_j| > \rho - 4$。

假设 $x \in \mathfrak{d}_{n,\rho}^{-1}([1,2])$ 是一个奇点。由引理 3.2.5 可知，$(x_1, \mathrm{dice}_{n-1,\rho}(x_2, \dots\dots, x_n))$ 是 $\mathtt{d}_\rho$ 的一个正则点。如果 $\partial_1\mathtt{d}$ 在此点不为零，那么 $\mathfrak{d}_{n,\rho}(x) \neq 0$ 和 x 将是 $\mathfrak{d}_{n,\rho}$ 的一个正则点。因此，$\partial_j\mathrm{dice}_{n-1,\rho}(x) = 0$ 对所有 $2 \leq j \leq n$ 都成立，这意味着 $(x_2, \dots\dots, x_n)$ 是 $\mathbb{R}^{n-1}$ 的原点。由方程

$$0 = \partial_1\mathfrak{d}_{n,\rho}(x) = (\partial_1\mathtt{d}_\rho)(x_1, \widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(x_2,\dots,x_n)) = (\partial_1\mathtt{d}_\rho)(x_1, 0)$$

因此 $\mathfrak{d}_{n,\rho}(x) = \mathtt{d}_\rho(x_1, 0) \notin [1,2]$，这与我们的定义域假设相矛盾 . □

引理 3.2.9。 集合 $\mathfrak{d}_{n,\rho}^{-1}([1,2])$ 与长方体 $\mathrm{Cub}_{n\,1\,,,1}^{\rho-4} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq -(\rho-4)$ $x_j \in [-(\rho-4)\ \rho-4]\}$ 的闭包不相交。

证明。 每个点 $x \in \mathrm{Cub}^{\rho-4}_{n\,1\,,,1}$ 都满足 $\mathrm{dice}_{n-1,\ \rho-2}(x_2,\dots,x_n) = 0$。条件 (i) 给出 $\mathrm{dice}_{n-1,\ \rho}$ yields $\mathrm{dice}_{n-1,\ \rho}(x) < \rho - 2$。因此， x 要么不在 $\mathfrak{d}_{n,\ \rho}$的定义域内，要么

$$\begin{aligned}\mathfrak{d}_{n,\rho}(x) &= \mathrm{dice}^{l}(x_1, \widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(x_2,\dots,x_n)) \\ &= \mathrm{aux}_\rho(|x_1|) + \mathrm{aux}_\rho(|\widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(x_2,\dots,x_n)|) \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

定义 3.2.10. 设 $H_{..} = \mathfrak{d}^{-1}_{n\ ,\rho}(\{1.9\})$，并设 $\Phi\colon H \times [1,2] \to \mathfrak{d}^{-1}_{n\ ,\rho}([1,2])$ 为 $\mathfrak{d}_{n,\rho}$ 的（平移）梯度流的限制，使得 $\Phi_{1.9} = \mathrm{id}_H$。

回忆一下，（平移）梯度流是满足以下条件的唯一光滑映射

$$\Phi\colon \mathrm{dom}\,\Phi \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

它求解初值问题

$$(\partial_t \Phi)_{t_0}(x) = \frac{\mathrm{grad}(\mathfrak{d}_{n,\rho})}{||\mathfrak{d}_{n,\rho}||^2}(\Phi_{t_0}(x)) \qquad \text{and} \qquad \Phi_{1.9}(x) = x.$$

嵌入定理的证明. 由于 $\mathfrak{d}_{n,\rho}$ 在 $\mathfrak{d}^{-1}_{n\ ,\rho}([1,2])$ 上非退化，因此存在一个微分同胚

$$\begin{array}{ccc} \Phi\colon\ H \times [1,2] & \xrightarrow{\ \cong\ } & \mathfrak{d}^{-1}_{n\ ,\ \rho}([1,2]) \\ & {\scriptstyle \mathrm{pr}_2} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathfrak{d}_{n,\rho}} & \\ & [1,2], & \end{array}$$

例如，参见 [Hir94，第 153 页及以下] 处的证明。由引理 3.2.9， Φ 的像包含于$\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Cub}^{\rho-4}_{n\,1\,1,\ ,}$ 中。特别地， H 是这个开流形的一个超曲面。

我们甚至可以更详细地描述 Φ： 回顾定义 3.1.2， $\mathbb{R}^n(\varepsilon) = \mathrm{Abb}(n \setminus \mathrm{dom}\,\varepsilon, \mathbb{R})$，并且 $\mathbb{R}^{\varepsilon}_{\rho-5} = \{x \in \mathbb{R}^{|\mathrm{dom}\varepsilon|}\colon\ \varepsilon(i_j)x_j > \rho - 5\}$。通过置换坐标，我们将 $V_{\rho-4}(\boldsymbol{\alpha})$ 识别为 $(-(\rho-4)\ \rho-4)^{|\mathrm{Null}(\boldsymbol{\alpha})|} \times \mathbb{R}^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_{\rho-5}$。引理 3.2.8 表明， $\mathfrak{d}_{n,\rho}$ 与由 $\mathrm{Null}(\boldsymbol{\alpha})$ 参数化的点无关，因此在此识别下， $H \cap V_{\rho-4}(\boldsymbol{\alpha})$ 对应于 $(-\rho+4, \rho-4)^{|\mathrm{Null}(\boldsymbol{\alpha})|} \times H^{\hat{}\boldsymbol{\alpha}}$，其中$H^{\hat{}\boldsymbol{\alpha}} = \mathfrak{d}_{n,\rho}\restriction_{\mathbb{R}^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_{\rho-5}}(\{1.9\})$。此外，在此识别下，梯度流 $\widetilde{\Phi}$ 对应于 $\mathrm{id} \times \Phi^{\hat{}\boldsymbol{\alpha}}$。还要注意，如果 $\mathrm{dice}_{n-1,\rho}(x_2,\dots,x_n) > \rho + 3$ $\mathfrak{d}_{n\,\rho} = -e_1$ K $_\rho\ \mathbb{R}_{\le \rho+3}$ $\cap$，那么 $\mathfrak{d}^{-1}_n\ [1,2]$ $\Phi_t\ x = x + \ t - 1.9\ e_1$ 1 $\mathfrak{d}_{n,\rho}(x) = 2-(x_1-\rho)$，因此 $\mathrm{grad}(\ ,\ )$ 在紧子集 $_{..} = \widetilde{\ }\ \mathrm{dice}^{-1}_{n-1}(\ )\ ,_\rho(\ )$ 之外。于是，$(\ )\ (\ )$ 在此紧子集之外成立。因此，陈述 . 得证。

接下来我们证明命题 3。函数的梯度总是垂直于其水平集，因此

$$\Phi^*\langle\cdot,\cdot\rangle_{(x,t)} = h(t)_x + f^2(x,t)\mathrm{d}t^2,$$

其中 $h(t)$ 是诱导度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\Phi_t(H)}$，且 $f^2 = ||\mathrm{grad}(\mathfrak{d}_{n,\rho})||^{-2}$。在 $H \cap V_{\rho-4}(\boldsymbol{\alpha})$ 上，我们可以利用梯度流的分解得到更精细的分解

$$\Phi^*\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathbb{R}^n(\hat{\boldsymbol{\alpha}})} + h^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} + (f^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})^2\mathrm{d}t^2,$$

其中 $h^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}(t)$ 是诱导度量 $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\Phi_t^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}(H^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})}$，而 $(f^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})^2 = ||\mathrm{grad}(\mathfrak{d}_{n,\rho})||^{-2}$ 仅取决于由 $\mathrm{supp}\,\boldsymbol{\alpha}$ 参数化的那些坐标。由于 Φ 在 K 之外是一个平移，因此映射 h 和 f 分别为常值 $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{\mathbb{R}^{n-1}}$ 和 1。由此，陈述 3 得证。

为了证明陈述 2，我们将研究 $\mathfrak{d}_{n,\rho}([1,2])$ 的形状以及它如何位于 $\mathbb{R}^n$ 中。我们先考虑 $n=2$ 的情形。

由于 $\mathfrak{d}_2^{-1}{}_{,\rho}([1,2]) = \mathtt{d}_\rho^{-1}([1,2])$ 很容易看出，该集合将 $\mathbb{R}^2$ 分成两个无界区域 U_{left} 和 U_{right}，见图 。我们令

$$U_{left} \coloneqq \hat{U}_{left} \cup \mathfrak{d}_{2,\rho}^{-1}(\mathbb{R}_{>1.9}) \qquad \text{and} \qquad U_{right} \coloneqq \hat{U}_{right} \cup \mathfrak{d}_{2,\rho}^{-1}(\mathbb{R}_{<1.9})$$

使得 $H = \mathfrak{d}_2^{-1}{}_{,\rho}(\{1.9\})$。从直观上看，存在一个微分同胚 $\Psi\colon \mathtt{d}_\rho^{-1}([1,2]) \to \Psi(\mathtt{d}_\rho^{-1}([1,2]))$，它在 $\mathtt{d}_\rho^{-1}([1.8,2])$ 附近以及一个紧集之外是恒等函数；在直线 $\mathbb{R}e_1$ 附近，它的形式为 $\Psi(x_1,x_2) = (\Psi^{(1)}(x_1)\ x_2)$；而这些延拓到 U_{left} 后，通过恒等映射将 $U_{left} \cup \mathfrak{d}_n^{-1}{}_{,\rho}([1,2])$ 映至 $\{x_1 \le \rho+1\}$，见图 3.5。

对于高维情形，我们以一种“骰子对称”的方式延拓该微分同胚。令 $\Xi\colon \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^{n-1}\setminus\{0\}$ 为将 (x,t) 映至 $\Xi_t(x)$ 的映射，其中 $\Xi_t(x)$ 是 x 在（平移后的）梯度流作用下的像，且位于水平集 $\widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}^{-1}(\{t\})$ 中。定义

$$\Psi_n(x) \coloneqq \Big(\Psi^{(1)}(x_1, \widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(x_2,\dots,x_n)),\\ \Xi_{\Psi^{(2)}(x_1,\widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(x_2,\dots,x_n))}(x_2,\dots,x_n)\Big),$$

其中 $\Psi^{(j)}$ 表示 $\mathrm{pr}_j \circ \Psi$。其逆映射为

$$\Psi_n^{-1}(y) \coloneqq \Big((\Psi^{-1})^{(1)}(y_1, \widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(y_2,\dots,y_n)),\\ \Xi_{(\Psi^{-1})^{(2)}(y_1,\widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(y_2,\dots,y_n))}(y_2,\dots,y_n)\Big).$$

这两个映射都是光滑的，且互为逆映射。由于

$$\Xi_{\Psi^{(2)}(x_1,\widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(x_2,\dots,x_n))}(x_2,\dots,x_n) = (x_2,\dots,x_n)$$

i在 $\mathbb{R}e_1$ 的一个邻域内，这个赋值可扩展为一个光滑微分同胚

$$\Psi_n\colon \mathrm{dom}(\mathfrak{d}_{n,\rho}) \to \{x\in\mathbb{R}^n : (x_1,\widetilde{\mathrm{dice}}_{n-1,\rho}(x_2,\dots,x_n)) \in \mathrm{im}\Psi(\mathrm{dom}(\mathtt{d}_\rho))\}.$$

由于 Ψ 在 $\mathtt{d}_\rho^{-1}([1.8,2])$ 上及某个紧集之外都是恒等函数，微分同胚 Ψ_n 在 $\mathfrak{d}_n^{-1}{}_{,\rho}([1.8,2])$ 上及某个紧集之外都是恒等函数。我们通过以下方式将其扩展

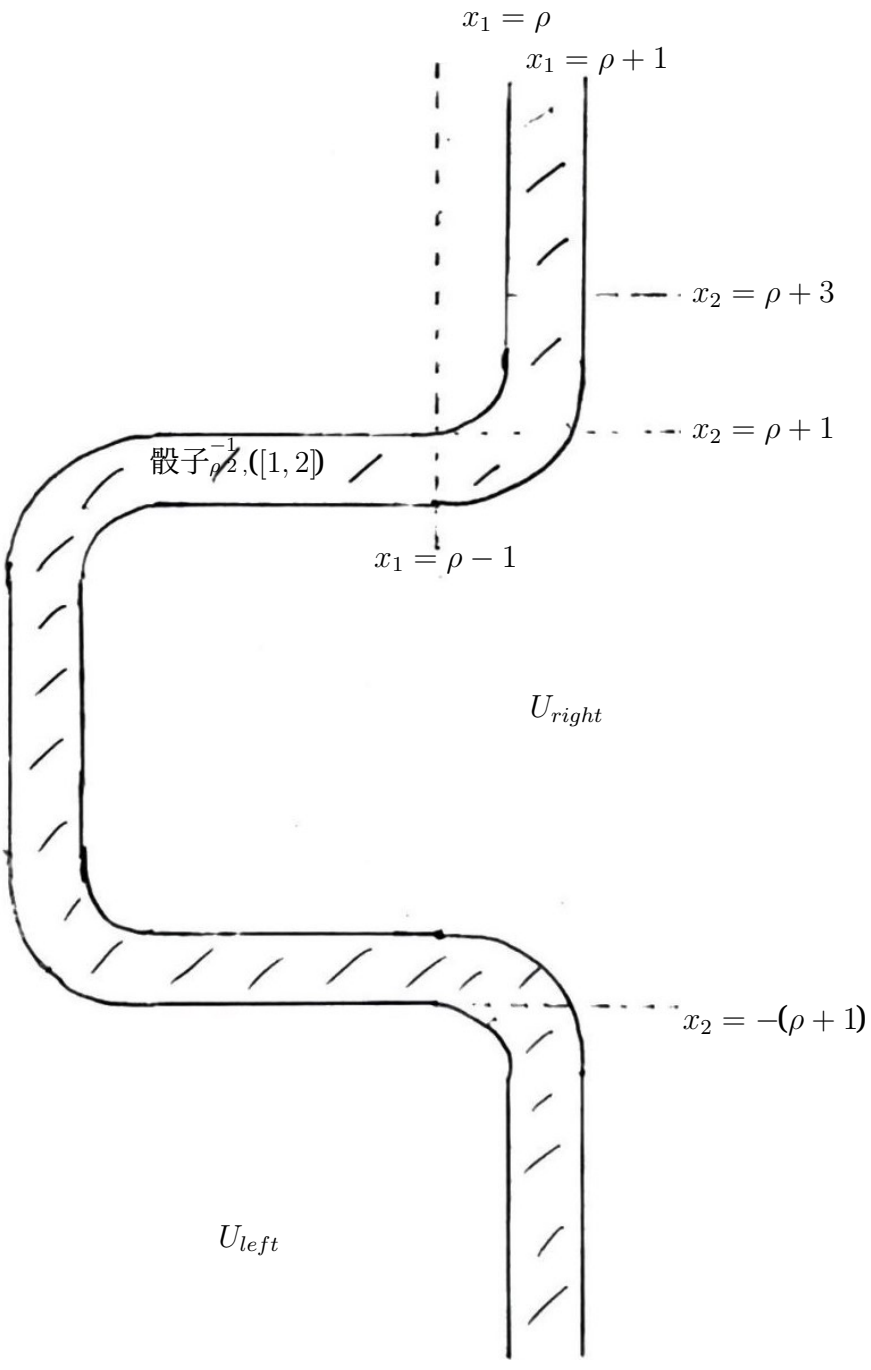


图3.4: $\mathbb{R}^2$ 被$\mathfrak{d}_2^{-1}{}_{,\rho}([1,2])$的分离。

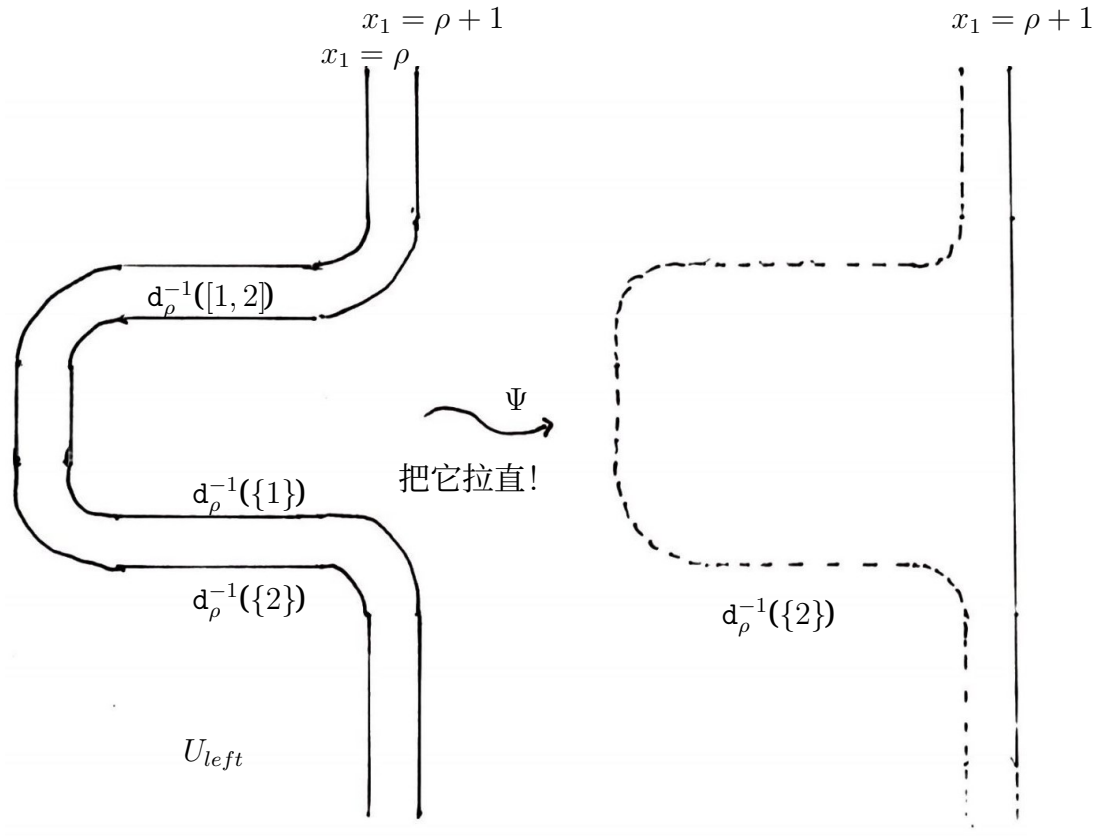


图 3.5：微分同胚 Ψ “拉伸” $\mathtt{d}_\rho^{-1}([1,2])$，使得 $\mathtt{d}_\rho^{-1}(\{1\})$ 变成一条直线，而 $\mathtt{d}_\rho^{-1}(\{2\})$ 保持不变。

⁀将恒等函数“向左”移至 U_{left} ..= $\{x \in \mathbb{R}^n : (x_1, \mathrm{dice}_{n-1,\ \rho}(x_2, \ldots, x_n)) \in U_{left}\}$。这给出了一个微分同胚

$$\Psi_n : U_{left} \cup \mathfrak{d}_{n,\rho}^{-1}([1,2]) \to \{x_1 \leq \rho + 1\}$$

它具有与 $\Psi = \Psi_2$ 相同的性质。请注意，这尤其意味着 H 与 $\mathbb{R}^{n-1}$ 微分同胚。□

3.3 协和集的 Kan 性质

本节旨在证明定理 A，可以将其视为通往组合世界的开罐器。其精确表述如下：

⁀**定理 3.3.1**。 对于每个闭正标量曲率流形 M，共边集 $\mathcal{R}_\bullet^+(M)$ 都是 *Kan* 集。

证明需要以下技术性引理。

引理3.3.2（度量修改）。 设 g 是 $M \times \mathbb{R}^n$ 上的块度量，且在 $M \times \rho/2I^n$ 之外对 $\rho > 20$ 分解。进一步假设，对于所有 $\partial_j^\omega g$，$(j,\ \omega) \neq \in (1,\ 1)$ 时，H 是正标量曲率度量。设 Φ 和 如嵌入定理 3.2.2中所述，并设 ${}_R\Phi$ ..= $R \cdot \Phi \circ (\mathrm{id} \times R^{-1}) : H \times [R, 2R] \to M \times \mathbb{R}^n$。

那么，对于所有 $R \geq 1$，在 G_R 上存在一个度量，使其在 $M \times R\Phi(H \times [1,2])$ 上满足 *s:*

(o) 存在一个 $R_0 > 0$，使得 $\mathrm{scal}(G_R) > 0$ 当 $R > R_0$ 时成立。

(i) 拉回 $({}_R\Phi)^* G_R$ 与 $({}_R\Phi)^* g$ 在 $M \times H \times [1.8R, 2R]$ 上以及在 $M \times H \times [R, 2R]$ 的某个紧子集的补集上相同。

(ii) 拉回$({}_R\Phi)^* G_R$ 是 $M \times H \times [R, 1.2R]$ 上的乘积度量。更确切地说，

$$({}_R\Phi)^* G_R = ({}_R\Phi)^* G_R \restriction_{M \times H \times \{R\}} \oplus \mathrm{d}t^2.$$

证明。 回顾开子集

$$V_\rho(\boldsymbol{\alpha}) \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \ :\ \boldsymbol{\alpha}(i) x_i > \rho - 1 \text{ if } i \in \operatorname{supp} \boldsymbol{\alpha}; x_i \in (-\rho, \rho) \text{ otherwise}\},$$

对所有 $\boldsymbol{\alpha}$: $\{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}_3$。另回顾记号 $\hat{}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}|_{\operatorname{supp} \boldsymbol{\alpha}}$。我们有以下有限分解

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Cub}_{n,1,1}^\rho = \bigcup \{V_\rho(\boldsymbol{\alpha}) \ :\ \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}, (1, 0, \ldots, 0)\}.$$

设 H 和 Φ 如嵌入定理中所述。那么子集 $R\Phi(H \times [1,2])$ 仍然位于 $\mathrm{Cub}_{n,1,1}^\rho$ 的补集内，对所有 $R \geq 1$均成立。块度量 g 在$M \times V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha})$ 上分解为 $\partial^{\hat{}\boldsymbol{\alpha}} g \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle$。结合嵌入定理 3.2.2 可得

$$\begin{aligned}
{}_R\Phi^*(g|_{V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha})}) &= ((\mathrm{id} \times (\Phi^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} \circ (\mathrm{id} \times R^{-1}))))^* R^* (\partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle) \\
&= R^* \partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g \oplus R^2 (\mathrm{id} \times R^{-1})^* \Phi^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}^*} \langle \cdot, \cdot \rangle \\
&= R^* \partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g \oplus R^2 h^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}(-, R^{-1} \cdot) + (f^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})^2(-, R^{-1} \cdot) \mathrm{d}t^2 \\
&= R^* \partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g \oplus R^2 {}_R h^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} + {}_R(f^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})^2 \mathrm{d}t^2 \\
&=: h_R^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} + f_R^2 \mathrm{d}t^2
\end{aligned}$$

这些分解汇集成（全局）分解

$$({}_R\Phi)^* g = h_R + f_R^2 \mathrm{d}t^2.$$

定义辅助度量 $k_{\mathrm{aux},R} \in \mathsf{Riem}(M \times H \times [R, 2R])$ 如下

$$k_{\mathrm{aux},R}(m, x, t) \coloneqq h_R(m, x, 1.1 \cdot R) + \mathrm{d}t^2$$

并选取一个光滑函数 $\chi\colon [1,2] \to [0,1]$，它在 $[1, 1.2]$ 上恒为零，在 $[1.8, 2]$ 上恒为 $\mathbf{1}$。进一步令 ${}_R\chi(t) = \chi(R^{-1}t)$。

我们定义 $k_R \in \mathsf{Riem}(M \times H \times [R, 2R])$ 如下

$$k_R \coloneqq (1 - {}_R\chi)\left(k_{\mathrm{aux},R} + \mathrm{d}t^2\right) + {}_R\chi\left(h_R + f_R^2 \mathrm{d}t^2\right)$$

并定义

$$G_R \coloneqq ({}_R\Phi)_*(k_R).$$

下文中，若 $R = 1$，我们省略下标 R。为证明命题（i），我们断言该度量在 $M \times H \times [1.8R, 2R]$ 上以及某个紧集的补集上与 ${}_R\Phi^*(g)$ 一致，从而 G_R 在 $M \times {}_R\Phi(H \times [R, 1.2 \cdot 2])$ 上以及某个紧子集之外与 g 一致。第一个断言由 $\chi \equiv 1$ 在 $[1.8, 2]$ 上立即得出。第二个断言源于存在一个紧集 C，使得 $H \setminus C$ 是 $\{x_1 = \rho + 1\}$ 的开子流形，并且 Φ 限制为 $H \setminus C \times [1,2]$ 上的 $(x, t) \mapsto x - (t - 1.9)e_1$，因此在 $H \setminus C \times [R, 2R]$ 上，拉回 ${}_R\Phi^* g$ 分解为

$$({}_R\Phi)^* g = (R\Phi \circ \mathrm{id} \times R^{-1})^*(\partial_1^1 g \oplus \mathrm{d}x_1^2) = R^*(\partial_1^1 g) + \mathrm{d}t^2.$$

因此，在 $H \setminus C \times [R, 2R]$ 上，曲线 $h_R \equiv R^*(\partial_1^1 g)$ 和映射 $f_R \equiv 1$ 是常数，因此 $k_R = ({}_R\Phi)^* g$ 在那里成立。

为了证明 (o)，我们声称，只要 R 足够大，k_R（因此 G_R）就是一个正标量曲率度量。事实上，在 $V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha})$ 上，当 $\boldsymbol{\alpha} \notin \{\mathbf{0}, (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})\}$ 时，度量 k_R 分解为

$$\begin{aligned} k_R &= R^* \partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g \oplus \left((1 - {}_R\chi)(h_R(\cdot, 1.1R) + \mathrm{d}t^2) + {}_R\chi(h_R + f_R^2 \mathrm{d}t^2)\right)|_{V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha}) \times [R, 2R]} \\ &= R^* \partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g \oplus \left((1 - {}_R\chi)(R^2 {}_R h^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}(\cdot, 1.1R) + \mathrm{d}t^2) + {}_R\chi(R^2 {}_R h^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} + ({}_R f^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})^2 \mathrm{d}t^2)\right) \\ &= R^* \partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g \oplus R^2 {}_R\left((1 - \chi) h^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}(\cdot, 1.1R) + \chi h^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}\right) + {}_R\left((1 - \chi) + \chi (f^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})^2\right) \mathrm{d}t^2 \end{aligned}$$

由于 $\Phi_t(x) = x - (t - 1.9)e_1$ 在紧集 C 之外，度量 k_1 和 $\Phi^* g$ 在 C 之外相同，并且 h_R 在那里是正标量曲率度量。因此，对于所有 $R \geq 1$，度量 k_{aux}、${}_R$ 和 $h_R^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}$ 在 C 之外相同，且在那里具有正标量曲率。此外，对于 $R = 1$，我们可以找到正常数 $\mathsf{Const}(\boldsymbol{\alpha})$，使得

$$\left|\mathrm{scal}\left((1 - \chi)(h^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}(\cdot, 1.1) + \mathrm{d}t^2) + \chi(h^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} + (f^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})^2 \mathrm{d}t^2)\right)\right| \leq \mathrm{Const}(\boldsymbol{\alpha})$$

因为两个度量不一致的定义域是紧的。

推论C.1.3 意味着

$$\mathrm{scal}\left(R^2 {}_R\left((1 - \chi) h^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}(\cdot, 1.1) + \chi h^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}\right) + {}_R\left((1 - \chi) + (f^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})^2\right) \mathrm{d}t^2\right) \xrightarrow{R \to \infty} 0.$$

此外，对于 $\partial^{\hat{\alpha}} g$ 为具有正标量曲率的块度量的情形，$\mathrm{scal}(R^* \partial^{\alpha} g) = \mathrm{scal}(\partial^{\hat{\alpha}} g) \circ R$ 有一个与 R无关的正数下界。综合这些事实，我们可以选取 R 充分大，使得 $\mathrm{sc\,al}(k_R)$ 在 $(H \cap V_{\rho-4}(\alpha)) \times [R, 2R]$ 上为正。由于所有 $H \cap V_{\rho-4}(\alpha)$ 构成了 H 的有限覆盖，我们可以找到一个 $R_0 > 0$，使得对于所有 $R > R_0$，$\mathrm{scal}(k_R) > 0$。

所需度量的一种选取，是在 $M \times {}_R\Phi(H \times [R, 2R])$ 上满足 $({}_R\Phi)^* G_R = k_R$ 的唯一度量 G_R。 □

现在我们可以证明 Kan 性质。

定理的证明 *3.3.1*。假设我们给定了一个立方 n-角 $\sqcap^n_{(i,\varepsilon)}$，它由以下块度量集合表示

$$\{g_{(j,\omega)} \in \widetilde{\mathcal{R}^+_{n-1}}(M) : \partial^{\omega}_j g_{(k,\eta)} = \partial^{\eta}_{k-1} g_{(j,\omega)} \text{ for } j < k; (j,\omega), (k,\eta) \neq (i,\varepsilon)\}.$$

该问题关于 (i, ε) 对称，因此我们不妨假设 $(i, \varepsilon) = (1, 1)$。我们选取一个足够大的 $\rho > 20$，使得所有给定的块度量 $g_{(j,\omega)}$ 都在 $M \times \rho/2 I^{n-1}$ 之外分解。根据假设，块度量 $g_{(j,\omega)}$ 具有匹配的面，因此黎曼度量 $\sigma_j g_{(j,\omega)}|_{\{\omega x_j > \rho-4\}}$ 在其定义域的交集上相同，见引理 3.1.9。于是，所有满足 $(j, \omega) \neq (1, 1)$ 的 $\sigma_j g_{(j,\omega)}|_{\{\omega x_j > \rho-4\}}$ 的并集构成了 $M \times \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Cub}^{\rho-4}_{n\,1\,1,\ ,}$ 上的光滑正标量曲率度量 g。

根据命题 3.1.8 的证明，我们可以在 $M \times \mathbb{R}^n$ 上找到一个块度量，使其在 $M \times \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Cub}^{\rho-2}_{n\,1\,,,1}$ 上与 g 一致，具体如下：首先，证明表明，我们可以将 $g|_{\{x_1=c\}}$ 延拓为 $\{x_1 = c\}$ 上的块度量，使其对所有 $c > \rho - 4$ 都在 $M \times \{c\} \times \mathbb{R}^{n-1} \setminus (\rho-2) I^{n-1}$ 上与 g 一致。由于 $g|_{\{x_1=c\}}$ 不依赖于 c，因此可以选择一个与 c 无关的延拓。这些延拓拼合成 $M \times \mathbb{R}^n \setminus (\rho-4) I^n$ 上的一个光滑度量 g_{aux}。再次应用命题 3.1.8 的证明，可得到一个块度量，使其在 $(\rho-2) I^n$ 之外与 g_{aux} 一致；特别地，它在 $M \times \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Cub}^{\rho-2}_{n\,1\,1,,}$ 上与g 一致。我们仍将此延拓记为 g。当然，我们并未声称 g 的这一延拓在整个流形 $M \times \mathbb{R}^n$ 上的标量曲率均为正。

设 H、Φ 和 $U_{left} \subset \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{Cub}^{\rho-4}_{n\,1\,\ ,1}$，如嵌入定理 3.2.2 中所述。根据度量修改引理 3.3.2，对于所有充分大的 R，我们可以在 $M \times R\Phi(H \times [1, 2])$ 上找到一个正标量曲率度量 G_R，它在 $M \times R\Phi(H \times [1, 2])$ 的某个紧子集之外与 g 一致，并且可以通过 g 延拓到 $M \times (R \cdot U_{left} \setminus R\Phi(H \times [1, 2]))$ 上，成为光滑正标量曲率度量。这个延拓仍记为 G_R。根据嵌入定理 3.2.2 第 2 条，集合 $U_{left} \cup \Phi(H \times [1, 2])$ 通过 Ψ_n 与 $\{x_1 \leq \rho + 1\}$ 微分同胚；集合 $R \cdot U_{left} \cup R\Phi(H \times [1, 2])$ 通过 ${}_R\Psi_n$ 与 $\{x_1 \leq (\rho + 1)R\}$ 微分同胚。由于 ${}_R\Phi^* G_R$ 是 $H \times [R, 1.2R]$ 上的乘积度量，度量 $({}_R\Psi_n^{-1})^* G_R$ 也是带领圈的，领圈长度为 $0.2R$。这意味着存在一个（必然唯一的）领圈映射 ${}_R\kappa$：$M \times \{x_1 = (\rho+1)R\} \times (-0.2R, 0] \to M \times \{x_1 \leq (\rho + 1)R\}$，使得 ${}_R\kappa^* ({}_R\Psi_n^{-1})^* G_R$ 是乘积度量。

领圈 ${}_R\kappa$ 可能不是标准领圈（m，x，t）$\mapsto$（m，$x + te_1$），但它们在一个紧集之外一致。这由以下事实得出：${}_R\Psi_n$ 在一个紧集之外是恒等函数，因此（${}_R\Psi_n^{-1}$）$^* G_R$ 在一个紧集之外与 g 一致。由于在某个固定紧集之外一致的领圈构成的集合是可缩的，我们得到

一个微分同胚 ${}_R\Theta\colon\ M\times\{x_1\le\ (\rho+1)\ R\}\to M\times\{x_1\le\ (\rho+1)\ R\}$，它在一个紧集之外是恒等函数，并将标准领圈映射到 ${}_R\kappa$。事实上，该陈述的证明使我们可以假设 ${}_R\Theta\circ{}_R\kappa$ 在 $M\times\{x_1=\ (\rho+1)\ R\}\times\ (-R/10,\ 0]$ 上与标准领圈一致。

现在，我们可以用乘积度量 $({}_R\Psi_n^{-1})^*G_R\restriction_{\{x_1=(\rho+1)R\}}\oplus\mathbf{d}x_1^2$，将度量 ${}_R\Theta^*({}_R\Psi_n^{-1})^*G_R$ 从 $\{x_1\le(\rho+1)R\}$ 延拓到 $M\times\mathbb{R}^n$。所得度量 g_{fill} 是一个具有正标量曲率的块度量。此外，对于所有 $(j,\ \omega)$，它都满足 $\partial_j^\omega g_{\text{fill}}=g_{(j,\omega)}$，因为在一个足够大的长方体 $\mathsf{Cub}_{n\ 1}^{?\cdot R}{}_{,\ ,\ 1}$的补集上，它与 g 一致。

因此，g_{fill} 是给定 n-角的一个填充子，所以 $\mathcal{R}_\bullet^+(M)$ 是一个 Kan 集。 □

3.4 几何加法

由于 $\mathcal{R}_\bullet^+(M)$ 是一个 Kan 集，（组合）同伦群定义良好，并且带有（组合）群结构。这些群结构是通过 Kan 条件形式化定义的；由于我们不追踪填充子，它们只能定义在同伦类上。这就引出了一个问题：是否存在一个具有几何意义的代表元？

定理 3.4.4 回答了这个问题。非正式地说，该定理表明，在 $\pi_n(\mathcal{R}_\bullet^+(M))$ 上的加法是通过沿着两个块度量的某一对匹配的面将它们粘合在一起得到的。

天使旋转

我们先介绍一种构造，它通过“绕原点旋转”将 $N\times\mathbb{R}_{\ge0}$ 上的度量延拓到 $N\times\mathbb{R}^2_{\ge0}$。下文中，设 N 是一个光滑但不一定闭的流形。

定义 3.4.1。记 $\mathrm{Sh}_{j,R}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的移位微分同胚，其定义为 $x\mapsto x+Re_j$。若 g 是 $N\times\mathbb{R}^n$上的黎曼度量，则定义

$$\mathrm{Sh}_{j,R}(g)\coloneqq\mathrm{Sh}_{j,R_*}(g)=\mathrm{Sh}^*_{j,-R}(g).$$

命题 3.4.2。设 g 是 $N\times\mathbb{R}_{\ge0}$ 上的黎曼度量，并且在 $N\times[r_1,r_2]$之外具有乘积结构。对于所有$R\ge1$，我们可以在 $N\times\mathbb{R}^2_{\ge0}$ 上构造度量 $g_R^\swarrow$，使其具有以下性质：

(o) 度量 $g_R^\swarrow$ 在某个紧子集之外是乘积度量。*(i)* 如果 g 是正标量曲率度量，那么存在一个 $R(g)>0$，使得对于所有 $R>R(g)$，$g_R^\swarrow$ 都是正标量曲率度量。*(ii)* 在与 $N\times\mathbb{R}_{\ge0}$的典范识别下，$g_R^\swarrow$ 在 $N\times\{0\}\times\mathbb{R}_{\ge0}$ 上限制为 $\mathrm{Sh}^{R(g)}$，在 $N\times\mathbb{R}_{\ge0}\{0\}$ 上也限制为 $\mathrm{Sh}^{R(g)}$。*(iii)* $g_R^\swarrow$ 在 $\{x_j\le R/2\}$ 上是乘积度量，并且乘积结构在交集上相容。

(v) 如果 g 是 $h\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathrm{Riem}^{(+)}(N)$ 的悬挂，那么 $g_R^{\curlywedge}$ 就是函数 $\mathfrak{h}_R\colon \mathbb{R}^2_{\geq 0} \to \mathrm{Riem}^{(+)}(N)$ 的悬挂。此外，如果 h 是常数，那么 $\mathfrak{h}_R$ 也是常数。

证明。设 K 是 I^2 内部的一个紧致凸中心对称体，其边界 ∂K 光滑。我们进一步假设 K 在 $\{|x_j| \leq 1/2\}$ 内部与 I^2 一致。设 $\gamma\colon [0,l] \to \partial K \cap (\mathbb{R}_{\geq 0})^2$ 是按弧长参数化且满足 $\gamma(0) = e_1$ 的满射曲线。这尤其意味着

$$\gamma(\varphi) = \begin{cases} e_1 + \varphi e_2, & \text{on } [0, 1/2], \\ e_2 + (l-\varphi)e_2, & \text{on } [l-1/2, l]. \end{cases}$$

设 $v\colon [0,l] \to \mathbb{R}^2$ 是唯一一个垂直于 γ' 且满足 $\det(v, \gamma') > 0$ 的单位向量场。特别地，$v(0) = e_1$。此外，设 κ 为 γ 的曲率。回忆一下，γ 的曲率[1] 定义为 $\gamma''(\varphi) = -\kappa(\varphi)v(\varphi)$。由于 γ 参数化了凸体的边界，因此曲率非负。

若将 K 替换为 $R \cdot K$，则相应的对象 γ_R、v_R 和 κ_R 以 $[0, R\cdot l]$ 为定义域，并满足

$$\gamma_R(\varphi) = R\gamma(R^{-1}\varphi), \quad v_R(\varphi) = v(R^{-1}\varphi), \quad \kappa_R(\varphi) = R^{-1}\kappa(R^{-1}\varphi).$$

对于所有 $R \geq 1$，该数据定义了一个微分同胚

$$\begin{aligned} \Xi\colon (0,\infty) \times [0, R\cdot l] &\to (\mathbb{R}_{\geq 0})^2 \setminus R\cdot K \\ (r,\varphi) &\mapsto \gamma_R(\varphi) + r \cdot v_R(\varphi), \end{aligned}$$

它可以被视为第一象限 $\mathbb{R}^2_{\geq 0}$ 上极坐标的一种变体。拉回欧几里得度量可得

$$\left(\Xi_R^* \langle \cdot, \cdot \rangle\right)_{(r,\varphi)} = \mathrm{d}r^2 + (1 + r\kappa_R(\varphi))^2 \mathrm{d}\varphi^2.$$

这启发了下面的构造，图3.6对此作了示意。设 $g \in$ 黎曼度量$(N \times \mathbb{R}_{\geq 0})$ 是 $N \times [0, \varepsilon)$ 上的乘积度量，其中 $\epsilon > 0$。我们利用乘积结构将 g 延拓到 $N \times \mathbb{R}$。定义 $g_R^{\curlywedge}$ 为 $N \times (\mathbb{R}_{\geq 0})^2 \setminus R \cdot K^\circ$ 上满足以下条件的唯一黎曼度量

$$\left((\mathrm{id} \times \Xi_R)^* g_R^{\curlywedge}\right)_{(n,r,\varphi)} = g_{(n,r)} + (1 + r\kappa_R(\varphi))^2 \mathrm{d}\varphi^2.$$

由于 $g = g\restriction_N \oplus$ 与 $M \times [r_1, r_2]$ 相距 $\mathrm{d}r^2$，我们得出

$$(\mathrm{id} \times \Xi_R)^* g_R^{\curlywedge} = g\restriction_N \oplus (\mathrm{d}r^2 + (1 + r\kappa_R(\varphi))^2 \mathrm{d}\varphi^2) = g\restriction_N \oplus \Xi_R^* \langle \cdot, \cdot \rangle \tag{3.1}$$

远离 $M \times [r_1, r_2] \times [0, R\cdot l]$。

因此，若 g 具有正标量曲率，则 $(\mathrm{id} \times \Xi_R)^* g_R^{\curlywedge}$ 在 $M \times [r_1, r_2] \times [0, R\cdot l]$ 之外具有正标量曲率。由于 r 坐标在 $M \times [r_1, r_2] \times [0, R\cdot l]$ 上有界，我们可以选择足够大的 R，使得

[1] 出现这个符号是因为我们选择了 v，使得 (v, γ') 是正向定向的。

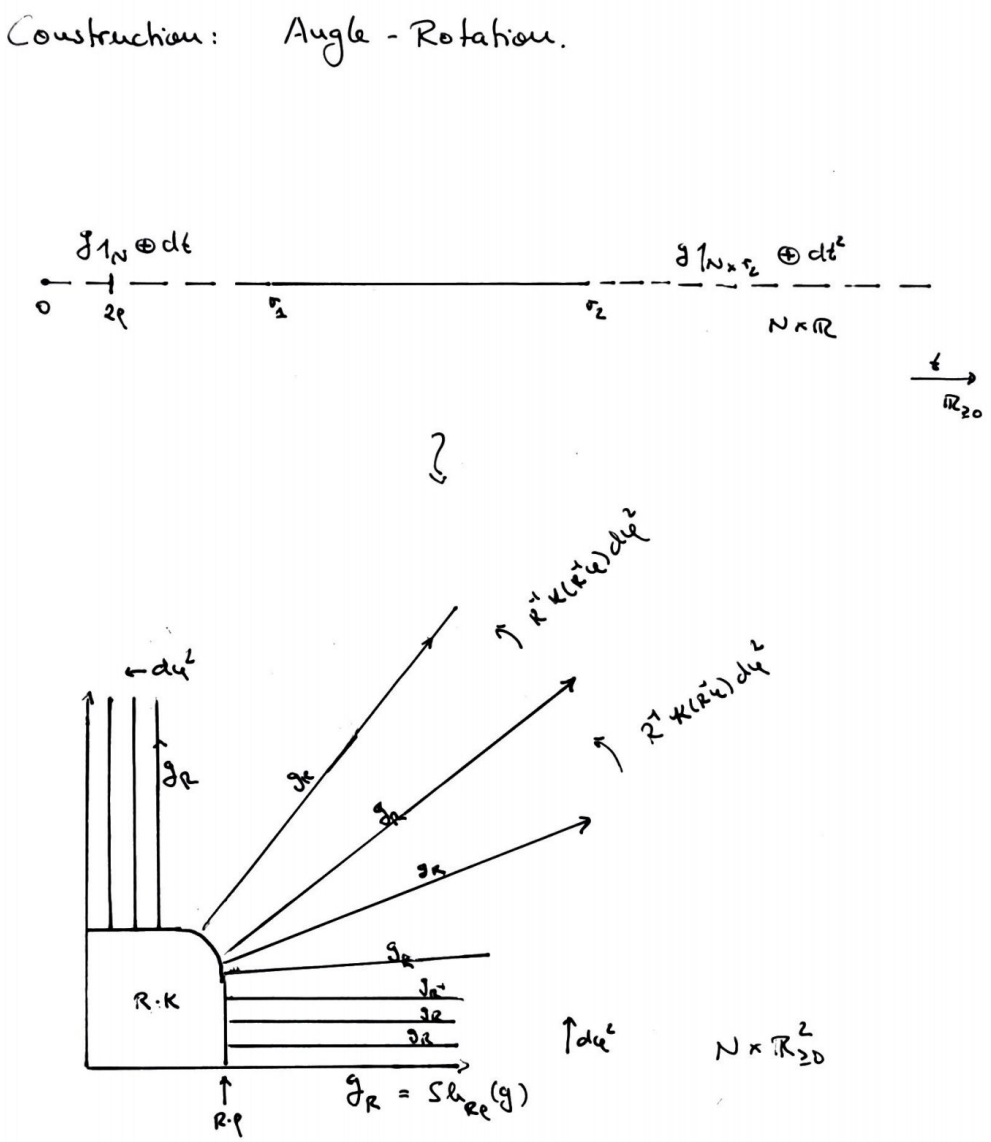


图 3.6：度量 g 围绕光滑凸体 $R \cdot K$旋转。

$(\mathrm{id}\times\Xi_R)^*g_R^{\angle}$ 的二阶喷流与乘积度量 $g\oplus \mathrm{d}\varphi$ 在$M\times[r_1,r_2]\times[0,R\cdot l]$ 上任意接近。这意味着，当 R 足够大时，$g_R^{\angle}$是一个正标量曲率度量。

$g_R^{\angle}$ 是 $\{x_j\le R/2\}$上的乘积度量。事实上，在 Ξ_R^{-1} $(\{x_1\le R/2\})$ 上，我们有 $\Xi_R(r,\ \varphi)=(R+r)\,e_2-\varphi e_1$，因此 $p_1\circ(\text{恒等函数}\times\Xi_R)=\mathrm{Sh}_R\circ p_1$，其中 p_1将第一个分量投影掉。因此，恒等函数

$$g_R^{\angle}|_{\{x_1\le R/2\}}=\mathrm{Sh}_{R*}(g)\oplus \mathrm{d}x_1^2=\mathrm{Sh}_{R*}(p_1^*g)+\mathrm{d}x_1^2$$

可由以下计算得出

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}\times\Xi_R)^*(\mathrm{Sh}_{R*}(g)\oplus \mathrm{d}x_1^2)&=(\mathrm{id}\times\Xi_R)^*(p_1^*\mathrm{Sh}_{-R}^*(g)+\mathrm{d}x_1^2)\\&=p_1^*g+(\mathrm{id}\times\Xi_R)^*\mathrm{d}x_1^2\\&=g\oplus \mathrm{d}\varphi^2=(\mathrm{id}\times\Xi_R)^*g_R^{\angle}.\end{aligned}$$

我们使用方程（3.1）将 $g_R^{\angle}$从 $N\times\mathbb{R}^2_{\ge0}\setminus RK^\circ$ 延拓至 $N\times(\mathbb{R}_{\ge0})^2$ 经由 $g\restriction_N+\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2$，并仍用 $g_R^{\angle}$表示所得结果。该延拓满足 (o)，(i)，(ii)，以及 (iii)，这些性质均由构造得到。

最后，如果 $g=\mathrm{susp}(h)$ 是一条度量曲线的悬挂，那么 $g_R^{\angle}$ 就是

$$\mathfrak{h}_R\colon(x_1,x_2)\mapsto\begin{cases}h(\mathrm{pr}_1(\Xi_R^{-1}(x_1,x_2))), & \text{if } (x_1,x_2)\in(\mathbb{R}_{\ge0})^2\setminus R\cdot K,\\ h(0), & \text{if } (x_1,x_2)\in(\mathbb{R}_{\ge0})^2\cap R\cdot K.\end{cases}$$

该映射定义良好且光滑，因为 h 在零附近为常数，因此可以将 $\mathrm{Sh}_R(h)=h(\cdot-R)$ 常值延拓到 $[0,R]$。与之前一样，容易验证 $(\mathrm{id}\times\Xi_R)^*\mathrm{susp}(\mathfrak{h}_R)=(\mathrm{id}\times\Xi_R)^*g_R^{\angle}=h+\mathrm{d}r^2+(1+r\kappa_R(\varphi))^2\mathrm{d}\varphi^2$，并且结论 (iv) 成立。 □

协和集上的几何加法

我们将利用前述延拓构造，对群结构作几何描述。

定义 3.4.3. 对于 $1\le j\le n$，设 $g,\ h\in\mathcal{R}_n(M)$ 是两个具有匹配面的块度量，亦即：$\partial_j^1g=\partial_j^{-1}h$。若 g和 h 都从 $M\times RI^n$处分解开来，则定义

$$g+_{j,R}h=\mathrm{Sh}_{j,-2R}(g)|_{\{x_j\le0\}}\cup\mathrm{Sh}_{j,2R}(h)|_{\{x_j\ge0\}}.$$

容易看出，$g+_{j,\ R}h$ 是一个块度量，其面由下式给出

$$\partial_i^\varepsilon(g+_{j,R}h)=\begin{cases}\partial_j^{-1}g, & \text{if } i=j,\varepsilon=-1,\\ \partial_j^1h, & \text{if } i=j,\varepsilon=1,\\ \partial_i^\varepsilon g+_{j-1,R}\partial_i^\varepsilon h, & \text{if } i<j,\\ \partial_i^\varepsilon g+_{j,R}\partial_i^\varepsilon h, & \text{if } i>j.\end{cases}$$

此外，如果 g和 h具有正标量曲率，那么 $g+_{j,R}h\in\mathcal{R}_n^+(M)$ 也具有正标量曲率。还要注意，如果 $g=\mathrm{susp}(\bar g)$ 和 $h=\mathrm{susp}(\bar h)$ 是块映射的悬挂，那么

$$g+_{j,R}h=\mathrm{susp}\big(\bar g(\cdot+2Re_j)|_{\{x_j\le0\}}\cup\bar h(\cdot-2Re_j)|_{\{x_j\ge0\}}\big)$$

它仍然是块映射的悬挂。

这些运算表示组合同伦群上的加法 s.

定理 3.4.4. </style}存在 多个群结构 定义在 ($\mathcal{R}^+_\bullet(M)$ g_0) 上，其定义如下：若 g, h 是 $[g], [h] \in \pi_n(\mathcal{R}^+_\bullet(M))$ 的代表元，且它们在 $M \times RI^n$之外分解，则

$$[g] +_j [h] \coloneqq [g +_{j,R} h].$$

若 r_j 表示关于超平面 $\{x_j = 0\}$的反射，则 $[r_j^* g]$ 是相对于 $+_j$而言的 $[g]$的逆元。这些结构彼此满足 *Eckmann-Hilton* 关系。此外，$+_1$ 与立方集合论所给出的群结构一致。

证明。 我们先证明这些运算定义良好。两种不同的选择 R_0, R_1 会得到同痕度量。事实上，$g +_{j,R_0} h$ 与$g +_{j,R_1} h$ 之间的同痕由 $s \mapsto g +_{j,R_s} h$给出，其中 $R_s \coloneqq (1-2)R_0 + sR_1$。由于同痕蕴含共边（经过重新参数化之后），这两个块度量表示 $\pi_n(\mathcal{R}^+_\bullet(M))$ 中的同一个元素。

令 $G \in \mathcal{R}^+_{n+1}(M)$ 是 g_{-1} 与 g_1 之间的同伦，并令 $H \in \mathcal{R}^+_{n+1}(M)$ 是 h_{-1} 与 h_1之间的同伦。假设 G 和 H 在 $M \times RI^n$之外分解。那么 $G +_{j+1,\ R} H \in \mathcal{R}^+_{n+1}(M)$ 是 $g_{-1} +_{j,\ R} g_1$ 与 $h_{-1} +_{j,\ R} h_1$之间的同伦。

前面的两个观察表明，$+_j$ 是 $\pi_n(\mathcal{R}^+_\bullet(M)\ g_0)$ 上定义良好的运算。

结合律的证明与同伦群的群结构满足结合律的证明相同。单位元由基点 g_0 给出。

如果 g在 $M \times \rho I^n$之外分解，那么 $r_j^* g$也如此。图 3.7展示了 $r_j^* g +_{j,\ \rho} g$之间的同伦。用公式表示，若 $g^{\angle,\ j}_{R}$ 是将命题3.4.2 应用于坐标 x_1，x_j所得的度量，那么，只要 R 足够大，度量

$$\begin{aligned} G \coloneqq & g_R^{\angle,j}|_{\{x_1 \geq 0,\, x_j \geq 0\}} \cup (g + \mathrm{d}x_1^2)|_{\{x_1 \leq 0,\, x_j \geq 0\}} \cup \\ & r_j^* g_R^{\angle,j}|_{\{x_1 \geq 0,\, x_j \leq 0\}} \cup (r_j^* g + \mathrm{d}x_1^2)|_{\{x_1 \leq 0,\, x_j \leq 0\}} \end{aligned}$$

is a 在 $\mathcal{R}^+_{n+1}(M)$ 中 g_0与$r_j^* g +_j$之间的同伦，$_R\, g$对所有充分大的 $R \geq \rho$

ge。证明这两种群结构中的任意两种满足 Eckmann-Hilton 关系，与同伦群的情形相同。

证明 $+_1$ 与 $+_{top}$相一致，后者是立方集合理论所赋予的群结构，可由一幅图给出。回顾一下，我们需要找到一个元素 $H \in \mathcal{R}^+_{n+1}(M)$，使其满足 $[\partial_1^{-1} H] = a$，$[\partial_1^1 H] = a +_1 b$以及 $[\partial_2^1 H] = b$，同时 $[\partial_i^\varepsilon H] = [g_0]$ 对所有其他面均成立。图 3.8中给出了这样一个填充子。 □

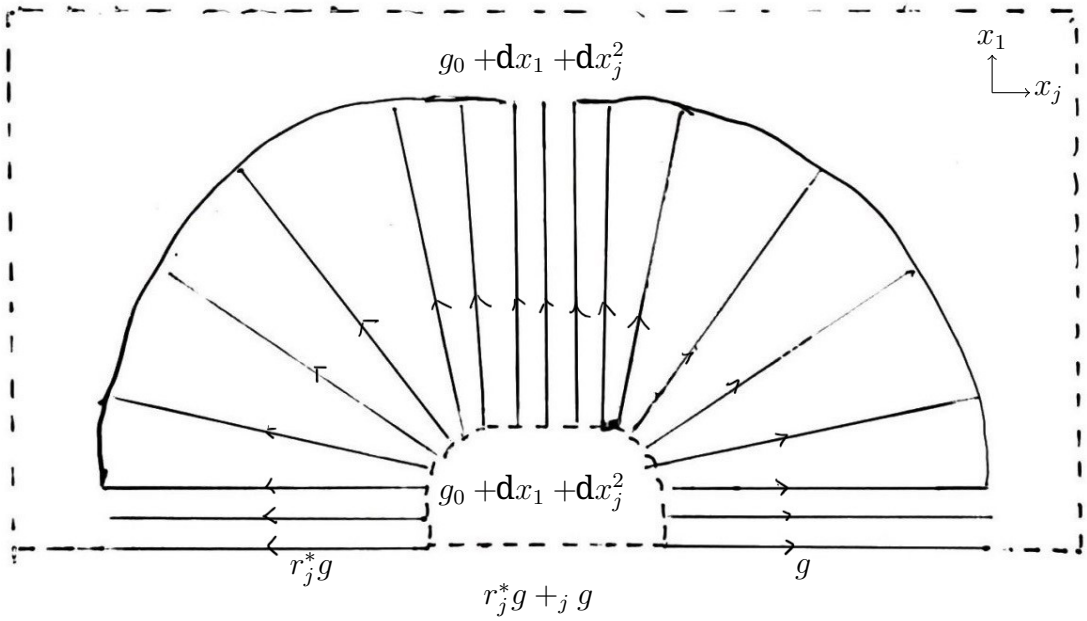


图 3.7： $r_j^* g +_j g$与基点 g_0之间的同伦。下方的象限未显示。每条线段都可以与右下方的线段识别，在这种识别下，线段上的度量对应于 g。

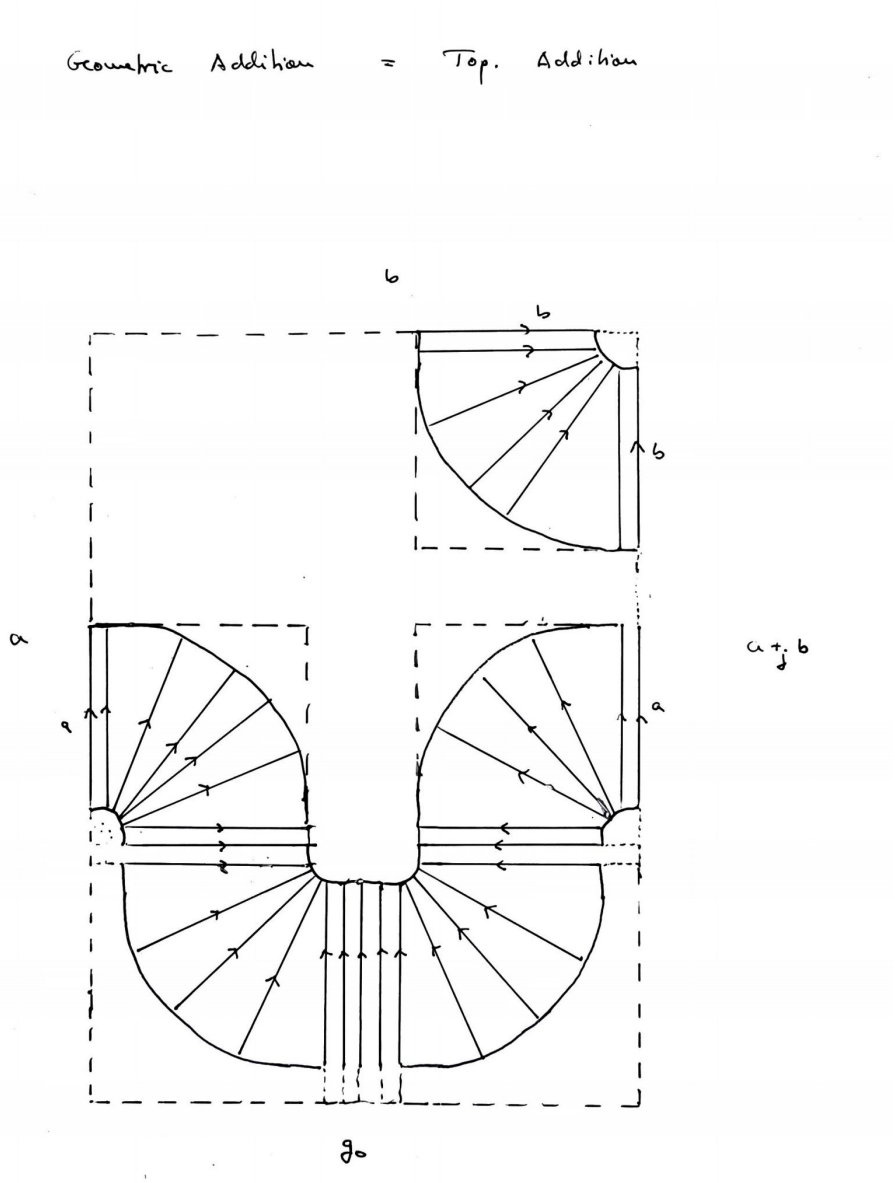


图 3.8: $+_1$ 与 $+_{top}$之间的同伦。在空白区域，度量 H与 g_0一致。

第4章

算子协调集

请回顾，我们的主要目标之一是将指标差经由 $\mathcal{R}^{+}_{\bullet}(M)$ 分解。一个直接的做法是通过奇异集函子（或弱等价的版本，例如由（光滑）块映射构成的立方集合），将指标差 $\mathrm{Riem}^{+}(M) \to KO^{-d}$转换到立方集范畴中，然后尝试将相应的立方映射 $\mathcal{R}^{+}_{\bullet}(M) \to KO^{-d}_{\bullet}$经由 $\mathcal{R}^{+}_{\bullet}(M)$ 分解。然而，由此得到的映射 $\widetilde{\mathcal{R}^{+}_{\bullet}(M)} \to KO^{-d}_{\bullet}$将高度依赖非规范选择，且难以描述，因为粗略地说，$KO^{-d}_{\bullet}$是以同痕的概念为模型构造的，而 $\mathcal{R}^{+}_{\bullet}(M)$ 则是以共边的概念为基础构造的。

相反，我们在本节中为实 K-理论构造一个新模型。它应当是一个立方集合的几何实现，且该立方集合是某个“良好”立方映射 $\widetilde{\ }$的目标，该映射从 $\mathcal{R}^{+}_{\bullet}(M)$ 出发，从而使第 5章中给出的分解结果证明难度不大。

出发点是 [Ebe17] 的观察：闭的、 d 维自旋流形 M 上的可逆伪狄拉克算子空间 $\Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)$，只要非空，就是实 K 理论的分类空间。在这个模型中，指标差是映射 $\mathrm{Riem}^{+}(M) \to \Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)$，它将正标量曲率度量 g 映射为其狄拉克算子 $\not{D}_g$。我们关于实 K 理论的新模型，以与 $\widetilde{\mathcal{R}^{+}_{\bullet}}(M)$ 从 $\mathrm{Riem}^{+}(M)$ 中产生相同的方式产生。由所有可逆分块狄拉克算子构成的立方集合 $\widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}^{\times}_{\bullet}}(M)$ 带有一个比较映射 $\mathrm{susp}_{\bullet}\colon \Psi\mathrm{Dir}^{\times}_{\bullet}(M) \dashrightarrow \widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}^{\times}_{\bullet}}(M)$，该映射定义在 $\Psi\mathrm{Dir}^{\times}_{\bullet}(M)$ 的一个弱等价子集上。本章的主要结果是，这个算子悬挂映射 $\mathrm{susp}_{\bullet}$ 是弱同伦等价。

在第4.1节中，我们回顾自旋几何的基础，例如克利福德线性旋量丛和克利福德线性狄拉克算子的构造，并研究这些几何对象如何依赖于底层度量。我们还将 [Ebe17]的结果转化为我们的表述，并证明可逆分块狄拉克算子空间是实 K-理论的分类空间，同时给出（Hitchin）指标差的描述。

第 4.2 节介绍旋量丛上块算子的基础。具体而言，我们重点关注这些伪微分算子的局部性，以及它们会使截面的支集扩大多少。

在第 4.3节中，我们研究这些算子的解析性质，并讨论若干剪切粘贴论证。

第4.4 节是第3.1节中算子理论类比的内容。在那里，我们构造了算子协调集 $\widetilde{\Psi}$狄$^{\times}_{\bullet}(M)$ 并定义算子悬挂映射悬挂$_{\bullet}$。我们将在第4.5节构造一个弱同伦等价子集$B_{\bullet} \hookrightarrow \Psi$狄$^{\times}_{\bullet}(M)$，使得限制映射悬挂$_{\bullet}|_{B_{\bullet}}$的取值落在 $\widetilde{\Psi}$狄$^{\times}_{\bullet}(M)$。

在第4.6 节和4.7节中，我们证明 $\widetilde{\Psi}$狄$^{\times}_{\bullet}(M)$ 是一个$\widetilde{\ }^{\times}$ $\widetilde{\ }$Kan 集，并进一步证明一个更强的结论：立方映射 Ψ狄$_{\bullet}(M) \to \mathcal{R}_{\bullet}(M)$ 将块狄拉克算子映射到其底层黎曼度量，是一个立方Kan纤维化。

第4.8节是3.4节的算子理论类比。它引入了一种算子理论加法，与立方集合论中 $\pi_n(\widetilde{\Psi}\ \mathrm{Dir}^{\times}_{\bullet}(M))$上的群结构一致。作为应用，我们证明 Gromov-Lawson 指标差是群同态 $\pi_n(\widetilde{\Psi}\ \mathrm{Dir}^{\times}_{\bullet}(M)) \to KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt})$。

最后，在第4.9节中，我们利用此前获得的所有结果证明，算子悬挂 susp$_{\bullet}$：Ψ Dir$^{\times}_{\bullet}(M) \to \widetilde{\Psi}$ Dir$^{\times}_{\bullet}(M)$ 是弱等价。我们证明，$\pi_n(\Psi\mathrm{Dir}^{\times}_{\bullet}(M))$ 和 $\pi_n(\widetilde{\Psi}$ Dir$^{\times}_{\bullet}(M))$ 可以识别为某些 KK-理论群，并且在这种识别下，同态 π_n(susp$_{\bullet}$) 对应于与基本类 α_{n+1} 的 Kasparov积，而众所周知，该积是同构。

4.1 自旋几何基础

我们回顾并总结将作为本文结果基础的必要内容。首先，我们从构造 Clifford右线性旋量丛开始，并考察底层黎曼度量所起的作用。特别是，我们着重讨论如何识别底层度量不同的两个旋量丛。这使我们能够在 $M \times$Riem(M) 上定义通用旋量丛，从而同时考虑所有黎曼度量。

本节的主要任务是构造闭自旋流形 Ψ维数$^{\times}(M)$ 上的可逆伪狄拉克算子空间 M 维数为 $d > 0$。Johannes Ebert 的结果 [Ebe17] 表明，如果 $\Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)$ 非空，那么它就是 $KO^{-(\dim M+1)}$的分类空间。

自旋丛

我们回顾经典自旋几何的基础，并约定相关记号。这里涵盖的所有内容都可在著作 [LM89] 中找到，只有引理 4.1.15 和 4.1.17除外。尽管这些结果专家们可能早已熟知，作者却未能在文献中找到它们。

定义 4.1.1. 设 (V, q) 是一个带有二次型的向量空间。克利福德代数 $Cl(V, q)$ 是一个包含 V 且满足以下泛性质的含幺代数：每个单射线性映射 $f\colon V \hookrightarrow \mathcal{A}$ 到含幺代数 $\mathcal{A}$

满足 $f(v)^2 = -q(v) \cdot 1$ 的映射，都唯一地延拓为含幺代数同态$Cl(f)$：$Cl(V,q) \to \mathcal{A}$。

定义 4.1.2. 每个克利福德代数都有一个典范分次，由奇偶算子 $Cl(-\mathrm{id})$ 给出。我们称这种分次为偶/奇分次，记作 e/o。

若 V是一个实向量空间，我们可以将其视为 Real 向量空间（$V \otimes \mathbb{C}$，$\mathrm{id} \otimes \bar{\cdot}$）。那么克利福德代数也是 Real 的。实结构 $\cdot$ 与奇偶算子对易。

注释4.1.3。本论文中所讨论的每个 Real 向量空间或 Real 向量丛，都是通过上述构造，由实向量空间或丛得到的。我们不会在记号上区分它们。我们实际上需要研究 Real 向量丛上的伪微分算子，是因为这些算子在局部借助傅里叶变换定义（详见附录B ），而傅里叶变换只定义在复向量空间上，并且伪微分算子的主符号通常不保持实丛。

例 4.1.4. 我们将赋予二次型 $q(x, y) := ||x||^2_{\mathrm{eucl}} - ||y||^2_{\mathrm{eucl}}$（其中 $\mathbb{R}^{p,q}$）的向量空间 $V = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ 记作。标准基记为 $e_1 \ldots, e_p, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_q$。其克利福德代数由 $\mathbb{R}^{p,q}$的标准基乘法生成。生成元满足以下关系

$$\begin{aligned} e_i e_j + e_j e_i &= -2\delta_{ij}, \\ \varepsilon_i \varepsilon_j + \varepsilon_j \varepsilon_i &= 2\delta_{ij}, \end{aligned}$$

而 $Cl(\mathbb{R}^{p,q})$ 是由这些生成元及关系构成的泛代数。

设 I 和 I' 是严格单调递增的有序元组，其元素分别介于 1 与 p之间、1 与 q 之间。若 e_I 表示 $e_{i_1} \cdot \cdots \cdot e_{i_{|I|}}$（约定 $e_\emptyset = 1$），则所有 $e_I \cdot \varepsilon_{I'}$ 构成 $Cl(\mathbb{R}^{p,q})$ 的一组基。存在唯一的二次型 $||\cdot||^2$，使该基成为（带符号的）正交归一基。赋予上述全部数据的克利福德代数记作 $Cl_{p,q}$。

克利福德代数具有一个 C^*-代数结构。事实上，左乘映射 $l: Cl_{p,q} \to \mathrm{End}(Cl_{p,q})$ 是一个单射代数同态，其像在取伴随算子后仍为闭集。只需对生成元e_1、……、e_p，ε_1、……、ε_q证明这一点。线性映射 $l(e_i)$ 和 $l(\varepsilon_j)$ 是等距变换，因为它们将 $Cl_{p,q}$ 的标准正交基映到自身，至多相差一个符号。结合克利福德关系可得

$$l(e_i)^* = l(-e_i) \qquad \text{and} \qquad l(\varepsilon_j)^* = l(\varepsilon_j).$$

除非要强调表示 l，下文中我们只写 $e_i \cdot$ 和 $\varepsilon_j \cdot$，分别表示 $l(e_i)$ 和 $l(\varepsilon_j)$。通常，我们用 $||\vdash||_{\mathrm{op}}$ 表示 $Cl_{p,q}$ 上的 C^*-范数。注意，对于向量 $v \in \mathbb{R}^{p,0}$，$||v||_{\mathrm{op}} = ||v||$；但对于一般元素 $v \in Cl_{p,0}$，$||v||_{\mathrm{op}} \neq ||v||$。

对我们来说，最重要的情形是 $q = 0$。我们将把自旋几何的讨论限定在这一情形，尽管该结论在更一般的情况下也成立。

定义 4.1.5。 我们将由 $\{v \cdot w : v,w \in \mathbb{R}^d \subseteq Cl_{d,0}, ||v|| = ||w|| = 1\}$ 按乘法生成的 $Cl_{d,0}$ 的子群记为 Spin(d)，并将由 $\{v : v \in \mathbb{R}^d \subseteq Cl_{d,0}, ||v|| = 1\}$ 按乘法生成的 $Cl_{d,0}$ 的子群记为 Pin$^-$(d)。

注意，Pin$^-$(d) 中元素的左乘在 Cl_d,0 上是一个等距映射。Pin$^-$(d) 中元素的共轭作用是 Cl_d,0 上的另一个等距作用。它保持子空间 $\mathbb{R}^d \subset Cl_d$,0 不变，因而给出一个同态 λ: Pin$^-$(d) $\to$O(d)。可以证明这是一个二重覆盖，参见例如 [LM89, 定理 I.2.10]。限制在 Spin(d) 上，则得到一个二重覆盖 λ: Spin(d) $\to$SO(d)。

要将这些概念推广到流形上，最好的方法似乎是借助主标架丛和表示。关于主丛、其伴随丛及其微分几何的基础参考资料是 [Bau09]。下文设 M^d 为维数为 d 的光滑流形（它可以有角，且不必是紧的）。

定义 4.1.6。 对每个流形 M^d，其标架丛定义为

$$\mathrm{GL}(M) \coloneqq \{\mathbb{R}^d \xrightarrow{\cong} TM_x : \text{isomorphisms}\} \to M.$$

它是一个主 GL(d)-丛，其 GL(d)-右作用由前复合给出。如果 M^d 还可定向，则对每个定向，我们可以定义子丛

$$\mathrm{GL}^+(M) \coloneqq \{\mathbb{R}^d \xrightarrow{\cong} T_xM : \text{orientation preserving isomorphisms}\} \to M.$$

它是一个主 GL$^+$(d)-丛。

反过来，选择 GL$^+$(d) 对 GL(M) 的约化，就等同于选择一个定向。

定义 4.1.7。 对于黎曼度量 g，我们将正交标架丛定义为

$$\mathrm{O}(M,g) \coloneqq \{(\mathbb{R}^d, \langle\cdot,\cdot\rangle) \xrightarrow{\cong} (T_xM, g_x) : \text{isometries}\} \to M.$$

If M^d 另外还是可定向的，因此我们可以针对每一种定向定义子丛 e

$$\mathrm{SO}(M,g) \coloneqq \mathrm{O}(M,g) \cap \mathrm{GL}^+(M).$$

在 M^d 上选取黎曼度量，等价于选取 GL(M) 的一个 O(d)-约化。反过来，选取 GL(M) 的一个 O(d)-约化即可确定一个黎曼度量，因为一个内积由其任意一个标准正交基唯一确定。

M 上的一种自旋结构，是指选择 SO(M, g) 的一个 Spin(d)-约化，也就是说，选择一个主 Spin(d) 丛 $P_{\mathrm{Spin},\ g}$，以及一个 λ-等变映射 ξ: $P_{\mathrm{Spin},\ g} \to$

M上的 SO(M, g)；换言之，下图中水平箭头表示右作用，且图表交换：

$$\begin{array}{ccc} P_{\mathrm{Spin},g} \times \mathrm{Spin}(d) & \longrightarrow & P_{\mathrm{Spin},g} \\ \downarrow{\scriptstyle \xi\times}\ \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \downarrow{\scriptstyle \xi} \\ \mathrm{SO}(M,g) \times \mathrm{SO}(d) & \longrightarrow & \mathrm{SO}(M,g). \end{array}$$

并非每个可定向流形都具有自旋结构。自旋结构的存在性受到第一和第二斯蒂费尔–惠特尼类的阻碍 M [LM89, 定理 II.1.7]。 请注意，选择自旋结构需要选择一个度量。 由于流形可以具有多个不等价的自旋结构[1], , 我们必须在改变度量时确保始终一致地选取自旋结构。 This 可以如下实现：设 $\widetilde{\mathrm{GL}(d)^+} \to \mathrm{GL}(d)^+$ 是唯一一个二重覆盖，它扩张了典范群同态 Spin(d) $\to$ SO(d)。其消失

$\widetilde{\mathrm{GL}(d)^+}$第一和第二斯蒂费尔–惠特尼类意味着存在一个 GL(d)-约化ρ： $P_{\widetilde{\mathrm{GL}(d)^+}} \to \mathrm{GL}^+(M)$。我们固定这样一个结构。对于每个度量以及每种 GL(d)$^+$-结构的选取，我们所选的 Spin(d)-约化由以下拉回给出[2]

$$\begin{array}{ccc} P_{\mathrm{Spin},g} & \hookrightarrow & P_{\widetilde{\mathrm{GL}^+}} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ \mathrm{SO}(M,g) & \hookrightarrow & \mathrm{GL}^+(M). \end{array}$$

借助主丛，我们可以将克利福德代数的构造推广到流形上的向量丛。请注意，这种构造不要求 M 具有自旋结构。

定义 4.1.8。 设 M^d 是带有黎曼度量 g的流形。克利福德丛 定义为

$$Cl(TM,g) \coloneqq \mathrm{SO}(M,g) \times_{Cl(\mathrm{taut})} Cl_{d,0} = P_{\mathrm{Spin},g} \times_{\mathrm{conj}} Cl_{d,0},$$

其中 taut 是 SO(d) 在 $\mathbb{R}^d$ 上的典范表示，而 conj 是由 Spin(n) 的元素在$Cl_{d,0}$中的共轭作用所给出的表示。

这两个表示 Cl(taut) 和 l 是等距的。丛 $Cl(TM,\ g)$ 是一个代数丛，其纤维为 $Cl(T_xM,\ g_x)$。它以典范方式包含 TM。黎曼度量 g在 TM上的度量可典范地延拓为 $Cl(TM,\ g)$ 上的度量，使得所有乘积 e_I构成一个标准正交基。由于 Cl(taut) 保持分次，$Cl(TM,\ g)$ 是一个分次代数丛。列维-奇维塔联络 $\nabla^{L.C.}$在 $(TM,\ g)$ 上唯一地延拓为 $Cl(TM,\ g)$ 上的度量联络 $\nabla^{L.C.}$，且该联络是一个导子

[1]事实上，自旋结构的（等价类）集合由 $H^1(M,\mathbb{Z}_2)$参数化，见[LM89，定理 II.1。7]可以证明，任何自旋结构都能以这种方式得到

关于代数结构 [LM89，命题 II.4。8], 这意味着，对所有光滑截面 σ， τ，都有

$$\nabla^{L.C.}(\sigma\tau) = (\nabla^{L.C.}\sigma)\tau + \sigma\nabla^{L.C.}(\tau).$$

相对于该联络，分次和实结构是平行的 .

若我们采用左乘作为表示，就得到旋量丛。与共轭不同，这个表示不能经由 SO(d) 分解，这正是该构造只能在自旋流形上成立的原因。

定义4.1.9。设 M^d 是一个带有黎曼度量 g的自旋流形。相应的旋量丛定义为

$$\mathfrak{S}_g \coloneqq P_{\mathrm{Spin},g} \times_{\mathrm{Spin}(d),l} Cl_{d,0}.$$

It i是一个 $Cl(TM, g)$-左模丛，其模结构记作c .

旋量丛还带有一个由右乘诱导的典范 $Cl_{d,0}$-右作用r 。由于左乘与右乘可交换，该作用定义良好。左乘 l 通过等距变换作用，因此 $\mathfrak{S}_g$ 带有一个由 $Cl_{d,0}$上的内积诱导的典范黎曼度量。与单位向量相乘会诱导关于此度量的等距变换。由于 Spin(d) 仅由 $Cl_{d,0}$中的偶元素构成，左乘保持 $Cl_{d,0}$的分次，因此 $Cl_{d,0}$ 上的分次也传递到 $\mathfrak{S}_g$[3]。我们仍将此分次称为 e/o。用固定的奇元素右乘会得到奇线性映射。列维-奇维塔联络可典范地延拓为 $\mathfrak{S}_g$上的度量联络 $\nabla^{\mathfrak{S}}$ 。所得度量联络由以下性质唯一确定：

(i) $\nabla^{\mathfrak{S}}$ 是一个 $Cl(TM, g)$模导子，

(ii) $\nabla^{\mathfrak{S}}$ 是偶的，

(iii) $\nabla^{\mathfrak{S}}$ 关于$Cl_{d,\,0}$-右作用是线性的。

因此， $\mathfrak{S}$ 是一个符合 [LM89，定义 II.52]。

狄拉克丛正是允许定义狄拉克算子的丛。我们给出旋量丛情形下的定义。

定义 4.1.10。黎曼度量 g 在 M 上的狄拉克算子定义为以下复合

$$\not{D}_g \colon \Gamma_c(\mathfrak{S}_g) \xrightarrow{\nabla^{\mathfrak{S}}} \Gamma_c(T^\vee M \otimes \mathfrak{S}_g) \xrightarrow{g_\sharp \otimes \mathrm{id}} \Gamma_c(TM \otimes \mathfrak{S}_g) \xrightarrow{\mathbf{c}(\cdot)} \Gamma_c(\mathfrak{S}_g),$$

其中 $g_\sharp \colon T^\vee M \to TM$由 $g(g_\sharp(\xi), -) = \xi$ 定义。

[3]这正是我们将范围限定为自旋结构的根本原因。如果我们只考虑 Pin 结构，该构造仍然有意义，但这样就会失去指标理论所依赖的分次。

在 $\mathfrak{S}_g$ 上的内积记为 h，由黎曼度量vol_g 在 M 上诱导的体积形式 $g \in \mathrm{Riem}(M)$ 使我们能够在 $\Gamma_c(\mathfrak{S}_g)$ 上定义一个内积。一般构造见附录 A。该内积定义如下：

$$(\sigma_1, \sigma_2) \coloneqq \int_M h_x(\sigma_1(x), \sigma_2(x)) \mathrm{dvol}_g(x).$$

$\Gamma_c(\mathfrak{S}_g)$的完备化记作 $L^2(\mathfrak{S}_g)$，称为平方可积旋量空间 $\mathfrak{S}_g$。Cl_d,0-右作用 r 和 $\mathbb{Z}_2$-分次 e/o 在 $\mathfrak{S}_g$ 上的作用延拓为Cl_d,0-右作用和 $\mathbb{Z}_2$-分次，作用于 $L^2(\mathfrak{S}_g)$；我们仍用相同的符号表示它们。狄拉克算子在这个空间上作为无界算子作用。更准确地说，我们有以下定理，它总结了 [LM89, 第二章]中的结果。

定理 4.1.11. 狄拉克算子 $\not{\mathfrak{D}}_g$ 是椭圆的、奇的、对称的一阶$Cl_{d,\,0}$-右线性微分算子，其主符号为 $i\mathbf{c}(g_\sharp(\cdot))$。如果$(M^d, g)$完备，则 $\not{\mathfrak{D}}_g$ 是自伴的。如果 M 是闭的，则 $\not{\mathfrak{D}}_g$ 是一个（无界）*Fredholm* 算子，也就是说，它的核是有限维的。

狄拉克算子与黎曼度量的标量曲率之间的关系由 Lichnerowicz 公式确立，该公式具有重要意义。

定理 4.1.12（Lichnerowicz 公式）。对于任意黎曼度量 g，公式

$$\not{\mathfrak{D}}_g^2 \sigma = \left(\nabla^{\mathfrak{S}_g *} \circ \nabla^{\mathfrak{S}_g} + \frac{\mathrm{scal}(g)}{4} \right) \sigma, \tag{4.1}$$

对所有 $\sigma \in \Gamma_c(\mathfrak{S}_g)$ 均成立。这里 $\nabla^{\mathfrak{S}_g *}$：$\Gamma_c(T^\vee M \otimes \mathfrak{S}_g) \to \Gamma_c(\mathfrak{S}_g)$ 是旋量联络的形式伴随算子。

由于 $\nabla^* \nabla$ 是半正定的，我们立即推得，正标量曲率度量与光滑调和旋量的存在性相矛盾，而这些旋量可以由紧支撑旋量逼近。

推论 4.1.13。若 $g \in \mathrm{Riem}^+(M)$，则 $\not{\mathfrak{D}}_g$ 在最小定义域中的核是平凡的。

Lichnerowicz 公式结合 Atiyah-Singer 指数定理，为闭自旋流形上的正标量曲率度量提供了强有力的拓扑障碍。如果底流形是闭的，那么狄拉克算子的核是有限维分次 $Cl_{d,\,0}$-模，因此代表实 K-理论中的一个元素 $KO^{-d}(\mathrm{pt})$，见 [LM89，定理 I.9。21], 我们称其为解析指标。在 [LM89，第三章中证明的16], 克利福德线性 Atiyah-Singer 指数定理将此 KO-理论类与 α-不变量联系起来；后者也称为拓扑指标，它是同态 α：$\Omega_*^{\mathrm{Spin}}(\mathrm{pt}) \to KO^{-*}(\mathrm{pt})$，见 [LM89，定理 II.7。14]。

定理 4.1.14。对于闭自旋流形 (M^d, g)，解析指标与拓扑指标相等：

$$[\ker \not{\mathfrak{D}}_g] = \alpha(M) \in KO^{-d}(\mathrm{pt}).$$

Atiyah-Singer 指数公式表明，若改变M^d上的定向，则 $\not{D}_g$ 的解析指标也需要改变符号。与采用不可约旋量丛的框架相比，所选定向在 Clifford 线性框架中的影响不那么直观；在前一种框架中，改变定向会导致分次改变。

引理 4.1.15. 设 M 是一个维数为 d的连通自旋流形。若 M^{op} 是赋予相反定向的同一流形，则存在一个 $Cl(M,g)$-左模丛之间的奇 同构

$$\mathrm{Sw}\colon \mathfrak{S}(M) \xrightarrow{\cong} \mathfrak{S}(M^{\mathrm{op}}).$$

映射Sw 不一定是右线性的，但$\mathrm{Sw}^*(\mathbf{r})$ 与$\mathbf{r}$ 通过$Cl_{d,0}$在 $\mathfrak{S}(M)$上的右作用同伦。

证明。 若一个黎曼流形(M^d, g)是可定向的，则正交标架丛有一个 $SO(d)$-约化

$$\mathrm{O}(M,g) \cong \mathrm{SO}(M,g) \times_{\mathrm{SO}(d)} \mathrm{O}(d),$$

而选择一个定向等同于选择一个连通分支。每个线性映射 $A \in \mathrm{O}(d) \setminus \mathrm{SO}(d)$都允许我们通过右乘法改变定向[4]

$$\mathrm{O}(M,g) = \mathrm{SO}(M,g) \times_{\mathrm{SO}(d)} \mathrm{O}(d) \xrightarrow{\mathrm{id}\times\cdot A} \mathrm{SO}(M,g) \times_{\mathrm{SO}(d)} \mathrm{O}(d) = \mathrm{O}(M,g)$$

由于$\mathrm{Pin}^-(d) \to \mathrm{O}(d)$是一个二重覆盖，存在一个元素 $\phi \in \mathrm{Pin}^-(d) \setminus \mathrm{Spin}(d)$，在相差一个符号的意义下唯一，使得 $\lambda(\phi) = A$。

如果 $\xi\colon P_{\mathrm{Pin}^-,\, g} \to \mathrm{O}(M,\ g)$ 是限制为所选自旋结构的 Pin^- 结构，那么所选元素 ϕ 会诱导定向的改变

$$\begin{array}{ccccccc} P_{\mathrm{Pin}^-,g} & = & P_{\mathrm{Spin},g} \times_{\mathrm{Spin}(d)} \mathrm{Pin}^-(d) & \xrightarrow{\mathrm{id}\times\cdot\phi} & P_{\mathrm{Spin},g} \times_{\mathrm{Spin}(d)} \mathrm{Pin}^-(d) & = & P_{\mathrm{Pin}^-,g} \\ & {\scriptstyle\xi}\searrow & \downarrow & & \downarrow & \swarrow{\scriptstyle\xi} & \\ & & \mathrm{O}(M,g) & \xrightarrow[\mathrm{id}\times\cdot A]{} & \mathrm{O}(M,g). & & \end{array}$$

恒等函数

$$\mathfrak{S}(M) = P_{\mathrm{Spin},g} \times_{\mathrm{Spin}(d),l} Cl_{d,0} \cong P_{\mathrm{Spin}(d)} \times_{\mathrm{Spin}(d)} \mathrm{Pin}^-(d) \times_{\mathrm{Pin}^-(d),l} Cl_{d,0}$$

这表明，选择将 $P_{\mathrm{Spin}(d),g}$ 嵌入到 $P_{\mathrm{Pin}^-(d)\ g} = P_{\mathrm{Spin}(d),g} \times_{\mathrm{Spin}(d)}\mathrm{Pin}^-(d)$ 中，并不影响其同构类型，因为我们可以将右乘 ϕ从 $\mathrm{Pin}^-(d)$ 扩展到 $Cl_{d,0}$。因此，我们推得 $\mathfrak{S}(M) \cong \mathfrak{S}(M_{\text{对偶}})$，且它们之间的同构 Sw 由右乘 ϕ 给出；由于 $\phi \notin \mathrm{Spin}(d)$，它是奇的。

[4]警告！此映射不是 $\mathrm{O}(d)$-等变的。

如果 d 是奇数，那么 –id $\notin$ SO(d)，我们可以选取 $\phi = e_1 \cdot \ldots \cdot e_d$，它位于克利福德代数的中心。在这种情况下，Sw 是 $Cl_{d,0}$-右线性的。

如果 d 是偶数，那么我们需要用不同的方式来论证。由于 Sw*(r) = r(ϕ^{-1}(–)ϕ)，只需证明与 ϕ^{-1} 的共轭可经由代数端omorphism 同伦至 id$_{Cl_d,0}$。根据 Cartan-Dieudonne 定理（参见 [LM89，定理 I.2），7], 每个正交矩阵都可以分解为一系列关于超平面的反射，因此只需假设 $\phi = v \in \mathbb{R}^d \subseteq Cl_d$,0 是一个长度为 1 的向量。由 Cl_d,0 的泛性质，代数同态对应于单射线性映射 A: $\mathbb{R}^d \to Cl_d$,0，使得 $A(x)^2 = -||x||^2$。因此，只需在这类映射中找到垂直于 v 的超平面反射与恒等函数之间的同伦。如果 w 是另一个长度为 1 且垂直于 v 的向量，我们可以将如下映射作线性延拓，从而定义这样的同伦 A_s

$$A_s(v) = \cos(s)v + \sin(s)v \cdot w, \qquad A_s(x) = x, \text{ if } x \in (\mathbb{R}v)^{\perp}.$$

反交换性保证对所有 $x \in \mathbb{R}^n$， $A_s(x)^2 = -||x||^2$。显然， A_0 =id，而 A_π 是关于垂直于 v 的超平面的反射，至此证明完成。

□

前一个证明中的观察为提升等距变换提供了契机，这些等距变换不一定保定向，可以将它们提升为旋量丛之间的同态。不过，我们不能指望每个等距映射 φ: (M, g_1) $\to$ (M, g_2) 都能提升为相应旋量丛之间的等距映射。以下判据是充分的。

定义 4.1.16. 设 ξ_j: $P_{\mathrm{Pin}^-,g_j} \to$ O(M, g_j) 是 O(M, g_j) 的 Pin$^-$(d)-约化。若诱导的标架主丛之间的映射可提升为 Pin 结构之间的等变映射，则等距映射 F: (TM, g_1) $\to$ (TM, g_2) 称为保 ***Pin*** 结构的。若等距映射 F 保定向且保 Pin 结构，则称其保自旋结构。

引理 4.1.17。 一个保 ***Pin*** 结构的等距映射 F: (TM, g_1) $\to$ (TM, g_2)诱导出一个等距映射 $\mathfrak{S}(F)$: $\mathfrak{S}_{g_1} \to \mathfrak{S}_{g_2}$，它是 $Cl_{d,0}$-右线性的，且关于 $Cl(M, g_1)$-$Cl(M, g_2)$ 等变。如果 F 还保定向，那么 $\mathfrak{S}(F)$ 是偶的。

~证明。 一个提升 F: $P_{\mathrm{Pin}^-,g_1} \to P_{\mathrm{Pin}^-,g_2}$ 从 F 到 Pin 结构，诱导出旋量丛上的映射，定义如下

$$\mathfrak{S}(F)\colon \mathfrak{S}_{g_1} = P_{\mathrm{Pin}^-,\mathrm{g}_1} \times_{\mathrm{Pin}^-(d)} Cl_{d,0} \xrightarrow{\tilde{F}\times \mathrm{id}} P_{\mathrm{Pin}^-,\mathrm{g}_2} \times_{\mathrm{Pin}^-(d)} Cl_{d,0} = \mathfrak{S}_{g_2}\,.$$

所需性质可立即得出。

如果限制保定向，那么 P_{Spin,g_1} 是 P_{Spin,g_2}上的一个等变映射，因此 $\mathfrak{S}(F)$ 保持分次。

□

我们通过讨论乘积流形的旋量丛和狄拉克算子来结束本节。

例 4.1.18. 回顾 [LM89] 对于两个二次空间 (V_i, q_i)，Clif- ford 代数分解为

$$Cl(V_1 \oplus V_2, q_1 \oplus q_2) \cong Cl(V_1, q_1)\hat{\otimes}Cl(V_2, q_2).$$

符号 $\hat{\otimes}$ 表示我们采用分次张量积和分次代数结构。这意味着，右侧的代数结构由下式的线性延拓给出

$$(v_1 \otimes v_2) \cdot (w_1 \otimes w_2) = (-1)^{|v_2|\cdot|w_1|}(v_1 \cdot w_1) \otimes (v_2 \cdot w_2),$$

其中 $v_1, w_1 \in Cl(V_1, q_1)$ 和 $v_2, w_2 \in Cl(V_2, q_2)$ 是纯次数元素，即分次的特征向量。符号 $|v_j| \in \{0, 1\}$ 表示 v_j 的次数；当且仅当 v_j 为偶数时，该次数为零。左表示 l也有类似的公式： $Cl(V_1 \oplus V_2, q_1 \oplus q_2) \to \mathrm{End}(Cl(V_1 \oplus V_2, q_1 \oplus q_2))$.

当 $(M, g) = (M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2)$ 是黎曼乘积时，我们有如下约化

$$SO(M_1, g_1) \times SO(M_2, g_2) \subseteq SO(M, g) \qquad \text{and} \qquad P_{\mathrm{Spin},g_1} \times_{\mathbb{Z}_2} P_{Spin,g_2} \subset P_{Spin,g}$$

从而使克利福德代数的分解推广到丛上

$$Cl(M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2) \cong Cl(M_1, g_1)\hat{\boxtimes}Cl(M_2, g_2)$$

and

$$\mathfrak{S}(M_1 \times M_2, g_1 \oplus g_2) \cong \mathfrak{S}(M_1, g_1)\hat{\boxtimes}\mathfrak{S}(M_2, g_2),$$

其中 $\hat{\boxtimes}$ 表示两个分次向量丛的分次外张量积。回顾一下，两个向量丛 $E \to X$ 和 $F \to Y$的外张量积是定义在 $E \boxtimes F \to X \times Y$ 上的向量丛，其在 (x, y) 处的纤维为 $E_x \otimes F_y$。若$\hat{}$丛分别带有分次 ι_E 和 ι_F，则 $E\hat{\boxtimes}F$ 上的分次由 $\iota_{E\hat{\boxtimes}F} = \iota_E \otimes \iota_F$给出。

这些同构分别是代数同构和左模同构。它们还保持分次、是等距的，并且对于旋量丛，在识别$Cl_{d_1+d_2,0} \cong Cl_{d_1,0}\hat{\otimes}Cl_{d_2,0}$时，也保持克利福德代数的右作用。

$Cl(M_1 \times M_2)$-左作用限制在 $TM_1 \oplus TM_2$ 上对应于

$$\mathbf{c}(v_1 \oplus v_2)(\sigma_1 \otimes \sigma_2) = \mathbf{c}_1(v_1)(\sigma_1) \otimes \sigma_2 + \mathrm{e/o}(\sigma_1) \otimes \mathbf{c}_2(v_2)(\sigma_2).$$

在乘积情形下，音乐同构 $(g_1 \oplus g_2)\sharp$：$T^\vee M_1 \oplus T^\vee M_2 \to TM \oplus TM$ 由下式给出

$$(g_1 \oplus g_2)_\sharp(\xi_1, \xi_2) = (g_1)_\sharp(\xi_1) + (g_2)_\sharp(\xi_2).$$

由唯一性， $\mathfrak{S}(M_1 \times M_2)$ 上的旋量联络对应于

$$\nabla^{\mathfrak{S}(M_1)} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \nabla^{\mathfrak{S}(M_2)}$$

在该分解下。总之，乘积度量的狄拉克算子由下式给出

$$\not{D}_{g_1 \oplus g_2} = \not{D}_{g_1} \otimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \otimes \not{D}_{g_2}.$$

不过，我们通常改写为 $\not{D}_{g_1} \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \not{D}_{g_2}$，以强调底层度量的乘积结构。

通用旋量丛

我们希望一次性考虑所有自旋丛，即。，我们希望构造一个丛 $\mathfrak{S} \to \mathrm{Riem}(M) \times M$，其纤维为 $\mathfrak{S}_{g_m}$。为此，我们必须说明底层度量的变化会如何影响这些构造。我们的方案取自 [Ebe17], ，但我们将采用不那么抽象的表述，并提供更多细节。

首先，我们回顾一下 *Gram* 自同态。有限维向量空间 V 上的双线性形式 b 通过 $v \mapsto b(v, -)$ 定义了一个典范映射 $b^\flat\colon V \to V^\vee$。双线性形式 b 是非退化的，当且仅当 $b^\flat$ 是同构。如果 g 是 V 上的内积，我们用 $g_\sharp$ 表示 $g^\flat$ 的逆，并将 b 的 *Gram* 自同态（相对于 g ）定义为 $\mathsf{Gram}_g(b) := g_\sharp \circ b^\flat$。

引理 4.1.19. 如果 g 和 g_0 是 V 上的内积，那么 $\mathrm{Gram}_g(g_0)$ 相对于 g 和 g_0 是自伴的。此外，*Gram* 自同态是正定的，并满足 $g_0(\mathrm{Gram}_{g_0}(g)v, w) = g(v, w)$ ，对所有 v、$w \in V$ 均成立。

对于每个可逆线性映射 $A\colon W \to V$，*Gram* 自同态满足

$$\mathrm{Gram}_{A^* g_0}(A^* g) = A^{-1} \circ \mathrm{Gram}_{g_0}(g) \circ A.$$

证明。 我们首先证明，$\mathsf{Gram}_{g_0}(g)$ 关于 g_0 自伴。这可由以下计算得出

$$\begin{aligned} g_0(\mathrm{Gram}_{g_0}(g)v_1, v_2) &= g_0(g_{0\sharp} \circ g^\flat v_1, v_2) = g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1) \\ &= \cdots = g_0(\mathrm{Gram}_{g_0}(g)v_2, v_1) \\ &= g_0(v_1, \mathrm{Gram}_{g_0}(g)v_2). \end{aligned}$$

该计算进一步表明

$$g_0(\mathrm{Gram}_{g_0}(g)v_1, v_2) = g(v_1, v_2).$$

I事实上，由于 g_0 非退化，这个方程唯一确定 $\mathsf{Gram}_{g_0}(g$).

现在很容易验证其关于 g 自伴。在第一个方程中使用前一个恒等式，并在第二个方程中使用其关于 g_0 的自伴性，我们推导出

$$\begin{aligned} g(\mathrm{Gram}_{g_0}(g)v_1, v_2) &= g_0(\mathrm{Gram}^2_{g_0}(g)v_1, v_2) = g_0(v_1, \mathrm{Gram}_{g_0}(g)^2 v_2) \\ &= g_0(\mathrm{Gram}^2_{g_0}(g)v_2, v_1) = g(\mathrm{Gram}_{g_0}(g)v_2, v_1). \end{aligned}$$

要证明 $\mathsf{Gram}_{g_0}(g)$ 正定，只需证明所有特征值均为正。设 v 是对应于特征值 λ 的一个特征向量。那么

$$\lambda g_0(v, v) = g_0(\mathrm{Gram}_{g_0}(g)v, v) = g(v, v) > 0$$

意味着 λ 必须为正。

最后一个恒等函数由此得出

$$\begin{aligned} A^* g_0(A^{-1} \circ \mathrm{Gram}_{g_0}(g) \circ A w_1, w_2) &= g_0(\mathrm{Gram}_{g_0}(g) A w_1, A w_2) \\ &= g(A w_1, A w_2) \\ &= A^* g(w_1, w_2) \end{aligned}$$

以及 $A^* g_0$ 是非退化的这一事实。 □

定义 4.1.20。 设 g 和 g_0 是 V上的两个内积。我们将 预规范 映射 $\tau_{g,g_0} \in \mathrm{End}(V)$ 定义为 $\mathrm{Gram}_{g_0}(g)$ 的正定平方根。

预规范映射继承了 Gram 自同态的许多性质。

引理 4.1.21。 预规范映射 τ_{g,g_0} 关于 g 和 g_0是自伴的。它是一个等距映射 $\tau_{g,g_0}\colon (V,g) \to (V,g_0)$ 且为正定。此外，τ_{g,g_0} 由这些性质唯一确定。特别地，

$$\tau_{g_0,g} = \tau_{g,g_0}^{-1}$$

以及

$$\tau_{A^*g,A^*g_0} = A^{-1} \circ \tau_{g,g_0} \circ A$$

。

证明。 自伴端omorphism 的平方根是自伴的。根据定义，预规范映射τ_{g,g_0} 是正定的。它是等距映射，因为

$$g_0(\tau_{g,g_0}v, \tau_{g,g_0}w) = g_0(\tau_{g,g_0}^2 v, w) = g_0(\mathrm{Gram}_{g_0}(g)v, w) = g(v,w).$$

一个关于 g_0自伴、正定且为等距映射（V,g） $\to$ （V,g_0）的端omorphism A 必然平方后等于 Gram 自同态 $\mathrm{Gram}_{g_0}(g)$。由于在正定自伴算子集合上平方根是唯一的，算子 A 和 τ_{g,g_0} 相同。

方程

$$\tau_{g_0,g} = \tau_{g,g_0}^{-1} \qquad \text{and} \qquad \tau_{A^*g,A^*g_0} = A^{-1} \circ \tau_{g,g_0} \circ A$$

成立，因为右侧的算子满足左侧算子的性质。

□

在最重要的例子中（V， g） $=$（$\mathbb{R}^n$， $\langle\cdot,\cdot\rangle$），以 $\mathbb{R}^n$ 的标准基表示的 Gram 自同态 $\mathrm{Gram}_{\langle\cdot,\cdot\rangle}(g)$，就是度量 g 更广为人知的格拉姆矩阵 。这个坐标表达式有助于证明预规范映射对内积的依赖是光滑的。

命题 4.1.22. 将正定自伴矩阵映射到其正定平方根的映射 $A \mapsto \sqrt{A}$ 是光滑的。

证明。 指数映射

$$\exp\colon \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^* = A\} \to \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^* = A,\, A > 0\}$$

是满射的，因为对于每个自伴正定的 A ，都存在一个 $U \in \mathrm{O}(n)$ 和正数 λ_1、……、λ_n，使得 $U^*AU = \mathrm{dia}(\lambda_1$、……、$\lambda_n) =: T$。若 $B = U\log(T)U^*$，则 $\exp(B) = A$。

我们断言，对于所有自伴、正定的 A，微分

$$D_A \exp\colon \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^* = A\} \to \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^* = A\}$$

是满射，因此是同构。事实上，由

$$(D_A \exp)(H) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^{k} A^{j-1} H A^{k-j}$$

我们得出

$$U^* D_A \exp(H) U = D_{U^* A U}(U^* H U).$$

由于 H 是任意的，我们可以用 UHU^* 替换 H，并假设 $A = T$ 是对角矩阵，其对角项为 λ_1、……、λ_n。若 $H = (h_{ij})$，则 $(T^k H T^l)_{ij} = \lambda_i^k \lambda_j^l h_{ij}$。因此，

$$\begin{aligned}(D_T \exp)(H) &= \left(\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_i^{\alpha-1} \lambda_j^{k-\alpha} \right) h_{ij} \right) \\ &=: (r_{ij} h_{ij}),\end{aligned}$$

其中 $r_{ij} > 0$。若给定 $B = (b_{ij})$，则对于 $H = (h_{ij}) := (r_{ij}^{-1} b_{ij})$，我们有 $(D_T \exp)(H) = B$。

由开映射定理，exp 在每个正定自伴矩阵 A 周围局部可逆。将其局部逆称为 log。于是 $\sqrt{A} = \exp(1/2 \log(A))$ 是光滑的。 □

推论 4.1.23。 对于一个固定但任意的内积 g_0，这些映射

$$\begin{aligned}&\mathrm{Pos}(V) \to \mathrm{Aut}(V), \\ &g \mapsto \tau_{g,g_0} \quad \textit{and} \quad g \mapsto \tau_{g_0,g}\end{aligned}$$

是光滑的。

证明。 由 $\tau_{g,g_0} = \tau_{g_0,g}^{-1}$ 可知，一个映射光滑当且仅当另一个映射光滑。

固定一个等距映射 $A\colon (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \to (V, g_0)$。显然，$g \mapsto \tau_{g,g_0}$ 光滑当且仅当 $g \mapsto A^{-1} \circ \tau_{g_0,g} \circ A$ 光滑。根据引理 4.1.21，后一个映射与$g \mapsto \tau_{A^* g, \langle \cdot, \cdot \rangle}$一致，而后者由命题 4.1.22可知是光滑的。 □

我们希望将预规范映射扩展到丛上。最清晰的做法是借助标架丛及其伴随丛来实现。令 $\mathrm{Pos}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上所有正定对称双线性形式构成的集合。它是一个 $\mathrm{GL}(n)$ 空间，带有左作用 $A.b := (A^{-1})^* b$。令 $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上所有保定向同构构成的集合。它是一个 $\mathrm{GL}(n)$ 空间，带有左作用 $A.\varphi := A^{-1} \varphi A$。

令 $\mathrm{Pos}(M)$ 为TM上的所有正定对称双线性形式所构成的丛，并令 $\mathrm{Iso}^+(TM)$ 为由 TM的所有保定向丛自同构构成的丛。这些丛可以通过在 Borel 构造中使用所述群作用，从 $\mathrm{GL}(M)$得到。引理 4.1.21 表明，预规范变换是一个 $\mathrm{GL}(n)$ 等变映射，在 $\mathrm{Pos}(\mathbb{R}^n)^2$ 与 $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^n)$之间。它由此导出丛映射

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pos}(M) \times_M \mathrm{Pos}(M) & \xrightarrow{\tau_{-,-}} & \mathrm{Iso}^+(M) \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ \mathrm{GL}(M) \tilde{\times} \mathrm{Pos}(\mathbb{R}^n)^2 & \xrightarrow{\mathrm{id} \times \tau_{-,-}} & \mathrm{GL}(M) \tilde{\times} \mathrm{Iso}^+(\mathbb{R}^n). \end{array}$$

将预规范映射进行前复合，得到一个映射

$$\mathrm{Pos}(M) \times_M \mathrm{Pos}(M) \times_M \mathrm{GL}(M) \xrightarrow{\tau_{-,-}} \mathrm{Iso}^+(M) \times_M \mathrm{GL}(M) \xrightarrow{\circ} \mathrm{GL}(M)\,.$$

凸组合给出一个同伦等价 $\mathrm{Pos}(M) \times_M \mathrm{Pos}(M) \simeq M \times\{g_0, g_0\}$，其中 g_0是 $\mathrm{Pos}(M) \to M$ 的一个截面，换言之，是 M上的一个黎曼度量。覆盖理论现在给出一个唯一的提升

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pos}(M) \times_M \mathrm{Pos}(M) \times_M \widetilde{\mathrm{GL}}^+(M) & \xrightarrow{\tilde{\tau}_{-,-\circ-}} & \widetilde{\mathrm{GL}}^+(M) \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\times\rho} & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ \mathrm{Pos}(M) \times_M \mathrm{Pos}(M) \times_M \mathrm{GL}^+(M) & \xrightarrow{\tau_{-,-\circ-}} & \mathrm{GL}^+(M) \end{array}$$

由 $\tilde{\tau}_{g_0,g_0} = \mathrm{id}$ 确定。

设 $\mathrm{SO}(M,g)$ 和 $\mathrm{SO}(M,g_0)$ 是分别对应于黎曼度量 g, g_0 的两个正交标架丛。预规范映射 τ_{g,g_0} 将 $\mathrm{SO}(M,g)$ 映射到 $\mathrm{SO}(M,g_0)$，因此提升 $\tilde{\tau}_{g,g_0}$ 将 $P_{\mathrm{Spin},g}$ 映射到 P_{Spin,g_0}。提升后的预规范映射给出一个分次代数同态

$$\begin{array}{ccc} Cl(TM,g) & \xrightarrow{\Phi_{g,g_0}} & Cl(TM,g_0) \\ \| & & \| \\ P_{\mathrm{Spin},g} \times_{\mathrm{conj}} Cl_{d,0} & \xrightarrow{\tilde{\tau}_{g,g_0}\times\mathrm{id}} & P_{\mathrm{Spin},g_0} \times_{\mathrm{conj}} Cl_{d,0} \end{array}$$

以及一个 $Cl_{d,0}$-右线性映射

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_g & \xrightarrow{p\mathcal{G}_{g,g_0}} & \mathfrak{S}_{g_0} \\ \| & & \| \\ P_{\mathrm{Spin},g} \times_l Cl_{d,0} & \xrightarrow{\tilde{\tau}_{g,g_0}\times\mathrm{id}} & P_{\mathrm{Spin},g_0} \times_l Cl_{d,0}. \end{array}$$

当然，这些识别都是等距的保分次映射。此外，旋量丛之间的识别映射是 $Cl(TM,g)$-$Cl(TM,g_0)$ 左模映射。这意味着图表

$$\begin{array}{ccc} Cl(TM,g) \times \mathfrak{S}_g & \xrightarrow{\mathbf{c}} & \mathfrak{S}_g \\ \downarrow{\scriptstyle \Phi_{-,g_0}\times\, p\mathcal{G}_{g,g_0}} & & \downarrow{\scriptstyle p\mathcal{G}_{g,g_0}} \\ Cl(TM,g_0) \times \mathfrak{S}_{g_0} & \xrightarrow{\mathbf{c}} & \mathfrak{S}_{g_0} \end{array}$$

是可交换的。因此，利用这些识别，我们得到（集合论意义上的）双射

$$Cl(M) \coloneqq \bigsqcup_{g\in\mathrm{Riem}(M)} Cl(TM,g) \xrightarrow{\Phi_{-,g_0}} Cl(TM,g_0) \times \mathrm{Riem}(M) \tag{4.2}$$

$$\mathfrak{S} \coloneqq \bigsqcup_{g\in\mathrm{Riem}(M)} \mathfrak{S}_g \xrightarrow{p\mathcal{G}_{-,g_0}} \mathfrak{S}_{g_0} \times \mathrm{Riem}(M). \tag{4.3}$$

我们称 $p\mathcal{G}$ 为预规范映射。若 g_0 固定，则我们通常分别用 Φ_g 和 $p\mathcal{G}_g$ 表示$\Phi_{g,\ g_0}$ 和 $p\mathcal{G}_{g,\ g_0}$。

虽然映射 Φ 和 $p\mathcal{G}$ 是纤维逐点等距映射，但预规范映射并不会在平方可积旋量所关联的希尔伯特空间之间诱导出等距变换。原因在于，截面内积定义中的体积形式也各不相同。为了解决这一问题，我们必须进行共形变换。

定义 4.1.24. 对于 g, $g_0 \in \mathrm{Riem}(M)$，令 $\alpha^2_{g,\,g_0}\colon M \to M$ 为 vol_g 相对于 vol_{g_0} 的密度。我们称 $\mathcal{G}_{g,\,g_0} := \alpha_{g,\,g_0} \cdot p\mathcal{G}_{g,\,g_0}$ 为规范映射。若 g_0 固定，我们简单地记作 $\mathcal{G}_g$。

下面的引理很容易验证。

引理 4.1.25. $\mathcal{G}_g$ 所诱导的映射给出了希尔伯特空间之间的一个等距映射

$$\mathcal{G}_g\colon L^2(M, g; \mathfrak{S}_g) \to L^2(M, g_0; \mathfrak{S}_{g_0}).$$

注 4.1.26. 请注意，若 M 不是紧的，则 $p\mathcal{G}_{g,\,g_0}\colon \Gamma_c(\mathfrak{S}_g) \to \Gamma_c(\mathfrak{S}_{g_0})$ 可能无法延拓为 $L^2(\mathfrak{S}_g) \to L^2(\mathfrak{S}_{g_0})$ 之间的有界线性映射。当且仅当映射 $\alpha_{g,\,g_0}$ 有界时，它才能延拓为有界算子。

定义 4.1.27. 令

$$Cl(M) \to \mathrm{Riem}(M) \times M \qquad \text{and} \qquad \mathfrak{S} \to \mathrm{Riem}(M) \times M$$

是其拓扑为唯一满足以下条件的丛：$\Phi_{-,\,g_0}$ 以及 $p\mathcal{G}_{-,\,g_0}$ 在方程（4.2）和（4.3）中，当右侧赋予乘积拓扑时，成为同胚。

非正式地说，我们将它们视为 $\mathrm{Riem}(M)$ 上的丛之丛。从现在起，我们假设 M 没有边界。

De定义 4.1.28。 令 $\Psi\mathrm{DO}^k(\mathfrak{S}) \to \mathrm{Riem}(M)$ 为如下丛：它被平凡化为 y

$$\mathcal{G} \circ - \circ \mathcal{G}^{-1}\colon \Psi\mathrm{DO}^k(\mathfrak{S}) \to \mathrm{Riem}(M) \times \Psi\mathrm{DO}^k(\mathfrak{S}_{g_0}); \tag{4.4}$$

这里，$\mathrm{Riem}(M)$ 赋予光滑弗雷歇拓扑（光滑弱拓扑），而 $\Psi\mathrm{DO}^k(\mathfrak{S}_{g_0})$ 赋予附录 B 中引入的振幅拓扑。并集 $\Psi\mathrm{DO}^\bullet(\mathfrak{S})$ 具有（平凡）弗雷歇空间丛的拓扑；如果 M 是紧的，它甚至是一个弗雷歇代数丛。相同的构造也适用于附录 B 中定义的 Atiyah-~~Sin~~ger 闭包 $\Psi\mathrm{DO}^k(\mathfrak{S})$。

注记 4.1.29。若 M 是紧的，我们也可以通过对 $p\mathcal{G}$ 取共轭来平凡化 $\Psi\mathrm{DO}^\bullet(\mathfrak{S})$。

我们尤其关注 $\Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S})$ 的某个子空间。

定义 4.1.30。 元素 $P \in \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S})$ 称为伪狄拉克算子，若它是一个对称、奇、$Cl_{d,0}$-线性算子，并且其在每个纤维 P_g 上的限制都具有与狄拉克算子 $\not{D}_g$ 相同的主符号，即 $\mathrm{symb}_1(P_g) = i\mathbf{c}(g_\sharp(\cdot))$，其中 $\mathbf{c} = \mathbf{c}_g$ 表示 $Cl(TM, g)$ 在 $\mathfrak{S}_g$ 上的左模作用。所有伪狄拉克算子的集合记为 $\Psi\mathrm{Dir}(M)$。

请注意，与 $\mathcal{G}$ 共轭不会将 $\Psi\mathrm{Dir}(M)$ 映射到 $\Psi\mathrm{Dir}(\mathfrak{S}_{g_0}) \times \mathrm{Riem}(M)$。事实上，由于 $\mathcal{G}_g$ 是一个向量丛端omorphism，符号演算给出

$$\begin{aligned}\mathrm{symb}_1(\mathcal{G}_g \circ P \circ \mathcal{G}_g^{-1}) &= \mathcal{G}(g) \circ \mathrm{symb}_1(P) \circ \mathcal{G}_g^{-1} \\ &= \mathcal{G}_g \circ i\mathbf{c}_g(g_\sharp(-)) \circ \mathcal{G}_g^{-1} \\ &= p\mathcal{G}_g \circ i\mathbf{c}_g(g_\sharp(-)) \circ p\mathcal{G}_g^{-1} \\ &= i\mathbf{c}_{g_0}(\Phi_g \circ g_\sharp(-)),\end{aligned}$$

这表明 $\mathcal{G}_g \circ P \circ \mathcal{G}_g^{-1}$的主符号不正确；正确的主符号应为 $i\mathbf{c}_{g_0}(g_{0\sharp}(-))$。尽管如此，$\Psi\mathrm{Dir}(M)$ 是 $\mathrm{Riem}(M)$ 上的一个纤维丛，其纤维$\Psi\mathrm{Dir}(M)_g = \Psi\mathrm{Dir}(\mathfrak{S}_g)$ 是 $\mathfrak{S}_g$ 上所有伪狄拉克算子构成的仿射空间。由于主符号已指定，它是 $\Psi\mathrm{DO}^0(\mathfrak{S},\ \mathfrak{S})$ 上的一个仿射丛。它甚至是一个平凡丛，因为它有一个处处不为零的光滑截面，该截面将黎曼度量映射到其狄拉克算子。

定义4.1.31。 映射 $P\colon \mathbb{R}^n \to \Psi\mathrm{DO}^k(\mathfrak{S},\ \mathfrak{S})$ 是光滑的，当且仅当

$$\begin{gathered}\mathcal{G}_*(P)\colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{Riem}(M) \times \Psi\mathrm{DO}^k(\mathfrak{S}_{g_0}, \mathfrak{S}_{g_0}), \\ t \mapsto \mathcal{G}_{g_{P(t)},g_0} \circ P(t) \circ \mathcal{G}^{-1}_{g_P(t),g_0}\end{gathered}$$

是一个映入弗雷歇空间的光滑映射。这里，$g_{P(t)}$ 表示$P(t)$ 的底层度量。

注意，此定义不依赖于 g_0 的选取，因为不同的选取会导致与一个固定的光滑向量丛同构共轭。

定理4.1.32。 狄拉克算子定义了一个光滑截面

$$\not{\mathfrak{D}}\colon \mathrm{Riem}(M) \to \Psi\mathrm{Dir}(M)$$

从这个意义上说，它将光滑映射 $\mathbb{R}^n \to \mathrm{Riem}(M)$ 映射为光滑映射 $\mathbb{R}^n \to \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S})$。

证明。 我们需要证明 $g \mapsto \mathcal{G}_{g,g_0} \circ \not{\mathfrak{D}}_g \circ \mathcal{G}^{-1}_{g,g_0} =: \mathcal{G}_{g,g_0*}\not{\mathfrak{D}}_g$ 是一个光滑映 p

$$\mathrm{Riem}(M) \to \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{g_0}, \mathfrak{S}_{g_0}).$$

$\mathrm{Riem}(M)$ 和 $\Psi\mathrm{DO}(\mathfrak{S})$ 的拓扑由一族以局部坐标定义的半范数生成。因此，只需在局部坐标下证明光滑黎曼度量会映射为光滑振幅。计算

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{g,g_0*}\not{\mathfrak{D}}_g &= \alpha_{g,g_0} p\mathcal{G}_{g,g_0} \circ \not{\mathfrak{D}}_g \circ \alpha^{-1}_{g,g_0} p\mathcal{G}^{-1}_{g,g_0} \\ &= p\mathcal{G}_{g,g_0*}\not{\mathfrak{D}}_g + p\mathcal{G}_{g,g_0} \circ \mathbf{c}_g(g_\sharp(-\alpha^{-1}_{g,g_0}\mathrm{d}\alpha_{g,g_0}) \otimes \mathrm{id}) \circ p\mathcal{G}^{-1}_{g,g_0} \\ &= p\mathcal{G}_{g,g_0*}\not{\mathfrak{D}}_g - p\mathcal{G}_{g,g_0} \circ \mathbf{c}_g(\alpha^{-1}_{g,g_0}\mathrm{grad}_g(\alpha_{g,g_0}) \otimes \mathrm{id}) \circ p\mathcal{G}^{-1}_{g,g_0} \\ &= p\mathcal{G}_{g,g_0*}\not{\mathfrak{D}}_g - \alpha^{-1}_{g,g_0}\mathbf{c}_{g_0}(\Phi_{g,g_0}(\mathrm{grad}_g(\alpha_{g,g_0})) \otimes \mathrm{id})\end{aligned}$$

这使我们可以改为与 $p\mathcal{G}$ 共轭，因为添加一个光滑自同态不会影响映射的光滑性。

考虑以下图表

$$\begin{array}{ccccccc}
\Gamma(\mathfrak{S}_g) & \xrightarrow{\nabla^{\mathfrak{S}_g}} & \Gamma(T^\vee M\otimes\mathfrak{S}_g) & \xrightarrow{g_\sharp\otimes\mathrm{id}} & \Gamma(TM\otimes\mathfrak{S}_g) & \xrightarrow{\mathbf{c}_g} & \Gamma(\mathfrak{S}_g)\\
\downarrow{\scriptstyle p\mathcal{G}_{g,g_0}} & & \downarrow{\scriptstyle p\mathcal{G}_{g,g_0}} & & \downarrow{\scriptstyle p\mathcal{G}_{g,g_0}} & & \downarrow{\scriptstyle p\mathcal{G}_{g,g_0}}\\
\Gamma(\mathfrak{S}_{g_0}) & \xrightarrow{p\mathcal{G}_{g,g_0*}\nabla^{\mathfrak{S}_g}} & \Gamma(T^\vee M\otimes\mathfrak{S}_{g_0}) & \xrightarrow{g_\sharp\otimes\mathrm{id}} & \Gamma(TM\otimes\mathfrak{S}_{g_0}) & \xrightarrow{\mathbf{c}_{g_0}\circ(\Phi_{g,g_0}\otimes\mathrm{id})} & \Gamma(\mathfrak{S}_{g_0}).
\end{array}$$

显然， $g\mapsto g_\sharp\otimes\mathrm{id}$ 和 $g\mapsto\mathbf{c}_{g_0}\circ(\Phi_{g,g_0}\otimes\mathrm{id})$ 是由向量丛的光滑映射诱导的（因为 τ_{-,g_0} 关于第一个变量光滑）。由于光滑丛自同态的弗雷歇空间嵌入到零阶伪微分算子的弗雷歇空间中（赋予振幅拓扑），参见例 B.0.7 以及定理 B.0.17，映射 $g\mapsto g_\sharp\otimes\mathrm{id}$ 和$g\mapsto\mathbf{c}_{g_0}\circ(\Phi_{g,g_0}\otimes\mathrm{id})$ 是光滑映射

$$\mathrm{Riem}(M)\to\Psi\mathrm{DO}^0(T^\vee M\otimes\mathfrak{S}_{g_0},TM\otimes\mathfrak{S}_{g_0})\big)$$

and

$$\mathrm{Riem}(M)\to\Psi\mathrm{DO}^0(TM\otimes\mathfrak{S}_{g_0},\mathfrak{S}_{g_0}).$$

两个联络之差是一个自同态值 1-形式。因此，只需证明映射

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Riem}(M)\to\Omega^1(M;\mathrm{End}\,\mathfrak{S}_{g_0}),\\
&\qquad g\mapsto p\mathcal{G}_{g,g_0*}\nabla^{\mathfrak{S}_g}-\nabla^{\mathfrak{S}_{g_0}}=p\mathcal{G}_{g,g_0}\circ\nabla^{\mathfrak{S}_g}\circ p\mathcal{G}_{g,g_0}^{-1}-\nabla^{\mathfrak{S}_{g_0}}
\end{aligned}$$

是光滑的。

首先注意，与列维-奇维塔联络相应的映射

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Riem}(M)\to\Omega^1(M;\mathrm{End}\,TM)\\
&\qquad g\mapsto p\mathcal{G}_{g,g_0*}\nabla^{L.C.,g}-\nabla^{L.C.,g_0}
\end{aligned}$$

根据局部坐标中的以下计算可知，它是光滑的。

令 ∂_1，……，∂_d 为坐标图定义域 U 中的标准基。在这些坐标下，我们可以将 g 和 g_0 表示为矩阵（g_{ij}）和（$g_{0\,ij}$），使得 ${}^{g_{(0)}}{}_{ij}=g_{(0)}(\partial_i,\ \partial_j)$。列维-奇维塔联络由下式给出：

$$\nabla_i^{L.C.,g}=\nabla_{\partial_i}^{L.C.,g}=\partial_i+{}^g\Gamma_i,$$

其中，克里斯托费尔符号 $\Gamma_i=(\Gamma_{ij}^k)$ 是 g 的 1-喷射的代数表达式。更确切地说，我们有以下著名公式：

$$2\Gamma_{ij}^k=\sum_{\alpha=1}^d g^{k\alpha}\big(\partial_j g_{i\alpha}+\partial_i g_{\alpha j}-\partial_\alpha g_{ij}\big),$$

其中 $g^{k\alpha}$ 表示 $(g_{ij})^{-1}$ 的 $k\alpha$ 项。此外，在这个基下，Gram 自同态由下式给出

$$\mathrm{Gram}_{g_0}(g)=(g_{0\,ij})^{-1}\cdot(g_{ij}),$$

它关于 g 光滑变化。根据推论 4.1.23，$\tau_{g,\ g_0}$ 也关于g光滑变化。现在经过直接计算可得

$$\begin{aligned} p\mathcal{G}_{g,g_0*}\nabla^{L.C.,g} &= p\mathcal{G}_{g,g_0}\circ\nabla^{L.C.,g}\circ p\mathcal{G}_{g,g_0}^{-1} \\ &= \tau_{g,g_0}\cdot(\partial_i+{}^g\Gamma_i)\cdot\tau_{g,g_0}^{-1} \\ &= \partial_i+\tau_{g,g_0}\cdot{}^g\Gamma_i\cdot\tau_{g,g_0}^{-1}-\tau_{g,g_0}\cdot\tau_{g,g_0}^{-1}\cdot\partial_i\tau_{g,g_0}\cdot\tau_{g,g_0}^{-1} \\ &= \partial_i+\tau_{g,g_0}\cdot{}^g\Gamma_i\cdot\tau_{g,g_0}^{-1}-\partial_i\tau_{g,g_0}\cdot\tau_{g,g_0}^{-1}. \end{aligned}$$

由于所有加项都随 g 光滑变化，映射 $g\mapsto p\mathcal{G}_{g,\ g_0*}\nabla^{L.C.\ g}-\nabla^{L.C.\ g_0}$ 是光滑的。

令 $e_1,\dots,e_d$ 为 g_0上的一个 U-正交规范标架，并令 $f_j=\tau_{g_0,\ g}e_j$。这些正交规范标架在 $\mathfrak{S}_{g_0}$ 和$\mathfrak{S}_g$上给出了典范的（相差一个符号）正交规范标架，我们分别记为 (e_I)和 (f_I)。这里，I遍历所有有序元组 $I=(i_1<\cdots<i_r)$，其中 $1\le i_j\le d$。利用旋量联络的克里斯托费尔符号公式（见 [LM89，定理 II.4），14],可得

$$\begin{aligned} 2\cdot\left(p\mathcal{G}_{g,g_0*}\nabla^{\mathfrak{S}_g}\right)_{e_i}(e_I) &= 2\cdot p\mathcal{G}_{g,g_0}\circ\nabla_{e_i}^{\mathfrak{S}_g}\circ p\mathcal{G}_{g,g_0}^{-1}(e_I) \\ &= 2\cdot p\mathcal{G}_{g,g_0}\left(\nabla_{e_i}^{\mathfrak{S}_g}f_I\right) \\ &= p\mathcal{G}_{g,g_0}\left(\left(\sum_{\alpha<\beta}g(\nabla_{e_i}^{L.C.,g}f_\alpha,f_\beta)\cdot f_\alpha\cdot f_\beta\right)\cdot_g f_I\right) \\ &= \left(\sum_{\alpha<\beta}g(\nabla_{e_i}^{L.C.,g}\tau_{g_0,g}e_\alpha,\tau_{g_0,g}e_\beta)\cdot e_\alpha\cdot e_\beta\right)\cdot e_I. \end{aligned}$$

我们已经知道，$g(\nabla^{L.C.,\ g}_{e_i}e_\alpha,\ e_\beta)={}^g\Gamma_{i\alpha}^\beta$ 随 g 光滑变化。因此，赋值

$$g\mapsto p\mathcal{G}_{g,g_0*}\nabla^{\mathfrak{S}_g}-\nabla^{\mathfrak{S}_{g_0}}$$

是一个光滑映射 $\mathrm{Riem}(M)\to\Gamma\big(M;\mathrm{Hom}(\mathfrak{S}_{g_0},\ T^\vee M\otimes\mathfrak{S}_{g_0})\big)$，因此它也是一个光滑映射

$$\mathrm{Riem}(M)\to\Psi\mathrm{DO}^0(\mathfrak{S}_g,T^\vee M\otimes\mathfrak{S}_g).$$

这意味着 $g\mapsto\not{\mathfrak{D}}_g$ 是光滑的，因为它是光滑映射的复合。 □

下一个结果是经典结论，可由 [LM89第三章中建立的理论立即推出。5]。

命题 4.1.33. 设 M 是一个闭流形，并设 $P\in\Psi\mathrm{Dir}(M)$ 是一个伪狄拉克算子，其底层黎曼度量为 $g\in\mathrm{Riem}(M)$。则 P 是作用在 $L^2(\mathfrak{S}_g)$ 上的自伴无界弗雷德霍姆算子，其定义域为 $H^1(\mathfrak{S}_g)$。

证明。 根据定义，P 是对称的，因此 $P-\not{\mathfrak{D}}_g$ 是定义在 $\mathfrak{S}_g$ 上的零阶对称伪微分算子。因此，该差延拓为作用于 $L^2(\mathfrak{S}_g)$上的有界对称算子，因而是自伴算子。由于自伴算子与有界自伴算子的和仍是自伴的 [HR00，练习 1.9。20],$P=\not{\mathfrak{D}}_g+(P-\not{\mathfrak{D}}_g)$ 是自伴的。

Gårding 不等式，参见 [LM89，定理 III.5。2], 表明， P 的最小定义域与 $H^1(\mathfrak{S}_g)$一致。众所周知，闭流形上向量丛的椭圆伪微分算子是无界 Fredholm 算子，参见[LM89，定理 III.5。2]。 □

与*K*理论的关系

我们对伪狄拉克算子的兴趣源于它们与 KO理论的联系，本节将对此作概述。这里介绍的所有结果均已以不同的语言发表于 [Ebe17] ，我们不声称这里呈现的结果具有原创性；相反，我们将他的结果转换为我们的语言，补充一些缺漏，并提供更多细节。不言而喻，本节的论述紧随 [Ebe17]。本节中，我们始终假设 M^d 是一个闭正维数的自旋流形。

我们先回顾 KO理论与 Clifford 线性 Fredholm 算子之间的联系。设 H 是一个可分实 Hilbert 空间，带有 $\mathbb{Z}_2$分次 ι 以及分次$Cl_{d,0}$-右作用$\mathbf{r}$，并假设它是一个 $*$-同态。为简便起见，我们称其为一个$Cl_{d,0}$-Hilbert 空间。称$\omega_{d,0}$ **..=** $\iota\mathbf{r}(e_1\cdots e_d)$ 为手征元。回忆一下，$Cl_{d,0}$ 在同构意义下，当$d\not\equiv 0$ 模 4 时恰有一个不可约表示；当 $d\equiv -1$ 模 4 时恰有两个不可约表示。后一种情况下，这些不可约表示由手征元的不同特征子空间区分。

三元组 $(H,\ \iota,\ \mathbf{r})$ 称为充足的，当且仅当 H 以无限重数包含所有不可约表示。

定义 4.1.34。设 $(H,\ \iota,\ \mathbf{r})$ 是一个充足的 $Cl_{d,\ 0}$-希尔伯特空间。如果一个算子 F 作用于 H，并且是 Clifford 线性、奇且自伴的，我们就称它为 $_{,\ 0}$-***Fredholm*** 算子。若 $d\equiv -1$ 模 4，我们还要求 $\omega_{p,\ 0}F\iota$ 既非本质正也非本质负；也就是说，存在彼此正交的无限维闭子空间，且 F 在这些子空间上的限制分别为正算子或负算子。

令 $\mathrm{Fred}^{d,\ 0}(H)$ 表示 H 上所有 $Cl_{d,\ 0}$-Fredholm 算子构成的空间，并赋予范数拓扑。

根据 Atiyah 和 Singer 的经典结果，这些空间表示实 K-理论。

定理 4.1.35 (定理 [AS69])。 若 H 充足，则 $\mathrm{Fred}^{d,\ 0}(H)$ 是 KO^{-d} 的分类空间。这意味着存在一个自然双射

$$\mathrm{ind}\colon [X,\mathrm{Fred}^{d,0}(H)]\to KO^{-d}(X)$$

对于每个紧的 CW-复形 X。

这一映射的详细构造见 Jonathan Glöckle 的硕士论文 [Glö19，定理 2。17]。关于该空间的更多细节，例如 Bott 周期性或 Morita 等价，请参阅 [Ebe17]。为了将可逆伪狄拉克算子空间识别为 KO-理论的分类空间，我们首先需要引入辅助空间。

定义 4.1.36。令 $\Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)$ 为 $\Psi\mathrm{Dir}(M)$ 的子空间，它由所有可逆伪狄拉克算子组成，并将其记为 $[-1,1]$ by I。若对于固定的度量 g_0，$\Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)_{g_0}$ 非空，则对于固定的基点选择 $B \in \Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)$，定义以下空间

$$\mathcal{X} \coloneqq \{P\colon I \to \Psi\mathrm{Dir}(M) \,:\, P \text{ smooth},\, P(-1) = B,\; P(1) \in \Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)\}$$

and

$$\mathcal{X}_{g_0} \coloneqq \{P\colon I \to \Psi\mathrm{Dir}(M)_{g_0} \,:\, P \text{ smooth},\, P(-1) = B,\; P(1) \in \Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)_{g_0}\}.$$

引理 4.1.37. 若 $\Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)_{g_0}$ 非空，则求值映射

$$\mathrm{ev}_1\colon \mathcal{X} \to \Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)$$

是弱同伦等价，并且限制后也是 $\mathcal{X}_{g_0}$ 与 $\Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)_{g_0}$之间的弱同伦等价。

证明。我们只证明第一个结论；对于第二个结论，只需在下文定义的空间 $\mathcal{Y}$ 以及 $\Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)$ 中添加下标 g_0 。

令 $\mathcal{Y}$ 为所有 连续 路径 $P\colon I \to \Psi\mathrm{Dir}(M)$ 的集合，这些路径与 $\mathcal{X}$ 中元素具有相同的边界条件。光滑化理论表明，$\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$ 的包含映射是弱同伦等价。

映射 $\mathrm{ev}_1\colon \mathcal{Y} \to \Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)$ 是一个纤维化。事实上，给定一个交换图

$$\begin{array}{ccc} A \times 0 & \xrightarrow{F} & \mathcal{Y} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{ev}_1} \\ A \times I & \xrightarrow{h} & \Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M) \end{array}$$

我们定义提升 $\mathcal{H}\colon\ A \times I \to \mathcal{Y}$ 如下

$$\mathcal{H}(a,s)(t) \coloneqq \frac{(1-t)}{2} \cdot F(a) + \frac{(1+t)}{2} \cdot h(a,s).$$

这是一个连续映射，因为 $\Psi\mathrm{Dir}(M)$ 上的仿射结构相对于弗雷歇结构是（联合）连续的。它也是 $\mathrm{ev}_1(\mathcal{H}) = h$ 的一个提升，这说明 ev_1 是一个纤维化。

因此，ev_1 的同伦纤维是 B 的原像，也就是 $\Psi\mathrm{Dir}(M)$ 中所有以 B 为起点（也为终点）的闭曲线构成的集合。这个子空间显然是凸的，因此是可缩的，这意味着 $\mathcal{Y}$ 和 $\Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)$ 弱同伦等价。 □

辅助路径空间 $\mathcal{X}$ 和 $\mathcal{X}_{g_0}$ 有助于将 $\Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)$ 识别为 KO-理论的分类空间。

我们注意到，对于正维数的闭流形 M^d d，$Cl_{d,0}$- 希尔伯特空间 $H = L^2(M, \mathfrak{S}_{g_0})$ 总是充足的。事实上，

手征元分解为 $\mathfrak{S}_{g_0}$ 非零子丛 $\mathfrak{S}^{\pm}_{g_0}$，手征元在这些子丛上的作用为 $\pm$id，因此

$$L^2(M,\mathfrak{S}_{g_0}) \cong L^2(M,\mathfrak{S}^+_{g_0}) \oplus L^2(M,\mathfrak{S}^-_{g_0})$$

是对手征元的特征值 ± 1 所对应的无限维特征子空间的分解。

以下定理汇集了 Johannes Ebert 在[Ebe17第 4 节中证明的结果。1]:

定理 4.1.38。假设 $\Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)_{g_0}$ 非空。那么由连续映射构成的图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & \Omega\mathrm{Fred}^{d,0}\big(L^2(M,\mathfrak{S}_{g_0})\big) \\ \uparrow & & \| \\ \mathcal{X}_{g_0} & \xrightarrow{\simeq} & \Omega\mathrm{Fred}^{d,0}\big(L^2(M,\mathfrak{S}_{g_0})\big) \end{array}$$

可交换。水平映射定义为

$$P_t \mapsto \frac{\mathcal{G}_{g_t,g_0} P_t \mathcal{G}^{-1}_{g_t,g_0}}{(1+(\mathcal{G}_{g_t,g_0} P_t \mathcal{G}^{-1}_{g_t,g_0})^2)^{1/2}}$$

且下方的映射是弱同伦等价。这里 $\Omega\mathrm{Fred}^{d,0}(L^2(\mathfrak{S}_{g_0}))$ 表示到 $\mathrm{Fred}^{d,0}(L^2(\mathfrak{S}_{g_0}))$ 中的路径空间，其起点和终点均为可逆算子。

证明。对于固定的 t，这些映射显然取值于由自伴、奇、Clifford 线性 Fredholm 算子构成的空间。根据 [Ebe17第 4 节1]中的讨论，并不清楚为何水平映射取值于满足附加条件的子空间，即 $\omega F\iota$ 在 $d \equiv -1$模 4时既非本质正也非本质负。

为证明这一点，首先回顾 [LM89定理 III.5.8]: 闭流形上的丛上任一正阶自伴椭圆伪微分算子 P 的谱仅由可数个特征值构成，其特征子空间均为有限维，且特征值趋于无穷大。算子 $P/\sqrt{1+P^2}$ 是唯一一个在 $\lambda/\sqrt{1+\lambda^2}\cdot\mathrm{id}$ 上作用为 λ 的 P-特征子空间上的算子。

手征元满足

$$\omega^2_{d,0} = (-1)^{\frac{d(d+1)}{2}} \quad \text{and} \quad \omega^*_{d,0} = (-1)^{\frac{d(d+1)}{2}}\omega_{d,0}.$$

因此，当 $d \equiv -1$ 模 4 时，它是一个自伴的奇对合。由于 P，因而$P/\sqrt{1+P^2}$ 也与 $\omega_{d,0}$对易，我们可以同时对角化这两个算子。

分次 e/o 与 P 反对易，因此分次将 P 的 λ-特征子空间映至 P 的 $-\lambda$-特征子空间。出于相同原因，对于 ω_d 的 ± 1-特征子空间，结论也成立. $_0$ 。

简记 $P/\sqrt{1+\overline{P^2}\text{ 为 }}F$。由于分次 e/o 与 $\omega_{d,\ 0}F$ 对易，算子 $\omega_{d,\ 0}F$e/o 在

$$H^+ \coloneqq \bigoplus_{\lambda>0} \operatorname{Eig}(P;\lambda)\cap\operatorname{Eig}(\omega_{d,0};1)\oplus\operatorname{Eig}(P;-\lambda)\cap\operatorname{Eig}(\omega_{d,0};-1)$$

并且在.....上负定

$$H^- \coloneqq \bigoplus_{\lambda>0} \operatorname{Eig}(P;\lambda)\cap\operatorname{Eig}(\omega_{d,0};-1)\oplus\operatorname{Eig}(P;-\lambda)\cap\operatorname{Eig}(\omega_{d,0};1).$$

根据上述讨论，这两个子空间都是无限维的。因此，$\omega_{d,\ 0}F$e/o 既非本质正，也非本质负。

上方的水平映射是连续的，因为与可逆函数作共轭是连续运算，且 $\Psi\mathrm{DO}^\bullet(\mathfrak{S}_{g_0})$ 是一个弗雷歇代数，而有界函数演算的连续性由 [Ebe17，命题 3 给出。7]。弱等价的结论见 [Ebe17，命题 4。3]。 □

空间 $\Psi\mathrm{Dir}^\times(M)_{g_0}$ 不适合我们的用途。由于我们想比较不同的度量，因此需要更大的空间 $\Psi\mathrm{Dir}^\times(M)$。幸运的是，典范包含是弱同伦等价。这是 [Ebe17第 4 节的主要结果，2]用我们的语言表述如下。

定理 4.1.39。包含映射 $\Psi\mathrm{Dir}^\times(M)_{g_0}\hookrightarrow\Psi\mathrm{Dir}^\times(M)$ 是弱同伦等价。

$\Psi\mathrm{Dir}^\times(M)$ 与 $\Omega\mathrm{Fred}^{d,0}(L^2(\mathfrak{S}_{g_0}))$ 之间的识别，是 Hitchin 的指标差在空间层面上的版本 [Hit74]。

定义 4.1.40。固定基点 $g_0\in\mathrm{Riem}(M)$ 和 $B\in\Psi\mathrm{Dir}^\times(M)$。对于 ev_1，的任意截面 $s\colon\Psi\mathrm{Dir}^\times(M)\to\mathcal{X}$，我们称复合

$$\operatorname{inddif}(-,B)\colon\Psi\mathrm{Dir}^\times(M)\underset{\mathrm{ev}_1}{\overset{s}{\rightleftarrows}}\mathcal{X}\xrightarrow{\ \simeq\ }\Omega\mathrm{Fred}^{d,0}(L^2(\mathfrak{S}_{g_0}))$$

（算子）指标差。

若 g_0 是正标量曲率度量，则我们称与狄拉克算子的前复合为

$$\alpha(-,g_0)\colon\mathrm{Riem}^+(M)\xrightarrow{\not{\mathfrak{D}}_{(-)}}\Psi\mathrm{Dir}^\times(M)\xrightarrow{\operatorname{inddif}(-,\not{\mathfrak{D}}_{g_0})}\Omega\mathrm{Fred}^{d,0}(L^2(\mathfrak{S}_{g_0}))$$

指标差。

我们在以下定理中总结本小节的成果。

定理 4.1.41. 设 M^d 是一个正维数的闭自旋流形。如果所有可逆伪狄拉克算子 $\Psi\mathrm{Dir}^\times(M)$ 构成的空间(pt)非空，那么它就是 $KO^{-(d+1)}$的分类空间。该自然变换由 Hitchin 指数差给出。

$$\begin{array}{ccccc}
[X;\Psi\mathrm{Dir}^\times(M)] & & \xrightarrow{\operatorname{inddif}(-,B)_*} & & [X;\Omega\mathrm{Fred}^{d,0}(L^2(\mathfrak{S}_{g_0}))] \\
\Big\downarrow & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle\cong}\ \text{adjunction} \\
KO^{-(d+1)}(X) & \xleftarrow{\ \cong\ } & KO^{-d}(\Sigma X) & \xleftarrow[\ \mathrm{ind}\ ]{\ \cong\ } & [\Sigma X;\mathrm{Fred}^{d,0}(L^2(\mathfrak{S}_{g_0}))]
\end{array}$$

我们的首要目标是证明，指标差经由协调集合分解。为此，我们将构造另一种实 K-理论模型，该模型 $\widetilde{\ }$由 $\Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)$ 构成，其方式与 $\mathcal{R}^{+}_{\bullet}(M)$ 由 $\mathrm{Riem}^{+}(M)$ 构成的方式相同。我们将在第 4.4节通过将本节的对象“块化”来推进这一构造。下一节中，我们将阐述所需的分析基础。

4.2 块算子

本节将讨论块伪微分算子的基础。这些是作用在 $M\times\mathbb{R}^n$ 上的算子，可以形式上将其视为伪微分算子，并具有如下性质：若将 $\mathbb{R}^n$ 视为无限长的立方体，则它们在每个面附近都可分解为乘积算子。我们将介绍处理这类算子所需的组合语言，给出一种单位分解的构造，使其与块伪微分算子在无穷远处的分解相容，并讨论这些划分在块算子支集上的应用。最后，我们定义一族伪狄拉克算子的算子悬挂，并证明它是一个块算子。

我们假设读者熟悉伪微分算子的概念及 Atiyah 和 Singer 对其所作的延拓；否则，可参阅附录 B及其中的参考文献。

块丛与块算子基础

看似无害的空间 $\mathbb{R}^n$ 可以用各种方式分解为乘积 $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^{n-p}$。跟踪这些分解很重要，因此需要使用一些一开始看来相当繁重（或许也没有必要）的记号。对于 $\operatorname{dom}\varepsilon\subseteq\mathbf{n}=\{1,\dots,n\}$ 和 $\varepsilon\colon\operatorname{dom}\varepsilon\to\mathbb{Z}_2$，给定 M，我们定义集合

$$\begin{aligned}U_R(\varepsilon)&\coloneqq M\times\{x\in\mathbb{R}^n:\varepsilon(i)x_i>R\text{ for }i\in\operatorname{dom}\varepsilon\},\\ \mathbb{R}^n(\varepsilon)&\coloneqq\operatorname{Map}(\mathbf{n}\setminus\operatorname{dom}\varepsilon,\mathbb{R})\cong\{x\in\mathbb{R}^n:\varepsilon(i)x_i=R\}\\ \mathbb{R}^{\varepsilon}_R&\coloneqq\{x\in\mathbb{R}^{|\operatorname{dom}\varepsilon|}:\varepsilon(i_j)x_j>R,\,i_j\in\operatorname{dom}\varepsilon,\,i_j<i_{j+1}\}.\end{aligned}$$

我们想强调的是，$\operatorname{Map}(\mathbf{n}\setminus\operatorname{dom}\varepsilon,\mathbb{R})$ 与$\{x\in\mathbb{R}^n:\ \varepsilon(i)x_i=R\}$ 之间的识别只有在固定了 R 之后才是规范的。

对于这样的 ε，令

$$c(\varepsilon)^{-1}\colon\mathbf{n}\to\mathbf{n}\setminus\operatorname{dom}\varepsilon\sqcup\operatorname{dom}\varepsilon$$

是将 $\mathbf{n}$划分为$\mathbf{n}\setminus\operatorname{dom}\varepsilon$和 $\operatorname{dom}\varepsilon$且保持阶的唯一映射。我们记作 $\eta\geq\varepsilon$，若 $\operatorname{dom}\eta\supseteq\operatorname{dom}\varepsilon$且 $\eta|_{\operatorname{dom}\varepsilon}=\varepsilon$。对于所有 $\eta\geq\varepsilon$，令$c(\eta,\varepsilon)^{-1}$为将 $\operatorname{dom}\eta^c$划分为 $\operatorname{dom}\eta\setminus$、$\operatorname{dom}\varepsilon$和 $\operatorname{dom}\varepsilon^c$且保持阶的唯一映射，并令 $\operatorname{per}(\eta,\varepsilon)^{-1}$ 为将 $\operatorname{dom}\eta$划分为 $\operatorname{dom}\eta-\varepsilon$和 $\operatorname{dom}\varepsilon$且保持阶的唯一映射。这里，$\eta-\varepsilon$表示$\eta$在 $\operatorname{dom}\eta\setminus\operatorname{dom}\varepsilon$上的限制。

对于每个 $\boldsymbol{\eta} \geq \boldsymbol{\varepsilon}$，我们都有一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{n} & \xrightarrow{c(\boldsymbol{\eta})^{-1}} & \operatorname{dom}\boldsymbol{\eta}^c \sqcup \operatorname{dom}\boldsymbol{\eta} & \xrightarrow{\mathrm{id}\sqcup \mathrm{per}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\varepsilon})^{-1}} & \operatorname{dom}\boldsymbol{\eta}^c \sqcup \operatorname{dom}\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\varepsilon} \sqcup \operatorname{dom}\boldsymbol{\varepsilon} \\ \| & & & & \uparrow{\scriptstyle c(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\varepsilon})^{-1}\sqcup \mathrm{id}} \\ \mathbf{n} & & \xrightarrow{\qquad\qquad c(\boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \qquad\qquad} & & \operatorname{dom}\boldsymbol{\varepsilon}^c \sqcup \operatorname{dom}\boldsymbol{\varepsilon}. \end{array}$$

这些映射通过拉回其逆映射，在欧几里得空间上诱导出线性映射。例如，

$$\begin{aligned} c(\boldsymbol{\varepsilon})\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n(\boldsymbol{\varepsilon}) \times \mathbb{R}^{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ (x_1,\dots,x_n) &\mapsto \left(x_{c(\boldsymbol{\varepsilon})^{-1}(1)},\dots,x_{c(\boldsymbol{\varepsilon})^{-1}(|\operatorname{dom}\boldsymbol{\varepsilon}^c|)}; x_{c(\boldsymbol{\varepsilon})^{-1}(|\operatorname{dom}\boldsymbol{\varepsilon}^c|+1)},\dots,x_{c(\boldsymbol{\varepsilon})^{-1}(n)}\right). \end{aligned}$$

我们采用以下记号约定：对于 $M \times \mathbb{R}^n$ 上的块度量 g，若将 $\mathbb{R}^n(\boldsymbol{\varepsilon})$ 视为 $\{x \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{\varepsilon}(i)x_i = R\}$，则用 $g(\boldsymbol{\varepsilon})$ 表示对 $M \times \mathbb{R}^n(\boldsymbol{\varepsilon})$ 的限制；若将 $\mathbb{R}^n(\boldsymbol{\varepsilon})$ 视为$\mathbb{R}^{|\operatorname{dom}(\boldsymbol{\varepsilon})^c|}$，则用 $\partial^{\boldsymbol{\varepsilon}} g$ 表示对 $M \times \mathbb{R}^n(\boldsymbol{\varepsilon})$ 的限制。这两者之间的识别是由 $\delta^{R\boldsymbol{\varepsilon}}$ 给出的拉回。

$c(\boldsymbol{\varepsilon})$ 坐标的拉回给出一个等距映射

$$c(\boldsymbol{\varepsilon}) \coloneqq \mathrm{id}_M \times c(\boldsymbol{\varepsilon})\colon \left(U_R(\boldsymbol{\varepsilon}), g|_{U(\boldsymbol{\varepsilon})}\right) \to \left(M \times \mathbb{R}^n(\boldsymbol{\varepsilon}) \times \mathbb{R}^{\boldsymbol{\varepsilon}}_R, \underbrace{g(\boldsymbol{\varepsilon}) \oplus \langle\cdot,\cdot\rangle}_{=c(\boldsymbol{\varepsilon})_* g|_{U_R(\boldsymbol{\varepsilon})}}\right).$$

这可以纳入以下等距映射图表：

$$\begin{array}{ccccc} U_R(\boldsymbol{\eta}) & \xrightarrow{c(\boldsymbol{\eta})} & (M \times \mathbb{R}^n)(\boldsymbol{\eta}) \times \mathbb{R}^{\boldsymbol{\eta}}_R & \xrightarrow{\mathrm{id}\times \mathrm{per}(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\varepsilon})} & (M \times \mathbb{R}^n)(\boldsymbol{\eta}) \times \mathbb{R}^{\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\varepsilon}}_R \times \mathbb{R}^{\boldsymbol{\varepsilon}}_R \\ \downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle c(\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\varepsilon})} \\ U_R(\boldsymbol{\varepsilon}) & & \xrightarrow{\qquad\qquad c(\boldsymbol{\varepsilon}) \qquad\qquad} & & (M \times \mathbb{R}^n)(\boldsymbol{\varepsilon}) \times \mathbb{R}^{\boldsymbol{\varepsilon}}_R. \end{array}$$

由于所有这些映射都是由欧几里得空间上的置换诱导的，因此它们都是保持 Pin 结构的等距映射，因为每个欧几里得空间在等价意义下只有一种 Pin^- 结构。

旋量丛构造的函子性，参见引理4.1.17，给出了相关旋量丛上的一个直和分解：

$$\Phi_{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathfrak{S}(c(\boldsymbol{\varepsilon}))\colon \mathfrak{S}_{U_R(\boldsymbol{\varepsilon})} \to \mathfrak{S}_{g(\boldsymbol{\varepsilon})} \boxtimes Cl_{\boldsymbol{\varepsilon},0} = \mathfrak{S}_{g(\boldsymbol{\varepsilon})\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle},$$

其中 $Cl_{\boldsymbol{\varepsilon},\,0}$ 表示 $Cl_{|\boldsymbol{\varepsilon}|,\,0}$。由此得到旋量丛之间的态射：

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{S}|_{M\times U_R(\boldsymbol{\eta})} & \xrightarrow{\Phi_{\boldsymbol{\eta}}} & \mathfrak{S}_{g(\boldsymbol{\eta})} \boxtimes Cl_{\boldsymbol{\eta},0} & \xrightarrow{\mathrm{id}\times \mathfrak{S}(\mathrm{per}(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\eta}))} & \mathfrak{S}_{g(\boldsymbol{\eta})} \boxtimes Cl_{\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\varepsilon},0} \boxtimes Cl_{\boldsymbol{\varepsilon},0} \\ \downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle c_{\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ \mathfrak{S}|_{M\times U_R(\boldsymbol{\varepsilon})} & & \xrightarrow{\qquad\qquad \Phi_{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad\qquad} & & \mathfrak{S}_{g(\boldsymbol{\varepsilon})} \boxtimes Cl_{\boldsymbol{\varepsilon},0}. \end{array}$$

定义4.2.1。设 g 是 $M \times \mathbb{R}^n$ 上的块度量，且 $A \in \{\mathrm{id}, \mathrm{e/o}\}$。伪微分算子 $P \in \Psi\mathrm{DO}^m(\mathfrak{S}_g)$ 若满足以下条件，则称为块形式（类型为 A）：存在$R > r > 0$ 使得：

(1) 块度量 g 在 $M \times rI^n$ 之外分解。

(2) 若 $\sigma \in \Gamma_c(\mathfrak{S}_g)$ 的支集包含于 $M \times (RI^n)^\circ$ 内，则 $P\sigma$ 的支集包含于 $M \times (RI^n)^\circ$ 内。

(3) 算子 P 限制[5] 到 $M \times U_r(\varepsilon)$，并且存在一个 $P(\varepsilon) \in \Psi$微分算子$^m(\mathfrak{S}_{g(\varepsilon)})$使得

$$(\Phi_\varepsilon)_* P|_{M\times U_r(\varepsilon)} = P(\varepsilon) \boxtimes \mathrm{id} + A \boxtimes D(\varepsilon),$$

其中 $P(\varepsilon) \in \Psi$微分算子$^m(\mathfrak{S}_{g(\varepsilon)})$，且 $D(\varepsilon)$ 是平凡丛 $Cl_{\varepsilon,0} \to \mathbb{R}^\varepsilon_r$ 上的一个 m 阶常系数微分算子。

我们称 $M \times RI^n$ 为 P 的核。

常数 R 和 r 并非唯一。我们将在下面的引理4.2.6 中看到，性质 (2) 和 (3) 对所有更大的常数 $R' > R$ 和 $r' > r$ 同样成立。

引理 4.2.2. 设 $P \in \Psi\mathrm{DO}^m(\mathfrak{S}_g)$ 是一个 A 型块算子。那么，算子 $P(\varepsilon)$ 和 $D(\varepsilon)$ 由 P 唯一确定。

证明。 我们对 $|\mathrm{dom}\,\varepsilon|$ 进行归纳来证明该结论。在 $\mathrm{dom}\,\varepsilon = \emptyset$ 上，无须证明。归纳步骤中，只需证明以下结论：在带有乘积度量 $g = g_M \oplus \langle\cdot,\cdot\rangle$ 的（不一定是闭的）自旋流形 M 上，形如 $P = Q \boxtimes \mathrm{id} + A \boxtimes D \in \Psi\mathrm{DO}^m(\mathfrak{S}_{g_M} \boxtimes Cl_{n,0})$ 的每个算子都能唯一确定 Q 和 D。我们将通过用 P 表示 Q 和 D 来证明该结论。

设 x^1，……，x^n 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准坐标，∂_j 是沿 j 方向的导子。算子 D 可以写成

$$D = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|\le m} a_{\boldsymbol{\alpha}} \partial^{\boldsymbol{\alpha}},$$

对于某些常数 $a_{\boldsymbol{\alpha}} \in \mathrm{End}(Cl_{n,0})$。对于一点 $p \in \mathbb{R}^n$，选择具有紧支撑的光滑函数$f_1, \dots, f_n$，满足在 p 的某个邻域V内，$f_j(x) = (x_j - p_j)$。进一步选择 $u \in \Gamma_c(M, \mathfrak{S}_{g_M})$ 和 $v \in \Gamma_c(V, Cl_{n,0})$。最后，对于每个满足 $|\boldsymbol{\alpha}| \le m$ 的多重指标 $\boldsymbol{\alpha}$，定义乘法算子 $\mu_{\boldsymbol{\alpha}}$ 如下：

$$\begin{aligned} \mu_{\boldsymbol{\alpha}} \colon \Gamma_c(M \times \mathbb{R}^n, \mathfrak{S}_{g_M} \boxtimes Cl_{n,0}) &\to \Gamma_c(M \times \mathbb{R}^n, \mathfrak{S}_{g_M} \boxtimes Cl_{n,0}) \\ \sigma &\mapsto \prod_{j=1}^n f_j^{\alpha_j} \cdot \sigma. \end{aligned}$$

莱布尼茨法则意味着

$$[P, \mu_{\boldsymbol{\alpha}}](u \otimes v)(m, p) = A(u)(m) \otimes a_{\boldsymbol{\alpha}} v(p),$$

因此，D 由 P唯一确定。

[5]这意味着，如果一个截面的支集包含在 $U_r(\varepsilon)$ 内，那么 $P\sigma$ 的支集也包含在这个集合内。

接下来需要根据 P和 D确定 Q。由于 $P - A \boxtimes D$ 是 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$-线性的，定义在$\Gamma_c($ $M \times \mathbb{R}^n$， $\mathfrak{S}_{g_M} \boxtimes Cl_{n,0})$上，因此我们可以定义一个线性映射

$$\tilde{Q}\colon \Gamma_c(M, \mathfrak{S}_{g_M}) \to \Gamma(M, \mathfrak{S}_{g_M})$$

如下：固定一点 $p \in \mathbb{R}^n$ 和一个函数 $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$，该函数在 x 附近恒等于 1，且具有紧支撑。于是令

$$\tilde{Q}(\sigma)(m) \coloneqq (P - A \boxtimes D)(\sigma \otimes f \cdot 1)(m, p).$$

代入分解后得到

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(\sigma)(m) &= (P - A \boxtimes D)(\sigma)(m, p)\\ &= Q \boxtimes \mathrm{id}(\sigma \otimes f \cdot 1)(m, p)\\ &= Q(\sigma)(m) \otimes f(p) = Q(\sigma)(m) \otimes 1,\end{aligned}$$

它可以通过包含映射 $\mathfrak{S}_{g_M} \subseteq \mathfrak{S}_{g_M} \boxtimes Cl_{n,0}$ 与 $Q(\sigma)$ 等同。 □

推论 *4.2.3.* 若 P 是 $\mathfrak{S}_g$ 上的块算子，则 $P(\varepsilon)$ 是 $\mathfrak{S}_{g(\varepsilon)}$ 上的块算子。等价地，若 $\delta^{2\rho\varepsilon}\colon \mathbb{R}^n(\varepsilon) \xrightarrow{\cong} \{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon(i)x_i = 2\rho\}$ 表示等距嵌入，它将 $2\varepsilon(j)\rho$ 插入所有 $j \in \mathrm{dom}\,\varepsilon$ 的第 j 个坐标中，则对于所有 $\rho > R$，$\delta^{2\rho\varepsilon *}P(\varepsilon) = (\delta^{2\rho\varepsilon})_*^{-1}P(\varepsilon)$ 都是 $\mathfrak{S}_{\partial^\varepsilon g}$ 上的块算子，其中 R 表示 P 的核的大小。这些块算子满足条件 *(1)-(3)*，且常数与 P 相同。

证明。由于 g 在 rI^n 之外分解，因此它在 ρI^n 之外也分解。若将 $\mathbb{R}^n(\varepsilon)$ 识别为仿射子空间 $\{x \in \mathbb{R}^n : \varepsilon(j)x_j = \rho\}$，那么限制度量 $g(\varepsilon) = g\restriction_{\mathbb{R}^n(\varepsilon)}$ 仍是一个块度量，并且在 $rI^n \cap \mathbb{R}^n\varepsilon) \cong rI^{n-|\mathrm{dom}\,\varepsilon|}$ 之外分解。

令 $m \coloneqq n - |\mathrm{dom}\ \varepsilon|$。我们通过逆否命题验证 $\delta^{2r\varepsilon *}P(\varepsilon)$ 的公理（2）。假设存在一个截面 $\sigma \in \Gamma_c(\mathfrak{S}_{\partial_\varepsilon g(\varepsilon)})$，其支集位于 $M \times (RI^m)^\circ$，且 $\delta^{2r\varepsilon *}P(\varepsilon)(\sigma)$ 的支集不包含于 $M \times (RI^m)^\circ$。取一个光滑函数 $f\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$，其支集包含于 (r, R) 内，并在 R_r^ε 上定义实值函数

$$f^\varepsilon(x) = \prod_{j=1}^{|\mathrm{dom}\,\varepsilon|} f(x_j).$$

那么，截面 $\sigma \otimes f^\varepsilon$ 的支集位于 $M \times RI^m \times RI^{|\mathrm{dom}\,\varepsilon|}$ 的内部；但根据假设，$\big(P(\varepsilon) \boxtimes \mathrm{id} + A \boxtimes D\big)(\sigma \otimes f^\varepsilon)$ 的支集不位于 $M \times RI^m \times RI^{|\mathrm{dom}\,\varepsilon|}$ 内。因此，$\tau \coloneqq \Phi_{\varepsilon *}^{-1}(\sigma \otimes f^\varepsilon)$ 是 $\mathfrak{S}_g$ 的一个截面，其支集位于 $M \times RI^n$ 的内部。但 $P(\tau)$ 的支集不包含于 $M \times RI^n$ 中，这与 P 的公理（2）矛盾。

我们先给出（3）的非正式证明。我们知道，

$$\Phi_{\delta^\varepsilon(\boldsymbol{\eta})\,*}P|_{U_r(\delta^\varepsilon(\boldsymbol{\eta}))} = P\big(\delta^\varepsilon(\boldsymbol{\eta}))) \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes D(\delta^\varepsilon(\boldsymbol{\eta}))\big).$$

如果我们将由dom ε 参数化的（固定）坐标“向右”置换，使用$\mathrm{per}(\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}))\ \varepsilon$)，就可以将 $\mathbb{R}^{\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}))_r}$与 $\mathbb{R}^{\delta^{\varepsilon}(r\ \ \boldsymbol{\eta}\ \ -\varepsilon}\times\mathbb{R}^{\varepsilon}_{r))}$等同起来。引理4.2.2 的唯一性陈述蕴含（滥用记号）

$$P(\varepsilon)=P\big(\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta})\big)\otimes\mathrm{id}+\mathrm{per}(\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}),\varepsilon)_{*}D\big(\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta})\big).$$

现在给出 (3) 的形式证明：包含映射 $\delta^{2r\varepsilon}$ 映射 $U_r^m(\boldsymbol{\eta})$ 到 $U_r^n(\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}))$。此外，下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc}
M\times U_r^m(\boldsymbol{\eta}) & \xrightarrow{\quad c^m(\boldsymbol{\eta})\quad} & M\times\mathbb{R}^m(\boldsymbol{\eta})\times\mathbb{R}^{\boldsymbol{\eta}}_r \\
\big\downarrow{\scriptstyle \delta^{2r\varepsilon}} & & \\
M\times U_r^n(\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta})) & \xrightarrow[c(\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}))]{} & M\times\mathbb{R}^n(\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}))\times\mathbb{R}_r^{\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta})} \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{per}(\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}),\boldsymbol{\varepsilon})} \\
 & & M\times\mathbb{R}^n(\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}))\times\mathbb{R}_r^{\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta})-\boldsymbol{\varepsilon}}\times\mathbb{R}^{\boldsymbol{\varepsilon}}_r
\end{array}
\qquad \mathrm{id}\times\delta^{\varepsilon}$$

这意味着

$$(\Phi_{\boldsymbol{\eta}})_{*}(\delta^{2r\varepsilon *}P(\varepsilon)))=(\mathrm{id}\times\delta^{\varepsilon})^{*}\big(P(\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}))\otimes\mathrm{id}+A\otimes\mathrm{per}(\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}),\varepsilon)_{*}D(\delta^{\varepsilon}(\boldsymbol{\eta}))\big),$$

因此，$\delta^{2r\varepsilon *}P(\varepsilon)$ 确实具有块形式。 □

这个引理的逆命题也成立。

引理 4.2.4. 设 $m>0$ 和 $P\in\Psi\mathrm{DO}^{m}(\mathfrak{S}_g)$ 为类型 A的块形式。对于 $\mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R},Cl_{1,0})$上的任意一个常系数 m 阶微分算子 D，算子

$$Q\coloneqq P\boxtimes\mathrm{id}+A\boxtimes D\in\overline{\Psi\mathrm{DO}}^{m}(\mathfrak{S}_g\boxtimes Cl_{1,0})=\overline{\Psi\mathrm{DO}}^{m}(\mathfrak{S}_{g\oplus\mathrm{d}x_{n+1}^2})$$

也是一种类型为 A的块算子。

证明。若 $m>0$，则 Q 是 $\Psi\mathrm{DO}^{m}(\mathfrak{S}_{g\oplus\mathrm{d}x_{n+1}^2})$ 定理 B.0.28中的一个元素。

公理（1）显然成立。公理（2）也成立，因为 $A\boxtimes D$在附加维度中充当微分算子。公理（3）需要一些定义。设给定 $\varepsilon\colon\mathbf{n}+\mathbf{1}\to\mathbb{Z}_2$。

若 $n+1\in\mathrm{dom}\,\varepsilon$，则 $U_r(\varepsilon)=U_r(p_{n+1}(\varepsilon))\times\{\varepsilon(n+1)x_{n+1}>r\}$ 且 $\Phi_{\varepsilon}=\Phi_{p_{n+1}(\varepsilon)}\times\mathrm{id}$。在此情形下，我们有

$$P(\varepsilon)=Q(p_{n+1}(\varepsilon))\boxtimes\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\ \text{ and }\ D^{Q}(\varepsilon)=D^{P}(p_{n+1}(\varepsilon))\boxtimes\mathrm{id}.$$

若 $n+1\notin\mathrm{dom}\ \varepsilon$，则 $U_r(\varepsilon)=U_r^n(\varepsilon)\times\mathbb{R}$，其中$U_r^n(\varepsilon)\subseteq\mathbb{R}^n$，而 Φ_{ε}由以下分解给出

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{S}|_{M\times U_r(\varepsilon)}=\mathfrak{S}|_{M\times U_r^n(\varepsilon)}\boxtimes Cl_{1,0} & \xrightarrow{\Phi_{\varepsilon}\boxtimes\mathrm{id}} & \mathfrak{S}_{g(\varepsilon)}\boxtimes Cl_{\varepsilon,0}\boxtimes Cl_{1,0} \\
 & & \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\boxtimes\ \mathrm{swap}} \\
 & & \mathfrak{S}_{g(\varepsilon)}\boxtimes Cl_{1,0}\boxtimes Cl_{\varepsilon,0}.
\end{array}$$

在这种情况下，我们有

$$Q(\varepsilon) = P(\varepsilon) \boxtimes \mathrm{id} + A \boxtimes D \quad \text{and} \quad D^Q(\varepsilon) = D^P(\varepsilon).$$

根据这些定义，等式

$$\Phi_{\varepsilon *} Q|_{M \times U_r(\varepsilon)} = Q(\varepsilon) \boxtimes \mathrm{id} + A \boxtimes D^Q(\varepsilon)$$

很容易验证，因此 Q 是一个块算子。 □

伪微分算子本质上并非局部算子。另一方面，块算子在某些开集的特定类别上沿某些方向具有局部性。为了对块算子运用局部到整体原理，我们需要采用适配于块算子特定块形式的单位分解。

定义 4.2.5。 设 $\chi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ 是一个紧支撑、光滑且为偶函数的函数，并且在原点附近恒等于 1。我们将以下函数的零延拓

$$\chi^{-1} \coloneqq (1-\chi)|_{\mathbb{R}_{\leq 0}}, \quad \chi^0 \coloneqq \chi, \quad \text{and} \quad \chi^1 \coloneqq (1-\chi)|_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$$

记作相同的符号。更一般地，我们在 $\mathbb{R}^n$ 或 $M \times \mathbb{R}^n$ 上定义单位分解

$$\left\{ \chi^{\boldsymbol{\alpha}}(m,x) \coloneqq \prod_{j=1}^{n} \chi^{\boldsymbol{\alpha}(j)}(x_j) \right\}.$$

参数化 $\alpha\colon \mathbf{n} \to \mathbb{Z}_3$。

作为这一划分的一个应用，我们证明，块算子定义中的常数实际上是下界。

引理 4.2.6。 设 $P \in \Psi\mathrm{DO}^{m}(\mathfrak{S}_g)$ 是一个块算子，并设 $R > r$ 为满足条件 *(1)–(3)* 的常数，其中 P 成立。那么，对于所有$R' > R$ 和满足 $R' > r'$ 的 $r' > r$，这些条件也成立，

证明。 显然，条件 (1) 对所有 $r' > r$ 都成立。

我们继续证明条件 (3)。设 $\sigma \in \Gamma_c(\mathfrak{S}_g)$ 是一个截面，其支集为 $\sigma \subseteq U_{r'}(\varepsilon)$。由于支集是紧的，我们可以找到一个稍大的 $r'' > r'$，使得 $\sigma \subseteq U_{r''}(\varepsilon)$ 的支集包含于其中。设 $\chi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ 是一个光滑函数，它在 $\mathbb{R}_{\geq r''}$ 附近恒等于 1，在 $\mathbb{R}_{\leq r'}$ 附近恒等于 0。

对于 $\varepsilon\colon \operatorname{dom} \varepsilon \subseteq \mathbf{n} \to \mathbb{Z}_2$ 定义

$$\chi^{\varepsilon}(x) \coloneqq \prod_{j \in \operatorname{dom} \varepsilon} \chi(\varepsilon(j) x_j).$$

此函数的支集位于 $U_{r'}(\varepsilon)$内。若我们不在记号上区分 χ^{ε}和 $(\Phi_{\varepsilon})_* \chi^{\varepsilon} = \chi^{\varepsilon} \circ \Phi_{\varepsilon}^{-1}$，则有

$$\begin{aligned}(\Phi_{\varepsilon})_*(P\chi^{\varepsilon}\sigma) &= P(\varepsilon) \boxtimes \mathrm{id}(\chi^{\varepsilon}\sigma) + A \boxtimes D(\chi^{\varepsilon}\sigma) \\ &= \chi^{\varepsilon} \cdot (P(\varepsilon) \boxtimes \mathrm{id})(\sigma) + D(\chi^{\varepsilon}) \cdot (A \boxtimes \mathrm{id})(\sigma) + \chi^{\varepsilon} \cdot (A \boxtimes D)(\sigma),\end{aligned}$$

其支集也位于 $U_{r'}(\varepsilon)$内。因此， P也限制到 $U_{r'}(\varepsilon)$上，并且必然在此处分解为式 (3) 的形式。

条件 (2) 使用了定义 4.2.5中的构造。我们将对 n（即 $M\times\mathbb{R}^n$的欧几里得因子的维数）归纳证明条件 (2)。当 $n=0$时，无需证明，我们可以继续处理 $n\geq 1$。令 $\chi\colon \mathbb{R}\to[0,1]$为一个光滑偶函数，它在 1 附近恒等于 $[-r,r]$，并在$\mathbb{R}\setminus(-R,R)$附近为零。令 $\{\chi^{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}_3^n}$为定义 $M\times\mathbb{R}^n$ 中的相应单位分解，其中定义见 4.2.5。显然有

$$P(\sigma)=P(\chi^{\mathbf{0}}\sigma)+\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}_3^n\setminus\mathbf{0}}P(\chi^{\boldsymbol{\alpha}}\sigma).$$

加项 $\chi^{\mathbf{0}}\sigma$ 的支集包含于 $M\times(RI^n)^\circ$ 内，因此根据 P 的条件 (2)，$P(\chi^{\mathbf{0}}\sigma)$ 的支集也包含于 $M\times(RI^n)^\circ$ 内。

回忆记号 $\hat{}\boldsymbol{\alpha}\mathrel{..}=\boldsymbol{\alpha}|_{\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}}\colon \operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}\to\mathbb{Z}_2$。截面 $\chi^{\boldsymbol{\alpha}}\sigma$的支集包含于 $U_r(\hat{}\boldsymbol{\alpha})$ 内。若 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，则 $\hat{}\boldsymbol{\alpha}$不是空映射，因此由上文条件 (3) 的证明可知， $P(\chi^{\boldsymbol{\alpha}}\sigma)$ 的支集也包含于 $U_r(\hat{}\boldsymbol{\alpha})$ 内。

由于 $\operatorname{supp}\sigma\subseteq M\times(R'I^n)^\circ$，我们可以找到一个光滑的偶函数 $\psi\colon\mathbb{R}\to[0,1]$，它在 $\mathbb{R}\setminus(-R',R')$ 附近为零，并且 $\psi^{\mathbf{0}}(x)\mathrel{..}=\prod_{j=1}^n\psi(x_j)$ 在 $\operatorname{supp}\sigma$ 上恒等于 1。P 的块形式意味着

$$\begin{aligned}P(\chi^{\boldsymbol{\alpha}}\sigma)&=P(\chi^{\boldsymbol{\alpha}}\psi^{\mathbf{0}}\sigma)\\&=\prod_{j\in\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}}\psi\circ\mathrm{pr}_j\cdot P\left(\Big(\prod_{j\in\operatorname{Null}(\boldsymbol{\alpha})}\psi\circ\mathrm{pr}_j\Big)\cdot\chi^{\boldsymbol{\alpha}}\sigma\right)\\&\qquad+D(\hat{\boldsymbol{\alpha}})\left(\prod_{j\in\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}}\psi\circ\mathrm{pr}_j\right)\cdot P\left(\Big(\prod_{j\in\operatorname{Null}\boldsymbol{\alpha}}\psi\circ\mathrm{pr}_j\Big)\cdot\chi^{\boldsymbol{\alpha}}\sigma\right).\end{aligned}$$

根据推论 4.2.3， $P(\boldsymbol{\alpha}|_{\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}})$ 是 $\mathfrak{S}_{g(\boldsymbol{\alpha}|_{\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}})}$上的块算子，对应于与 P 相同的常数，并满足条件 (1) - (3)；而 $A\boxtimes D(\boldsymbol{\alpha}|_{\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}})$ 是微分算子，因此只会缩小支集。由此以及归纳假设可知，截面

$$P\left(\Big(\prod_{j\in\operatorname{Null}(\boldsymbol{\alpha})}\psi\circ\mathrm{pr}_j\Big)\cdot\chi^{\boldsymbol{\alpha}}\sigma\right)$$

的支集必须包含在 $\{|x_j|<R'\colon\ j\in\text{零空间 }\boldsymbol{\alpha}\}\cap U_r(\boldsymbol{\alpha}|_{\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}})$ 内。因此

$$\prod_{j\in\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}}\psi\circ\mathrm{pr}_j\cdot P\left(\prod_{j\in\operatorname{Null}(\boldsymbol{\alpha})}\psi\circ\mathrm{pr}_j\chi^{\boldsymbol{\alpha}}\sigma\right)$$

and

$$D(\hat{\boldsymbol{\alpha}})\left(\prod_{j\in\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}}\psi\circ\mathrm{pr}_j\right)\cdot P\left(\prod_{j\in\operatorname{Null}\boldsymbol{\alpha}}\psi\circ\mathrm{pr}_j\chi^{\boldsymbol{\alpha}}\sigma\right)$$

支集位于 $M\times(R'I^n)^\circ\cap U_r(\boldsymbol{\alpha}|_{\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}})$ 内，由此完成了 (2) 的证明。 □

推论 4.2.7。设 $P \in \Psi\mathrm{DO}^1(\overline{\mathfrak{S}_g})$ 是一个 A 型块算子，其核包含于 $M \times RI^n$ 中。对于 $\boldsymbol{\alpha}\colon \mathbf{n} \to \mathbb{Z}_3$，并定义 $\rho' > \rho > R$

$$V_{\rho<\rho'}(\boldsymbol{\alpha}) \coloneqq M \times \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \in (-\rho', \rho') \text{ if } j \in \mathrm{Null}(\boldsymbol{\alpha}), \alpha_j x_j > \rho \text{ otherwise}\}.$$

如果 $\sigma \in \Gamma_c(\mathfrak{S}_g)$ 的支集包含在 $V_{\rho<\rho'}(\boldsymbol{\alpha})$内，那么 $P\sigma$ 的支集也包含在其中。

证明。如果 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$，那么 $V_{\rho<\rho'}(0) = M \times \rho' I^n$，结论由引理 4.2.6 得出。现在假设 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，因此 $V_{\rho<\rho'}(\boldsymbol{\alpha}) \subseteq U_\rho(\hat{}\boldsymbol{\alpha})$。对于每个 $u \in \Gamma_c(\mathfrak{S}_g)$支集包含在 $V_{\rho<\rho'}(\boldsymbol{\alpha})$ 内的对象，略去记号上的细微差别可得

$$Pu = (P(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) \boxtimes \mathrm{id})(\chi^{\boldsymbol{\alpha}} u) + \mathrm{e/o} \boxtimes D(\hat{\boldsymbol{\alpha}})(\chi^{\boldsymbol{\alpha}})(\chi^{\boldsymbol{\alpha}} u)$$

第二个加项是一个微分算子，因此具有支集递减性

由推论 4.2.3 可知 $P(\hat{}\boldsymbol{\alpha})$ 仍是一个块算子，其核包含于 $M \times \rho' I^{|\mathrm{Null}(\boldsymbol{\alpha})|}$ 中。由于 $V_{\rho<\rho'}(\boldsymbol{\alpha}) \cong \rho' I^{|\mathrm{Null}(\boldsymbol{\alpha})|} \times \mathbb{R}^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_\rho$，由前述引理可得

$$\mathrm{supp}\ P(\boldsymbol{\alpha})(u(-, y)) \subseteq \rho' I^{|\mathrm{Null}(\boldsymbol{\alpha})|}$$

因此

$$\mathrm{supp}\ P(\boldsymbol{\alpha})(u) \subseteq \rho' I^{|\mathrm{Null}(\boldsymbol{\alpha})|} \times \mathbb{R}^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_\rho = V_{\rho<\rho'}(\boldsymbol{\alpha}).$$

□

前面证明中使用的技巧也可用于证明，块算子在以下有限意义下是局部的。

推论 4.2.8. 设 P 是一个块算子，其核包含于 $M \times \rho I^n$。若 $\rho' > \rho$ 和 $V \subseteq U_{\rho'}(\varepsilon)$ 是一个开集，并且在 $U_{\rho'}(\varepsilon) \cong M \times \mathbb{R}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}^\varepsilon_{\rho'}$ 下对应于 $M \times \mathbb{R}^n(\varepsilon) \times V^\varepsilon$，则 $(Pu)|_V$ 仅取决于 $u|_{\bar{V}}$（的芽）。

证明. 只需证明：若 u 在 V 附近恒为零，则 Pu 在 V 上恒为零。设 ϕ: $M \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个光滑函数，使得 $\phi^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) = V$，并且 ϕ 仅取决于由 dom (ε) 标记的变量。设 χ: $\mathbb{R} \to [0, 1]$ 是一个光滑偶函数，使得 χ 在 $[-\rho, \rho]$ 上恒等于 1，且其支集包含于 $(-\rho', \rho')$。将定义 4.2.5 中的单位分解记为 $\chi^{\boldsymbol{\alpha}}$。

由于 supp $\phi \subseteq U_{\rho'}(\varepsilon)$，我们得出结论：supp ϕ 与 $V_{\rho<\rho'}(\hat{}\boldsymbol{\alpha})$ 只有在 $\hat{}\boldsymbol{\alpha} \geq \varepsilon$时才有非空交集。根据推论 4.2.7，我们知道 supp $(P\chi^{\boldsymbol{\alpha}} u) \subseteq V_{\rho<\rho'}(\boldsymbol{\alpha})$，因此当 $\hat{}\boldsymbol{\alpha} \geq \varepsilon$ 为假时，我们得出 $\phi \cdot P\chi^{\boldsymbol{\alpha}} u = 0$。另一方面，如果 $\hat{}\boldsymbol{\alpha} \geq \varepsilon$，那么 $V_{\rho<\rho'}(\boldsymbol{\alpha}) \subseteq U_\rho(\varepsilon)$，而 P 的块分解意味着

$$\phi \cdot P\chi^{\boldsymbol{\alpha}} u = P\phi\chi^{\boldsymbol{\alpha}} u + [\phi, P]\chi^{\boldsymbol{\alpha}} u = P\chi^{\boldsymbol{\alpha}} \underbrace{\phi u}_{=0} - i^{-1} \underbrace{\mathrm{symb}_1(P)(-, \mathrm{d}\phi)\chi^{\boldsymbol{\alpha}} u}_{=0 \text{ on } V}$$

$$= 0 \qquad \text{on } V$$

因为 $u|_V = 0$。由于 $\{\chi^{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_3^n}$ 是单位分解，前面的计算表明 $\phi Pu|_V = 0$，由此我们推出 $Pu|_V = 0$。 □

定义 4.2.9。 块算子 $P \in \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_g)$称为狄拉克型块算子，如果 $A = \mathrm{e/o}$ 且 $D(\varepsilon) = \not{D}_{\mathbb{R}^\varepsilon}$ 是 $\mathbb{R}^\varepsilon$上的欧几里得度量的狄拉克算子，对所有 $\varepsilon\colon \mathrm{dom}\ \varepsilon \to \mathbb{Z}_2$均成立，并且主符号满足 $\mathrm{symb}_1(P) = \mathrm{symb}_1(\not{\mathfrak{D}}_g)$。

这一界定的启发性例子是块度量的狄拉克算子，以及伪狄拉克算子块映射的伴随算子。

例 4.2.10。 我们运用例4.1.18 中的讨论来说明， $\not{\mathfrak{D}}_g$ 是一个块算子（狄拉克型），若 g 是 $M \times \mathbb{R}^n$上的块度量。假设块度量在 $M \times rI^n$之外分解。那么，由于微分算子只会缩小支集，我们可以任意选取 $R > r$ ，使得条件 (1) 和 (2) 显然成立。剩下要证明的是， $\not{\mathfrak{D}}_g$ 在 $U_r(\varepsilon)$上以适当的方式分解。由于狄拉克算子的定义序列（4.1.10）在保持 Pin 结构的等距微分同胚下具有自然性，因此有

$$(\Phi_\varepsilon)_* \not{\mathfrak{D}}_g|_{M\times U_r(\varepsilon)} = \not{\mathfrak{D}}_{c(\varepsilon)_* g} = \not{\mathfrak{D}}_{g(\varepsilon)+\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^{|\mathrm{dom}\,\varepsilon|}}} = \not{\mathfrak{D}}_{g(\varepsilon)} \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \not{D}_{\mathbb{R}^{|\mathrm{dom}\,\varepsilon|}}.$$

例4.1.18 中旋量丛的分解有一个较弱的版本。若 $U \subseteq \mathbb{R}^n$是开集，且 $g\colon U \to \mathrm{Riem}(M)$是一个光滑映射，则相对于 $\mathrm{susp}(g)$， TU仍是 $T(M \times U)$中 TM的正交补。这会诱导旋量丛$\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(g)} \cong \mathfrak{S}_g \otimes Cl_{n,\,0}$的一个分裂。

定义4.2.11. 设 $P\colon U \to \Psi\mathrm{DO}^m(\mathfrak{S})$ 是一个光滑映射，其目标空间带有振幅拓扑（的子空间拓扑）。它还附带一个光滑映射 $g\colon U \to \mathrm{Riem}(M)$。在 $\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(g)}$上定义如下算子：在同构 $\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(g)} \cong \mathfrak{S}_g \otimes Cl_{n,0}$ 下，这些算子由

$$P^{\mathrm{ex}}(\sigma \otimes e_I)(m,t) \coloneqq (P_t\sigma(\cdot,t)) \otimes e_I,$$
$$\mathrm{susp}(P) \coloneqq P^{\mathrm{ex}} + \sum_{k=1}^{n} \partial_{t_k} \cdot \nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}\,g}}_{\partial_{t_k}}.$$

我们称$\mathrm{susp}(P)$为 P的算子悬挂。

根据 Atiyah-Singer 外张量定理的参数化版本 B.0.29，我们有 $\mathrm{susp}(P) \in \Psi\mathrm{DO}^m(\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(g)})$ 当 $m > 0$。

我们主要关注 $U = \mathbb{R}^n$ 和 P 是光滑块映射的情形。请注意，这意味着黎曼度量的底层映射也是光滑块映射。不过，在某些证明中，我们需要在更一般的开子集上考虑算子悬挂。

引理 4.2.12. 设 $m > 0$ ，并设 $P\colon \mathbb{R}^n \to \Psi\mathrm{DO}^m(\mathfrak{S})$ 是一个光滑块映射，其目标空间带有振幅拓扑（的子空间拓扑），且底层块映射为 g。

那么， P^{ex} 和悬挂(P) 分别是类型为恒等 和$\mathrm{e/o}$的块算子。如果P的取值属于 $\Psi\mathrm{Dir}(M)$，那么悬挂(P) 是狄拉克型块算子。

证明。 我们只证明当 P 取值于 $\Psi\mathrm{Dir}(M)$ 时 $\mathrm{susp}(P)$ 的情形，其他情形的证明类似。由于 P 和 g 是块映射，存在一个 使得和 P在 Ψ时与 P 无关。

于是 $\operatorname{susp}(g)$ 在 $M \times rI^n$之外分解。由于 $\operatorname{susp}(P) - \mathrm{e/o} \otimes / D_{\mathbb{R}^n}$ 是 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$-线性的，该算子限制在形如 $M \times U$ 且 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集的开子集上，因此P 也如此。

接下来还需证明 P 在 $U_r(\varepsilon)$ 上以适当方式分解。在这个子集上，坐标置换 $c(\varepsilon)\colon M \times U_r(\varepsilon) \to M \times \mathbb{R}^n(\varepsilon) \times \mathbb{R}^\varepsilon_r$ 是等距映射，前提是定义域带有度量 $g|_{U_r(\varepsilon)}$，且右侧具有 $\operatorname{susp}(g)(\varepsilon) \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle$。因此，旋量丛分解为

$$\mathfrak{S}_{\operatorname{susp}(g)(\varepsilon)} \boxtimes Cl_{\varepsilon,0} \cong \mathfrak{S}_g \otimes Cl_{n-|\varepsilon|,0} \boxtimes Cl_{\varepsilon,0}$$

在 $(M \times \mathbb{R}^n(\varepsilon))$ 上通过 $\Phi_\varepsilon = \mathfrak{S}(c(\varepsilon)) \times \mathbb{R}^\varepsilon_r$。由于 $P|_{U_r(\varepsilon)}$ 与由 $\operatorname{dom}\varepsilon$ 标记的坐标无关，我们得出方程

$$\begin{aligned}
(\Phi_\varepsilon)_*(\operatorname{susp}(P)|_{M\times U_r(\varepsilon)}) &= (\Phi_\varepsilon)_*\big(P \otimes \mathrm{id}\big) + (\Phi_\varepsilon)_*\big(\mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_g} \otimes \not{D}_{\mathbb{R}^n}\big) \\
&= P_{c(\varepsilon)^{-1}(-)} \otimes \mathrm{id} + (\mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_g} \otimes \not{D}_{\mathbb{R}^n(\varepsilon)}) \boxtimes \mathrm{id}_{Cl_{\varepsilon,0}} \\
&\quad + \mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_g} \otimes \mathrm{e/o}_{Cl_{n-|\varepsilon|,0}} \boxtimes \not{D}_{\mathbb{R}^\varepsilon_r} \\
&= \Big((P|_{M\times\mathbb{R}^n(\varepsilon)})_{c(\varepsilon)^{-1}(-)} \otimes \mathrm{id}_{Cl_{n-|\varepsilon|,0}} + \mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_g} \otimes \not{D}_{\mathbb{R}^n(\varepsilon)}\Big) \boxtimes \mathrm{id} \\
&\quad + \mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_{\operatorname{susp}(g)(\varepsilon)}} \boxtimes \not{D}_{\mathbb{R}^\varepsilon},
\end{aligned}$$

这表明 $\operatorname{susp}(P)$ 按要求分解。 □

到目前为止，我们只在流形上的向量丛层面研究了块算子。在构造 $\Psi\mathrm{Dir}^\times(M)$ 的块版本之前，我们将在下一节研究其（泛函）解析性质。

4.3 块算子的解析性质

本节旨在推导块算子所需的解析性质。我们将证明，每个块算子都实现为正阶索伯列夫空间上的有界算子，并且狄拉克型块算子的实现满足与基本椭圆估计类似的估计。此外，我们还将证明，若这些算子自伴且在无穷远处可逆，则它们也是 Fredholm 算子。由于我们研究的是非紧流形，这些性质中的许多都依赖于无穷远处块度量的结构。

以下我们只考虑阶为 $m \in \{0, 1\}$ 的伪微分算子。

引理 4.3.1。设 g 是 $M \times \mathbb{R}^n$ 上的块度量，且 $P \in \Psi\mathrm{DO}^m(\mathfrak{S}_g)$ 是一个块算子。那么 P 延拓为一个有界线性算子

$$P\colon H^s(\mathfrak{S}_g) \to H^{s-m}(\mathfrak{S}_g)$$

对所有 $s \in \mathbb{Z}$。

证明。我们通过对 n 进行归纳法来证明此引理。对于 $n=0$，这是经典结果，因为 M 是闭的，参见定理 B.0.18。对于 $n>0$，我们选取适当的 $R>r>0$，使得 P 限制为 $M\times(RI^n)^\circ$，并且在 $\{\varepsilon x_i>r\}$ 上对所有 $i\in\{1,\dots,n\}$ 和所有 $\varepsilon\in\mathbb{Z}_2$ 分解。设 $\chi\colon\mathbb{R}\to[0,1]$ 是一个光滑的对称函数，在 $(-r,r)$ 上恒等于 1，并在 $\mathbb{R}\setminus(-R,R)$ 附近为零。令 $\{\chi^{\boldsymbol{\alpha}}\}_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}_3^n}$ 为由定义 4.2.5 得到的单位分解。根据三角不等式，只需证明 $P\cdot\chi^{\boldsymbol{\alpha}}$ 可延拓为一个有界算子。

若 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，则 $P\chi^{\mathbf{0}}$ 限制为相对紧集 $M\times(RI^n)^\circ$上的一个算子。因此，根据定理 B.0.18，$P\chi^{\mathbf{0}}$ 可延拓为一个有界算子 $H^s(\mathfrak{S}_g)\to H^{s-1}(\mathfrak{S}_g)$。

若 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，则存在一个元组 $(i,\ \varepsilon)\in\{1,\dots,n\}\times\mathbb{Z}_2$，使得 $\operatorname{supp}\chi^{\boldsymbol{\alpha}}$ 包含于 $U_r((i,\ \varepsilon))$ 中。归纳假设以及应用于离散希尔伯特链 $H^s(M\times\mathbb{R}^{n-1};\mathfrak{S}_{g(i,\varepsilon)})$ 和 $H^s(\mathbb{R};Cl_{1,\ 0})$ 的 [Pal65，推论 XIV.1] 意味着

$$P(i,\varepsilon)\boxtimes\mathrm{id}+A\boxtimes D(i,\varepsilon)\in Op^1(H^s(\mathfrak{S}_{g(i,\varepsilon)}\boxtimes Cl_{1,0})),$$

这意味着该算子诱导出一个有界线性映射

$$H^s(\mathfrak{S}_{g(i,\varepsilon)}\boxtimes Cl_{1,0})\to H^{s-1}(\mathfrak{S}_{g(i,\varepsilon)}\boxtimes Cl_{1,0})$$

对所有 $s\in\mathbb{Z}$ 均成立。由于 P分解为 $P(i,\ \varepsilon)\boxtimes\mathrm{id}+A\boxtimes D(i,\ \varepsilon)$ 在 $\mathfrak{S}_g|_{U_r((i,\ \varepsilon))}\cong\mathfrak{S}_{g(i,\varepsilon)}\boxtimes Cl_{1,0}|_{\varepsilon\mathbb{R}_{>r}},$，因此可得 $P\chi^{\boldsymbol{\alpha}}\in Op^1(\mathfrak{S}_g)$。 □

回顾一下，若算子序列 P_n 在阿蒂亚-辛格拓扑下收敛到 P，则其 P_i 在紧子集上一致收敛到 P。因此，基本椭圆估计是否适用于阿蒂亚-辛格闭包中的元素尚不明确。然而，如果算子 P 以受控的方式扩大支集，则确实如此。

引理 4.3.2. 设 M 是一个不一定是闭的流形，E、$F\to M$ 是 M 上的向量丛。设 $P\in\Psi\mathrm{DO}^1(E,F)$ 是一个椭圆伪微分算子，其主符号是某个实际伪微分算子的主符号（即光滑），并且具有以下性质：对于所有紧邻域 $K\subseteq M$，都存在一个相对紧开子集 W，使得若 支集 $u\subseteq K$，则 支集 $Pu\subseteq W$。

那么，对于所有紧 $K\subseteq M$，都存在一个紧 $L\subseteq M$，使得 P 诱导一个有界映射 $H^s_K(E)\to H^{s-1}_L(F)$，其中 $H^s_K(E)$表示所有支集位于 K 的截面构成的子空间。此外，算子 P 满足椭圆估计：

$$||u||_s\leq C\left(||u||_{s-1}+||Pu||_{s-1}\right).$$

证明。对于所有 $s\in\mathbb{Z}$，子空间 $\Gamma_c(E)$ 在 $H^s(E)$ 中稠密，并且与光滑紧支撑函数相乘会在所有索伯列夫空间上诱导一个连续端omorphism。因此，若 χ 是在 K 上恒等于 1 的光滑紧支撑函数，那么我们可以用 $\chi\cdot\Gamma_c(E)$ 中的元素逼近 $H^s_K(E)$ 中的每个元素。若 L 是假设中与 $\operatorname{supp}\chi$ 对应的紧子集，那么简单的逼近论证表明 $P\colon H^s_K(E)\to H^{s-1}_L(F)$ 定义良好且连续，因为 $H^{s-1}_L(F)$ 是一个闭子空间。

为了证明椭圆估计，我们采用如下论证。取光滑函数 ρ_0 和ρ_1，使得 ρ_0 在 K 上恒等于 1，且支集包含于 L°，并使 ρ_1 在 supp ρ_0 上恒等于 1，且支集包含于 L°。进一步取一个 P 的伪逆 R，即一个阶为 -1 的实际伪微分算子，其主符号是 $\mathrm{symb}_l(P)$ 的逆。于是 $\rho_0 - \rho_0 R P \rho_1 \in \Psi\mathrm{DO}_L^0(E)$，且其主符号为零。由于 $\Psi\mathrm{DO}^{-1}(E)$ 在 $\ker \mathrm{symb}_0$，中稠密，我们可以用阶为 -1 的实际伪微分算子逼近它，见引理 B.0.24，因此存在一个 $Q \in \Psi\mathrm{DO}_L^{-1}(E)$，使得 $||\rho_0 - \rho_0 R P \rho_1 - Q||_{s,s} < 1/2$。

有了这些知识，我们便可从实际伪微分算子的椭圆估计推出所需的椭圆估计。对于任意 $u \in H_K^s(E)$，我们有 $\rho_j u = u$，因此

$$\begin{aligned}
||u||_s &= ||(\rho_0 - \rho_0 R P \rho_1)u + \rho_0 R P \rho_1 u||_s \\
&\leq ||(\rho_0 - \rho_0 R P \rho_1)u||_s + ||\rho_0 R P u||_s \\
&\leq ||(\rho - \rho_0 R P \rho_1)u - Qu||_s + ||Qu||_s + ||\rho_0 R||_{s-1,s}||Pu||_{s-1} \\
&\leq 1/2||u||_s + ||Q||_{s-1,s}||u||_{s-1} + ||\rho_0 R||_{s-1,s}||Pu||_{s-1},
\end{aligned}$$

这里我们利用了以下事实： $\rho_0 R$ 是一个阶为-1 的实际伪微分算子，它将截面映射到支集包含于 supp ρ_0 内的截面，从而推得$\rho_0 R$ 在索伯列夫空间之间诱导有界映射。不等式链可改写为

$$\begin{aligned}
||u||_s &\leq 2\left(||Q||_{s-1,s}||u||_{s-1} + ||\rho_0 R||_{s-1,s}||Pu||_{s-1}\right) \\
&\leq 2\max\{||Q||_{s-1,s}, ||\rho_0 R||_{s-1,s}\}\left(||u||_{s-1} + ||Pu||_{s-1}\right),
\end{aligned}$$

由此得到第二个结论。 □

由于基本椭圆估计中的常数可能取决于紧子集，因此该结果不能立即推广到块算子。为将该结果推广到块算子，我们采用以下单位分解，它由Bunke提出[Bun09]，Bunke在带角流形的特殊局部坐标中引入了这种单位分解。

引理 4.3.3。 设 $P \in \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_g)$ 是一个狄拉克型块算子，其核包含于 $M \times (-\rho, \rho)^n$，并且在所有 $U_{\rho-1/2}(\varepsilon)$上均可分解。对于 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}_3^n$，令

$$V_\rho(\boldsymbol{\alpha}) = \left\{(m,x) \in M \times \mathbb{R}^n \,:\, \alpha_j x_j > \rho - 1/2 \text{ if } \alpha_j \neq 0,\, x_j \in (-\rho,\rho) \text{ otherwise}\right\}.$$

存在一个连续的单位分解$(\phi_0, \ldots, \phi_{2n})$，满足以下三个性质：

(i) 每个 ϕ_l 几乎处处可微，具有有界导数，且该导数在无穷远处趋于零，这意味着 $\lim_{s\to\infty} \sup\{|\mathrm{d}\phi_l|(x) \mid x \in M \times \mathbb{R}^n \setminus (-s,s)^n\} = 0$。

(ii) 若 u 的支集包含于 $V_\rho(\boldsymbol{\alpha})$ 且满足 $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$，则 $[P, \phi_l]u = \mathbf{c}(\mathrm{grad}(\phi_l)(u)$.

(iii) ϕ_0 具有紧支集，并且对于每个 $l > 0$，都存在唯一的元组 $(i,\varepsilon) \in \{1,\ldots,n\} \times \mathbb{Z}_2$，使得 ϕ_l 的支集包含在 $\{\varepsilon x_i > \rho\}$内。

证明。 固定 $0 < a < (2\sqrt{n})^{-1}$。令 $\chi\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0,1]$ 为一个零点集为 $\mathbb{R}_{\leq a}$ 且在 $\mathbb{R}_{\geq 2a}$附近恒等于 1 的光滑函数。我们仍用 χ表示它到 $\mathbb{R}$ 的镜面对称延拓。对于 $i \in \{1,\dots,n\}$，我们通过$\widetilde{\chi}_i(x) = \chi(\mathrm{pr}_i(x))$定义 $\widetilde{\chi}_i\colon S^{n-1} \to [0,1]$，并设

$$\chi_i \coloneqq \frac{\widetilde{\chi}_i}{\sum_{j=1}^n \widetilde{\chi}_j}.$$

分母始终非零，因为它在 x 处为零，当且仅当所有加数都在 x 处为零，这意味着 $||x||^2 < n \cdot a < 1$。函数的 n 元组 $(\chi_1、\dots\dots、\chi_n)$ 具有以下三个显而易见的性质：

1. $\chi_i(x) = 0$，当 $|x_i| < a$ 时，
2. 对每个置换 $\sigma \in \Sigma_n$，$\sigma^*\chi_i = \chi_{\sigma^{-1}(i)}$，
3. $\sum_j \chi_j = 1$。

对于每个 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1、\dots\dots、\alpha_n) \in \mathbb{Z}_3^n$，我们定义集合

$$\begin{aligned} A_{\boldsymbol{\alpha}} &\coloneqq \{(m,x) \in M \times \mathbb{R}^n \,:\, x_j \in [-\rho,\rho] \text{ if } \alpha_j = 0,\ \alpha_j x_j \geq \rho\} \\ &\cong M \times [-\rho,\rho]^{|\mathrm{Null}(\boldsymbol{\alpha})|} \times \prod_{j \in \mathrm{supp}\,\boldsymbol{\alpha}} \alpha_j \mathbb{R}_{\geq \rho}. \end{aligned}$$

$M \times (-\rho,\rho)^n$ 的补集是所有满足 $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$ 的 $A_{\boldsymbol{\alpha}}$ 的并集。对于 $(i,\varepsilon) \in \{1,\dots,n\} \times \mathbb{Z}_2$，我们定义

$$\hat{\phi}_i^\varepsilon|_{A_{\boldsymbol{\alpha}}}(m,x) = \begin{cases} \chi_i\left(\frac{\hat{x}}{||\hat{x}||}\right), & \text{if } \alpha_i \neq 0, \\ 0, & \text{if } \alpha_i = 0, \end{cases}$$

其中 $\hat{x} = (|\alpha_1|x_1 - \alpha_1\rho, \dots, |\alpha_n|x_n - \alpha_n\rho)$。这些赋值在交叠区域$A_{\boldsymbol{\alpha}} \cap A_{\boldsymbol{\beta}}$ 上相互一致，从而在 $M \times (-\rho,\rho)^n$ 的补集上定义了良好的函数。每个 $\hat{\phi}_i^\varepsilon$ 都是连续的，因为它在所有 $A_{\boldsymbol{\alpha}}$ 上都是连续的。对于 $0 < \delta < 1$，我们选取一个光滑函数 $\xi\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0,1]$，其零点集为 $[0,\rho+\delta]$，且在 $\mathbb{R}_{\geq \rho+1}$ 附近恒等于 1。它关于镜面对称地延拓到 $\mathbb{R}$ 后，仍记为 ξ。令 $\hat{\xi}_i(x) := \xi(\mathrm{pr}_i(x))$，并通过 $\phi_i^\varepsilon := \xi_i\phi_i^\varepsilon$ 将 ϕ_i^ε 延拓到 $M \times \mathbb{R}^n$。

根据构造，在 $M \times (-\rho+1,\rho+1)^n$ 的补集上，所有 ϕ_i^ε 的和均为 1，且其和处处不大于 1。每个 ϕ_i^ε 的支集都包含在 $\{\varepsilon x_i \geq \rho+\delta\}$ 内。因此，令 $\phi_0 := 1 - \sum_{(i,\varepsilon)} \phi_i^\varepsilon$，我们构造出了一个连续的单位分解。

函数 ϕ_0 的支集包含在 $M \times (-\rho-1,\rho+1)^n$ 内，这证明了性质 (iii)。

单位分解可能不可微的点位于$\bigcup_{\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\beta}} A_{\boldsymbol{\alpha}} \cap A_{\boldsymbol{\beta}}$中，而$\bigcup_{\boldsymbol{\alpha}\neq\boldsymbol{\beta}} A_{\boldsymbol{\alpha}} \cap A_{\boldsymbol{\beta}}$是一个零集。在该集合之外，微分为

$$\mathrm{d}\phi_i^\varepsilon = \hat{\phi}_i^\varepsilon(x)\xi'(x_i)\mathrm{d}x_i + \xi(x_i)\mathrm{d}\chi_i \cdot \left(\frac{\hat{x}\cdot\hat{x}^T - ||\hat{x}||^2\mathrm{id}}{||\hat{x}||^3}\right)\mathrm{diag}(|\alpha_1|,\dots,|\alpha_n|).$$

由于 $\mathrm{d}\chi_i$ 有界，我们得出

$$|\mathrm{d}\phi_i^\varepsilon| \in L^\infty(M \times \mathbb{R}^n) \text{ and } \lim_{s\to\infty} \sup\{|\mathrm{d}\phi_i^\varepsilon|(x) \,|\, x \in M \times \mathbb{R}^n \setminus (-s,s)^n\} = 0,$$

证明性质 (i)。

根据构造，每个 ϕ_i^ε 到 $V_\rho(\boldsymbol{\alpha})$ 的限制（其中 $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$）仅取决于由 $j \in$ 标记的坐标 x_j $\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}$。若 $u \in \Gamma_c(\mathfrak{S}_g)$ 的支集位于 $V_\rho(\boldsymbol{\alpha})$ 内，且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$，则 P 的块形式意味着

$$\begin{aligned}
[P, \phi_i^\varepsilon]u &= \left(P(\boldsymbol{\alpha}) + \sum_{j\in\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}} e_j \cdot \partial_j\right)\phi_i^\varepsilon u - \phi_i^\varepsilon \cdot \left(P(\boldsymbol{\alpha}) + \sum_{j\in\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}} e_j \cdot \partial_j\right) u \\
&= \phi_i^\varepsilon(P(\boldsymbol{\alpha}) - P(\boldsymbol{\alpha}))u + \sum_{j\in\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}} [e_j \cdot \partial_{x_j}, \phi_i^\varepsilon]u \\
&= \operatorname{grad}(\phi_i^\varepsilon) \cdot u = \mathbf{c}(\operatorname{grad}(\phi_i^\varepsilon))(u).
\end{aligned}$$

这证明了性质 (ii)。 □

我们利用这个单位分解，推导狄拉克型块算子的基本椭圆估计。以下两个命题的思路借鉴自 [Ebe17，命题 3。3]。

命题 4.3.4。设 $P \in \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_g)$ 是一个狄拉克型椭圆块算子。则 P 满足基本椭圆不等式，也就是说，存在一个$C > 0$ 使得

$$||u||_1 \leq C\left(||u||_0 + ||Pu||_0\right)$$

对所有 $u \in H^1(\mathfrak{S}_g)$ 。

证明。通过对 n 归纳来完成证明，其中 $M \times \mathbb{R}^n$ 是我们块流形的欧几里得部分的维数。对于 $n = 0$ ，我们的基流形是紧的，结论由引理 4.3.2 得出。

假设该命题对 $n-1$ 成立，并选取一个椭圆块算子 $P \in \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_g)$ ，其定义在块度量 $g \in \mathcal{R}_n(M)$ $R > r > 0$ 上。选取 g ，使得 $M \times$在$(-r, r)^n$之外分解，并且 $M \times(-R, R)^n$是 P的核。由于 P具有块形式，经典椭圆估计给出

$$||u||_1 \leq C_{0,R}\left(||u||_0 + ||Pu||_0\right)$$

对于某个$C_{0,\ R}$以及所有支集位于 $M \times (-R,\ R)^n$ 内的截面 u。若 u 的支集包含在 $U_r(i,\ \varepsilon) = \{\varepsilon x_i > r\}$ 内，则我们可以将$\mathfrak{S}_g|_{U_r(i,\ \varepsilon)}$与 $\mathfrak{S}_{g(i,\varepsilon)}$ 对应，并将 P与$P(i,\ \varepsilon) \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes /D$对应。由于此处的 g是乘积度量，我们可以应用富比尼定理

得到：

$$
\begin{aligned}
||u||_1^2 &= \int_{\varepsilon\mathbb{R}_{>r}} ||u(t)||_{1,g(i,\varepsilon)}^2 \mathrm{d}t + \int_{\varepsilon\mathbb{R}_{>r}} ||\partial_t u(t)||_{0,g(i,\varepsilon)}^2 \mathrm{d}t \\
&\leq \int C^2 \left(||u(t)||_{0,g(i,\varepsilon)}^2 + ||P(i,\varepsilon)u||_{0,g(i,\varepsilon)}^2 \right) + ||\partial_t u(t)||_{0,g(i,\varepsilon)}^2 \mathrm{d}t \\
&\leq C^2 \int ||u(t)||_{0,g(i,\varepsilon)}^2 + ||P(i,\varepsilon)u||_{0,g(i,\varepsilon)}^2 + ||\partial_t u(t)||_{0,g(i,\varepsilon)}^2 \mathrm{d}t \\
&= C^2 \int ||u(t)||_{0,g(i,\varepsilon)}^2 + \langle P(i,\varepsilon)^2 u, u\rangle_{0,g(i,\varepsilon)} - \langle \partial_t^2 u(t), u(t)\rangle_{0,g(i,\varepsilon)} \mathrm{d}t \\
&= C^2 \int ||u(t)||_{0,g(i,\varepsilon)}^2 + \langle P(i,\varepsilon)^2 u - \partial_t^2 u(t), u\rangle_{0,g(i,\varepsilon)} \mathrm{d}t \\
&= C^2 \int ||u(t)||_{0,g(i,\varepsilon)}^2 + \langle (P(i,\varepsilon) \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \not{D})^2 u(t), u(t)\rangle \mathrm{d}t \\
&= C^2 \int ||u(t)||_{0,g(i,\varepsilon)}^2 + ||(Pu)(t)||_{0,g(i,\varepsilon)}^2 \mathrm{d}t \\
&= C^2 (||u||_0^2 + ||Pu||_0^2),
\end{aligned}
$$

由此我们立即得到这一情形的基本椭圆不等式。

最后，我们需要将这些不等式拼接起来。定义集合 $L \coloneqq \{0\} \cup \{1, \dots, n\} \times \mathbb{Z}_2$，并令 $(\phi_l)_{l\in L}$ 为引理 4.3.3 中适用于 P 的单位分解。利用这一单位分解将这些不等式拼接起来：

$$
\begin{aligned}
||u||_1 = ||\sum_L \phi_l u||_1 &\leq \sum_L ||\phi_l u||_1 \\
&\leq C_0(||\phi_0 u||_0 + ||P\phi_0 u||_0) + \sum_{L\setminus\{0\}} C_l(||\phi_l u||_0 + ||P\phi_l u||_0) \\
&\leq (2n+1)\max\{C_l\}||u||_0 + \sum_L C_l(||\phi_l P u||_0 + ||[P,\phi_l\cdot]u||_0) \\
&\leq (2n+1)\max\{C_l, |||[P,\phi_l\cdot]|||_{0,0}\} \left(||u||_0 + ||Pu||_0\right).
\end{aligned}
$$

至此，归纳步骤完成。 □

定义 4.3.5。 狄拉克型块算子 $P \in \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_g)$ 称为可逆，如果其诱导算子 $H^1(\mathfrak{S}_g) \to H^0(\mathfrak{S}_g)$ 是一个同构。

注 4.3.6。 根据命题 4.3.4 ，定义条件等价于要求 P 是一个可逆无界算子 $H^0(\mathfrak{S}_{g_P})$。回顾一下，这意味着延拓 $P\colon \Gamma_c(\mathfrak{S}_{g_P})^{||\vdash||_P} \to H^0(\mathfrak{S}_g)$ 是可逆的，其中定义域是 $\Gamma_c(\mathfrak{S}_{g_P})$ 关于图范数 $||\vdash||_P = ||\vdash|| + ||P(\vdash)||$ 的完备化。

若块算子 P 具有可逆面，则前一个命题可以加强。

命题 4.3.7. 设 P是一个狄拉克型块算子，其面 $P(i,\varepsilon)$ 均可逆。那么 P 满足椭圆估计

$$||u||_1 \leq C\left(||Pu||_0 + ||\phi_0 u||_0 + \sum_{l=1}^{2n} ||[P,\phi_l\cdot]u||_0\right),$$

其中 $\{\phi_l\}$ 是引理 *4.3.3* 中的单位分解。此外， P 具有闭像和有限维核。

如果 P 是自伴的，那么 P 是一个（无界）*Fredholm* 算子，其定义域为$H^1($ $M\times\mathbb{R}^n;\mathfrak{S}_g)$。

该命题的证明需要用到主要的弗雷德霍姆引理。

引理 4.3.8 ([BS18，引理 4.3.9])。 设 X、Y 为巴拿赫空间，且 Z 为赋范向量空间。设 $A\colon X\to Y$为有界线性映射，并设 $K\colon X\to Z$ 为紧算子。若存在常数 C 使得对所有 $x\in X$ 不等式

$$||x||_X \leq C(||Ax||_Y + ||Kx||_Z)$$

成立，则 A 具有闭像和有限维核。

命题的证明 *4.3.7*。 取 $R>r$ 使得 $M\times(-R,R)^n$ 是 P的核，并且块算子 P 在 $U_r(i,$ $\varepsilon)$ 在如下识别下分解

$$U_r(i,\varepsilon) \coloneqq \{(m,x)\in M\times\mathbb{R}^n : \varepsilon x_i > r\} \cong M\times\mathbb{R}^n(i,\varepsilon)\times\{\varepsilon x_i > r\}$$

为算子 $P(i,\varepsilon)\boxtimes\mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes/D$。

对于每个支集包含于 $U_r(i,\varepsilon)$ 中的 $u\in\Gamma_c(M\times\mathbb{R}^n,\mathfrak{S}_g)$，我们有

$$\begin{aligned}
||Pu||_0^2 &= \int_{M\times\mathbb{R}^n} |Pu|^2 = \int_{M\times\mathbb{R}^n} |P(i,\varepsilon)u + \partial_i\cdot\partial_i u|^2 \\
&= \int_{M\times\mathbb{R}^n} \langle u, (P(i,\varepsilon)+\partial_i\cdot\partial_i)^2 u\rangle = \int_{M\times\mathbb{R}^n} \langle u, P(i,\varepsilon)^2 u - \partial_i^2 u\rangle \\
&= \int_{M\times\mathbb{R}^n} |P(i,\varepsilon)u|^2 + |\partial_i u|^2 \\
&= \int_{\varepsilon\cdot\mathbb{R}_{\geq r}} ||(P(i,\varepsilon)u)(x)||^2_{L^2(M\times\mathbb{R}^n(i,\varepsilon),\mathfrak{S}_g)} + \int_{M\times\mathbb{R}^n} |\partial_i u|^2 \\
&\geq \int_{\varepsilon\cdot\mathbb{R}_{\geq r}} c^{-2}_{(i,\varepsilon)} ||u(x)||^2_{H^1(M\times\mathbb{R}^n(i,\varepsilon),\mathfrak{S}_g)} + \int_{M\times\mathbb{R}^n} |\nabla_{\partial_i} u|^2 \\
&\geq \min\{c^{-2}_{(i,\varepsilon)}, 1\} ||u||^2_{H^1(M\times\mathbb{R}^n,\mathfrak{S}_g)}.
\end{aligned}$$

在这一连串等式中，第二行用到了 P 是对称的这一点，以及 $P(i,\ \varepsilon)$ 与 e_i反对易这一点。第四行应用了富比尼定理，而第五行用到了 $P(i,\ \varepsilon)$ 的可逆性以及 $\nabla_{\partial_i} = \partial_i$。最后一行中，我们用最小值进行估计，并将该表达式识别为索伯列夫一阶范数。

另一方面，若 u 的支集包含在 $M \times (-R,\ R)^n$ 内，则 Pu 的支集也包含在这个相对紧子集中，而经典椭圆估计意味着

$$||u||_1 \leq C(||u||_0 + ||Pu||_0).$$

现在，我们使用引理 4.3.3 中的特殊适配单位分解 $\rho = R$及其中的记号，将这些不等式拼接起来。利用 ϕ_l 包含于某个 $U_r(i,\varepsilon)$ 这一事实，其中 $l \neq 0$，由先前的估计可得

$$\begin{aligned}
||u||_1 &= ||\sum_L \phi_l u||_1 \leq \sum_L ||\phi_l u||_1 \\
&\leq C_0(||\phi_0 u||_0 + ||P\phi_0 u||_0) + \sum_{L\setminus\{0\}} C_l ||P\phi_l u||_0 \\
&\leq C_0||\phi_0 u||_0 + \sum_L C_l(||\phi_l Pu||_0 + ||[P,\phi_l\cdot]u||_0) \\
&\leq C_0||\phi_0 u||_0 + \max\{C_l \cdot ||\phi_l||_{0,0}, 1\} \cdot \left(\sum_L ||Pu||_0 + ||[P,\phi_l\cdot]u||_0\right) \\
&\leq C\left(||Pu||_0 + ||\phi_0 u||_0 + \sum_L ||[P,\phi_l\cdot]u||_0\right),
\end{aligned}$$

其中，C_l 是针对与 l 对应的这一对 $(i,\ \varepsilon)$，$\{c_{(i,\varepsilon)^{-1}}\}$ 的最小值的倒数。

事实证明，ϕ_0 和所有 $[P,\phi_l\cdot]$ 都是紧算子。实际上，ϕ_0 是紧支撑的，因此根据经典的 Rellich 引理，$\phi_0\cdot$ 是一个紧算子。

要证明 $T_l \coloneqq [P,\phi_l\cdot]$ 是紧的，首先注意到它属于 $\Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_g)$。符号演算表明，其主符号为零。选取一个如定义 4.2.5 中所述的单位分解，使得 $\chi^{\mathbf{0}}$ 在 $M \times [-R,R]^n$上恒等于 1。我们将其分解为 $T_l = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}_3^n} T_l\chi^{\boldsymbol{\alpha}}$。

根据引理4.2.6 加项 $T_l\chi^{\mathbf{0}}$ 的支集包含于$\operatorname{supp}\chi^{\mathbf{0}}$，其含义是$\operatorname{supp} T_l\chi^{\mathbf{0}}u \subseteq \operatorname{supp}\chi^{\mathbf{0}}$，且 $T_l\chi^{\boldsymbol{\alpha}}u = 0$ 若$\operatorname{supp}\chi^{\boldsymbol{\alpha}} \cap \operatorname{supp} u = \emptyset$。由于 $T_l\chi^{\mathbf{0}}$ 的主符号为零，Atiyah-Singer 正合列（见引理B.0.24）推出 $T_l\chi^{\mathbf{0}}$ 是紧算子。

若 $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$，则 $\hat{\boldsymbol{\alpha}} \coloneqq \boldsymbol{\alpha}|_{\operatorname{supp}\boldsymbol{\alpha}}$ 不是空映射，且 $\chi^{\boldsymbol{\alpha}}u$ 的支集包含于$U_R(\hat{\boldsymbol{\alpha}})$。因此，单位分解 $\{\phi_l\}$ 的性质 (ii) 给出

$$T_l\chi^{\boldsymbol{\alpha}}u = \operatorname{grad}\phi_l \cdot \chi^{\boldsymbol{\alpha}}u.$$

根据引理4.3.3(i) 以及完备流形上的广义 Rellich 引理（见[Bun09，第50], 页），我们得出 $T_l\chi_{\boldsymbol{\alpha}}$ 也是紧的。

有限个紧算子的和仍然是紧算子，因此 T_l 是一个紧算子。引理4.3.8 由此推出 P 具有有限维核和闭像。

如果 P 是 $L^2(M\times\mathbb{R}^n,\mathfrak{S}_g)$ 上的自伴（无界）算子，那么最大定义域与最小定义域相同。椭圆估计意味着，P 的图范数等价于 $||\vdash||_1$，因此 P 的（最小）定义域与 $H^1(M\times\mathbb{R}^n,\mathfrak{S}_g)$ 相同。自伴算子的核与余核同构，因此余核也是有限维的，且 P 是 Fredholm 算子。 □

通常，要证明一个（伪）微分算子是自伴的并不容易。不过，在完备流形上有一个通用判据：传播速度有界。

命题4.3.9 ([HR00，命题 10.2。11])。设 N 是一个完备黎曼流形，且 D 是 M 上的对称微分算子。如果其传播速度

$$c_D \coloneqq \sup\{||\mathrm{symb}_1(D)(x,\xi)|| : x \in M, \xi \in T_x^\vee M, ||\xi|| = 1\}$$

有限，那么 D 是（本质）自伴的，即其闭包是一个自伴算子。

推论 4.3.10。设 $g \in \widetilde{\mathcal{R}_n}(M)$ 是 $M \times \mathbb{R}^n$ 上的块度量。那么 $\not{\mathcal{D}}_g$ 是一个自伴算子。

更一般地，若 $P \in \Psi\overline{\mathrm{DO}}^1(\mathfrak{S}_g)$ 是一个狄拉克型对称块算子，且 $P - \not{\mathcal{D}}_g$ 可扩张为 $H^0(\mathfrak{S}_g) = L^2(\mathfrak{S}_g)$ 上的有界算子，那么 P 是一个自伴算子。

证明。由命题3.1.5 可知，块度量是完备的，而传播速度显然满足 $c_{\not{\mathcal{D}}_g} = 1$。根据前述命题，$\not{\mathcal{D}}_g$ 因此是自伴的。
第二个陈述由 [HR00]中的习题1.9.21得出。 □

验证自伴算子可逆的常见策略，是验证它的平方是一致正算子。我们回顾一下这个概念。

定义4.3.11。希尔伯特空间 H 上的无界算子 T 称为非负，如果对所有 $x \in \mathrm{dom}\, T$，都有 $\langle Tx, x\rangle \geq 0$。如果存在常数 $c > 0$ 使得 $\langle Tx, x\rangle \geq c||x||^2$，则称其为一致正。

如果存在正数$c > 0$使得对所有 $x \in \mathrm{dom}\, T$都有 $||Tx|| \geq c||x||$，则称无界算子有下界。

显然，闭无界算子 T 有下界当且仅当T^*T 一致正。下一个定理是无界泛函演算的直接推论，参见 [Wer07]。

引理4.3.12。设 T 是可分希尔伯特空间上的自伴无界算子。

(i) 若 T 一致正，则 T 可逆。

(ii) 若 T 是闭且可逆的，则 T^*T 一致正。

对于空间 $\mathrm{Hom}(H^1, H^0)$ 中的狄拉克型块算子，一致正是一个开条件，其中 $H^j = H^j(\mathfrak{S}_g)$。

引理 4.3.13. 设 $P, Q \in \mathrm{Hom}(H^1, H^0)$ 为有界算子。设 P有下界，并满足基本椭圆估计。若 Q 在$\mathrm{Hom}(H^1, H^0)$的算子范数下与P 足够接近，则 Q 也有下界。

证明。 给定 $c \in (0,1)$，使得 $||Px||_0 > c||x||_0$和常数 $C = C(P)$使基本椭圆估计对 P成立。我们断言，所有满足下列不等式的算子 Q

$$||P - Q||_{1,0} < \frac{c}{(c+1)C}$$

有下界。

事实上，将基本椭圆估计应用于 P，并结合所假设的不等式，可得

$$\begin{aligned} ||Qu||_0 &\geq \big|||Pu||_0 - ||(Q-P)u||_0\big| \\ &\geq ||Pu||_0 - ||P-Q||_{1,0}C(||u||_0 + ||Pu||_0) \\ &= (1 - ||P-Q||_{1,0} \cdot C)||Pu||_0 - ||P-Q||_{1,0}C||u||_0. \end{aligned}$$

再次利用一致正性和所假设的不等式，我们继续估计，得到

$$\begin{aligned} ||Qu||_0 &\geq c(1-C)||P-Q||_{1,0}||u||_0 - C||P-Q||_{1,0}||u||_0 \\ &= \underbrace{\big(c - (c+1)C||P-Q||_{1,0}\big)}_{>0} ||u||_0 \end{aligned}$$

这就证明了该结论。 □

粘合技巧

在接下来的几节中，我们将对块算子进行若干剪切与粘贴论证。虽然我们从完备流形上的块算子出发，并最终仍得到完备流形上的块算子，但在这些过程中，我们会考虑非完备流形上的算子。自伴性和可逆性是算子的全局性质，通常在将算子限制到开子集上时会丧失，因此我们不能指望它们在整个剪切与粘贴过程中都成立。另一方面，对称性和有下界是在这种限制下得以保留的性质；本节旨在说明，它们在某些粘合构造下也得以保留。

第一种用于块算子的粘合技术大致表明，只要算子具有适当的局部性，对称性就是一种层状性质。

引理 4.3.14. 设 $E \to M$ 是定义在一个不一定紧的流形 M 上的向量丛。设 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是一个局部有限开覆盖，$\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是一个算子族

$$P_\alpha \colon \Gamma_c(U_\alpha, E|_{U_\alpha}) \to \Gamma_c(U_\alpha, E|_{U_\alpha}) \quad \textit{and} \quad P_\alpha \in \overline{\Psi\mathrm{DO}}^1(E|_{U_\alpha})$$

使得 $P_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = P_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \colon \Gamma_c(U_{\alpha\beta}, E_{U_{\alpha\beta}}) \to \Gamma_c(U_{\alpha\beta}, E_{U_{\alpha\beta}})$ 对所有 $\alpha, \beta \in A$均成立。此外，假设存在一个单位分解 $\{\chi_\alpha\}_{\alpha \in A}$，其从属于覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$，并且算子在该单位分解上作为导子作用，即

$$[P_\alpha, \chi_\beta \cdot]u = i^{-1}\mathrm{symb}_1(P)(-, \mathrm{d}\chi_\beta) \cdot u.$$

那么，当且仅当算子对称时，每个 P_α 都是对称的

$$P := \sum_{\alpha\in A} P_\alpha \circ \chi_\alpha$$

是对称的。

证明。假设 P 是对称的，那么对于所有 $a \in A$， P_a 也对称，因为对于所有 $u \in \Gamma_c(U_a, E|_{U_a})$，我们有

$$Pu = \sum_{\alpha\in A} P_\alpha\chi_\alpha u = \sum_{\{\alpha: U_\alpha\cap U_a\neq\emptyset\}} P_a\chi_\alpha u = P_a u.$$

反过来，设 $u, v \in \Gamma_c(M, E)$ 是两个截面。令 $u_\alpha := \chi_\alpha u$ 和 $v_\beta := \chi_\beta v$。由双线性，只需证明对于所有$\alpha, \beta \in A$，有 $(P_\alpha u_\alpha, v_\beta) = (u_\alpha, P_\beta v_\beta)$。

为验证这一点，我们依赖以下两个由导子性质直接得出的事实：

(I) 对所有 $\alpha, \beta \in A$，$\operatorname{supp} P_\beta u_\alpha \subseteq \operatorname{supp} \chi_\alpha$。

(II) 若 $u|_{\{\chi_\alpha\neq 0\}} = 0$，则 $(P_\beta u)|_{\{\chi_\alpha\neq 0\}} = 0$。

事实上，性质 (I) 由

$$P_\beta u_\alpha = P_\beta\chi_\alpha u = \chi_\alpha P_\beta u + [P_\beta, \chi_\alpha]u = \chi_\alpha u + i^{-1}\operatorname{symb}_1(P_\beta)(-, \mathrm{d}\chi_\alpha)u$$

以及 $\operatorname{symb}_1(P_\beta)(-, \mathrm{d}\chi_\alpha) = \operatorname{symb}_1(P_\beta)(-, 0) = 0$ 在 $\{\chi_\alpha = 0\}$ 上成立得出。性质 (II) 由

$$(\chi_\alpha P_\beta u)|_{\chi_\alpha\neq 0} = P_\beta \underbrace{\chi_\alpha u}_{=0} - i^{-1}\operatorname{symb}_1(P_\beta)(-, \mathrm{d}\chi_\alpha)\underbrace{u|_{\chi_\alpha\neq 0}}_{=0}.$$

现在，对每个 $\alpha \in A$，我们选取一个光滑函数 ψ_α，使其在 $\operatorname{supp} \chi_\alpha$ 附近恒等于 1，且支集包含于 U_α 内。P 的对称性现在可由以下计算得出

$$\begin{aligned}
(P_\alpha u_\alpha, v_\beta) &\overset{\text{(I)}}{=} (\psi_\alpha P_\alpha u_\alpha, v_\beta) = (P_\alpha u_\alpha, \psi_\alpha v_\beta) \\
&= (u_\alpha, P_\alpha\psi_\alpha v_\beta) \\
&= (u_\alpha, P_\beta\psi_\alpha v_\beta) \qquad \text{because } P_\alpha|_{U_{\alpha\beta}} = P_\beta|_{U_{\alpha\beta}} \\
&= (u_\alpha, (P_\beta\psi_\alpha v_\beta)|_{\operatorname{supp}\chi_\alpha}) \\
&= (u_\alpha, P_\beta v_\beta)
\end{aligned}$$

其中我们使用 (II) 和 P_β 的线性，推得 $(P_\beta\psi_\alpha v_\beta)|_{\operatorname{supp}\chi_\alpha}$ 仅取决于（$\psi_\alpha v_\beta|_{\operatorname{supp}\chi_\alpha} = v_\beta|_{\operatorname{supp}\chi_\alpha}$ 的芽）。 □

第二种粘合技术表明，只要“粘合带”足够宽，两个具有匹配的面的可逆块算子就可以粘合成一个可逆算子。我们在更一般的设定下进行粘合构造，因为我们允许底层的黎曼流形不是完备的。这迫使我们采用以下较弱的概念；对于所讨论的自伴算子，该概念等价于可逆性。

定义 4.3.15。 设 P 是希尔伯特空间 H 上稠密定义的算子。如果存在一个 $c>0$，使得对所有 $v\in\mathrm{dom}(P)$ 都有 $||Pv||\geq c||v||$，则称 P （一致）有下界。更一般地，若算子 $P\in\Psi\mathrm{DO}^1(E)$ 有下界，则称其有下界；这意味着 $P\colon\ \Gamma_c(M,E)\to\Gamma(M,E)\subset L^2_{loc}(M,E)$ 有下界（也就是说，我们还允许 $||P\sigma||_0=\infty$）。

我们采用以下设定。

设定 4.3.16. 令 $H\subseteq M$ 为一个分离超曲面，它作为子集是闭的，但不一定是紧的。令 $M\setminus H=M^-\sqcup M^+$，并令 $\Phi\colon H\times(-a,a)\hookrightarrow M$为一个开嵌入，在 $H\times\{0\}=H$ 上限制为包含映射，并满足$\Phi(H\times(-a,0))\subseteq M^-$以及 $\Phi(H\times(0,a))\subseteq M^+$。我们还记 $M_{\pm a}:=M^\pm\setminus\Phi(H\times(-a,a))$，并对所有 $t,\ t_1,\ t_2\in(-a,a)$，令

$$M_{<t}:=M_{-a}\cup\Phi(H\times(-a,t)),\qquad M_{>t}:=\Phi(H\times(t,a))\cup M_a,\quad\text{and}$$
$$M_{(t_1,t_2)}:=\Phi(H\times(t_1,t_2)).$$

定义 4.3.17. 令 $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 为 M上的光滑函数子代数。算子 $P\in\Psi\mathrm{DO}^1(E)$ 称为一个 $\mathcal{A}$-导子，如果

$$[P,f\cdot]=i^{-1}\mathrm{symb}_1(P)(-,\mathrm{d}f)$$

对所有 $f\in\mathcal{A}$。

我们感兴趣的是代数 $\mathcal{A}:=(\mathrm{pr}_2\circ\Phi^{-1})^*\mathcal{C}^\infty_c((-a,a)\ \mathbb{R})$，它被视为 $\mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ 的子代数（通过零延拓）。

引理 4.3.18。 设 $E\to M$ 是 *setup* *4.3.16* 中所述流形上的一个向量丛。假设 $P\in\Psi\mathrm{DO}^1(E)$ 限制为 $M_{>b}$ 和 $M_{<-b}$，其中 $0<b<a$，且P是一个 $\mathcal{A}$-导子。若 $\sigma\in\Gamma_c(M,E)$ 的支集包含于 $M_{(t_1,t_2)}$ 内，则 $P\sigma$ 的支集也包含于 $M_{(t_1,t_2)}$ 内，对所有 $-a<t_1<t_2<a$ 均如此。特别地，$(P\sigma)|_{M_{(t_1,t_2)}}$ 仅取决于 $\sigma|_{M_{(t_1,t_2)}}$ 的芽。

Analogous statements hold for $M_{>t}$ and $M_{<t}$ for all $t\in(-b,b)$.

证明。 我们只证明 $M_{(t_1,t_2)}$ 的情形。其他证明都非常相似。假设 σ 的支集包含于此集合内。由于支集是紧的，存在$t_1<t_1'<t_2'<t_2$使得 σ 的支集也包含于 $M_{(t_1',t_2')}$ 内。令 $\chi\colon(t_1,t_2)\to[0,1]$在 (t_1',t_2') 上恒等于 1 且具有紧支撑。为简化记号，我们仍用 χ 表示$\chi\circ\mathrm{pr}_2\circ\Phi^{-1}$ （及其零延拓）。于是有

$$\begin{aligned}P\sigma&=P\chi\sigma=\chi P\sigma+[P,\chi\cdot]\sigma\\&=\chi P\sigma+i^{-1}\mathrm{symb}_1(P)(-,\chi')\sigma\\&=\chi P\sigma,\end{aligned}$$

因为 $\chi\equiv1$ 在 σ 的支集上。因此， $P\sigma$ 包含在 $\chi\subseteq M_{(t_1,t_2}$ 的支集内。

要证明 $P\sigma|_{M_{(t_1,t_2)}}$ 仅取决于 $\sigma|_{M_{(t_1,t_2)}}$ 的芽，只需证明：若 σ 在 $M_{(t_1,t_2)}$ 附近恒为零，则 $P\sigma$ 在 $M_{(t_1,t_2)}$ 上恒为零。但若 σ 在 $M_{(t_1,t_2)}$ 附近为零，则由 $\mathrm{supp}\,\sigma$ 的紧致性可知，存在 $t_1'<t_1$ 和 $t_2'>t_2$，使得 $\mathrm{supp}\,(\sigma)\cap M_{(t_1',t_2')}=\emptyset$。因此，$\mathrm{supp}(\sigma)$ 支持在 $M_{<t_1'}$ 和 $M_{>t_2'}$ 内，所以 $P\sigma$ 也必定支持在那里。 □

定义 4.3.19。设 $R < b < a$，并设 P_1、P_2 分别为作用在 $M_{<a}$ 和 $M_{>-a}$ 上的算子。假设 P_1 和 P_2 分别限制到 $M_{<-b}$ 和 $M_{>b}$，且它们是 $\mathcal{A}$-导子。由前述引理，这两个算子限制到 $M_{(-R,R)}$，并且我们假设这些限制相同。这样便可将这两个算子拼接起来：设 $\chi\colon\ \mathbb{R} \to [0,1]$ 是一个光滑函数，在 $\mathbb{R}_{\leq -R}$ 附近恒等于 1，在 $\mathbb{R}_{\geq R}$ 附近恒等于 0。我们将该函数通过 0 和 1 延拓到 M，并仍记所得函数为 χ。定义

$$P_1 \cup P_2 \coloneqq P_1(1-\chi) + P_2\chi.$$

由于 P_1 和 P_2 在 $M_{(-R,R)}$ 上一致，且作为 $\mathcal{A}$-导子，结果不依赖于 χ的选择。应用引理4.3.14 可知 $\cup$ 保持对称性。

推论 4.3.20。算子 $P_1 \cup P_2$ 是对称的，当且仅当算子P_1 和 P_2 是对称的。

证明。“仅当”方向显然，因为对称算子的限制仍是对称的，并且 P_1 在 $M_{(-R,R)}$上与 P_2 一致。

对于另一个方向，我们将证明 $M_{<R}$ 和 $M_{>-R}$ 连同 χ 和$1-\chi$满足定义4.3.19 中的条件引理4.3.14对 P_1和 P_2成立。为此，固定一个函数 $\eta\colon (-a,a) \to [0,1]$，它具有紧支撑，且 $\eta|_{(-b,b)} \equiv 1$。令 η^{-1}, η^0和 η^1 为由定义4.2.5 中的构造得到、但视为定义在 M上的函数。它们构成一个单位分解。

对于所有紧支撑截面 $\sigma \in \Gamma_c(M_{<R},\ E)$，截面 $\eta^{-1}\sigma$ 的支集位于 $M_{<-b}$内，因此根据假设，$P_1\eta^{-1}\sigma$ 的支集也位于该处。这意味着

$$\begin{aligned} P_1\chi\sigma &= P_1\chi\eta^{-1}\sigma + P_1\chi\eta^0\sigma = P_1\eta^{-1} + P_1\chi\eta^0\sigma \\ &= \chi P_1\eta^{-1}\sigma + \chi P_1\eta^0\sigma + [P_1,\chi]\eta^0\sigma \\ &= \chi P_1(\eta^{-1}+\eta^0)\sigma + i^{-1}\mathrm{symb}_1(P_1)(-,\chi')\cdot\eta^0\sigma \\ &= \chi P_1\sigma + i^{-1}\mathrm{symb}_1(P_1)(-,\chi')\sigma. \end{aligned}$$

注意，最后一个等式由 $\chi' \equiv 0$ 在 $\operatorname{supp}\eta^{-1}$ 上成立。当然，这意味着 P_1 作为导子作用于 $1-\chi$。

关于 P_2 和 $(1-\chi)$ 的相应结论，可以用类似的方法推导得出。

□

引理 4.3.21。设 P_1 和 P_2 是作用在 $M_{<a}$ 和 $M_{>-a}$ 上的算子，如设定 *4.3.19*中所述。假设

$$||\mathrm{symb}_1(P_1)(-,\mathrm{d}t)||_{\infty,M_{(-R,R)}} \coloneqq \{||\mathrm{symb}_1(P_1)(x,\mathrm{d}t)||_{\mathrm{op}} : x \in M_{(-R,R)}\} \leq C.$$

若存在一个截面 $u \in \Gamma_c(M,E)$ 使得 $||(P_1 \cup P_2)u||_0 < \varepsilon||u||_0$，则存在一个$v \in \Gamma_c(M,E)$，其支集位于 $M_{<R}$ 内，并满足

$$||P_1 v||_0^2 < 4\left(\varepsilon^2 + \frac{C^2}{R^2}\right)||v||_0^2$$

或者支集包含于 $M_{>-R}$，并满足将 P_1 替换为 P_2 后的类似不等式。

证明。 简记 $P_1 \cup P_2$ 为 Q。设 $u \in \Gamma_c(M, E)$，且满足 $||Qu||_0^2 < \varepsilon^2 ||u||_0^2$。不妨设 $||u||_{0,M_{\leq 0}}^2 \geq 1/2||u||_0^2$。令 $\eta\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ 为一个光滑函数，它在 $\mathbb{R}_{\leq 0}$ 上满足 $\eta \equiv 1$，在 $\mathbb{R}_{\geq 1}$ 上满足 $\eta \equiv 0$，并且满足 $|\eta'| \leq 1.2$。令 $\eta_R(t) = \eta(R^{-1}t)$，并按上述方法将此函数延拓至 M。我们仍用 η_R 表示所得函数。

范数分解为

$$||P_1\eta_R u||_0^2 = ||P_1\eta_R u||_{0,M_{\leq -R}}^2 + ||P_1 u||_{0,M_{(-R,R)}}^2$$

并且，根据引理 4.3.18，各项仅取决于这些定义域上限制的芽。例如，

$$||P_1\eta_R u||_{0,M_{\leq -R}}^2 = ||P_1\eta_R u|_{M_{\leq -R}}||_{0,M_{\leq -R}}^2 = ||P_1 u||_{0,M_{\leq -R}}^2.$$

由于 Q 也满足引理 4.3.18的假设，因此有

$$(P_1\eta_R u)|_{M_{\leq -R}} = P_1(\eta_R u|_{M_{\leq -R}}) = (P_1 u)|_{M_{\leq -R}} = (Qu)|_{M_{\leq -R}}$$

并且由于 P_1 和 P_2 在 $M_{(-R,R)}$ 上一致，因此有

$$\begin{aligned}(Q\eta_R u)|_{M_{(-R,R)}} &= Q\eta_R(u|_{M_{(-R,R)}}) = P_1\eta_R(u|_{M_{(-R,R)}}) \\ &= \eta_R P_1(u|_{M_{(-R,R)}}) + [P, \eta_R\cdot](u|_{M_{(-R,R)}}) \\ &= (\eta_R Qu)|_{M_{(-R,R)}} + i^{-1}\mathrm{symb}_1(P_1)(-, \eta_R' \mathrm{d}t)(u)|_{M_{(-R,R)}}.\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}||P_1\eta_R u||_0^2 &= ||Qu||_{0,M_{\leq -R}}^2 + ||\eta_R Qu + \mathrm{symb}_1(P_1)(-, \eta_R' \mathrm{d}t)(u)||_{0,M_{(-R,R)}}^2 \\ &\leq ||Qu||_{0,M_{\leq -R}}^2 + 2||\eta_R Qu||_{0,M_{(-R,R)}}^2 + 2||\mathrm{symb}_1(P_1)(-, \eta_R' \mathrm{d}t)(u)||_{0,M_{(-R,R)}}^2 \\ &\leq 2||Qu||_{0,M_{<R}}^2 + 2||\mathrm{symb}_1(P_1)(-, \eta_R' \mathrm{d}t)(u)||_{0,M_{(-R,R)}}^2 \\ &< 2\varepsilon^2||u||_0^2 + 2\frac{C^2}{R^2}||u||_0^2,\end{aligned}$$

其中在最后一个不等式中，我们用到了 $||Qu||_0^2 < \varepsilon^2||u||_0^2$ 并且

$$\begin{aligned}&||\mathrm{symb}_1(P_1)(-, \eta_R' \mathrm{d}t)(u)||_{0;M_{(-R,R)}} \\ \leq\ &||\mathrm{symb}_1(P_1)(-, \eta_R' \mathrm{d}t)||_{0,0;M_{(-R,R)}}||u||_{0,M_{(-R,R)}} \\ \leq\ &||\mathrm{symb}_1(P_1)(-, \eta_R' \mathrm{d}t)||_{\infty;M_{(-R,R)}}||u||_0 \\ \leq\ &\frac{|\eta'|_\infty}{R}||\mathrm{symb}_1(P_1)(-, \mathrm{d}t)||_{\infty;M_{(-R,R)}}||u||_0 \\ \leq\ &\frac{C}{R}||u||_0\end{aligned}$$

由 $1/2||u||_0^2 \leq ||u||_{0,M_{\leq 0}}^2$ 可得 $||u||_0^2 \leq 2||\eta_R u||_0^2$。将所有不等式合并起来，我们得到

$$||P_1\eta_R u||_0^2 < 4\left(\varepsilon^2 + C^2/R^2\right)||\eta_R u||_0^2,$$

因此，对 $v \mathrel{..}= \eta_R u$ 的断言成立。 □

以下推论是后续章节中不可或缺的工具，因为它使我们能够将狄拉克型可逆块算子粘合在一起。请注意，在这一设定中，我们可以任意增大“粘合带”的长度，而不会提高算子的传播速度。

推论 4.3.22. 设 P_1 和 P_2 如前述引理所述。若它们分别有下界 c_1 和 c_2，且 $R > \max\{C^2/c_1^2, C^2/c_2^2\}$，那么 $P_1 \cup P_2$ 有下界，其下界为

$$c^2_{P_1\cup P_2} = \frac{\min\left\{c_1^2 - C^2/R^2, c_2^2 - C^2/R^2\right\}}{4}.$$

证明。 根据对 R 的假设，常数 $c_{P_1\cup P_2}$ 为正。假设存在一个截面 $u \in \Gamma_c(M, E)$，使得 $||(P_1 \cup P_2)(u)||_0 < c_{P_1\cup P_2}||u||_0$，那么前述引理推出存在 $v \in \Gamma_c(M, E)$，也就是说，不失一般性地，其支集位于 $M_{<R}$ 内，并满足

$$||P_1 v||_0^2 < 4\left(c^2_{P_1\cup P_2} + C^2/R^2\right)||v||_0^2 < c_1^2||v||_0^2,$$

这与 P_1 有下界 c_1 相矛盾。 □

4.4 算子协调集的基础

借助前一节建立的理论，我们终于可以将算子协调集 $\widetilde{\Psi\mathbf{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)$ 定义为所有分块狄拉克算子构成的立方子集。

不过，首先我们通过考察映入 $\Psi\mathbf{Dir}(M)$ 和 $\Psi\mathbf{Dir}^{\times}(M)$ 的块映射所构成的立方集合，而不是这些空间本身，来为实 K-理论的分类空间给出一个组合模型。

定义 4.4.1。 令 $\Psi\mathbf{Dir}_{\bullet}(M)$ 为一个立方集合，其 n-立方体由光滑块映射 $P\colon \mathbb{R}^n \to \Psi\mathbf{Dir}(M)$ 构成。连接映射定义如下：

$$\partial_i^{\varepsilon} P = \lim_{R\to\infty} P \circ \delta_i^{R\varepsilon} \qquad \text{and} \qquad \sigma_i P = P \circ p_i.$$

令 $\Psi\mathbf{Dir}^{\times}_{\bullet}(M)$ 为一个立方子集，它由所有取值于 $\Psi\mathbf{Dir}^{\times}(M)$ 的光滑块映射构成。

回忆一下， $\Psi\mathbf{Dir}(M)$ 是 $\mathbf{Riem}(M)$ 上的一个仿射丛，其纤维为 $\Psi\mathbf{Dir}(M)_g$，即所有主符号与狄拉克算子 $\not{D}_g$ 的主符号一致的、自伴、奇、Clifford 线性的 1 阶伪微分算子所构成的集合。映射 $\Psi\mathbf{Dir}(M) \to \mathbf{Riem}(M)$ 将算子 P 映至其底层度量 g。该映射诱导出立方集合映射 $\Psi\mathbf{Dir}_{\bullet}(M) \to \mathcal{R}^{+}_{\bullet}(M)$。

现在，我们将构造组合参考空间。

定义 4.4.2。 设 g 是 $M \times \mathbb{R}^n$ 上的块度量。若狄拉克型块算子 $P \in \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_g)$ 是对称的，且 $P - \not{D}_g$ 可扩张为 $H^0(\mathfrak{S}_g) = L^2(\mathfrak{S}_g)$ 上的有界自同态，则称其为块狄拉克算子。

推论 4.3.10 的直接推论是，块狄拉克算子自动是本质自伴的。

定义算子协调集时，追踪坐标置换将十分重要。置换 $\sigma \in \mathrm{Aut}(\{1,\dots,n\}) = S_n$ 诱导出一个线性映射

$$\sigma\colon (x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(n)}).$$

若 g 是 $M\times\mathbb{R}^n$ 上的块度量，则 $\sigma^* g$ 也是 $M\times\mathbb{R}^n$ 上的块度量。由于 $\mathbb{R}^n$ 在等价意义下仅有一种 Pin^- 结构，因此置换保持 Pin 结构。旋量丛构造的函子性给出一个映射，我们将其记作

$$\mathfrak{S}(\sigma)\colon \mathfrak{S}_{\sigma^* g} \to \mathfrak{S}_g \quad \text{or equivalently} \quad \mathfrak{S}(\sigma)\colon \mathfrak{S}_g \to \mathfrak{S}_{\sigma_* g}.$$

我们尤其关注循环置换。

定义 4.4.3. 对于正整数 $a<b$，令 $\mathrm{cycl}(a,b)$ 表示由 $a\mapsto a+1$ 和 $b\mapsto a$ 给出的循环置换，并令 $\mathrm{cycl}(b,a) = \mathrm{cycl}(a,b)^{-1}$。我们分别用 $\mathrm{Cycl}(a,b)$ 和 $\mathrm{Cycl}(b,a)$ 表示其在旋量丛上诱导的映射。

定义 4.4.4。 令 $\Psi\mathrm{Dir}^\bullet(M)$ 为一个立方集合，其 n-立方体的集合定义如下：

$$\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_n(M) \coloneqq \{P \in \overline{\Psi\mathrm{DO}}^1(\mathfrak{S}_g) \,:\, g\in \widetilde{\mathcal{R}}_n(M),\ P \text{ block Dirac operator}\}$$

其连接映射定义如下：

$$\begin{aligned}
\partial_i^\varepsilon P &\coloneqq \lim_{R\to\infty} \delta_i^{R\varepsilon *} P(i,\varepsilon) \in \overline{\Psi\mathrm{DO}}^1(\mathfrak{S}_{\partial_i^\varepsilon g}),\\
\sigma_i P &\coloneqq \mathrm{Cycl}(i,n+1)_*(P\boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes \not{D}) \in \overline{\Psi\mathrm{DO}}^1(\mathfrak{S}_{\sigma_i g})
\end{aligned}$$

注记 4.4.5。关于这个（微妙的）记号的说明。回想一下，如果一个块算子P的底层块度量为 g，并且在 $M\times U_r(i,\varepsilon) = \{(m,x)\,:\,\varepsilon x_i > r\}$上分解为 $P(i,\varepsilon)\boxtimes\mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes D$，且该分解是由置换给出的等距映射 $U_r(i,\varepsilon) \cong M\times\{\varepsilon x_i = r\}\times\varepsilon\mathbb{R}_{>r}$所诱导的，那么算子 $P(i,\varepsilon)$ 在充分大的 R 时限制为 $\mathfrak{S}_{g(i,\varepsilon)} \to M\times\{\varepsilon x_i = R\}$ 上的块算子，且与 R无关。映射

$$\delta_i^{R\varepsilon}\colon (M\times\mathbb{R}^{n-1}, \partial_i^\varepsilon g) \to \big(M\times\{\varepsilon x_i = R\}, g(i,\varepsilon)\big)$$

是一个保持 Pin 结构的等距映射，因此给出对应旋量丛之间的丛等距映射 $\mathfrak{S}(\delta_i^{R\varepsilon})$，并诱导对应紧支撑截面之间的同构。我们利用这个同构，将算子 $P(i,\varepsilon)$（作用于 $\Gamma_c(\mathfrak{S}_{g(i,\varepsilon)})$ 上）拉回到 $\delta_i^{R\varepsilon *}P(i,\varepsilon)$（作用于 $\Gamma_c(\mathfrak{S}_{\partial_i^\varepsilon g})$ 上）。

对于退化映射，我们利用循环置换这一性质

$$\mathrm{cycl}(i,n+1)\colon (M\times\{\varepsilon x_i > r\}, \sigma_i g) \to \big(M\times\mathbb{R}^n\times\varepsilon\mathbb{R}_{>r}, g\oplus \mathrm{d}x_{n+1}^2\big)$$

是一个等距映射和自然同构 $\mathfrak{S}_g \boxtimes Cl_{1,0} \cong \mathfrak{S}_{g\oplus \mathrm{d}x_{n+1}^2}$。

引理4.4.6。 $\Psi\mathrm{Dir}^{\bullet}(M)$ 的连接映射是良定义的，并满足立方恒等式。

证明需要用到以下简单的泛函分析结果。

引理 4.4.7。 设 H_1, H_2 为希尔伯特空间，且 $A\colon\ H_1 \to H_1$ 为一个无界算子。那么，当且仅当 A 有界时， $A\otimes\mathrm{id}$ 才是 $H_1\otimes H_2$ 上的有界算子。在这种情况下，算子范数满足 $||A\otimes\mathrm{id}||_{\mathrm{op}} = ||A||_{\mathrm{op}}$。

证明。 由于代数张量积 $H_1\odot H_2$ 在 $H_1\otimes H_2$中稠密，因此 $\mathrm{dom}\,(A\otimes\mathrm{id}) := \mathrm{dom}\ A\odot H_2$也稠密。如果 A有界，那么我们可以将其连续延拓为 $H_1\otimes H_2$ 上的一个算子，且该延拓的算子范数必然与 $||A||_{\mathrm{op}}$一致。

反过来，假设 $A\otimes\mathrm{id}$ 有界。设 $v\in H_2$为一个单位长度向量。映射 $\iota_v\colon\ H_1\to H_1\otimes H_2$ 由 $x\mapsto x\otimes v$ 给出，是线性且有界的。映射$x\otimes y\mapsto\langle y,v\rangle\cdot x$可从 $H_1\odot H_2$延拓为有界线性映射 $p_v\colon\ H_1\otimes H_2\to H_1$。由 $A = p_v\circ A\otimes\mathrm{id}\circ\iota_v$ 可推得， A 是一个有界算子。

□

引理 *4.4.6* 的证明。由推论 4.2.3， $\partial_i^{\varepsilon}P$再次是一个块算子。符号演算表明， $\partial_i^{\varepsilon}P$的主符号与 $\not{D}_{\partial_i^{\varepsilon}g}$的主符号一致，因此 $\partial_i^{\varepsilon}P$是一个狄拉克型块算子。类似地，改用引理 4.2.4 即可得出 σ_iP 是一个狄拉克型块算子。

我们需要证明，如果 P 是对称的，那么 $\partial_i^{\varepsilon}P$ 和 σ_iP 是对称算子。我们从 $\sigma_iP = \mathrm{Cycl}(i,\ n+1)_*(P\boxtimes\mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes /D)$ 开始。由于 $\mathrm{Cycl}(i,\ n+1)$ 在相应的平方可积截面的希尔伯特空间之间诱导出一个等距映射，推前 $\mathrm{Cycl}(i,\ n+1)_*$ 将对称算子映射为对称算子。因此，只需证明 $P\boxtimes\mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes /D$是一个对称算子，定义在

$$L^2(M\times\mathbb{R}^{n+1};\mathfrak{S}_{g\oplus\mathrm{d}x_{n+1}^2}) \cong L^2(M\times\mathbb{R}^n;\mathfrak{S}_g)\otimes L^2(\mathbb{R},Cl_{1,0}),$$

这是成立的，因为两个对称算子的张量积仍然是对称的，而这里涉及的四个算子 P、id、$\mathrm{e/o}$ 和 $/D$ 都是对称的。

为证明 $\partial_i^{\varepsilon}P$ 是对称的，我们按如下方式进行：在 $U(i,\varepsilon) := U_R(i,\varepsilon)$ 上，对于某个充分大的 $R>0$，我们可以通过一个等距丛态射，将对称算子 $P|_{U(i,\varepsilon)}$ 识别为 $P(i,\varepsilon)\boxtimes\mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes /\mathrm{D}_{\mathbb{R}}$。第二个加项是对称的，因此 $P(i,\varepsilon)\boxtimes\mathrm{id}$ 必须是 $\mathfrak{S}_{g(i,\varepsilon)\oplus\mathrm{d}x_n^2}\to(M\times\mathbb{R}^n)(i,\varepsilon)\times\varepsilon\mathbb{R}_{>R}$ 上的对称算子。这意味着 $P(i,\varepsilon)$ 在 $\mathfrak{S}_{g(i,\varepsilon)}$ 上是对称的，因而 $\partial_i^{\varepsilon}P = \delta_i^{R\varepsilon *}P(i,\varepsilon)$ 也是对称的，因为 $\delta_i^{R\varepsilon}\colon (M\times\mathbb{R}^{n-1},\partial_i^{\varepsilon}g)\to(M\times\mathbb{R}^n(i,\varepsilon)\ g(i,\varepsilon))$ 是一个等距映射。

From

$$\begin{aligned}
&\sigma_iP - \not{D}_{\sigma_ig}\\
&= \mathrm{Cycl}(i,n+1)_*\left(P\boxtimes\mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes\not{D}\right) - \mathrm{Cycl}(i,n+1)_*\left(\not{D}_g\boxtimes\mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes\not{D}\right)\\
&= \mathrm{Cycl}(i,n+1)_*((P-\not{D}_g)\boxtimes\mathrm{id})
\end{aligned}$$

并由引理 4.4.7 可知，差值 $\sigma_iP - \not{D}_{\sigma_ig}$ 可延拓为作用在 $H^0(\mathfrak{S}_{\sigma_ig})$ 上的有界算子，其算子范数为$||P-\not{D}_g||_{0,\ 0}$。

为证明 $\partial_i^\varepsilon P - \not{D}_{\partial_i^\varepsilon g}$ 可延拓为作用在 $H^0(\mathfrak{S}_{\partial_i^\varepsilon g})$ 上的有界算子，我们作如下论证。对于充分大的 $R>0$，算子 $P-\not{D}_g$ 限制在 $\Gamma_c(U_R(i,\varepsilon)\ \mathfrak{S}_g)$ 上。由于 $P-\not{D}_g$ 可延拓为作用在 $H^0(\mathfrak{S}_g)$ 上的有界算子，因此该限制可延拓为作用在 $H^0(U_R(i,\varepsilon)\ \mathfrak{S}_g)$ 上的有界算子，而后者与 $H^0(M\times\{\varepsilon x_i = R\},\mathfrak{S}_{g(i,\varepsilon)})\otimes L^2(\varepsilon\mathbb{R}_{>R},Cl_1)$ 等距等价。在这一识别下，$P-\not{D}_g$ 的限制与 $\left(P(i,\varepsilon)-\not{D}_{g(i,\varepsilon)}\right)\boxtimes \mathrm{id}$ 一致。由引理 4.4.7 可知，这意味着 $P(i,\varepsilon)-\not{D}_{g(i,\varepsilon)}$ 有界。因此，$\partial_i^\varepsilon P-\not{D}_{\partial_i^\varepsilon g}=\delta_i^{R\varepsilon *}\left(P(i,\varepsilon)-\not{D}_{g(i,\varepsilon)}\right)$ 是作用在 $H^0(\mathfrak{S}_{\partial_i^\varepsilon g})$ 上的有界算子。

最后，我们需要证明连接映射满足立方恒等式。对于充分大的 $i<j$ 和 $R>0$，有

$$\begin{aligned}
\partial_i^\varepsilon\partial_j^\omega P &= \partial_i^\varepsilon\left(\delta_j^{\omega R^*}P(j,\omega)\right)\\
&= \delta_i^{\varepsilon R^*}\left(\delta_j^{\omega R^*}\left(P(j,\omega)\right)(i,\varepsilon)\right)\\
&= \left(\delta_j^{\omega R}\delta_i^{\varepsilon R}\right)^* P(i,j,\varepsilon,\omega)\\
&= \left(\delta_i^{\varepsilon R}\delta_{j-1}^{\omega R}\right)^* P(i,j,\varepsilon,\omega)\\
&= {\delta_{j-1}^{\omega R}}^*\left(\delta_i^{\varepsilon R^*}\left(P(i,\varepsilon)\right)(j-1,\omega)\right)\\
&= \partial_{j-1}^\omega\partial_i^\varepsilon P.
\end{aligned}$$

对于 $i<j$ 和充分大的 $R>0$，我们计算得

$$\begin{aligned}
\partial_i^\varepsilon\sigma_j(P) &= \delta_i^{R\varepsilon^*}(\sigma_j(P)(i,\varepsilon))\\
&= \delta_i^{R\varepsilon^*}\mathrm{Cycl}(j,n+1)_*\left(P\boxtimes\mathrm{id}+\mathrm{e/o}\boxtimes\not{D}\right)(\mathrm{cycl}(j,n+1)^{-1}(i),\varepsilon)\\
&= \delta_i^{R\varepsilon^*}\mathrm{Cycl}(j,n+1)_*(P(i,\varepsilon)\boxtimes\mathrm{id}+\mathrm{e/o}\boxtimes\not{D}) \qquad \text{for } i<j\\
&= \left(\delta_i^{R\varepsilon^{-1}}\right)_*\mathrm{Cycl}(j,n+1)_*(P(i,\varepsilon)\boxtimes\mathrm{id}+\mathrm{e/o}\boxtimes\not{D})\\
&= \mathrm{Cycl}(j-1,n)_*\left(\delta_i^{R\varepsilon^{-1}}\right)_*\left(P(i,\varepsilon)\boxtimes\mathrm{id}+\mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_{g(i,\varepsilon)}}\boxtimes\not{D}\right)\\
&= \mathrm{Cycl}(j-1,n)_*(\partial_i^\varepsilon P\boxtimes\mathrm{id}+\mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_{\partial_i^\varepsilon g}}\boxtimes\not{D})\\
&= \sigma_{n-1}\partial_i^\varepsilon P,
\end{aligned}$$

类似地，对于 $i>j$，有 $\partial_i^\varepsilon\sigma_j P=\sigma_j\partial_{i-1}^\varepsilon P$。最后，在最后几行稍微滥用了记号，我们计算得

$$\begin{aligned}
\partial_i^\varepsilon\sigma_i P &= \delta_i^{R\varepsilon^*}\left((\sigma_i P)(i,\varepsilon)\right)\\
&= \delta_i^{R\varepsilon^*}\left(\mathrm{Cycl}(i,n+1)_*(P\boxtimes\mathrm{id}+\mathrm{e/o}\boxtimes\not{D})(i,\varepsilon)\right)\\
&= {\delta_i^{R\varepsilon}}_*^{-1}\mathrm{Cycl}(i,n+1)_*\left((P\boxtimes\mathrm{id}+\mathrm{e/o}\boxtimes\not{D})(\mathrm{cycl}(i,n+1)^{-1}(i),\varepsilon)\right)\\
&= {\delta_i^{R\varepsilon}}_*^{-1}\mathrm{Cycl}(i,n+1)_*\left((P\boxtimes\mathrm{id}+\mathrm{e/o}\boxtimes\not{D})(n+1,\varepsilon)\right)\\
&= {\delta_{n+1}^{R\varepsilon}}_*^{-1}\left((P\boxtimes\mathrm{id}+\mathrm{e/o}\boxtimes\not{D})(n+1,\varepsilon)\right)=P.
\end{aligned}$$

对于 $i\le j$，我们使用恒等函数

$$\mathrm{cycl}(i,n+2)\circ\mathrm{cycl}(j,n+1)=\mathrm{cycl}(j+1,n+2)\circ\mathrm{cycl}(i,n+1)\circ\tau_{n+1,n+2}$$

其中 $\tau_{n+1,\ n+2}$ 表示交换 $n+1$ 和 $n+2$ 的对换，从而得出

$$\begin{aligned}
\sigma_i\sigma_j(P) &= \sigma_i(\mathrm{Cycl}(j,n+1)_*(P\boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes \not{D})) \\
&= \mathrm{Cycl}(i,n+2)_*\Big(\mathrm{Cycl}(j,n+1)_*(P\boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_g}\boxtimes \not{D})\boxtimes \mathrm{id} \\
&\quad + \mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_{\sigma_j(g)}}\boxtimes \not{D}\Big) \\
&= \mathrm{Cycl}(i,n+2)_*\circ \mathrm{Cycl}(j,n+1)_*\Big(P\boxtimes \mathrm{id}\boxtimes \mathrm{id} \\
&\quad + \mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_g}\boxtimes \not{D}\boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_{\sigma_{n+1}(g)}}\boxtimes \not{D}\Big) \\
&= \mathrm{Cycl}(i,n+2)_*\circ \mathrm{Cycl}(j,n+1)_*\Big(P\boxtimes \mathrm{id}\boxtimes \mathrm{id} \\
&\quad + \mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_g}\boxtimes \not{D}\boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_g}\boxtimes \mathrm{e/o}\boxtimes \not{D}\Big) \\
&= \mathrm{Cycl}(j+1,n+2)_*\circ \mathrm{Cycl}(i,n+1)_*\circ \tau_{n+1,n+2_*}\Big(P\boxtimes \mathrm{id}\boxtimes \mathrm{id} \\
&\quad + \mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_g}\boxtimes \not{D}\boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_g}\boxtimes \mathrm{e/o}\boxtimes \not{D}\Big) \\
&= \mathrm{Cycl}(j+1,n+2)_*\circ \mathrm{Cycl}(i,n+1)_*\Big(P\boxtimes \mathrm{id}\boxtimes \mathrm{id} \\
&\quad + \mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_g}\boxtimes \not{D}\boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o}_{\mathfrak{S}_g}\boxtimes \mathrm{e/o}\boxtimes \not{D}\Big) \\
&= \ldots = \sigma_{j+1}\sigma_i(P).
\end{aligned}$$

在第五行中，我们可以在第二个因子中去掉$\tau_{n+1,\ n+2_*}$，从而得到第六行，因为

$$\not{D}\boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes \not{D} = \partial_{x_{n+1}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{n+1}} + \partial_{x_{n+2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{n+2}}$$

在第$(n+1)$个和第$(n+2)$个坐标上是对称的。 □

现在我们来介绍本论文最重要的定义之一。

定义4.4.8。设 $\widetilde{\Psi\ \ \mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)$是 $\widetilde{\Psi\ \ \mathrm{Dir}}_{\bullet}(M)$的子集序列，其中 $\widetilde{\ \ \times}\ \Psi\mathrm{Dir}_n(M)$由所有可延拓为可逆算子 $P\colon\ H^1(\mathfrak{S}_{g_P})\ \to H^0(\mathfrak{S}_{g_P})$的块狄拉克算子 $P\in \Psi\mathrm{Dir}_n(M)$组成。

要证明 $\widetilde{\Psi\ \ \mathrm{Dir}}_{\bullet}(M)$的面映射限制到 $\widetilde{\Psi\ \ \mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)$，需要以下引理，它大致说明正性会传递到超曲面上。

引理 4.4.9。设 $\mathfrak{S}_g\to M$ 是黎曼流形(M,g)上的自旋旋量丛。对于 $Q\in \Psi\mathrm{DO}^1(E)$对称且为奇，定义 $\overline{P_{..}} = Q\boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes /\!\!D$ 于 $\mathfrak{S}\boxtimes Cl_{1,0}\to M\times(-a,a)$，对所有 $0<a\le\infty$均成立。

若 $||Pu||_0\ge c||u||_0$对所有 $u\in\Gamma_c(M\times(-a,a)\ \mathfrak{S}_g\boxtimes Cl_{1,0})$均成立，则

$$||Qv||_0^2\ge \max\{0,c-4/a^2\}||v||_0^2$$

对所有 $v\in\Gamma_c(M,\mathfrak{S}_g)$。

证明。设 $v \in \Gamma_c(M, \mathfrak{S}_g)$ 以及 $f \in \Gamma_c((-a,a)\, Cl_{1,0})$。算子 P根据引理 4.4.6 的证明可知仍是对称的，且为奇算子。利用富比尼定理，并注意到P 有下界，我们得到

$$\begin{aligned} ||Pv \otimes f||_0^2 &= \langle P^2(v \otimes f), v \otimes f\rangle \\ &= \langle Q^2(v) \otimes f - v \otimes \Delta_{\mathbb{R}}(f), v \otimes f\rangle \\ &= ||Q(v) \otimes f||_0^2 + ||v \otimes f'||_0^2 \\ &= ||Q(v)||_0^2||f||_0^2 + ||v||_0^2||f'||_0^2 \\ &\geq c||v||_0^2||f||_0^2 = c||v \otimes f||_0^2. \end{aligned}$$

函数

$$\varphi\colon (-1,1) \to \mathbb{R} \quad \text{given by} \quad \varphi(t) = \begin{cases} 1+t, & \text{if } t \leq 0, \\ 1-t, & \text{if } t \geq 0, \end{cases}$$

满足 $||\varphi||_0^2 = 2/3$，其中 $||\varphi'||_0^2 = 2$。选取一个紧支撑函数 f，使其与 φ足够接近，且在 $|\vdash||_1$意义下满足 $||f'||_0^2/||f||_0^2 \leq 4$。

根据变换公式，映射 $f \mapsto a^{-1/2} f(a^{-1}\cdot)$ 是一个等距映射$L^2(-1,\ 1) \to L^2(-a,\ a)$。因此，$||f_a'||_0^2/||f_a||_0^2 = a^{-2}||f'||_0^2/||f||_0^2 \leq 4/a^2$。

总之，将 f_a 代入前一个不等式，可得

$$\begin{aligned} ||Qv||_0^2 &\geq \left(c - ||f_a'||_0^2/||f_a||_0^2\right)||v||_0^2 \\ &\geq \left(c - 4/a^2\right)||v||_0^2, \end{aligned}$$

当 $c > 4/a^2$时，该式为正。 □

引理 4.4.10。 $\Psi\mathrm{Dir}_\bullet(M)$ 的连接映射将可逆元映为可逆元。因此，$\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^{\times}(M)$ 是一个立方子集。

证明。取一个充分大的 $R > 0$，使得 $g = g_P$分解为 $g(i,\varepsilon) \oplus \mathrm{d}x_i^2$ 于 $U_R(i,\varepsilon)$ 上；并滥用记号，令 P分解为 $P(i,\varepsilon) \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes /\mathrm{D}_{\mathbb{R}}$。由于 P 有下界，其限制 $P|_{U_R(i,\varepsilon)}$ 也有下界。由引理 4.4.9 可知，$P(i,\varepsilon)$，因此 $\partial_i^\varepsilon P$也有下界。由于$\partial_i^\varepsilon P$ 是自伴的，它必定可逆。

要证明 $\sigma_i(P)$ 可逆，只需验证 $P \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes /D$ 可逆。由于 $P \boxtimes \mathrm{id}$ 与 $\mathrm{e/o} \boxtimes /D$ 反交换，我们有

$$\left(P \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \not{D}\right)^2 = P^2 \boxtimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \boxtimes \Delta.$$

两个加项都是非负算子。由于 P 可逆，P^2 是正的，因此它们的和为正，进而可逆。 □

我们想知道 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet(M)$ 和 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^{\times}(M)$ 是否是 Kan 集。对于 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet(M)$，甚至还有更强的结论。

命题 4.4.11. 立方集合 $\Psi\mathrm{Dir}_\bullet(M)$ 是组合可缩的。

该命题可由以下初等引理直接推出。

引理 4.4.12. 设 $P_{(j,\omega)}$ 和 $P_{(k,\eta)}$ 是 $M\times\mathbb{R}^{n-1}$上的两个分块狄拉克算子。假设 $j\le k$，且 $\partial_j^{\omega}P_{(k,\eta)}=\partial_{k-1}^{\eta}P_{(j,\omega)}$，并且这两个算子在 $M\times\rho I^n$之外分解。那么算子 $\sigma_jP_{(j,\omega)}$和 $\sigma_kP_{(k,\eta)}$在集合 $\{\omega x_j>\rho,\eta x_k>\rho\}$上相同。

证明。简记 $\{\omega x_j>\rho,\eta x_k>\rho\}$为 U。若 $j=k$，则无需对 U证明任何内容，因其为空集或 $(j,\omega)=(k,\eta)$。在其他情况下，由引理3.1.10 可知，底层度量在 U 上相同。引理 4.2.4 的证明表明，$\sigma_jP_{(j,\omega)}$限制在 U上。此外，对于 $j<k$，计算

$$\begin{aligned}\sigma_jP_{(j,\omega)}|_U&=\sigma_k\partial_k^{\eta}\sigma_jP_{(j,\omega)}|_U\\&=\sigma_j\sigma_{k-1}\partial_{k-1}^{\eta}P_{(j,\omega)}|_U\\&=\sigma_j\sigma_{k-1}\partial_j^{\omega}P_{(k,\eta)}|_U\\&=\sigma_j\partial_j^{\omega}\sigma_kP_{(k,\eta)}|_U=\sigma_kP_{(k,\eta)}|_U\end{aligned}$$

表明了这一结论。这里，第一行用到了 $P_{(j,\omega)}$ 的块形式，第二行用到了立方恒等式，第三行用到了所假设的相容性。 □

命题 *4.4.11* 的证明。设 $\partial\square[n]_\bullet\to\Psi\mathrm{Dir}_\bullet(M)$ 由以下分块狄拉克算子族给出

$$\{P_{(j,\omega)}\in\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_{n-1}(M):\partial_j^{\omega}P_{(k,\eta)}=\partial_{\eta}^{k-1}P_{(j,\omega)}\text{ for }j<k\},$$

其中 $(j,\ \omega)\in\{1,\dots,n\}\times\mathbb{Z}_2$。由于给定的块狄拉克算子只有有限多个，我们可以选取一个充分大的 $\rho>0$，使得每个 $P_{(j,\omega)}$ 的核都是 $M\times\rho I^{n-1}$的子集。所有 $\sigma_jP_{(j,\omega)}$仍是块狄拉克算子，其核包含于 $M\times\rho I^n$中，因此它们限制在 $\{\omega x_j>\rho\}$ 及其所有交集上。根据相容性假设，由引理 4.4.12，这些算子在交集上相等。

因此，可以利用定义 4.2.5 中的单位分解作适当选择，将这些块狄拉克算子拼接成 P上的一个算子 $\mathfrak{S}_g\to M\times\mathbb{R}^n\setminus\rho I^n$，其中 g 是所有（相容的）底层黎曼度量的并集 $g_{P_{(j,\omega)}}$。按照命题3.1.8 的证明，将度量 g 延拓为 $M\times\mathbb{R}^n$ 上的块度量，并将这个延拓仍记作 g。

令 $\chi\colon M\times\mathbb{R}^n\to[0,1]$为一个光滑函数，它在 $M\times\rho I^n$的某个开邻域上恒等于 1，并在 $M\times\mathbb{R}^n\setminus(\rho+2)I^n$上恒等于零。令 $\psi\colon M\times\mathbb{R}^n\to[0,1]$为一个函数，它在 $\operatorname{supp}(1-\chi)$ 上恒等于 1，且其支集包含于补集 $M\times\rho I^n$中。算子 $\mathtt{P}\coloneqq\psi P(1-\chi)+\not{D}_g\chi$是作用于$M\times R^n$上的块算子，满足 $\partial_j^{\omega}\mathtt{P}=P_{(j,\omega)}$，因为它在 $M\times(\rho+2)I^n$之外与 P一致。符号演算以及 χ 和 ψ 的选取意味着，$\mathtt{P}$ 的主符号与 $\not{D}_g$ 的主符号一致。由 $\mathtt{P}-\not{D}_g=\psi(P-\not{D}_g)(1-\chi)$可知，$P$与 $\not{D}_g$ 相差一个有界算子 H^0。若 $\mathtt{P}$ 是对称的，那么它将是一个块狄拉克算子和一个填充子。虽然 $\mathtt{P}$ 可能不是对称的，但它的形式伴随存在，且由下式给出

$$\mathtt{P}^*=\chi\not{D}_g+(1-\chi)P\psi.$$

它仍然是一个狄拉克型块算子。因此，填充子为 $P_{\text{fill}} \coloneqq (\mathsf{P}^* + \mathsf{P})/2$，$\widetilde{\quad}$，所以 $\Psi\mathbf{Dir}^\bullet(M)$ 是组合可缩的。 □

$\widetilde{\quad}$现在我们描述比较映射 $\Psi\mathbf{Dir}^\bullet(M) \to \Psi\mathbf{Dir}^\bullet(M)$。为此，回忆一下，对于块映射 $P\colon \mathbb{R}^n \to \Psi\mathbf{Dir}(M)$，其底层映射是黎曼度量的块映射 $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbf{Riem}(M)$，旋量丛分解为 $\mathfrak{S}_{\operatorname{susp} h} \cong \mathfrak{S}_h \otimes Cl_{n,\,0}$并且我们已将算子悬挂定义为 *operator suspension* $\mathbf{susp}(P)$，它是在同构 $\Gamma_c(\mathfrak{S}_{\operatorname{susp} h}) \cong \Gamma_c(\mathfrak{S}_h \otimes Cl_{n,\,0})$ 下对应于

$$\operatorname{susp}(P) = P \otimes \mathrm{id} + \sum_{k=1}^{n} \partial_{t_k} \cdot \nabla^{\mathfrak{S}_{\operatorname{susp} h}}_{\partial_{t_k}}.$$

引理 4.4.13. 这些悬挂是良定义的仿射映射，并组合成一个$\widetilde{\quad}$立方映射 $\Psi\mathrm{Dir}^\bullet(M) \to \Psi\mathrm{Dir}^\bullet(M)$

证明。 我们已由引理 4.2.12 知道 $\operatorname{susp}(P)$ 是一个狄拉克型块算子。接下来只需证明 $\operatorname{susp}(P)$ 是对称的，且与 $\mathfrak{D}_{\operatorname{susp} h}$相差一个有界算子。下文中，我们将把 $\operatorname{susp} h$ 简记为 g。

为了证明 $\mathbf{susp}(P)$ 是对称的，我们将证明其各个加项 $P_{\text{ex}} \coloneqq P \otimes \mathrm{id}$ 和 $D \coloneqq \sum \partial_k \cdot \nabla^{\mathfrak{S}_g}_k$ 是对称算子。只需考虑形如 $\sigma(m,t) \otimes e_I$ 的紧支撑截面。利用 Fubini 定理，我们通过以下推导得出 P^{ex} 的对称性：

$$\begin{aligned}
(P^{\text{ex}}(\sigma_1 \otimes e_I), \sigma_2 \otimes e_J) &= \int_{\mathbb{R}^n} (P_t\sigma_1(\cdot,t) \otimes e_I, \sigma_2(\cdot,t) \otimes e_J)_{H^0(M,\mathfrak{S}_{h(t)}) \otimes Cl_{n,0}} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (P_t\sigma_1(\cdot,t)e_I, \sigma_2(\cdot,t))_{H^0(M,\mathfrak{S}_{h(t)})} \langle e_I, e_J\rangle_{Cl_{n,0}} \mathrm{d}t \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (\sigma_1(\cdot,t), P_t\sigma_2(\cdot,t))_{H^0(M,\mathfrak{S}_{h(t)})} \langle e_I, e_J\rangle_{Cl_{n,0}} \mathrm{d}t \\
&= \cdots = (\sigma_1 \otimes e_I, P^{\text{ex}}(\sigma_2 \otimes e_J)) \,.
\end{aligned}$$

算子 D 是一个作用于 $Cl_{n,0} \to M \times \mathbb{R}^n$ 上的 $\mathfrak{S}_g$-扭曲狄拉克算子，因此它是对称的；这里的意义参见 [LM89]。

符号演算和定理 B.0.30 表明

$$\operatorname{susp}(P) - \mathfrak{D}_g = (P - \mathfrak{D}_h) \otimes \mathrm{id} \in Op^0(H^0(\mathfrak{S}_g)))$$

因为 $P - \mathfrak{D}_h$ 是一个以零阶伪微分算子为值的块映射。算子悬挂$(P) - \mathfrak{D}_g$ 因此按照与块算子相同的方式分解[6]。引理4.3.1 的证明并不要求该算子可以由实际的零阶伪微分算子逼近，因此悬挂$(P) - \mathfrak{D}_g$在 $H^0(\mathfrak{S}_g)$上诱导出一个有界自同态。

[6]该算子之所以不是块算子，唯一的原因是它只作用于 Op^0，而不是 $\Psi\mathrm{DO}^0$。

我们在引理4.2.12的证明中看到， P在 $U_r(\varepsilon)$上分解如下，前提是r 足够大

$$\begin{aligned}(\Phi_\varepsilon)_*\mathrm{susp}(P)|_{U(\varepsilon)} &= \mathrm{susp}(P(\varepsilon)) \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \sum_{k=1}^{|\mathrm{dom}\,\varepsilon|} \left((\Phi_\varepsilon)_*\nabla^{\mathfrak{S}_g}\right)_{\partial_{t_k}} \\ &= \mathrm{susp}(P(\varepsilon)) \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \sum_{k=1}^{|\mathrm{dom}\,\varepsilon|} \partial_{t_k} \cdot \frac{\partial}{\partial t_k},\end{aligned}$$

这意味着 ∂_i^ε悬挂(P) $=$悬挂$(\partial_i^\varepsilon P)$。

利用同构 $\mathfrak{S}_{\sigma_{n+1}g} \cong \mathfrak{S}_g \boxtimes Cl_{1,0}$，我们可以将悬挂$(\sigma_{n+1}P)$与悬挂$(P)$ $\boxtimes$id $+$e/o $\boxtimes$ $/D$ $=\sigma_{n+1}$悬挂(P)等同起来，这表明悬挂与 σ_{n+1}可交换。证明这一点稍显繁琐，但并不困难：

$$\mathrm{Cycl}(i,n)_*\mathrm{susp}(P) = \mathrm{susp}(\mathrm{cycl}(i,n)_*P) = \mathrm{susp}(P \circ \mathrm{cycl}(i,n)^{-1})$$

对每个 $n \geq 1$，都有 σ_i悬挂(P) $=$悬挂$(\sigma_i P)$。 □

与正标量曲率度量的情形一样，算子悬挂并不会将可逆算子的块映射映为可逆块算子。为了弥补这一缺陷，我们将在下一节为 $\Psi\mathbf{Dir}_\bullet^\times(M)$ 构造一个更小的模型。

4.5 比较映射

光滑的、可逆伪狄拉克算子值块映射的算子悬挂不一定可逆。为修复这一缺陷，我们将构造一个弱等价立方子集 $B_\bullet$ of $\Psi\mathbf{Dir}_\bullet^\times(M)$，它是 Kan 的，并且算子悬挂映射的像位于 $\widetilde{\mathcal{R}_\bullet^+}(M)$ 和 $\widetilde{\Psi\quad}\mathbf{Dir}_\bullet^\times(M)$ 中。本质上， $B_\bullet$ 是由参数化得足够“缓慢”的光滑块映射构成的子集。

回顾一下，在有限维向量空间V上的内积 h 会诱导一个同构 $h^\flat\colon V \to V^\vee$，其定义为 $v \mapsto h(v, -)$，其逆映射记为$h_\sharp$。若 b 是 V上的另一个双线性形式，我们将其诱导的端omorphism $h_\sharp \circ b$记作 b^{op}。

对于每个黎曼度量的块映射 $h\colon \mathbb{R}^n \to$Riem(M)，旋量丛分解为 $\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}\,h} \cong \mathfrak{S}_h \otimes Cl_{n,\,0}$，其中 $\mathfrak{S}_h \to M \times \mathbb{R}^n$。我们需要恰当地研究悬挂度量 susp h的旋量联络。我们将 $\mathbb{R}^n$ 上的标准基记作 $\partial_j = \partial_{t_j}$。

引理 4.5.1. 设 $g_0 \in \mathrm{Riem}(M)$ 为一个黎曼度量。记取值为 g_0 的常值块映射及其悬挂为同一个符号。对于每个黎曼度量的块映射 $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{Riem}(M)$， $\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}\,h}$上的旋量联络满足

$$p\mathcal{G}(\mathrm{susp}\,h, g_0)_*(\nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}\,h}})_{\partial_i} = \partial_i$$

对所有 $1 \leq i \leq n$ 均成立。

非正式地说，对于所有 $1 \leq i \leq n$，克里斯托费尔端同态 $\Gamma_i = \partial_i - \nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}\,h}}_{\partial_i}$ 都消失。

证明。 记 g 为 susp h，并滥用记号，将 $g_0 ..= \text{susp } g_0$ 记作 $p\mathcal{G}(g, g_0) : \mathfrak{S}_g \to \mathfrak{S}_{g_0}$，它是预规范映射。推前 $p\mathcal{G}(g, g_0)_*(\nabla^{\mathfrak{S}_g})$ 是一个联络 $\mathfrak{S}_{g_0}$。由于 $g_0 = g_0 \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ 是乘积度量，截面空间 $\Gamma(M \times \mathbb{R}^n, \mathfrak{S}_{g_0})$ 可与 $\mathcal{C}^\infty\big(\mathbb{R}^n, \Gamma(M, \mathfrak{S}_{g_0} \otimes Cl_{n,0})\big)$ 等同，因此所有 ∂_i 都是定义良好的微分算子。因此，差

$$\Gamma_i \coloneqq \partial_i - p\mathcal{G}(\operatorname{susp} h, g_0)_*(\nabla^{\mathfrak{S}_{\operatorname{susp} h}})_{\partial_i}$$

是 $\mathfrak{S}_{g_0}$ 的向量丛端omorphism，即 $p\mathcal{G}(g, g_0)_*(\nabla^{\mathfrak{S}_g})_{\partial_i}$ 的克里斯托费尔端同态。这意味着，如果我们选取一个正交标架，使其补足 $\mathbb{R}^n$ 的标准基，那么该端omorphism 关于所选标架的矩阵表示将给出 $p\mathcal{G}(g, g_0)_*(\nabla^{\mathfrak{S}_g})$ 的克里斯托费尔符号。（当然，恒等函数 $\Gamma_i = 0$ 与 TM 上所选的标架无关。）

$p\mathcal{G}(g, g_0)_*(\nabla^{\mathfrak{S}_g})_{\partial_i}$ 关于由 $(e_{1-d}, \dots, e_0, \partial_1 \dots, \partial_n)$ 诱导的标架的克里斯托费尔符号，与 $\nabla^{\mathfrak{S}_g}_{\partial_i}$ 关于由 $p\mathcal{G}(g_0, g)(e_{(1-d)}) \dots, p\mathcal{G}(g_0, g)(e_0), \partial_1, \dots, \partial_n$ 诱导的标架的克里斯托费尔符号一致。

相对于流形上的任意正交标架(e_i) 以及旋量丛上由此诱导的正交标架 (σ_α)，旋量联络的克里斯托费尔符号由下式给出： [LM89，定理 II.4。14]

$$\nabla^{\mathfrak{S}_g}_{e_i} \sigma_\alpha = \frac{1}{2} \left(\sum_{j<k} \Gamma^k_{ij} e_j e_k \right) \cdot \sigma_\alpha,$$

其中， Γ^k_{ij} 是列维-奇维塔联络相对于正交标架（e_i）的克里斯托费尔符号。

为了确定 $\Gamma_i = \Gamma^{L.C.}{}_{,i}{}^{g}$ 在 (m_0, t_0) 处的值，即 $M_{t_0} = M \times \{t_0\}$ 上列维-奇维塔联络的克里斯托费尔端同态，我们将选取一个特别适合该点的局部正交标架。令 $(y_{1-d}, \dots, y_0) : U \subset M \to V \subseteq \mathbb{R}^d$ 为以 m_0 为中心的 $h(t_0)$ 的测地坐标。这些坐标将 m_0 映射到 0。令 $\partial_{y_{(1-d)}}, \dots, \partial_{y_0}$ 为标准基。相对于该坐标系， $g = \text{susp}(h)$ 的推前由函数 $h\colon V \to \mathbb{R}^{d \times d}$ 唯一确定，该函数由 $h_{\alpha\beta}(v) = g(v)(\partial_{y_\alpha}, \partial_{y_\beta})$ 给出。注意， $h(0) = \text{id}$ 且 $dh = 0$。相对于 $h(t_0)$，对 $(\partial_{y_{-(d-1)}}, \dots, \partial_{y_0})$ 应用格拉姆-施密特正交化算法，得到 $TM \times \{t_0\}$ 上的正交标架 $f_{-(d-1)}, \dots f_0$。在测地坐标中，原点附近的度量满足 $h(v, t_0) = \text{id} + \mathcal{O}(||v||^2)$。由格拉姆-施密特正交化算法的归纳法可知，正交基 (f_j) 在原点处与 ∂_{y_j} 相切，即 $f_j(v) - \partial_{y_j} = 0 + \mathcal{O}(||v||^2)$。

存在唯一的光滑函数 $a_{\alpha,j}\colon V \to \mathbb{R}$ ，使得

$$f_j(v) = \sum_{\alpha=1-d}^{0} a_{\alpha,j}(v) \partial_\alpha.$$

由于 (f_j) 与 (∂_{y_j}) 相切，因此我们有 $a_{\alpha}{}_{,j} = \delta_{\alpha,j}$ 和 $\mathrm{d}a_j{}_{,\alpha} = 0$。

在这些局部坐标中，我们可以通过以下方式将标架 $f_{1-d}, \dots, f_0$ 从 $V = V \times t_0$扩展为 $V \times \mathbb{R}^n$ 上的一个标架

$$f_j(v, t) \coloneqq h(v, t)^{-1/2} \cdot f_j(v, t_0).$$

（准确地说， $h(v,t)$ 表示度量 $h(t)|_U = g|_{TU\times\{t\}}$ 关于所选测地坐标（$y_{(1-d)},\dots,y_0$）的推前。）

为了计算 $g = \mathrm{susp}(h)$ 的列维-奇维塔联络相对于标架 $(e_{-(d-1)},\ \dots e_n) = (f_{-(d-1)},\ \dots,\ f_0,\ \partial_{t_1},\ \dots,\ \partial_{t_n})$ 的克里斯托费尔符号，我们使用列维-奇维塔联络的 Koszul 公式

$$\begin{aligned}2g(\nabla_X Y, Z) = {} & Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ & - g(Y,[X,Z]) - g(Z,[Y,X]) + g(X,[Z,Y]).\end{aligned}$$

令 $\Gamma_{ij}^k = g(\nabla_{e_i} e_j,\ e_k)$。我们选取了一个正交规范标架，因此 $g(e_i,\ e_j) \equiv \delta_{ij}$，Koszul 公式中的上行恒为零。因此，只有下行有贡献。

在 $(0,\ t_0)$ 处的交换子为：

$$\begin{aligned}[f_i, f_j] &= [h(t)^{-1/2}(\sum a_{\alpha,i}\partial_{y_\alpha}), h(t)^{-1/2}(\sum a_{\beta,j}\partial_{y_\beta})] \\ &= \sum_{\alpha,\beta}[h(t)^{-1/2}(a_{\alpha,i}\partial_{y_\alpha}), h(t)^{-1/2}(a_{\beta,j}\partial_{y_\beta})] \\ &= \sum_{\alpha,\beta} a_{\beta,j}\partial_{y_j}a_{\alpha,i} - a_{\alpha,i}\partial_{y_i}a_{\beta,j} + a_{\alpha,i}a_{\beta,j}[h(t)^{-1/2}\partial_{y_\alpha}, h(t)^{-1/2}\partial_{y_\beta}] \\ &= \sum_{\alpha,\beta} -1/2\cdot a_{\alpha,i}a_{\beta,j}(0,t_0)\big(\partial_{y_\alpha}h(0,t_0)\cdot\partial_{y_\beta} - \partial_{y_\beta}h(0,t_0)\cdot\partial_{y_\alpha}\big) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\partial_{t_i}, f_j] &= \sum_\alpha [\partial_{t_i}, h^{-1/2}(t)_v a_{\alpha,j}(v)\partial_{y_\alpha}] \\ &= \sum_\alpha \partial_{t_i}a_{\alpha,j}(v) + a_{\alpha,j}[\partial_{t_i}, h^{-1/2}(t)_v\partial_{y_\alpha}] \\ &= 0 + \sum_\alpha a_{\alpha,j}(0,t_0)\cdot(-1/2\partial_{t_i}h(t)|_{(0,t_0)}\cdot\partial_{y_\alpha}) \\ &= -1/2(\partial_{t_i}h)(0,t_0)\partial_{y_j},\end{aligned}$$

当然，还有

$$[\partial_{t_i}, \partial_{t_j}] = 0.$$

现在我们可以计算在 $(0,\ t_0)$ 处的克里斯托费尔符号 Γ_{ij}^k。如果三个指标 $i,\ j,\ k$ 中有两个大于零，那么 $\Gamma_{ij}^k = 0$，因为交换子要么为零，要么与所有∂_{t_m}正交。我们分别讨论剩下的四种情况：对于 $i,\ j,\ k \le 0$，有 $2\Gamma_{ij}^k = 0$，因为所有交换子都为零。对于 $i,\ j \le 0$ 和 $k > 0$，有

$$\begin{aligned}2\Gamma_{ij}^k &= g(e_i,[e_k,e_j]) - g(e_j,[e_i,e_k]) = g(f_i,[\partial_{t_k},f_j]) - g(f_j,[f_i,\partial_{t_k}]) \\ &= g(\partial_{y_i}, -1/2\partial_{t_k}h\cdot\partial_{y_j}) + g(\partial_{y_j}, -1/2\partial_{t_k}h\cdot\partial_{y_i}) \\ &= -1/2\partial_{t_k}h_{ij} - 1/2\partial_{t_k}h_{ji} = -\partial_{t_k}h_{ij},\end{aligned}$$

其中第二行用到了 $f_\alpha(0,\ t_0) = \partial_{y_\alpha}$。对于 $i,\ k \le 0$和 $j > 0$，我们可类似地推导出 $2\Gamma_{ij}^k = \partial_{t_j}h_{ik}$。对于 $j,\ k \le 0$和 $i > 0$，我们有： $2\Gamma_{ij}^k = 1/2\partial_{t_i}h_{jk} - (1/2)\partial_{t_i}h_{kj} = 0$。

这意味着，在 $i > 0$ 的情况下，关于标架 $(e_{-(d-1)}, \dots e_n) = (f_{-(d-1)}, \dots, f_0, \partial_{t_1}, \dots, \partial_{t_n})$ 的旋量联络的克里斯托费尔符号满足恒等式

$$\Gamma^{\mathfrak{S}_g}_{\partial_i} = \Gamma^{\mathfrak{S}_g}_{i} = \frac{1}{2} \sum_{1-d \le j < k \le n} \Gamma^k_{ij} e_j e_k = 0,$$

引理得证。 □

设 $P\colon \mathbb{R}^n \to \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S})$ 是一个块映射，其底层块映射为 h。回想一下，P^{ex} 是在分解 $\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}\, h} \cong \mathfrak{S}_h \otimes Cl_{n,0}$ 下与 $P \otimes \mathrm{id}$ 对应的算子。交换子 $[P^{\mathrm{ex}}, \nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}h}}_{\partial_{t_k}}]$ is $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$-线性的，因此它限制为作用于 $\Gamma(M \times t, \mathfrak{S}_{\mathrm{susp}h}) = \Gamma(M \times t, \mathfrak{S}_{h_t} \otimes Cl_{n,0})$ 上的算子，我们将其记作 $[P^{\mathrm{ex}}, \nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}h}}_{\partial_{t_k}}]\restriction_{M\times t}$。

引理 4.5.2. 该赋值

$$t \mapsto [P^{\mathrm{ex}}, \nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}\, h}}_{\partial_j}]\restriction_{M\times t}$$

对所有 $1 \le j \le n$，都是一个光滑块映射 $\mathbb{R}^n \to \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S})$ 的延拓。

证明。将 g 记为 $\mathrm{susp}\ h$。取一个黎曼度量 $g_{00} \in \mathrm{Riem}(M)$，并将取值为 g_{00} 的常值映射也记作同一个字母。令 $g_0 = \mathrm{susp}(g_{00}) = g_{00} \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$。

我们证明与之等价的命题：

$$t \mapsto p\mathcal{G}(g, g_0)_* \left([P, \nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}\, h}}_{\partial_j}] \right) \restriction_{M\times t}$$

是一个光滑块映射 $\mathbb{R}^n \to \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{g_0})$。

注意，

$$p\mathcal{G}(g, g_0)_* P^{\mathrm{ex}} = (p\mathcal{G}(h, g_{00})_* P)^{\mathrm{ex}}$$

因为这两个算子在由如下形式的截面张成的稠密子空间上相等：$u \otimes f$，其中 $u \in \Gamma(\mathfrak{S}_{g_{00}})$ 以及 $f \in \Gamma_c(Cl_{n,0})$。记 $p\mathcal{G}(h, g_{00})_* P$，其中 Q。引理4.5.1 推出

$$[Q^{\mathrm{ex}}, p\mathcal{G}(g, g_0)_* \left(\nabla^{\mathfrak{S}_g}\right)_{\partial_j}]\restriction_{M\times t} = (\partial_j Q)^{\mathrm{ex}}\restriction_{M\times t},$$

其中 $\partial_j Q$ 表示光滑块映射 $Q\colon \mathbb{R}^n \to \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{g_{00}})$ 的偏导数。由于光滑块映射的偏导数仍是光滑块映射，故结论得证。

□

从现在起，只要不会引起混淆，我们在记号上不再区分 $[P^{\mathrm{ex}}, \nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}h}}_{\partial_{t_k}}]$ 与其在 $M \times \{t\}$ 上的限制。此外，我们用 M_t 表示 $M \times \{t\}$。

定义 4.5.3。 令 $B_\bullet$ 为 $\Psi\mathrm{Dir}^\times_\bullet(M)$ 的以下立方子集：若块映射 $P \in \Psi\mathrm{Dir}^\times_n(M)$ 的底层度量块映射 h 属于 B_n，则

满足以下条件

$$\sum_{j=1}^{n} ||(\partial_k h)^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},h_t} < \min\{d^{-1}, 1/8 \cdot 2^{-(d+1)}\mathrm{low}(t)\}, \tag{4.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |||[P^{\mathrm{ex}}, \nabla_{\partial_j}^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}h}}]|||_{1,0;M_t} < 1/32\,\mathrm{low}(t)^2. \tag{4.6}$$

这里，$d = \dim M$ and $\mathrm{low}(t) = \mathrm{low}_P(t) \coloneqq \inf\{||P_t v||_{0,h_t} : ||v||_{1,\ h_t} = 1\}$。函数 low_P 是一致正的，因为 $t \mapsto P_t$ 是一个取值于可逆算子的块映射。

引理 4.5.4。 $B_\bullet$ 是 $\Psi\mathrm{Dir}_\bullet^{\times}(M)$的立方子集。

证明。给定 $U = \mathbb{R}_{<0}$ 和 $X = \Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)$，它是仿射弗雷歇空间 $\Psi\mathrm{Dir}(M)$的开子集。那么

$$f_n(P) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} ||(\partial_{t_k} h)^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},h_t} - \min\{d^{-1}, 1/8 \cdot 2^{-(d+1)}\mathrm{low}(t)\}$$

and

$$g_n(P) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} |||[P^{\mathrm{ex}}, \nabla_{\partial_k}^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}h}}]|||_{1,0;M_t} - 1/32\,\mathrm{low}(t)^2$$

是连续映射的局部稳定序列 $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\ X) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R})$。根据定义，$B_n = f_n^{-1}(U) \cap g_n^{-1}(U)$。由于两个立方子集的交集仍是立方子集，故结论由引理2.2.7得出。□

接下来，我们将通过证明对于所有 $P \in B_n$，$\mathrm{susp}|_{B_\bullet}(P)^2$ 都是可逆的，来说明 $\mathrm{susp}|_{B_\bullet}$ 的取值属于 $\widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}_\bullet^{\times}(M)$。

引理 4.5.5。 设 $P\colon \mathbb{R}^n \to \Psi\mathrm{Dir}(M)^{\times}$ 是一个光滑块映射，并令 $g \coloneqq \mathrm{susp}(h)$。对于每个 $u \in \Gamma_c(M \times \mathbb{R}^n,\ \mathfrak{S}_h)$，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{susp}(P)^2(u) = (P^2)^{\mathrm{ex}}(u) &- \sum_{j=1}^{n} \partial_j \cdot [P^{\mathrm{ex}}, \nabla_{\partial_j}^{\mathfrak{S}_g}](u) \\ &- \sum_{j=1}^{n} \left(\nabla_{\partial_j}^{\mathfrak{S}_g}\right)^2 (u) + \sum_{1 \le j < k \le n} \mathfrak{R}^{\mathfrak{S}_g}(\partial_j, \partial_k)(u).\end{aligned}$$

证明。我们将 $\nabla_{\partial_j}^{\mathfrak{S}_g}$ 简记为 ∇_j，将 $\sum_{j=1}^n \partial_j \cdot \nabla_j$ 简记为 $\not{\mathfrak{D}}$。显然，

$$\mathrm{susp}(P)^2 = (P^{\mathrm{ex}})^2 + P^{\mathrm{ex}}\not{\mathfrak{D}} + \not{\mathfrak{D}} P^{\mathrm{ex}} + \not{\mathfrak{D}}^2$$

以及 $(P^2)^{\mathrm{ex}} = (P^{\mathrm{ex}})^2$。回想一下，$P_{\mathrm{ex}}$是一个奇算子。由此得到

$$\begin{aligned}P^{\mathrm{ex}}\not{\mathfrak{D}} u &= \sum_{j=1}^{n} P^{\mathrm{ex}}(\partial_j \cdot \nabla_j u) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)\partial_j \cdot P^{\mathrm{ex}}(\nabla_j u)\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} P^{\mathrm{ex}}\not{\mathfrak{D}}u+\not{\mathfrak{D}}P^{\mathrm{ex}}u &= \sum_{j=1}^{n}\partial_j\cdot(-P^{\mathrm{ex}}\nabla_j u+\nabla_j P^{\mathrm{ex}}u)\\ &= -\sum_{j=1}^{n}\partial_j\cdot[P^{\mathrm{ex}},\nabla_j]u. \end{aligned}$$

最后一个加项由下式给出

$$\begin{aligned} \not{\mathfrak{D}}^2 &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\partial_j\cdot\nabla_j(\partial_k\cdot\nabla_k u)\\ &= \sum_{j,k}\partial_j\partial_k\cdot\nabla_j\nabla_k u+\partial_j\cdot\underbrace{\nabla_j\partial_k}_{=0}\cdot\nabla u\\ &= \sum_{j=1}^{n}\partial_j^2\cdot\nabla_j\nabla_j u+\sum_{j<k}\partial_j\partial_k\cdot(\nabla_j\nabla_k-\nabla_k\nabla_j)\,u\\ &= \sum_{j=1}^{n}-\nabla_j^2 u+\sum_{j<k}\partial_j\partial_k\cdot R^{\nabla^{\mathfrak{S}_g}}(\partial_j,\partial_k)u\\ &= \sum_{j=1}^{n}-\nabla_j^2 u+\sum_{j<k}\mathfrak{R}(\partial_j,\partial_k)u. \end{aligned}$$

综合以上各项，即得所述结论。 □

定理 4.5.6。 对每个 $P\in B_n$，算子 悬挂(P) 都是可逆的。因此，图表

$$\begin{array}{ccc} B_\bullet & \hookrightarrow & \Psi\mathrm{Dir}_\bullet^{\times}(M)\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{susp}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{susp}}\\ \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^{\times}(M) & \hookrightarrow & \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet(M) \end{array}$$

可交换。

证明的思路其实相当简单。由引理 4.5.5， 悬挂$(P)^2$ 有一个严格正的加项、一个非负加项，以及两个需要加以控制的加项。我们将证明，对 $B_\bullet$ 施加的条件保证了剩余两项的算子范数很小，因此 悬挂$(P)^2$ 仍然严格为正。

为了证明这一点，我们需要推导出若干分析结果，以便控制 susp$(P)^2$ 中不一定非负的加项。

引理 4.5.7。 设 $U\subseteq\mathbb{R}^n$ 为开集。对于光滑映射 $g\colon U\to$ 黎曼度量（M），设 R 为 悬挂（g）的黎曼曲率张量。若 $\partial_i=\partial_{t_i}$ 是 $\mathbb{R}^n$的标准基，则

$$R(\partial_i,\partial_j)=\frac{1}{4}[(\partial_j g)^{\mathrm{op}},(\partial_i g)^{\mathrm{op}}].$$

证明。 我们在局部坐标中证明此公式。取 $M \times \mathbb{R}^n$ 的一个局部全纯标架，使其延拓 ∂_1，……， ∂_n。这个“空间”标架以 $1-d \leq j \leq 0$为指标。根据爱因斯坦求和约定，悬挂(g)在这些坐标下的列维-奇维塔联络的克里斯托费尔符号为

$$\begin{aligned} 2\Gamma^k_{t_i j} &= \operatorname{susp}(g)^{k\alpha}(\operatorname{susp}(g)_{t_i\alpha,j} + \operatorname{susp}(g)_{\alpha j,t_i} - \operatorname{susp}(g)_{t_i j,\alpha}) \\ &= \operatorname{susp}(g)^{k\alpha}\operatorname{susp}(g)_{\alpha j,t_i} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } \max\{j,k\} > 0, \\ \sum_{\alpha<0} g^{k\alpha} g_{j\alpha,t_i} & \text{if } \max\{j,k\} \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

因此，我们可以将端omorphism $2\Gamma_{t_i}$ 与 $g^{-1}\partial_{t_i} g = (\partial_{t_i} g)^{\mathrm{op}}$等同。分别用 i 和 j 简记t_i 和 t_j 后，可以得到 susp(g)的黎曼曲率如下：

$$\begin{aligned} R(\partial_i, \partial_j) &= (\partial_i + \Gamma_i)(\partial_j + \Gamma_j) - (\partial_j + \Gamma_j)(\partial_i + \Gamma_i) \\ &= \partial_i\Gamma_j - \partial_j\Gamma_i + \Gamma_i\Gamma_j - \Gamma_j\Gamma_i \\ &= -1/2 g^{-1}(\partial_i g)g^{-1}(\partial_j g) + 1/2 g^{-1}(\partial_j g)g^{-1}\partial_i g \\ &\quad + 1/4 g^{-1}(\partial_i g)g^{-1}(\partial_j g) - 1/4 g^{-1}(\partial_j g)g^{-1}(\partial_i g) \\ &= 1/4[g^{-1}\partial_j g, g^{-1}\partial_i g] = 1/4[(\partial_j g)^{\mathrm{op}}, (\partial_i g)^{\mathrm{op}}]. \end{aligned}$$

引理得证。 □

推论 4.5.8. 向量丛端*omorphism* $\mathfrak{R}_t(\partial_j, \partial_k) \in \mathrm{End}(\mathfrak{S}|_{M_t})$的算子范数有界于

$$2||\mathfrak{R}_t(\partial_j, \partial_k)||_{\mathrm{op},t} \leq d^2 ||(\partial_j g)^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},t} ||(\partial_k g)^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},t}$$

对每个 $t \in U$，其中 $d =$维数 M。这意味着

$$\sum_{1\leq j<k\leq n} ||\mathfrak{R}_t(\partial_j, \partial_k)||_{\mathrm{op},t} \leq \frac{d^2}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} ||(\partial_j g)^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},t}\right)^2 .$$

这里， $|\boxplus|_{\mathrm{op},t}$ 表示左侧 $\mathfrak{S}_{g(t)}$ 上的算子范数，以及右侧相对于 $g(t)$ 的 TM_t 上的算子范数。

证明。 取一个局部正交标架 $e_{1-d}, \ldots, e_0$在 TM上，使其补全 $\partial_1, \ldots, \partial_n$为 $TM \oplus \mathbb{R}^n$ 上的一个局部正交标架。然后，根据 [LM89，定理 II.4。15], 旋量联络的曲率算子由下式给出

$$\mathfrak{R}(\partial_i, \partial_j) = \frac{1}{2}\sum_{k<l\leq 0} \langle R_{\partial_i,\partial_j}(e_k), e_l\rangle e_k e_l \cdot .$$

由此得到

$$\begin{aligned}
2||\mathfrak{R}(\partial_i,\partial_j)||_{\mathrm{op},t} &= \left|\left|\sum_{k<l\leq 0}\langle R_{\partial_i\partial_j}(e_k),e_l\rangle e_k e_l\right|\right|_{\mathrm{op},t}\\
&\leq \sum_{k<l\leq 0}|\langle R_{\partial_i\partial_j}(e_k),e_l\rangle|\underbrace{||e_k e_l\cdot||_{\mathrm{op},t}}_{=1}\\
&\leq \sum_{k<l\leq 0}||R_{\partial_i\partial_j}||_{\mathrm{op},TM_t}\\
&= \sum_{k<l\leq 0}1/4\cdot|||[(\partial_j g)^{\mathrm{op}},(\partial_i g)^{\mathrm{op}}]||_{\mathrm{op},t}\\
&\leq 2d^2||(\partial_i g)^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},t}||(\partial_j g)^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},t}.
\end{aligned}$$

□

由于 $\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}\,h}|_{M_t}\cong\mathfrak{S}_{h(t)}\otimes Cl_{n,\ 0}$我们在这个限制上有两个典范联络，分别是 $\nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}h}|_{M_t}}$和 $\nabla^{\mathfrak{S}_{h(t)}\otimes_{\mathrm{id}}}$。我们用 ∇^{susp}表示第一个联络，用 $\nabla\otimes\mathrm{id}$ 表示第二个联络。当然，由于 M是紧的，这两个联络在 $\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}h}|_{M_t}$上诱导出等价的索伯列夫范数 $|||_{1,\ \nabla\otimes\mathrm{id}}$ 和 $|||_{1,\ \nabla^{\mathrm{susp}}}$。下面的引理有助于确定具体常数。

引理 4.5.9. 丛自同态值 *1*-形式

$$\mathcal{E}\coloneqq\nabla\otimes\mathrm{id}-\nabla^{\mathrm{susp}}\colon TM\to\mathrm{End}\left(\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}\,h}|_{M_t}\right)$$

诱导出一个有界算子 $L^2(M_t;\ TM_t)\to L^2(M_t;\ \mathrm{End}(\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}\,h}|_{M_t})$，其满足以下算子范数估计：

$$||\nabla\otimes\mathrm{id}-\nabla^{\mathrm{susp}}||_{0,0}\leq d/4\sum_{k=1}^{n}||\partial_{t_k}h^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},h(t)}.$$

证明。设 $e_{-(d-1)},\ldots,e_0$ 是 $h(t)$ 上相对于 M 的局部正交标架。相对于此标架，$\mathcal{E}$ 可以用 $\nabla\otimes$id 和 ∇^{susp} 的克里斯托费尔符号表示，分别记为 Γ^h 和 Γ^{susp}。令 Γ_{ij}^k 表示 $M\times\mathbb{R}^n$ 上 $\mathrm{susp}(h)$ 的克里斯托费尔符号，并将 ∂_{t_k} 对于 $1\leq k\leq n$ 记为 e_k。对于所有 $1-d\leq i\leq 0$，由 [LM89、定理 II.4.14] 以及引理 4.5.1 的证明，可得以下表达式

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(e_i)=\Gamma_i^h-\Gamma_i^{\mathrm{susp}}&=\frac{1}{2}\left(\sum_{j<k\leq 0}\Gamma_{ij}^k e_j e_k-\sum_{-(d-1)\leq j<k\leq n}\Gamma_{ij}^k e_j e_k\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{j<k,\,k>0}-\Gamma_{ij}^k e_j e_k\\
&=\frac{1}{4}\sum_{j\leq 0<k}\partial_{t_k}h_{ij}e_j\partial_{t_k}=\frac{1}{4}\sum_{k>0}(\partial_{t_k}h)^{\mathrm{op}}(e_i)\partial_{t_k}.
\end{aligned}$$

利用这一恒等式，我们可以如下估计 $\mathcal{E}$ 的算子范数：

$$\begin{aligned}
4||\mathcal{E}||_{0,0} &\leq \sum_{i=1-d}^{0} 4||\mathcal{E}(e_i)||_{\mathrm{End}(\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(h)})} \\
&\leq \sum_{i=1-d}^{0}\sum_{k=1}^{n} ||\partial_{t_k} h^{\mathrm{op}}(e_i)\partial_{t_k} \cdot ||_{\mathrm{End}(\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(h)})} \\
&= \sum_{i=1-d}^{0}\sum_{k=1}^{n} ||\partial_{t_k} h^{\mathrm{op}}(e_i)||_{TM} \\
&\leq d\sum_{k=1}^{n} ||\partial_{t_k} h^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},h(t)}.
\end{aligned}$$

这里，$|\!|\!-|\!|_{\mathrm{End}(\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(h)})}$ 表示由 $\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(h)}$ 的纤维上的内积所定义的通常的 C^* 代数算子范数，而 $||-||_{TM_t}$ 表示由 $h(t)$ 在 TM 上诱导的范数。注意，在第三行中，我们利用了端同态由 Clifford 乘法给出这一点，因此可以使用 C^*-恒等式和克利福德恒等式。 □

推论 4.5.10。 若 $|\!|\!-|\!|_{1,\ \nabla^{\mathrm{susp}}}$ 和 $|\!|\!-|\!|_{1,\ \nabla\otimes\mathrm{id}}$ 分别表示 $\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}h}|_{M_t}$ 上相对于 ∇^{susp} 和 $\nabla\otimes$ 恒等映射的索伯列夫范数，则它们在以下常数意义下等价：

$$\begin{aligned}
||-||_{1,\nabla^{\mathrm{susp}}} &\leq \left(1 + d\sum_{k=1}^{n} ||\partial_{t_k} h||_{\mathrm{op}}\right) ||-||_{1,\nabla\otimes\mathrm{id}} \\
&\leq \left(1 + d\sum_{k=1}^{n} ||\partial_{t_k} h||_{\mathrm{op}}\right)^2 ||-||_{1,\nabla^{\mathrm{susp}}}.
\end{aligned}$$

证明。 利用广义三角不等式和引理 4.5.9，我们估计

$$\begin{aligned}
||-||_{1,\nabla^{\mathrm{susp}}} &\coloneqq \left(||-||_0^2 + ||\nabla^{\mathrm{susp}}(-)^2||_0\right)^{1/2} \\
&= \left(||-||_0^2 + ||\nabla\otimes\mathrm{id}(-) + (\nabla^{\mathrm{susp}} - \nabla\otimes\mathrm{id})(-)^2||_0\right)^{1/2} \\
&\leq \left(||-||_0^2 + ||\nabla\otimes\mathrm{id}(-)^2||_0\right)^{1/2} + ||(\nabla^{\mathrm{susp}} - \nabla\otimes\mathrm{id})(-)||_0 \\
&\leq ||-||_{1,\nabla\otimes\mathrm{id}} + ||\nabla^{\mathrm{susp}} - \nabla\otimes\mathrm{id}||_{0,0}\cdot||-||_0 \\
&\leq \left(1 + d\sum_{k=1}^{n} ||\partial_{t_k} h||_{\mathrm{op}}\right) ||-||_{1,\nabla\otimes\mathrm{id}}.
\end{aligned}$$

第二个估计的证明类似。 □

定理*4.5.6*的证明。 设 $P \in B_n$ 其底层块映射为 $h \in \mathcal{R}_n^+(M)$。令 $g = \text{悬挂}(h)$。我们将证明悬挂$(P)^2$ 可逆，从而证明该定理。回忆引理4.5.5指出

$$\begin{aligned}
\mathrm{susp}(P)^2 &= (P^{\mathrm{ex}})^2 + \{P^{\mathrm{ex}}, \not{\mathfrak{D}}\} + \not{\mathfrak{D}}^2 \\
&= (P^2)^{\mathrm{ex}} - \sum_{j=1}^{n} \partial_j \cdot [P^{\mathrm{ex}}, \nabla_j^{\mathfrak{S}_g}] - \Delta + \sum_{1\leq j<k} \mathfrak{R}(\partial_j, \partial_k).
\end{aligned}$$

注意

$$-\Delta = \sum_{j=1}^{n} (\nabla_{\partial_j}^{\mathfrak{S}_g})^2$$

是一个非负算子。其证明与 [LM89，命题 II.5 中给出的狄拉克算子的证明类似。3]。由于 P 可逆， P^2 因此严格正。对于每个紧支撑光滑截面，我们有如下估计

$$\begin{aligned}\langle (P^{\mathrm{ex}})^2 u, u\rangle = ||P^{\mathrm{ex}}(u)||_0^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} ||P_t u||^2_{0,\mathfrak{S}_g|_{M_t}} \mathrm{d}t \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{low}(t)^2 ||u||^2_{1,\mathfrak{S}_g|_{M_t},\nabla\otimes\mathrm{id}} \mathrm{d}t \\ &> \frac{1}{4}\int \mathrm{low}(t)^2 ||u||^2_{1,\mathfrak{S}_g|_{M_t},\nabla^{\mathrm{susp}}} \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这里，在第一个估计中我们用到了 $H^1(\mathfrak{S}_g|_{M_t}, \nabla\otimes\mathrm{id})$ 与$H^1(\mathfrak{S}_{h(t)}, \nabla)\otimes Cl_{n,0}$等距同构，因此可以逐分量应用 $||P_t u||_0 \geq \mathrm{low}(t)^2 ||u||_1$ 。第二个估计由范数等价（推论 4.5.10）以及4.5条件（ $B_\bullet$）得出。

在下面的估计中，我们用 $||\vdash||_{1;t}$ 表示 $\mathfrak{S}_g|_{M_t}$ 上相对于 ∇^{susp} 的索伯列夫范数：

$$\begin{aligned}\left|\langle \sum_{j=1}^{n} [P^{\mathrm{ex}}, \not{\mathfrak{D}}] u, u\rangle\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\sum_{j=1}^{n} \langle \partial_j \cdot [P^{\mathrm{ex}}, \nabla_{\partial_j}^{\mathfrak{S}_g}] u_t, u_t\rangle\right|_{0;t} \mathrm{d}t \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} ||\sum_j \partial_j \cdot [P^{\mathrm{ex}}, \nabla_{\partial_j}^{\mathfrak{S}_g}]_t u_t||_{0;t} ||u_t||_{0;t} \mathrm{d}t \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} ||\sum_j \partial_j \cdot [P^{\mathrm{ex}}, \nabla_{\partial_j}^{\mathfrak{S}_g}]_t||_{1,0;t} ||u_t||^2_{1;t} \mathrm{d}t \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{||\partial_j \cdot ||_{0,0;t}}_{=1} |||[P^{\mathrm{ex}}, \nabla_{\partial_j}^{\mathfrak{S}_g}]|||_{1,0;t} ||u_t||^2_{1;t} \mathrm{d}t \\ &< \int_{\mathbb{R}^n} 1/32 \cdot \mathrm{low}(t)^2 ||u_t||^2_{1;t} \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

我们借助推论来估计第四个加项4.5.8 ， 方式与之前

的记号相同

$$\begin{aligned}
|\langle \sum_{1\leq j<k\leq n} \mathfrak{R}(\partial_j,\partial_k)(u),u\rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\langle \sum_{j<k} \mathfrak{R}_t(\partial_j,\partial_k)(u_t),u_t\rangle| \mathrm{d}t \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} ||\sum_{j<k} \mathfrak{R}_t(\partial_j,\partial_k)||_{0,0;t}||u_t||^2_{0;t}\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} ||\sum_{j<k} \mathfrak{R}_t(\partial_j,\partial_k)||_{\mathrm{op},t}||u_t||^2_{1;t}\mathrm{d}t \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} d^2/2 \left(\sum_{j=1}^n ||(\partial_j h)^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},t}\right)^2 ||u||^2_{1;t}\mathrm{d}t \\
&< \int_{\mathbb{R}^n} 1/64\cdot 4^{-(d+1)}\cdot d^2/2\cdot \mathrm{low}(t)^2||u_t||^2_{1;t}\mathrm{d}t \\
&< \int_{\mathbb{R}^n} 1/32\mathrm{low}(t)^2||u_t||^2_{1;t}\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

将所有内容综合起来，我们得到：

$$\begin{aligned}
&|\langle \mathrm{susp}(P)^2u,u\rangle| \\
&\geq \langle (P^{\mathrm{ex}})^2u,u\rangle - \langle \Delta u,u\rangle - |\langle \{P^{\mathrm{ex}},\mathfrak{D}\}u,u\rangle| - |\langle \sum_{1\leq j<k\leq n} \mathfrak{R}(\partial_j,\partial_k)u,u\rangle| \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^n} (1/4-2/32)\mathrm{low}(t)^2||u_t||^2_{1;t}\mathrm{d}t \\
&\geq 3/16\min\{\mathrm{low}(t)^2 \,:\, t\in\mathbb{R}^n\}||u||^2_0,
\end{aligned}$$

这等价于

$$||\mathrm{susp}(P)u||_0 \geq \sqrt{3}/4\min\{\mathrm{low}(t) \,:\, t\in\mathbb{R}^n\}||u||_0.$$

由于 susp(P) 是自伴算子，这个不等式意味着 susp(P) 可逆。

□

最后，我们希望证明 $B_\bullet$ 是一个 Kan 集，并且该包含映射是弱同伦等价。为此，我们需要了解反对易子在缩放下的行为。

引理 4.5.11. 设 $D\subseteq\mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个开子集，且 $\varphi\colon D\to D$ 和 $P\colon D\to \Psi\mathrm{Dir}(M)$ 是光滑映射。映射 P 带有一个底层光滑映射 $h\colon D\to\mathrm{Riem}(M)$。那么我们有

$$\begin{aligned}
[(P\circ\varphi)^{\mathrm{ex}},\nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(h\circ\varphi)}}_{\partial_{t_i}}] &= \sum_{k=1}^n [P^{\mathrm{ex}},\nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(h)}}_{\partial_{t_k}}]\circ\varphi\cdot\partial_{t_i}\varphi_k, \\
\partial_{t_i}(h\circ\varphi) &= \sum_{k=1}^n (\partial_{t_k}h)\circ\varphi\cdot\partial_{t_i}\varphi_k.
\end{aligned}$$

证明. 第二个等式只是微分的链式法则，因此只需证明第一个等式。设 $g_{00}\colon D\to \mathrm{Riem}(M)$ 是取值为 g_{00} 的常值映射。进一步设 $g_0=\mathrm{susp}(g_{00})$。回忆引理 4.5.2 证明中的恒等式

$$p\mathcal{G}(\mathrm{susp}(h),g_0)_*(P^{\mathrm{ex}})=(p\mathcal{G}(h,g_{00})_*P)^{\mathrm{ex}}.$$

在下文中，我们将简写 $p\mathcal{G}(\mathrm{susp}(h)\ g_0)$ 为 $p\mathcal{G}(\mathrm{susp}(h))$，并将 $p\mathcal{G}(h,g_{00})$ 简写为$p\mathcal{G}(h)$。利用引理 4.5.1，我们计算得

$$\begin{aligned}
&p\mathcal{G}(\mathrm{susp}(h\circ\varphi))_*\left([(P\circ\varphi)^{\mathrm{ex}},\nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(h\circ\varphi)}}_{\partial_{t_i}}]\right)\\
&=[(p\mathcal{G}(\mathrm{susp}(h\circ\varphi))_*(P\circ\varphi))^{\mathrm{ex}},(p\mathcal{G}(h\circ\varphi)_*\nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(h\circ\varphi)}})_{\partial_{t_i}}]\\
&=[(p\mathcal{G}(h\circ\varphi)_*(P\circ\varphi))^{\mathrm{ex}},\partial_{t_i}]=[\big((p\mathcal{G}(h)_*(P))\circ\varphi\big)^{\mathrm{ex}},\partial_{t_i}]\\
&\underset{\text{rule}}{\overset{\text{chain}}{=}}\left(\partial_{t_i}\big((p\mathcal{G}(h)_*P)\circ\varphi\big)\right)^{\mathrm{ex}}=\sum_{j=1}^{n}((\partial_{t_k}p\mathcal{G}(h)_*P)\circ\varphi)^{\mathrm{ex}}\cdot\partial_{t_i}\varphi_k.
\end{aligned}$$

类似的计算表明

$$\begin{aligned}
p\mathcal{G}(\mathrm{susp}(h\circ\varphi))_*&\left(\sum_{j=1}^{n}([P^{\mathrm{ex}},\nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}h}}_{\partial_{t_k}}])\circ\varphi\cdot\partial_{t_i}\varphi_k\right)\\
&=\sum_{j=1}^{n}((\partial_{t_k}p\mathcal{G}(h)_*P)\circ\varphi)^{\mathrm{ex}}\cdot\partial_{t_i}\varphi_k,
\end{aligned}$$

因此引理得证。 □

命题 4.5.12. 该立方集合 $B_\bullet$ 是一个 *Kan* 集。

证明的大致思路如下：给定一个立方 n-角 $\sqcap^n_{(i,\varepsilon)}$，可在无穷半圆柱$Q_K$ 的补集上定义良好的映射 P_0，其底为 K，其中 K 是一个具有光滑边界的紧凸集。根据给定角中的算子值映射的块形式，对于某个充分大的 S，算子值映射 P_0 是 $P_0|_{\{\varepsilon x_i<S\}}$ 的延长。我们需要将 $P_0|_{\{\varepsilon x_i<S\}}$ “延拓”到 Q_K，具体做法是在 $\{\varepsilon x_i\le S\}$的一个紧集上修改 $P_0|_{\{\varepsilon x_i<S\}}$。更准确地说，随着我们越来越接近 Q_K，沿εx_i方向向下推移 P_0 的自变量，以便通过 $P_{(i,-\varepsilon)}\circ p_i$将这一修改延拓到 Q_K。

证明。 给定任意一个立方形的 n角

$$\sqcap^n_{(i,\varepsilon)}=\{P_{(j,\omega)}\in B_{n-1}\ :\ \partial^{\omega}_jP_{(k,\eta)}=\partial^{\eta}_{k-1}P_{(j,\omega)};\ j<k;(j,\omega),(k,\eta)\neq(i,\varepsilon)\}.$$

由于该角仅包含有限个块映射，因此存在足够大的$\rho>0$，使得所有块映射 $P_{(j,\omega)}$ 都在 ρI^{n-1}之外分解。我们将$\sigma_jP_{(j,\omega)}$ 限制为映射 $\{\omega x_j>\rho\}\to\Psi\mathbf{Dir}^{\times}(M)$。根据相容性要求，这些限制在其定义域的交集上相一致，因此我们可以将它们粘合起来，得到映射

$$P_0\colon\ \left(\mathrm{Cub}^{\rho}_{n,i,\varepsilon}\right)^c\to\Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M),$$

其中 $\mathrm{Cub}_{n,\,i,\,\varepsilon}^{\rho} := \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_j \in [-\rho,\rho]$ 若 $j \neq i, \ \varepsilon x_i \geq -\rho\}$ 是直径为 ρ的长方体。设 $K \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ 为包含 ρI^{n-1}、关于原点中心对称且具有光滑边界的紧凸子集。设 $Q_K := \{x \in \mathbb{R}^n : \ p_i(x) \in K, \ \varepsilon x_i \geq -\rho\}$ 为底面为 K的长方体。将 P_0 限制后得到

$$P_0 \colon Q_K^c \cap \{\varepsilon x_i < \rho + R_1\} \to \Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M),$$

对于一个固定的 $R_1 > 1$ 选择。

对于所选的 K，存在唯一的范数 $||\vdash||_K$，其单位球为 K。由于 ∂K 光滑，该范数在 $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ 上光滑。对于稍后确定的足够大的 $R_2 = R_2(\rho, \ R_1)$，选取 $\chi \colon \mathbb{R} \to [0,1]$，使其在 $\mathbb{R}_{\leq 1.2}$ 上恒等于 1，在 $\mathbb{R}_{\geq R_2 - 1}$ 上为 0，并且其一阶和二阶导数满足 $|\chi'| \leq 1.3/R_2$ 和 $|\chi''| \leq 10/R_2^2$。此外，选取一个单调递增函数 $q \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使其在 $\mathbb{R}_{\leq \rho}$ 上为恒等函数，在 $\mathbb{R}_{\rho + R_1}$ 上为取值 $\rho + R_1 - 1$ 的常值映射，并且其导数满足 $q' \leq 1$ 和 $|q''| \leq 1.2/R_1$。映射 q 定义了一个映射

$$\begin{aligned} q \colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, \varepsilon q(\varepsilon x_i), x_{i+1}, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

最后，我们定义

$$\begin{aligned} H \colon (Q_K^c \cap \{\varepsilon x_i < \rho + R_1\}) \times [0,1] &\to Q_K^c \cap \{\varepsilon x_i < \rho + R_1\}, \\ (x,t) &\mapsto x - 2\varepsilon(\rho + R_1) t e_i \end{aligned}$$

并令

$$\begin{aligned} P \colon \mathbb{R}^n &\to \Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M), \\ x &\mapsto \begin{cases} P_0 \circ H\big(q(x), \chi(||p_i(x)||_K)\big), & \text{if } x \in Q_K^c, \\ P_{(i,-\varepsilon)}(p_i(x)), & \text{if } x \in Q_K. \end{cases} \end{aligned}$$

注意，P 定义良好且光滑，因为 P_0 在集合 $\{-\varepsilon x_i > \rho\}$ 上与 $P_{(i,-\varepsilon)} \circ p_i$ 一致，并且 ∂Q_K 属于映射 $H \circ (q(-), \chi(||p_i(-)||_K))$下 $\{-\varepsilon x_i > \rho\}$ 的原像。

映射 P 是一个块映射。事实上，对于所有$j \neq i$，$\chi(||p_i(x)||_K)$在 $\{\omega x_j > R_2\}$ 上 $= 0$，因此得到

$$P(x) = P_0(H(q(x), 0)) = P_0(q(x)) = P_0(x) = P_{(j,\omega)}(p_j(x))$$

因为$(-))$ 与 x_i 无关，只要 $|x_i| > \rho$成立。对于所有满足 $-\varepsilon x_i > R_2$的 x，我们有

$$\begin{aligned} P(x) &= P_0(q(x) - 2\varepsilon(\rho + R_1)\chi(||p_i(x)||_K) e_i) \\ &= P_0(x - 2\varepsilon(\rho + R_1)\chi(||p_i(x)||_K) e_i) \\ &= P_{(i,-\varepsilon)}(p_i(x)) \end{aligned}$$

因为在这种情况下，对于每个 $t \geq 0$，都有 $-\varepsilon x_i + 2\varepsilon(\rho + R_1)t > R_2$。最后，对于所有满足 $\varepsilon x_i > R_2 > \rho + R_1$ 的 x，我们有

$$P(x) = P(x_1, \ldots, x_{i-1}, \varepsilon(\rho + R_1 - 1), x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

根据 q 的定义。

证明还表明，对于所有的 $\partial_j^\omega P = P_{(j,\omega)}$ （j， ω） $\neq$ （i， ε）。这意味着， P是 $\Psi\mathbf{Dir}_n^\times$（$M$）中 $\sqcap_{(i,\varepsilon)}^n$的一个填充子。

剩下要证明的是 P 属于 B_n。显然，在 Q_K的一个开邻域内，例如在 χ^{-1}（$\mathbb{R}_{<1.2}$）上， P 满足 B_n 的定义条件。我们还将证明， P 在 χ^{-1}（$\mathbb{R}_{>1.1}$）上也满足 B_n 的定义条件。显然，我们有

$$\mathrm{low}_P(t) = \mathrm{low}_{P_0}(H(q(t), \chi(||p_i(t)||_K)).$$

实际上，这个等式对每个光滑自映射都成立 $\varphi\colon\ Q_K^c \to Q_K^c$。对于每个这样的自映射 φ以及每个光滑映射 $Q\colon\ Q_K^c \to \Psi\mathrm{Dir}^\times(M)$其底层黎曼度量映射 h_Q 满足 $h_{Q\circ\varphi} = h_Q \circ \varphi$。由引理 4.5.11，我们得到其导数的如下上界

$$\begin{aligned}
||(\partial_j h_{Q\circ\varphi})^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},h_{Q\circ\varphi}} &= ||\sum_{k=1}^n (\partial_k h_Q)^{\mathrm{op}} \circ \varphi \cdot \partial_j\varphi_k||_{\mathrm{op},h_{Q\circ\varphi}} \\
&\leq \sum |\partial_j\varphi_k| \cdot ||(\partial_k h_Q)^{\mathrm{op}} \circ \varphi||_{\mathrm{op},h\circ\varphi} \\
&= \sum_{k=1}^n |\partial_j\varphi_k| \cdot ||(\partial_k h_Q)^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},h} \circ \varphi.
\end{aligned}$$

我们希望将这个估计应用于 $Q = P_0$和 $\varphi = H \circ (q,\ \chi(||p_i(-)||_K)$。对于 $j \neq i$，φ_k 的导数为

$$\partial_j\varphi_k = \begin{cases} 0, & \text{if } k \notin \{i,j\}, \\ 1, & \text{if } k = j, \\ -2\varepsilon(\rho + R_1)\chi' \cdot (\partial_j||-||_K) \circ p_i, & \text{if } j < i, k = i, \\ -2\varepsilon(\rho + R_1)\chi' \cdot (\partial_{j-1}||-||_K) \circ p_i, & \text{if } j > i, k = i. \end{cases}$$

对于 $j = i$，它们为

$$\partial_i\varphi_k = \begin{cases} q'(\varepsilon \cdot -), & \text{if } k = i, \\ 0, & \text{if } k \neq i. \end{cases}$$

将这些结果代入前面的估计可得

$$||(\partial_j h_P)^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},h_P} \leq \begin{cases} ||(\partial_j h_{P_0})^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},P_0} \circ \varphi + |\partial_j\varphi_i| \cdot ||(\partial_{t_i} h)^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},h_{P_0}} \circ \varphi, & \text{if } j \neq i, \\ q'(\varepsilon \cdot -) \cdot ||(\partial_{t_i} h_{P_0})^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},h_{P_0}} \circ \varphi, & \text{if } j = i, \end{cases}$$

由此得到

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n ||(\partial_j h_P)^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},h_P} \leq & \sum_{j=1}^n ||\partial_j h_{P_0}^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},h_{P_0}} \circ \varphi \\
& + \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{2(\rho + R_1) \cdot 1.3}{R_2} \cdot |\partial_j||-||_K| \circ p_i \cdot ||\partial_i h_{P_0}^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},h_{P_0}} \right) \circ \varphi.
\end{aligned}$$

应用引理4.5.11于 $[P_{\mathrm{ex}}\nabla_{\partial_j}]$，通过类似的计算，我们得到估计

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}|||[P^{\mathrm{ex}},\nabla_j^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(h_P)}}]|||_{1,0,h_P}\\
\leq&\sum_{j=1}^{n}|||[P_0^{\mathrm{ex}},\nabla_j^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(h_{P_0})}}]|||_{1,0,h_{P_0}}\circ\varphi\\
&+\left(\sum_{j=1}^{n-1}\frac{2.6(\rho+R_1)}{R_2}|\partial_j||-||_K|\circ p_i\cdot|||[P_0^{\mathrm{ex}},\nabla_i^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(h_{P_0})}}]|||_{1,0,h_{P_0}}\right)\circ\varphi.
\end{aligned}$$

由于 $\partial_i h_P^{\mathrm{op}}$ 和 $[P^{\mathrm{ex}},\nabla_{\partial_i}]$ 可从 $\chi^{-1}(\mathbb{R}_{>1.1})$ 光滑延拓至 $\chi^{-1}(\mathbb{R}_{\geq 1.05})$，它们的范数一致有界，例如由 B_1界定。此外，所有 $|\partial_j|\vdash||_K|$ 也一致有界，例如由 B_2界定。因此，若我们选择 $R_2>2.6(\rho+R_1)B_1B_2\mathcal{I}^{-1}$，其中 $\mathcal{I}=\min\{\mathcal{I}_1,\mathcal{I}_2\}$ 是以下各项的最小值

$$\mathcal{I}_1:=\inf\left\{\frac{1}{32}\operatorname{low}_{P_0}(t)^2-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|||[P_0^{\mathrm{ex}},\nabla_j^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}h_{P_0}}}]|||_{1,0,h_{P_0}}:t\in Q_K^c\right\}$$

and

$$\mathcal{I}_2:=\left\{\min\{d^{-1},2^{-(d+4)}\operatorname{low}(t)\}-\sum_{k=1}^{n}||\partial_k h^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},h_{P_0}(t)}:t\in Q_K^c\right\}$$

那么 P 满足 $B_\bullet$的定义方程。注意，$\mathcal{I}>0$，因为 $P_0|_{Q_K^c}$ 是 B_n 中退化元素的限制的并集，而 B_n的定义条件是局部的。

因此，$P\in B_n$ 是给定立方 n-角的一个填充子，故 $B_\bullet$ 是一个 Kan 集。

□

Co推论 4.5.13. 包含映射 $B_\bullet\hookrightarrow\Psi\mathrm{Dir}_\bullet^\times(M)$ 是一个弱同伦等价 *e.*

证明。我们首先证明，包含映射在同伦群上诱导满射。设 $[P]\in\pi_n(\Psi\mathrm{Dir}_\bullet^\times(M),P_0)$ 由光滑块映射 $P\colon\mathbb{R}^n\to\Psi\mathrm{Dir}^\times(M)$ 表示，该映射在某个立方体 rI^n 之外恒等于 P_0。对于每个 $\rho\geq 1$，重缩放后的映射 ${}_\rho P(x):=P(\rho^{-1}x)$ 在无穷远附近仍恒等于 P_0，因此也表示 $\pi_n(\Psi\mathrm{Dir}_\bullet^\times(M))$ 中的一个元素。由引理 4.5.11，存在一个 $\rho_0\geq 1$，使得对所有 $\rho\geq\rho_0$ 都有 ${}_\rho P\in\pi_n(B_\bullet)$；这是因为定义 $B_\bullet$ 的不等式左端会随 $1/\rho$ 重缩放，而右端在缩放下保持不变。

我们需要证明 ${}_\rho P$ 和 $P={}_1P$ 相对于边界同伦。连接 ${}_\rho P$ 与 ${}_1P$ 的同伦 $H\in\Psi\mathrm{Dir}_{n+1}^\times(M)$ 定义如下：

$$H(t,x):={}_{(1-\chi(t))\rho+\chi(t)}P(x),$$

其中 $\chi\colon\mathbb{R}\to[0,1]$ 是一个在 $\mathbb{R}_{\leq -1}$ 上恒为零的光滑函数，并且

在 $\mathbb{R}_{\geq 1}$ 上恒为 1。事实上， H 满足

$$\begin{aligned}
\partial_1^{-1} H(x) &= \lim_{R\to\infty} H(-R, x) = {}_\rho P(x), \\
\partial_1^{1} H(x) &= \lim_{R\to\infty} H(R, x) = {}_1 P(x), \\
\partial_i^{\varepsilon} H(t,x) &= \lim_{R\to\infty} H(t, x_1, \dots, x_{i-1}, \varepsilon R, x_i, \dots, x_{n-1}) \\
&= \lim_{R\to\infty} P\left(((1-\chi(t))\rho + \chi(t))^{-1} \cdot (x_1, \dots, \varepsilon R, \dots, x_{n-1})\right) \\
&= P_0 = \sigma_1 \partial_{i-1}^{\varepsilon} P(t,x).
\end{aligned}$$

为证明单射性，我们采用一种常见策略：唯一性不过是存在性的一种相对形式。对于每个 $[P] \in \pi_n(B_\bullet, P_0)$，其中 $0 = [P] \in \pi_n(\Psi\mathbf{Dir}_\bullet^\times(M) P_0)$，存在一个元素 $H \in \Psi\mathbf{Dir}_{n+1}^\times(M)$，满足

$$\begin{aligned}
\partial_1^1 H &= P_0, \\
\partial_1^{-1} H &= P, \\
\partial_j^{\varepsilon} H &= \sigma_1 \partial_{j-1}^{\varepsilon} P = P_0.
\end{aligned}$$

与之前一样，存在一个充分大的 $\rho \geq 1$，使得 ${}_\rho H \in B_{n+1}$。注意， ${}_\rho H$ 是 $B_\bullet$ 中连接 ${}_\rho P$ 与 P_0 的一条同伦，因此接下来只需找到 $B_\bullet$ 中连接 P 与 ${}_\rho P$ 的一条同伦。这样一条同伦的例子是 $\mathcal{H} \coloneqq \sigma_1 P \circ {}_R\varphi$，其中

$$\begin{aligned}
{}_R\varphi \colon \mathbb{R}^{n+1} &\to \mathbb{R}^{n+1} \\
(t,x) &\mapsto \left(t, ((1-\chi(R^{-1}t)\rho + \chi(R^{-1}t))^{-1} x\right),
\end{aligned}$$

只要 R 充分大即可。将 $(1-\chi(t))\rho+\chi(t)$ 简记为 $\mu(t)$，并令 ${}_R\mu(t) = \mu(R^{-1}t)$。此外，将 (t,x) 简记为 y，使得 $t = y_1$ 且 $x_i = y_{i+1}$。将引理 4.5.11 应用于 $y_1 = t$，得到

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{H}^{\mathrm{ex}}, \nabla_{\partial_{y_1}}^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(g_{\mathcal{H}})}}\right](y) &= \left[\sigma_1 P^{\mathrm{ex}} \circ {}_R\varphi, \nabla_{\partial_{y_1}}^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(\sigma_1 g_P \circ R\varphi)}}\right](y) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} [\sigma_1 P^{\mathrm{ex}}, \nabla_{\partial_{y_k}}^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(\sigma_1 g_P)}}] \circ {}_R\varphi \cdot \partial_{y_1} {}_R\varphi_k(y) \\
&= \frac{1}{R} \sum_{k=2}^{n+1} [\sigma_1 P^{\mathrm{ex}}, \nabla_{\partial_{y_k}}^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(\sigma_1 g_P)}}] \circ {}_R\varphi \cdot {}_R\mu^{-2} \cdot ((\rho-1) \cdot {}_R(\chi')) y_k
\end{aligned}$$

其中我们用到了 $[\sigma_1 P^{\text{指数}}\ \nabla_{\partial_{y_1}}^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(\sigma_1 g_P)}}] = [\sigma_1 P^{\text{指数}} \partial_{y_1}] = (\partial_{y_1}\sigma_1 P)^{\mathrm{ex}} = 0$。应用于 $y_i = x_{i-1}$ 对于 $i > 1$，引理 4.5.11 得出

$$\begin{aligned}
\left[\mathcal{H}^{\mathrm{ex}}, \nabla_{\partial_{y_i}}^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(g_{\mathcal{H}})}}\right](y) = \dots &= \sum_{k=2}^{n+1} [\sigma_1 P^{\mathrm{ex}}, \nabla_{\partial_{y_k}}^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(\sigma_1 g_P)}}] \circ {}_R\varphi \cdot {}_R\mu^{-1} \delta_{ik} \\
&= {}_R\mu^{-1} \cdot [\sigma_1 P^{\mathrm{ex}}, \nabla_{\partial_{y_i}}^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(\sigma_1 g_P)}}] \circ {}_R\varphi \\
&= {}_R\mu^{-1} \cdot \sigma_1 \left([P^{\mathrm{ex}}, \nabla_{\partial_{x_{i-1}}}^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(g_P)}}]\right) \circ {}_R\varphi.
\end{aligned}$$

我们假设 $P = P_0$位于 rI^n之外，因此 $[\sigma_1 P_{\text{指数}} \nabla_{\partial_{y_k}}] \circ {}_R\varphi$的支集包含在$\mathbb{R} \times \rho r I^n$ 中，对于 $k > 1$ 成立，因而它是一致有界的。因此，我们可以选取足够大的 R，使得 $[\mathcal{H}^{\text{ex}}, \nabla_{\partial_t}]$ 任意小。由于 $\text{low}_{\mathcal{H}} = \text{low}_{\sigma_1 P \circ {}_R\varphi} = \text{low}_P \circ p_1 \circ {}_R\varphi = \sigma_1(\text{low}_P) \circ {}_R\varphi$，且由于 ${}_R\mu^{-1} \leq 1$，我们有

$$\sum_{k=2}^{n+1} \left|\left| \left[\mathcal{H}^{\text{ex}}, \nabla_{\partial_{y_k}}^{\mathfrak{S}_{\text{susp}(g_{\mathcal{H}})}}\right](y) \right|\right|_{1,0,M_y} < 1/32 \text{low}_{\mathcal{H}}(y)^2,$$

因此我们可以选择 $R > 1$ 足够大，使得 $\mathcal{H}$ 满足第二个定义不等式（4.6），即 $B_\bullet$。

同样的策略表明，度量的底层映射 $g_{\mathcal{H}}$ 在必要时增大 R 后，满足第一个定义不等式（4.5）。 □

4.6 算子协调集的 Kan 性质

本节的主定理是定理 3.3.1 关于可逆块狄拉克算子的类似结果。

定理 4.6.1。 算子协调集 $\widetilde{\Psi\text{Dir}}_\bullet^\times(M)$ 对于所有至少容许一个可逆伪狄拉克算子的闭自旋流形 M，都是一个 *Kan* 集。

该定理的证明依赖于引理的一个算子理论类比3.3.2。

引理 *4.6.2*（算子修改引理）。设 P 是 $M \times \mathbb{R}^n$ 上一个底层块度量为 g 的块狄拉克算子。假设 P 的核包含于 $M \times \rho/2 \cdot I^n$ 中，其中 $\rho > 20$（特别地，g 在补集上分解）。进一步假设，当 $(j, \omega) \neq (1, 1)$ 时，$\partial_j^\omega P$ 可逆。设 H 和 Φ 如定理 *3.2.2* 中所述，并记 ${}_R\Phi := R\Phi \circ (id \times R^{-1})$。那么

(o) 对所有 $1 \leq a < b \leq 2$ 和所有 $R \geq 1$，算子 P 限制为 $M \times R\Phi(H \times (a, b))$。

对于所有 $R \geq 1$，在 $M \times R\Phi(H \times [1, 2])$ 上存在一个黎曼度量 G_R、$M \times \mathbb{R}^n$ 的一个紧子集 $K = K(R)$、$M \times \mathbb{R}^n$ 的一个相对紧开子集 $L = L(R) \supseteq K$，以及定义在 $\Gamma_c(R\Phi(H \times (1, 2)) \ \mathfrak{S}_{G_R})$ 上的一个伪狄拉克算子 $Q := Q(R)$，满足：

(i) 算子 ${}_R\Phi^* Q$ 在所有满足以下条件的 $R \leq a < b \leq 2R$ 上限制为 $M \times H \times (a, b)$：${}_R\Phi^* Q$ 限制为 ${}_R\Phi^{-1}(L)$，且限制为 ${}_R\Phi^{-1}(K)$ 的补集。

(ii) ${}_R\Phi^* Q$ 和 ${}_R\Phi^* P$ 在 $M \times H \times (1.8R, 2R)$ 上的限制与在 K 补集上的限制一致。*(iii)* 度量 ${}_R\Phi^* G_R$ 在 $M \times H \times [R, 1.2R]$ 上是乘积度量。在分解 $\mathfrak{S}_{{}_R\Phi^* G_R}|_{M \times H \times [R, 1.2R]} \cong \mathfrak{S}_{{}_R\Phi^* G_R} \restriction_{M \times H \times 1.1R} \boxtimes Cl_{1,0}$，下，算子${}_R\Phi^* Q$分解为

$${}_R\Phi^* Q = {}_R\Phi^* Q \restriction_{M \times H \times 1.1R} \boxtimes \text{id} + \text{e/o} \boxtimes \not{D}_{\mathbb{R}}.$$

(iv) 存在一个 $R_0 \geq 1$ 和一个常数 $c > 0$，使得对于所有 $R \geq R_0$，Q 都有下界 $\geq c$。

(v) 若 $P - \not{D}_{g_P}$ 有界，则算子 $Q - \not{D}_{G_R}$ 有界。

证明。我们先证明 (*o*)。P的块形式意味着它限制为$V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha})$，见引理 4.2.6，并且 $P|_{V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha})}$可通过坐标置换识别为 $P(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \mathrm{D}_{\mathbb{R}^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}}$。同一坐标置换给出一个微分同胚，将 $R\Phi(H \times (1,2)) \cap V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha})$ 映至 $(-R\rho, R\rho)^{|\mathrm{Null}\,\boldsymbol{\alpha}|} \times R\Phi^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}(H^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} \times (1,2))$。第一个因子包含 $P(\hat{\boldsymbol{\alpha}})$ 的核。在第二个因子上，P作为微分算子 $/\mathrm{D}_{\mathbb{R}^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}}$ 起作用。因此，对于所有 $1 \leq a < b \leq 2$，P限制为 $M \times V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha}) \cap R\Phi(H \times (a,b))$。

由于 $\{V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha}) : \boldsymbol{\alpha} \neq 0, (1, 0 \ldots\ldots, 0)\}$ 覆盖了 $R\Phi(H \times (1, 2))$，算子 P在 $M \times R\Phi(H \times (a, b))$ 上的限制是一个对称算子。

同样的策略表明，P 在 $V_{R\rho}(0)$ 的补集上的限制也是一个对称算子。这证明了 (*o*)。

对于所有 $R \geq 1$，令 G_R 为度量修改引理 3.3.2给出的度量。在 $\Gamma_c(M \times R\Phi(H \times (1, 2)) \, \mathfrak{S}_{G_R})$ 上定义算子 Q 如下：

$$Q \coloneqq Q(R) \coloneqq \mathcal{G}(g_P, G_R)_*(P - \not{D}_{g_P}) + \not{D}_{G_R}.$$

由于 Q 是由 P 经向前推送（使用向量丛映射）并向 P 添加一个微分算子得到的，我们得出 $Q \in \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{G_R})$。对于所有 $1 \leq a < b \leq 2$，算子 Q 在 $M \times R\Phi(H \times (a, b))$ 上的限制，以及在 $L(R) \coloneqq V_{R(\rho+5)}(0)$ 与 $M \times R\Phi(H \times (a, b))$ 的交集上的限制，还有在 $M \times R\Phi(H \times (a, b))$ 中 $K(R) \coloneqq V_{R(\rho+4)}(0)$ 的补集上的限制，均成立；这证明了 (*i*)。

规范映射 $\mathcal{G}(g_P, G_R)$ 是平方可积旋量空间之间的等距映射，因此 Q 是对称的。我们将在下文计算得出，Q 和 $\not{D}_{G_R}$ 的主符号一致，因此 Q 是对称伪 Dirac 算子。

为证明 (*ii*)，回想一下，g_P 和 G_R 在 $M \times R\Phi(H \times (1.8, 2))$ 上一致，因此 $\mathcal{G}(g_P, G_R) = \mathrm{id}$，并且 $\not{D}_{g_P} = \not{D}_{G_R}$ 在这个子集上。因此，$P = Q$ 在这个子集上。在 $K(R) = V_{R(\rho+4)}(0)$ 的补集上也同样成立。

接下来我们证明 (*iii*)。考虑 ${}_R\Phi^* Q$ 在 ${}_R\Phi^{-1}(V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha}))$ 上的限制。回想度量修改引理 3.3.2指出，在这些子集上，度量可分解为

$${}_R\Phi^* g_P = R^* \partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g \oplus ({}_R\Phi^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})^* \langle \cdot, \cdot \rangle \quad \text{and} \quad {}_R\Phi^* G_R = R^* \partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g \oplus k_R^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}.$$

因此，规范映射 $\mathcal{G}({}_R\Phi^* g_P, {}_R\Phi^* G_R)$ 分解为恒等映射 $\boxtimes \mathcal{G}(({}_R\Phi^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})^* \langle \cdot, \cdot \rangle, k^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_R)$。由于规范映射对线性映射具有自然性，我们得到

$$\begin{aligned}
{}_R\Phi^* Q &= \mathcal{G}({}_R\Phi^* g_P, {}_R\Phi^* \langle \cdot, \cdot \rangle)_*({}_R\Phi^* P - \not{D}_{{}_R\Phi^* g_P}) + \not{D}_{{}_R\Phi^* G_R} \\
&= \mathrm{id} \boxtimes \mathcal{G}(({}_R\Phi^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})^* \langle \cdot, \cdot \rangle, k_R^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})_* \big(P(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \not{D}_{({}_R\Phi^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})^* \langle \cdot, \cdot \rangle} \\
&\qquad\qquad - \not{D}_{R^* \partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g} \boxtimes \mathrm{id} - \mathrm{e/o} \boxtimes \not{D}_{({}_R\Phi^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})^* \langle \cdot, \cdot \rangle} \big) \\
&\quad + \not{D}_{R^* \partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g} \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \not{D}_{k_R^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}} \\
&= P(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \not{D}_{k_R^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}}.
\end{aligned}$$

由于 $k^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_{R} = k^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_{R}|_{H\times 1.1R} \oplus \mathrm{d}t^2$ 在 $H^{\boldsymbol{\alpha}} \times (R,\ 1.2R)$ 上成立，狄拉克算子 $\not{\mathfrak{D}}_{k^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_{R}}$ 在此集合上也相应地分解，因此 Q 也如此。这些分解在不同 $V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha})$ 的交集上相容，所以我们得到一个全局分解

$$ {}_R\Phi^* Q = {}_R\Phi^* Q|_{M\times H\times 1.1R} \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \not{D}_{\mathbb{R}}, $$

由此证明了（iii）。

我们可以从（局部）分解中读出 ${}_R\Phi^* Q$ 的主符号。在 ${}_R\Phi^{-1}(V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha}))$ 上，我们有

$$ \begin{aligned} \mathrm{symb}_1({}_R\Phi^* Q) &= i\mathbf{c}_{\partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g_\sharp}(\partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g_\sharp(-)) \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes i\mathbf{c}_{k^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_{R}}(k^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}_{R\sharp}(-)) \\ &= \mathrm{symb}_1(\not{\mathfrak{D}}_{{}_R\Phi^* G_R}), \end{aligned} $$

因此 Q 也具有与 $\not{\mathfrak{D}}_{G_R}$相同的主符号。

我们继续证明（iv）。由于规范映射 $\mathcal{G}(g_P, G_R)$ 在 $H^0(\mathfrak{S}_{g_P})$ 与 $H^0(\mathfrak{S}_{G_R})$ 之间诱导了一个等距映射，因此算子 $\mathcal{G}(g_P, G_R)_*(P)$ 有下界，且其下界与 P 相同。在 $\mathrm{Hom}(H^1(\mathfrak{S}_{G_R})\ H^0(\mathfrak{S}_{G_R}))$ 中，有下界是椭圆算子的一个开条件，参见引理 4.3.13，因此只需证明 Q 与 $\mathcal{G}(g_P, G_R)_* P$足够接近。

这两个算子的差是一个微分算子，其支集包含在 $M \times R\Phi(H \times [1, 1.8])$ 内。

前面的计算表明

$$ (R\Phi)^*(Q - \mathcal{G}(g_P, G_R)_*(P)) = \left(\mathrm{e/o} \boxtimes \not{\mathfrak{D}}_{R^2 k^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}} - \mathcal{G}((R\Phi^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})^*\langle\cdot,\cdot\rangle, R^2 k^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})_* \not{\mathfrak{D}}_{(R\Phi^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}})^*\langle\cdot,\cdot\rangle}\right) $$

在 $R\Phi^{-1}(V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha}))$ 上，我们将其简写为 $\mathrm{e/o} \boxtimes T$。回顾一下，$R\Phi^{-1}(V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha})) = M \times (-\rho, \rho)^{\mathrm{Null}(\boldsymbol{\alpha})} \times H^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} \times (1,\ 2)$ 对于 $\boldsymbol{\alpha} \neq 0$，$(1,\ 0 \ldots,\ 0)$。因此，对每个 $\sigma \in \Gamma_c(R\Phi^{-1}(V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha}))\, \mathfrak{S}_{\partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g} \boxtimes \mathfrak{S}_{R^2 k^{\boldsymbol{\alpha}}})$，利用富比尼定理可得

$$ \begin{aligned} &||\mathrm{e/o} \boxtimes T(\sigma)||_0^2 = \langle \mathrm{id} \boxtimes T^2(\sigma), \sigma\rangle \\ &= \int_{M\times(-R\rho,R\rho)^{|\mathrm{Null}(\boldsymbol{\alpha})|}} \int_{H^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}\times(1,2)} ||\mathrm{id} \boxtimes T^2\sigma(t,x)||^2_{\mathfrak{S}_{\partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g}\boxtimes\mathfrak{S}_{R^2 k^{\boldsymbol{\alpha}}}} \mathrm{dvol}_{R^2 k^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}}(x) \mathrm{dvol}_{\partial^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}} g}(t) \\ &\leq \int\int ||T||^2_{1,0} \left(||\sigma(t,x)||^2 + ||\nabla^{\mathfrak{S}_{R^2 k^{\hat{\boldsymbol{\alpha}}}}} \sigma(t,x)||^2\right) \mathrm{dvol}(x) \mathrm{dvol}(t) \\ &\leq ||T||^2_{1,0} ||\sigma||^2_1, \end{aligned} $$

其中，第一个不等式是将算子范数不等式应用于截面$\sigma(t,\ –)$ 得到的。这给出 $||\mathrm{e/o} \boxtimes T||_{1,0} \leq ||T||_{1,0}$。

由 [Hij86，命题 4.3.1 和 4.2。1] 可得

$$ \mathcal{G}(R^2 g, g)_* \not{\mathfrak{D}}_{R^2 g} = R^{-1} \not{\mathfrak{D}}_g \quad \text{and} \quad \mathcal{G}(R^2 g, g)_* \nabla^{\mathfrak{S}_{R^2 g}} = \nabla^{\mathfrak{S}_g} $$

对于所有黎曼度量 g 以及所有取值 $R > 0$。后一个方程表明，规范映射在所有索伯列夫空间之间诱导出一个等距映射。此外，

我们有 $\mathcal{G}\big(R^2k^{\hat{\alpha}},k^{\hat{\alpha}}\big)\circ\mathcal{G}\big((R\Phi^{\hat{\alpha}})^*\langle\cdot,\cdot\rangle,R^2k^{\hat{\alpha}}\big)=\mathcal{G}\big((R\Phi^{\hat{\alpha}})^*\langle\cdot,\cdot\rangle,k^{\hat{\alpha}}\big)$。综合这些事实可得

$$\begin{aligned}||T||_{1,0}&=||\mathfrak{D}_{R^2k^{\hat{\alpha}}}-\mathcal{G}((R\Phi^{\hat{\alpha}})^*\langle\cdot,\cdot\rangle,R^2k^{\hat{\alpha}})_*\mathfrak{D}_{(R\Phi^{\hat{\alpha}})^*\langle\cdot,\cdot\rangle}||_{1,0}\\&=||\mathcal{G}(R^2k^{\hat{\alpha}},k^{\hat{\alpha}})_*\left(\mathfrak{D}_{R^2k^{\hat{\alpha}}}-\mathcal{G}((R\Phi^{\hat{\alpha}})^*\langle\cdot,\cdot\rangle,R^2k^{\hat{\alpha}})_*\mathfrak{D}_{(R\Phi^{\hat{\alpha}})^*\langle\cdot,\cdot\rangle}\right)||_{1,0}\\&=||R^{-1}\mathfrak{D}_{k^{\hat{\alpha}}}-\mathcal{G}((R\Phi^{\hat{\alpha}})^*\langle\cdot,\cdot\rangle,k^{\hat{\alpha}})_*(\mathfrak{D}_{(R\Phi^{\hat{\alpha}})^*\langle\cdot,\cdot\rangle})||_{1,0}\\&=||\mathfrak{D}_{k^{\hat{\alpha}}}-\mathcal{G}(\Phi^{\hat{\alpha}*}\langle\cdot,\cdot\rangle,k^{\hat{\alpha}})_*(\mathfrak{D}_{\Phi^{\hat{\alpha}*}\langle\cdot,\cdot\rangle})||_{1,0}/R\xrightarrow{R\to\infty}0.\end{aligned}$$

因此，当 R 足够大时，Q 和 $\mathcal{G}(g_P,G_R)_*(P)$ 可以任意接近。结合引理 4.3.13，我们发现存在一个 $R_0\geq 1$，使得对所有 $R\geq R_0$，算子 Q 都有下界 $c>0$，而该下界仅取决于 P 的下界，以及所选的 Q 到 $\mathcal{G}(g_P,G_R)_*(P)$ 之间距离的某个上界。事实上，引理 4.3.13 的证明表明，通过增大 R_0，可以使常数 c 任意接近 P 的下界。

剩下要证明 (v)。在 $V_{R\rho}(\boldsymbol{\alpha})\cap M\times R\Phi(H\times(1,2))$ 上，我们有

$$_R\Phi^*(Q-\mathfrak{D}_{G_R})=(P(\hat{\boldsymbol{\alpha}})-\mathfrak{D}_{\partial^{\hat{\alpha}}g})\boxtimes\mathrm{id},$$

根据假设，它有界。因此，通过单位分解论证，$_R\Phi^*(Q-\mathfrak{D}_{G_R})$ 有界。

□

定理*4.6.1*的证明。根据假设，M 至少有一个可逆伪狄拉克算子，使得 $\widetilde{\Psi}$ 狄拉克算子$_0^{\times}(M)$（因此 $\widetilde{\Psi}$ 狄拉克算子$_\bullet^{\times}(M)$）非空。给定的立方n-角 $\sqcap^n_{(i,\varepsilon)}\to\widetilde{\Psi}$ 狄拉克算子$_\bullet^{\times}(M)$ 由以下可逆分块狄拉克算子集合表示

$$\{P_{(j,\omega)}\in\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{n-1}(M):\partial_j^{\omega}P_{(k,\eta)}=\partial_{k-1}^{\eta}P_{(j,\omega)}\text{ for }j<k;(j,\omega),(k,\eta)\neq(i,\varepsilon)\}.$$

问题关于 (i,ε) 对称，因此我们假设 $(i,\varepsilon)=(1,1)$。

我们选取一个充分大的 $\rho>20$，使得所有 $P_{(j,\omega)}$ 的核都包含在 $M\times\rho/2I^{n-1}$ 中。如果交集非空，则算子 $\sigma_jP_{(j,\omega)}|_{\{\omega x_j>\rho\}}$ 限制到各个 $\{\eta x_k>\rho\}$ 上，且这些限制在交集上相同，见引理 4.4.12。因此，这些算子的并集在半无限长方体 $\mathbb{R}^n\setminus\mathsf{Cub}^{\rho}_{n,1,1}=\bigcup_{(j,\omega)\neq(i,\varepsilon)}\{\omega x_j>\rho\}$ 的补集上构成一个算子 P，并且对所有 $\rho'>\rho$，它限制到 $\mathbb{R}^n\setminus\mathsf{Cub}^{\rho'}_{n,1,1}$ 上。

归纳应用推论 4.3.22 后，我们得出，对于所有充分大的 ρ'，P 在 $\mathbb{R}^n\setminus\mathsf{Cub}^{\rho'}_{n,1,1}$ 上的限制都有下界。

为满足算子修改引理 4.6.2的假设，我们将P 扩展为定义在 $M\times\mathbb{R}^n$上的块狄拉克算子 $\mathtt{P}$。如有必要，增大 ρ，我们可以假设 $\mathtt{P}$ 的核包含于 $M\times\rho/2I^n$中。

设 H、Φ 和 $U_{left}\subseteq\mathbb{R}^n\setminus\mathsf{Cub}^{\rho}_{n,1,1}$ 如嵌入定理 3.2.2 中所述。根据算子修改引理 4.6.2，$\mathtt{P}$ 在所有 $1\leq a<b\leq 2$ 上都限制为 P，作用于 $M\times R\Phi(H\times(a,b))$，并且其作用类似于柱变量上的微分算子；更准确地说，它是一个 $(R\Phi)^{-1*}\mathrm{pr}_2^*\mathcal{C}_c^{\infty}(a,b)$-导子。因此，$\mathtt{P}$ 也限制为 P，作用于$M\times\big(U_{left}\cup R\Phi(H\times(1.8,2))\big)$。

根据算子修改引理 4.6.2，存在一个 $Q = Q(R)$，作用于 $\Gamma_c(M \times R\Phi(H \times (1, 2); \mathfrak{S}_{G_R})$，对所有 $R \geq 1$ 都成立；它在 $M \times R\Phi(H \times (1.8, 2))$ 上与 P 一致，并且在 $M \times R\Phi(H \times (1, 1.2))$ 上分解如下：

$$\Phi_R^* Q \coloneqq \Phi_R^* Q\restriction_{M\times H\times 1.1R} \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \not{D}_{\mathbb{R}}.$$

设 ${}_R\Theta$ 和 ${}_R\Psi_n$ 与定理 3.3.1的证明中一样。为简化记号，我们将 $\mathrm{id} \times {}_R\Theta$ 和 $\mathrm{id} \times {}_R\Psi_n$ 分别记为 ${}_R\Theta$ 和 ${}_R\Psi_n$。

算子 $({}_R\Theta \circ {}_R\Psi_n)_*(Q)$ 仍是一个对称伪狄拉克算子。我们在定理 3.3.1 的证明中选择 ${}_R\Theta$，使得对所有 $1/10 > \epsilon > 0$，在 $M \times H \times R[1, 1+\epsilon$ 上有 ${}_R\Theta \circ {}_R\Psi_n \circ {}_R\Phi(m, h, s) = (m, R\Phi(h, 1) - (s - R)e_1)$。由于 ${}_R\Theta \circ {}_R\Psi_n \circ {}_R\Phi(H \times R[1, 1+\epsilon)) = \{R(\rho + 1 - \epsilon) < x_1 \leq R(\rho + 1)\}$，我们得到如下分解

$$({}_R\Theta {}_R\Psi_n)_*(Q) = Q\restriction_{\{x_1=R(\rho+1)\}} \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \not{D}_{\mathbb{R}}$$

在 $\{R(\rho + 1 - \epsilon) < x_1 \leq R(\rho + 1)\}$ 上。

根据算子修改引理的 (iv) 4.6.2，算子 Q 因而 $({}_R\Theta \circ {}_R\Psi_n)_*(P)$ 有下界，其下界为 $c > 0$，且与 R 无关，前提是 R 足够大。引理 4.4.9 表明，对于所有足够大的 R，限制 $Q\restriction_{\{x_1=R(\rho+1)\}}$ 有下界，且下界大于 $c/2$。因此，将 $Q\restriction_{\{x_1=R(\rho+1)\}} \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes /D_{\mathbb{R}}$ 延拓至 $\{R(\rho + 1 - \epsilon) < x_1\}$ 所得的常值延拓有下界，且下界大于 $c/2$。

由推论 4.3.22 和引理 4.3.20可知，

$$\overline{Q} \coloneqq ({}_R\Theta \circ {}_R\Psi_n)_*(Q) \cup Q\restriction_{\{x_1=R(\rho+1)\}} \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \not{D}_{\mathbb{R}}$$

是定义在 $M \times \big({}_R\Theta \circ {}_R\Psi_n \circ {}_R\Phi(H \times R(1, 2)) \cup \{R(\rho + 1 - \epsilon)$ 上的伪狄拉克算子；若 R 足够大，则该算子对称且有下界。

当然，Q在 $M \times R\Phi(H \times (1.8, 2))$ 上的限制与 P一致。再次应用推论 4.3.22 和 4.3.20，算子 $P_{\mathrm{fill}} \coloneqq P \cup \overline{Q}$ 是定义在 $M \times \mathbb{R}^n$ 上的对称伪狄拉克算子；若R 足够大，则该算子有下界。

还需证明 P_{fill} 是块狄拉克算子。令 $\mathtt{R}_1 = \mathtt{R}_1(R) > R(\rho + 1)$ 足够大，使得 $M \times \mathtt{R}_1 I^n$ 包含 $L(R)$ 和 ${}_R\Theta \circ {}_R\Psi_n(L(R))$，并且 ${}_R\Theta$ 和 ${}_R\Psi_n$ 在 $\mathsf{Cub}_{n,\,1,\,1}^{\mathtt{R}_1}$ 的补集上限制为恒等函数。于是，$M \times \mathtt{R}_1 I^n$ 是 P_{fill} 的核。由于 P_{fill} 在 $M \times \mathbb{R}^n \setminus \mathsf{Cub}_{n,\,1,\,1}^{\mathtt{R}_1}$ 上限制为 P，且根据构造，

$$P_{\{x_1>R(\rho+1)\}} = ({}_R\Theta \circ {}_R\Psi_n)_*(Q)\restriction_{\{x_1=R(\rho+1)\}} \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \not{D}_{\mathbb{R}},$$

我们由此推得 P_{fill} 具有块形式。最后，$P_{\mathrm{fill}} - \not{D}_{g_{P_{\mathrm{fill}}}}$ 是有界的，因为组成 P_{fill} 的三个加项都满足这一性质。

因此，P_{fill} 是给定的 n-角的一个填充子，所以 $\widetilde{\Psi\,\mathsf{Dir}}_\bullet^\times(M)$ 是一个 Kan 集。 □

4.7 符号映射是 Kan 纤维化

回顾一下，每个伪狄拉克算子 P 都带有一个底层黎曼度量 g_P，它决定了 P 的主符号（同时也决定了 P 作用于其上的旋量丛）。我们要求 g_P 是块度量，并且 P 和 g_P 的分解彼此兼容。在第4.4节中，我们已证明，将伪狄拉克算子映射到底层度量的映射组装成一个立方映射 $\Psi\mathrm{Dir}_\bullet(M) \to \mathcal{R}_\bullet(M)$，我们称之为符号映射。

我们利用上一小节中 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^\times_\bullet(M)$ 的 Kan 性质来确立本节的主要结果。

定理 4.7.1. 符号映射 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^\times_\bullet(M) \to \widetilde{\mathcal{R}}_\bullet(M)$ 是一个 *Kan* 纤维化。

这一结果意义非凡，因为它表明所有指标理论性质都存储在单个纤维 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^\times_\bullet(M)_{g_0}$ 中，因为 $\widetilde{\mathcal{R}}_\bullet(M)$ 是组合可缩的，参见命题 2.1.33。出于形式上的原因，纤维 $\Psi\mathrm{Dir}_\bullet(M)_{g_0}$ 是一个 Kan 集，参见引理 2.1.23。在确定 $\Psi\mathrm{Dir}_\bullet(M)$ 的同伦群时，我们将明确利用纤维 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^\times_\bullet(M)_{g_0}$ 的 Kan 性质，因为我们将把该纤维与由 g_0 确定的单个希尔伯特空间上的 Fredholm 算子空间进行比较。

当然，定理 4.7.1 从形式上蕴含定理 4.6.1 。然而，定理 4.7.1 的证明依赖于 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^\times_\bullet(M)$ 是一个 Kan 集。其大致思路如下：给定一个 i角，以及一个可逆块狄拉克算子的角和一个给定的块度量，我们利用 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^\times_\bullet(M)$的 Kan性质找到一个填充子。到目前为止，底层度量可能与给定的度量不一致。为纠正这种不匹配，我们将修改填充子，使二者一致。

修改过程将依赖于两种工具。第一种工具是受以下结果启发的一种纤维化类结果： [Ebe17，第 4 节。2]尽管方法大不相同。它使我们能够将填充子的主符号“旋转”到所需的符号。第二种工具基于第 4.3 节中的粘合构造。

第一个工具基于以下分析结果及其推论。

引理 4.7.2. 设 $P \in \Psi\mathrm{Dir}_n(M)$ 满足所有面 $\partial_i^\varepsilon P$均可逆。则存在常数 c、$C > 0$（各自仅依赖于这些面 $\partial_i^\varepsilon P$），以及一个紧子集$K \subseteq M \times \mathbb{R}^n$，使得所有满足 $||Pu||_0 \leq \gamma||u||_0$ 且 $\gamma < c$ 的截面 $0 \neq u \in L^2(M \times \mathbb{R}^n; \mathfrak{S}_{g_P})$ 均满足

$$\frac{||u||_{0,K}}{||u||_0} \geq \frac{10}{11}\left(\frac{9}{10} - C\gamma\right) > 0, \tag{4.7}$$

其中 $||u||_{0,\ K} := ||1_K \cdot u||_0$。

证明。 在这个证明中，使用以下 Sobolev 1-范数的变体会更加方便

$$||u||_1 := ||u||_0 + ||\nabla u||_0,$$

这等价于（通常的）Sobolev 1-范数。更一般地，对于每个可测的 $K \subset M \times \mathbb{R}^n$，仅在本证明中我们记作 $||u||_{1,\ K} := ||u||_{0,\ K} + ||\nabla u||_{0,\ K}$。

对于每个紧支撑光滑函数 φ，我们可以如下估计 $||\varphi u||_1$ 相对于$||u||_{1,\ \mathrm{supp}\,\varphi}$：

$$\begin{aligned}||\varphi u||_1 &= ||\varphi u||_0 + ||\nabla\varphi u||_0\\ &= ||\varphi u||_0 + ||\mathrm{d}\varphi\otimes u + \varphi\nabla u||_0\\ &\le ||\varphi u||_0 + ||\mathrm{grad}(\varphi)||_\infty\cdot||u||_{0,\mathrm{supp}\,\varphi} + ||\varphi\nabla u||_0\\ &\le ||\varphi||_\infty||u||_{1,\mathrm{supp}\,\varphi} + ||\mathrm{grad}(\varphi)||_\infty\cdot||u||_{0,\mathrm{supp}\,\varphi}.\end{aligned}$$

令 $\chi\colon\mathbb{R}\to[0,1]$ 为一个光滑的偶函数，它在 $(-r,r)$ 上恒等于 1，并且对于某个 $r'>r>0$，满足 $\chi^{-1}(\mathbb{R}_{>0}) = (-r',r')$。我们假设 r 和 r' 足够大，使得 $M\times rI^n$ 的内部包含 P的核。令 $\{\chi^{\boldsymbol\alpha}\}$为定义 4.2.5 中给出的相应单位分解，并设 $K \coloneqq$ 支集 $\chi^{\mathbf 0}$。回顾命题 4.3.7 的证明，可知 $\partial_i^\varepsilon P$ 的可逆性意味着，对于所有支集位于 $\{\varepsilon x_i > R\}$内的截面 u，有如下不等式

$$||Pu||_0 \ge c(i,\varepsilon)||u||_1,$$

其中 $c(i,\ \varepsilon)$ 是 $(\partial_i^\varepsilon P)^{-1}\colon L^2(M\times\mathbb{R}^{n-1};\ \mathfrak{S}_{g_{\partial_i^\varepsilon P}}) \to H^1(M\times\mathbb{R}^{n-1};\ \mathfrak{S}_{g_{\partial_i^\varepsilon P}})$ 的算子范数与一个常数的乘积；该常数来自 $H^1(M\times\mathbb{R}^{n-1};\ \mathfrak{S}_{g_{\partial_i^\varepsilon P}})$ 上两种 Sobolev 1-范数的等价性。第二个常数也只依赖于 $g_{\partial_i^\varepsilon P}$。

进一步回忆一下，块形式意味着 支集 $P\chi^{\boldsymbol\alpha}u\subseteq$支集 $\chi^{\boldsymbol\alpha}$ 由推论4.2.7得出。事实上，若采用推论 4.2.7中的记号，则 支集 $\chi^{\boldsymbol\alpha}$ 是 $V_{r<r'}(\boldsymbol\alpha)$ 的闭包，而对所有充分小的 $\epsilon>0$，将推论 4.2.7 应用于 $V_{r-\epsilon<r'+\epsilon}$ 即可得到所述结论。

对于 $\boldsymbol\alpha\neq\mathbf 0$，这意味着不等式

$$\begin{aligned}||\chi^{\boldsymbol\alpha}u||_1 &\le \max\{c(i,\varepsilon)^{-1}\}||P\chi^{\boldsymbol\alpha}u||_{0,\mathrm{supp}\,\chi^{\boldsymbol\alpha}}\\ &\le \max\{c(i,\varepsilon)^{-1}\}\left(||\chi^{\boldsymbol\alpha}Pu||_0 + ||\mathrm{grad}(\chi)^{\boldsymbol\alpha}||_\infty||u||_{0,\mathrm{supp}\,\chi^{\boldsymbol\alpha}}\right)\\ &\le \max\{c(i,\varepsilon)^{-1}\}\left(||Pu||_0 + ||\mathrm{grad}(\chi)^{\boldsymbol\alpha}||_\infty||u||_0\right).\end{aligned}$$

将这些不等式合并可得

$$\begin{aligned}||u||_1 &\le ||\chi^{\mathbf 0}u||_1 + \sum_{\boldsymbol\alpha\neq\mathbf 0}||\chi^{\boldsymbol\alpha}u||_1\\ &\le ||u||_{1,K} + ||\mathrm{grad}(\chi^{\mathbf 0})||_\infty||u||_{0,K}\\ &\qquad + \underbrace{3^n\max\{c(i,\varepsilon)^{-1}\}}_{=:\mathtt C}\left(||Pu||_0 + \max\{||\mathrm{grad}(\chi^{\boldsymbol\alpha})||_\infty\}||u||_0\right).\end{aligned}$$

现在假设 $||Pu||_0\le\gamma||u||_0$。由此可得前面的估计

$$\begin{aligned}||u||_0 &\le ||u||_0 + ||\nabla u||_0 - ||\nabla u||_{0,K} = ||u||_1 - ||\nabla u||_{0,K}\\ &\le ||u||_{1,K} + ||\mathrm{grad}(\chi^{\mathbf 0})||_\infty||u||_{0,K} - ||\nabla u||_{0,K}\\ &\qquad + \mathtt C\left(\gamma||u||_0 + \max\{||\mathrm{grad}(\chi^{\boldsymbol\alpha})||_\infty\}||u||_0\right)\\ &\le \left(1 + ||\mathrm{grad}(\chi^{\mathbf 0})||_\infty\right)||u||_{0,K} + \mathtt C\left(\gamma||u||_0 + \max\{||\mathrm{grad}(\chi^{\boldsymbol\alpha})||_\infty\}||u||_0\right),\end{aligned}$$

或者等价地，

$$\big(1-\mathtt{C}(\gamma+\max\{||\mathrm{grad}(\chi^{\boldsymbol{\alpha}})||_\infty\})\big)||u||_0 \le (1+||\mathrm{grad}(\chi^{\mathbf{0}})||_\infty)||u||_{0,K}.$$

将 $\chi^{\boldsymbol{\alpha}}$ 替换为 $\chi^{\boldsymbol{\alpha}}(\rho^{-1}\cdot)$，其中 ρ 足够大，我们可以假设[7]$||\mathrm{grad}(\chi^{\boldsymbol{\alpha}})||_\infty < \min\{1/10, 1/10\mathtt{C}^{-1}\}$。对于 $u\neq 0$，我们最终得到所需的不等式：

$$\frac{||u||_{0,K}}{||u||_0} \ge \frac{10}{11}\left(\frac{9}{10}-\mathtt{C}\gamma\right).$$

当且仅当.....时，这个下界为正

$$\gamma < 3^{2-n}\frac{\min\{c(i,\varepsilon)\}}{10} =: c. \qquad \square$$

这个不等式对 P 的谱有重要影响。回忆一下，希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 中的元素序列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 P 的近似特征向量，如果 $||v_n||=1$，并且存在一个（必定唯一的）$\lambda\in\mathbb{C}$，使得序列 $(P-\lambda\mathrm{id})v_n$ 收敛到零。在这种情况下，λ 称为近似特征值（与 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 相关联）。注意，自伴算子的谱只由近似特征值构成。

推论 4.7.3。设 P 如前述引理所述。那么，P 的每个近似特征向量序列，其近似特征值为 $\lambda\in(-c,c)$，都有一个收敛子列。特别地，λ 是一个特征值。

证明。对于给定的谱值 $\lambda\in(-c,c)$，取与之相关联的近似特征值序列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$。由于 $||Pv_n||_0 < c||v_n||_0 = c$ 几乎处处成立，基本椭圆估计推出 $v_n\in H^1(\mathfrak{S}_{g_P})$，且 $(||v_n||_1)_{n\in\mathbb{N}}$有界。

选取一个光滑紧支撑函数 φ，使其在 K 上恒等于 1，其中 K 是引理 4.7.2 中的紧集。于是$||v_n||_{1,K} \le ||\varphi v_n||_1 \le ||\varphi||_{1,1}||v_n||_1$，再由经典 Rellich 引理可知，$(\varphi v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 关于 $|||_0$ 有收敛子列。因此，$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 关于 $|||_{0,K}$ 有收敛子列。但不等式 4.7 表明，该收敛子列关于 $|||_0$ 也收敛。此极限是一个特征向量，而 λ 是其对应的特征值。 $\square$

作为应用，我们证明一个对我们非常重要的

命题 4.7.4 (香肠引理)。设 P 和 c 如引理 *4.7.2*中所述。那么$\mathrm{spec}(P)\cap(-c,\ c)$ 仅由特征值组成，其特征子空间的线性包 $\bigoplus_{|\lambda|<c_0}\mathrm{Eig}(P,\ \lambda)$对所有 $c_0<c$ 都构成一个有限维子向量空间。

证明。第一个断言是前一个推论的一部分。

为证明第二个断言，我们先证明每个特征子空间都是有限维的。显然，$\mathbf{Eig}(P,\lambda)$ 是 $L^2(\mathfrak{S}_{g_P})$ 的闭子空间，因此是一个希尔伯特空间。

[7]请注意，对单位分解进行缩放会将 K 替换为 ρK。

对于给定的归一化特征向量序列 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$，前一个推论表明它存在一个收敛子列。因此，$\mathrm{Eig}(P,\lambda)$ 的单位球是紧的，所以 $\mathrm{Eig}(P,\lambda)$ 是有限维的。

现在证明，对于所有 $c_0<c$，P 在 $[-c_0,c_0]$ 中只有有限多个特征值。反设不然，则存在一个序列 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$，其中的特征值两两不同，且都属于 $[-c_0,c_0]$。对于每个 λ_n，取一个归一化特征向量 v_n。对于 $\lambda := \limsup_n \lambda_n \in [-c_0,c_0]$，我们可以从 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 中取一个子列，使其成为 λ 的近似特征向量序列。然而，推论 4.7.3 表明，这个子列有一个收敛子列 $(v_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$。极限 w 是对应于 λ 的特征向量；不同特征值对应的特征向量彼此正交，因此我们得到

$$0=\langle v_{n_k},w\rangle \xrightarrow{k\to\infty} \langle w,w\rangle = 1,$$

矛盾。 □

香肠引理提供了使用谱流型论证的可能性 .

引理 4.7.5. 设 $P\colon X\to \Psi\mathrm{Dir}^n(M)$ 是一个映射，满足 $\mathcal{G}_{g_P,g_0,*}(P)\colon X\to \mathrm{Hom}(H^1(\mathfrak{S}_{g_0}) H^0(\mathfrak{S}_{g_0}))$ 连续，且 $\partial_i^\varepsilon P$ 是可逆算子的常值映射。假设存在常数 $c>0$ 使得

$$\mathrm{spec}(P_y)\cap(-c,c) =: \{\lambda_0(y)\le\cdots\le\lambda_{N_y}(y)\}$$

对所有 $y\in X$，其特征值均由有限个值组成。那么，对每个 $x\in X$，存在 x 的一个开邻域 U，使得 $N_{(-)}$ 在 U 上为常值，且所有 $\lambda_j\colon U\to\mathbb{R}$ 都是连续函数。

证明。对于每个严格介于 $\max\{|\lambda_0(x)|,|\lambda_N(x)|\}$ 与 c 之间的 c_0，选取一个光滑单调递增函数 $b\colon \mathbb{R}\to[-2c,2c]$，使其在 $[-c_0,c_0]$ 上等于恒等函数 $\hat{}$。有界变换 $P := b(\mathcal{G}_{g_P,g}\circ P\circ \mathcal{G}_{g_0,g_P})$ 是有界自伴算子 $X\to B(L^2(\mathfrak{S}_{g_0}))$ [的一个连续映射 Ebe17，命题 3.7]，其值在 $(-c_0,c_0)$ 之间具有与 P 的值相同的特征值。现在，利用有界算子的特征值关于算子范数 [BB W93，引理 17.1] 连续依赖于算子这一事实，即可得出结论。

□

注记 4.7.6。特征值的函数 λ_j 只在 x 附近局部有定义，因为它们可能会离开区间 $(-c,c)$。此外，特征值的数量可能不是局部常数。

回顾定理 B.0.30，光滑路径 $P\colon(0,1)\to\Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S})$，其底层路径 g_P 由黎曼度量组成，它有一个延拓 $P_{\mathrm{ex}}\in Op^1(L^2(\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(g_P)}))$，其取值不一定属于子空间 $\Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(g_P)})$。不过，这是一个很好的性质，因此我们将为它命名。

定义 4.7.7。 设 $X\subseteq\mathbb{R}^n$ 为开集，且 $P\colon X\to\Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S})$ 是一个光滑映射，其底层映射 g_P 作用于黎曼度量。若延拓 P^{ex} 满足下式，则称 P 是可悬挂的：

$$(P^{\mathrm{ex}}\sigma)(n,x)=P_x(\sigma(-,x))$$

是 $\Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(g_P)})$ 的一个元素。

第一个工具是以下类似纤维化的结果。

命题 4.7.8 (路径提升性质)。 考虑 $\mathcal{R}_n(M)$ 作为配备光滑弗雷歇拓扑的拓扑空间，并将 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_n^{\times}(M)$ 视为配备 $\Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S})$ 子空间拓扑的拓扑空间。设 $\gamma\colon [0,1]\to\widetilde{\mathcal{R}}_n(M)$ 为一条在端点附近为常值的光滑曲线，并满足

$$\gamma_t|_{\{\varepsilon x_i>R\}}=\sigma_i\partial_i^{\varepsilon}\gamma_0|_{\{\varepsilon x_i>R\}}$$

对某个 $R>0$，所有 $(i,\varepsilon)\in\{1,\dots,n\}\times\mathbb{Z}_2$，以及所有 $t\in[0,1]$。

那么，每个交换外方块

$$\begin{array}{ccc}\{0\} & \xrightarrow{Q_0} & \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_n^{\times}(M)\\ \downarrow & \overset{Q}{\nearrow} & \downarrow\\ [0,1] & \xrightarrow{\gamma} & \widetilde{\mathcal{R}}_n(M)\end{array}$$

都可以用一个在边界附近为常值的光滑映射填充，使得上方三角形交换，而右下方三角形相对于边界在同伦意义下交换。事实上，$g_{Q_{(\cdot)}}$ 与 $\gamma_{(\cdot)}$ 仅相差一个（非微分同胚的）重新参数化。此外，我们可以假设提升是可悬挂的，并且对所有 $(j,\omega)\in\{1,\dots,n\}\times\mathbb{Z}_2$ 都满足 $\partial_j^{\omega}Q_t=\partial_j^{\omega}Q_0$。

与 [Ebe17 第 4.2] 节中的证明相比，我们的论证颇具几何性。思路如下：对于一对有序黎曼度量 (g_1,g_2) 和一个非零余向量 $\xi\in T^{\vee}M$，存在唯一的 $A\in\mathrm{GL}^+(d)$，它在由两个向量张成的平面内将 $g_1\sharp(\xi)$ 拉伸并旋转至 $g_2\sharp(\xi)$，并在正交补上保持恒等。我们在 Cl_d 中找到一个提升 $b_{g_1,g_2}(\xi),0$，使其诱导的线性映射 $b_{g_1,g_2}(\xi)(-)b_{g_1,g_2}(\xi)^*$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上与 A 一致。我们将符号量子化，得到一个伪微分算子 B_{g_1,g_2}。如果 $B_{\gamma_0,\gamma_t}PB^*_{\gamma_0,\gamma_t}$ 是一条由可逆算子构成的曲线，那么它就是所需的提升。遗憾的是，这条曲线是否可逆尚不明确，因此我们需要时不时地让曲线停下来，并“将谱值推离零”。

现在我们来介绍所需的概念。

定义 4.7.9。 对于 $h\in\mathcal{R}_n(M)$ 和 $R>0$，将 $\mathcal{R}_n(M)_{h,\,R}$ 记为所有在 $M\times RI^n$ 之外与 h 一致的块度量所构成的空间，并赋予其光滑紧开拓扑。

引理 4.7.10。 对于所有 $h\in\mathcal{R}_n(M)$ 以及所有 $R>0$，都存在一个光滑映射 $B\colon \widetilde{\mathcal{R}}_n(M)_{h,R}\times\widetilde{\mathcal{R}}_n(M)_{h,R}\to\Psi\mathrm{DO}^0(\mathfrak{S},\mathfrak{S})$，使其满足以下三个条件：

(i) 下图表交换

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{R}_n}(M)_{h,R} \times \widetilde{\mathcal{R}_n}(M)_{h,R} & \xrightarrow{B} & \Psi\mathrm{DO}^0(\mathfrak{S},\mathfrak{S}) \\ & \searrow^{\mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{source}} \quad \downarrow{\scriptstyle \mathrm{target}} \\ & & \widetilde{\mathcal{R}_n}(M)_{h,R} \times \widetilde{\mathcal{R}_n}(M)_{h,R}. \end{array}$$

(ii) 对所有 $g_1, g_2 \in \mathcal{R}_n(M)_{h,R}$，算子 $B_{g_1,g_2} - p\mathcal{G}_{g_1,g_2}$ 均为紧支撑。

(iii) 对所有 $g_1, g_2 \in \mathcal{R}_n(M)_{h,R}$，我们有

$$\mathrm{symb}_0(B_{g_1,g_2}) \circ g_{1\sharp}(\,\cdot\,) \cdot_{g_1} \circ \mathrm{symb}_0(B^*_{g_1,g_2}) = g_{2\sharp}(\,\cdot\,) \cdot_{g_2},$$

其中 $\cdot_{g_j}$ 是作用在 $\mathfrak{S}_{g_j}$ 上的 *Clifford* 左作用。

证明。令 $\pi\colon \mathrm{Pos} \to M \times \mathbb{R}^n$ 为一个丛，其纤维由正定对称双线性形式构成；令 $\mathfrak{S} \to \mathrm{Pos}$ 为纤维丛，其在 g_x 上的纤维为 $\mathfrak{S}_{g_x}$。类似地，我们定义 $Cl(T(M \times \mathbb{R}^n), -) \to \mathrm{Pos}$ 为一个丛，其在 g_x 上的纤维为克利福德代数 $Cl(T_x(M \times \mathbb{R}^n)\ g_x)$。我们用 $||\vdash|| := ||\vdash||_{g_x}$ 表示由 g_x 诱导的 $Cl(T_x(M \times \mathbb{R}^n)\ g_x)$ 上的范数，并用 $\cdot_{g_x}$ 表示 $Cl(M, g_x)$ 在 $\mathfrak{S}_{g_x}$ 上的克利福德乘法和左作用。此外，回想

$$\Phi_{g_{1,x},g_{2,x}} \coloneqq Cl(\tau_{g_{1,x},g_{2,x}})\colon Cl(T_x(M \times \mathbb{R}^n), g_{1,x}) \to Cl(T_x(M \times \mathbb{R}^n), g_{2,x})$$

表示由预规范映射在切空间上诱导的代数同构。使用这一记号，我们定义

$$b_{g_1,g_2}(\xi) := \frac{||\Phi_{g_2,g_1} g_{2\sharp}(\xi)||^{1/2}}{||g_{1\sharp}(\xi)||^{1/2}} \cdot \frac{\Phi_{g_2,g_1} g_{2\sharp}(\xi)/||\Phi_{g_2,g_1} g_{2\sharp}(\xi)|| + g_{1\sharp}(\xi)/||g_{1\sharp}(\xi)||}{||\Phi_{g_2,g_1} g_{2\sharp}(\xi)/||\Phi_{g_2,g_1} g_{2\sharp}(\xi)|| + g_{1\sharp}(\xi)/||g_{1\sharp}(\xi)||\,||} \cdot_{g_1} \frac{g_{1\sharp}(\xi)}{||g_{1\sharp}(\xi)||} \cdot_{g_1} .$$

映射 b 取值于偶次且 $Cl_{n,0}$-右线性符号中，更准确地说

$$b_{g_1,g_2} \in \{\sigma \in \mathrm{Symb}_0(\mathfrak{S}_{g_1}, \mathfrak{S}_{g_2}) \,:\, \sigma \text{ is even and } Cl_{d,0}\text{-right linear}\},$$

参见定义 B.0.12 以回顾 符号映射$_0(\mathfrak{S}_{g_1}, \mathfrak{S}_{g_2})$。

用 $\mathrm{Pos}^2 = \mathrm{Pos} \times_M \mathrm{Pos}$ 表示由 $T(M \times \mathbb{R}^n)$ 上正定对称双线性形式对构成的纤维丛。我们将其视为 Pos 上的纤维丛，其丛投影为到第一分量的投影。此外，令

$$F := \{(v, w) \in T(M \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\} \oplus T(M \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\} \,:\, v \neq -\lambda w \text{ for all } \lambda > 0\}$$

为切向量对构成的丛，其中这些向量的锥不是反向半直线。

映射 b: $\widetilde{\mathcal{R}_n}(M)_{h,R} \times \widetilde{\mathcal{R}_n}(M)_{h,R} \to$ 符号映射$_0^{\times}(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ 是连续的，因为它由以下一系列丛映射诱导

$$\pi^* T^\vee(M \times \mathbb{R}^n) \setminus \{0\} \times_M \mathrm{Pos}^2 \longrightarrow \pi^* F \longrightarrow Cl_{,}(M \times \mathbb{R}^n, -) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}).$$

第一个映射由 $(g_1, g_2) \mapsto (g_{1\sharp}(\xi)\, \Phi_{g_2,g_1}(g_{2\sharp}(\xi)))$ 给出。注意，此映射的值确实属于 $\pi^* F$，因为若存在某个 $\lambda > 0$ 使得 $g_{1\sharp}(\xi) = -\Phi_{g_2,g_1}(\lambda g_{2\sharp}(\xi))$，则 g_1 不是正定的：

$$\begin{aligned} g_1\big(g_{1\sharp}(\xi), g_{1\sharp}(\xi)\big) &= -\lambda g_1\big(g_{1\sharp}(\xi), \Phi_{g_2,g_1}(g_{2\sharp}(\xi))\big) \\ &= -\lambda g_1\big(g_{1\sharp}(\xi), \Phi_{g_2,g_1}(g_{2\sharp} \circ g_1^\flat\, g_{1\sharp}(\xi)\big) \\ &= -\lambda g_1\big(g_{1\sharp}(\xi), \Phi^3_{g_2,g_1}(g_{1\sharp}(\xi))\big) < 0 \end{aligned}$$

因为 $\Phi_{g_2,\ g_1}|_{T(M\times\mathbb{R}^n)} = \tau_{g_1,\ g_2}$ 是预规范映射，它相对于 g_1 是正定且自伴的。第二个映射定义为

$$(v, w) \mapsto \frac{||w||_{g_1}^{1/2}}{||v||_{g_1}^{1/2}} \frac{w/||w||_{g_1} + v/||v||_{g_1}}{||w/||w||_{g_1} + v/||v||_{g_1}||_{g_1}} \cdot_{g_1} \frac{v}{||v||_{g_1}} \cdot_{g_1},$$

显然这是连续的。第三个映射就是 Clifford代数丛在旋量丛上的作用，而且还是等距的。特别要注意，b 的取值都是可逆符号。

在 $M \times RI^n$ 之外，映射 b 是取值为 $\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_{h_x}}$ 的常值映射。回顾引理 B.0.23 中的连续截面（相对于振幅拓扑） $\rho\colon \mathrm{Symb}_0(\mathfrak{S}_{g_1}) \to \Psi\mathrm{DO}^0(\mathfrak{S}_{g_1})$。令 $\tilde{B}_{g_1,g_2} := \rho(b_{g_1,g_2}) - \rho(b_{g_1,g_1}) + \mathrm{id}$。到目前为止，$\tilde{B}_{g_1,g_2} - \mathrm{id}$ 可能没有紧支撑。为此，我们选取光滑的紧支撑函数 $\varphi, \psi\colon M \times \mathbb{R}^n \to [0,1]$，使得 $\varphi \equiv 1$ 在 $M \times RI^n$ 上成立，且 $\hat{\ }\tilde{\ }\psi \equiv 1$ 在 $\mathrm{supp}\,\varphi$ 上成立。算子 $B_{g_1,g_2} := \psi B_{g_1,g_2}\varphi + \mathrm{id}\cdot(1-\varphi)$ 的主符号与 B_{g_1,g_2} 相同，并且与恒等算子之差是一个紧支撑算子。回顾函数 $\alpha^2_{g_2,g_1} = \mathrm{dvol}(g_2)/\mathrm{dvol}(g_1)$。最后，我们定义所需的映射

$$\begin{aligned} B\colon \widetilde{\mathcal{R}_n}(M)_{h,R} \times \widetilde{\mathcal{R}_n}(M)_{h,R} &\to \Psi\mathrm{DO}^0(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}), \\ (g_1, g_2) &\mapsto p\mathcal{G}_{g_1,g_2} \circ \alpha_{g_1,g_2} \hat{B}_{g_1,g_2} \in \Psi\mathrm{DO}^0(\mathfrak{S}_{g_1}, \mathfrak{S}_{g_2}). \end{aligned}$$

根据 $\Psi\mathrm{DO}^0(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ 的拓扑定义，映射 B 光滑当且仅当 B 光滑，这由构造可知。显然，B 满足 (i)。

紧支撑伪微分算子与向量丛态射的复合仍然是紧支撑的。此外，$g_1 = g_2$ 在 $M \times RI^n$ 的补集上，因此 $\alpha_{g_1,g_2} = 1$ 在此集合上。于是，$B_{g_1,g_2} - p\mathcal{G}_{g_1,g_2}$ 是紧支撑的，这就是 (ii)。

现在证明 (iii)。利用克利福德代数中单位长度向量 v, w 所满足的关系 $(v+w)\cdot w = v\cdot(v+w)$，可得

$$b_{g_1,g_2}(\xi) \cdot_{g_1} g_{1\sharp}(\xi) \cdot_{g_1} b_{g_1,g_2}(\xi)^* \cdot_{g_1} = g_{2\sharp}(\xi) \cdot_{g_1} .$$

回顾一下，预规范映射是一个等距向量丛映射，并且是 $Cl(M, g_1)$-$Cl(M, g_2)$-等变的。它诱导出一个线性映射 $Op(p\mathcal{G}_{g_1,g_2})\colon L^2(\mathfrak{S}_{g_1}) \to L^2(\mathfrak{S}_{g_2})$。这两个映射的伴随算子满足公式

$$Op(p\mathcal{G}_{g_1,g_2})^* = Op(\alpha^2_{g_2,g_1} p\mathcal{G}^*_{g_1,g_2}) = Op(\alpha^2_{g_2,g_1} p\mathcal{G}_{g_2,g_1})$$

这是因为度量所诱导的底层体积不同。符号演算现在推出第三个结论

$$\mathrm{symb}_0(B_{g_1,g_2}) \circ g_{1\sharp}(\,\cdot\,) \cdot_{g_1} \circ \mathrm{symb}_0(B^*_{g_1,g_2}) = g_{2\sharp}(\,\cdot\,) \cdot_{g_2} . \qquad \square$$

由于紧支撑伪微分算子的伴随算子也具有紧支撑，前一个命题有如下重要推论。

推论 4.7.11。对于每个 $g \in \mathcal{R}_n(M)_{h,R}$ 以及每个块狄拉克算子 P，其底层度量为 $g_P \in \mathcal{R}_n(M)_{h,R}$ 算子 $B_{g_P,g} \circ P \circ B^*_{g_P,g}$ 是一个底层度量为 g 的块狄拉克算子。

证明。复合 $B_{g_P,g} P B^*_{g_P,g}$ 属于 $\Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_g)$，因为 $B_{g_P,g}$ 是一个实际的零阶伪微分算子，$\Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_g)$ 是局部的，并且实际伪微分算子的复合仍是实际伪微分算子。显然，该复合是一个对称算子。

接下来我们证明该复合具有块形式。令 $r_2 > r_1 > R$ 为满足以下条件的实数：$M \times r_1 I^n$ 包含 P 的核、B_{g_P} 的支集、$g - p\mathcal{G}_{g_P}$、g 以及 $B^*_{g_P,\,g} - p\mathcal{G}^*_{g_P,\,g}$ 并且满足 $M \times r I^n$ 且满足 P 分解于远离 $M \times r_1 I^n$。将引理 4.2.6 应用于 P，即可推出 $M \times r_2 I^n$ 是 $B_{g_P,g} P B^*_{g_P,g}$ 的核。

由于 $g_P = g = h$ 远离 $M \times r_1 I^n$，我们推知 $B_{g_P,\,g} P B^*_{g_P,\,g}$ 在此处分解为 P。

算子 $B_{g_P,\,g} \mathfrak{D}_{g_P} B^*_{g_P,\,g} - \mathfrak{D}_g$ 是一个具有紧支撑的零阶伪微分算子，因此是有界算子。计算

$$\begin{aligned} B_{g_P,g} P B^*_{g_P,g} - \mathfrak{D}_g &= B_{g_P,g} P B^*_{g_P,g} - B_{g_P,g} \mathfrak{D}_{g_P} B^*_{g_P,g} + B_{g_P,g} \mathfrak{D}_{g_P} B^*_{g_P,g} - \mathfrak{D}_g \\ &= B_{g_P,g} \left(P - \mathfrak{D}_P\right) B^*_{g_P,g} + \left(B_{g_P,g} \mathfrak{D}_{g_P} B^*_{g_P,g} - \mathfrak{D}_g\right) \end{aligned}$$

这意味着 $B_{g_P,\,g} P B^*_{g_P,\,g} - \mathfrak{D}_g$ 是两个有界算子的和，因此有界。总之，$B_{g_P,\,g} P B^*_{g_P,\,g}$ 是一个底层度量为 g 的块狄拉克算子。

$\square$

遗憾的是，关于分块狄拉克算子连续族的特征值是连续函数这一信息，不足以支持后续论证。对于 $g \mapsto B_{g_P,\,g} P B^*_{g_P,\,g}$ 这一情形，更精细的信息由下面的引理给出。为了表述该引理，我们回顾一些取自 [Kat66第 IV 节的记号。2]。

定义 4.7.12。设 S，T：$X \to Y$ 是巴拿赫空间 X 和 Y 之间的两个闭无界算子。我们将 $\delta(S,\ T)$ 定义为满足以下条件的最小数 δ：对于所有 $u \in \mathrm{dom}(S)$，不等式

$$\mathrm{dist}\big((u, Su); \mathrm{Graph}(T)\big) \le \delta(||u||_X + ||Su||_Y) \overset{\mathrm{def}}{=} \delta \cdot ||(u, Su)||_{X \oplus Y}$$

ˆ和 $\delta(S,\ T) \mathrel{..}= \max\{\delta(S,\ T);\ \delta(T,\ S)\}$。

ˆ 文献中证明， δ 是集合 $C(X,\ Y)$ 上的一个（不完备）度量，该集合由所有从 X 到 Y的闭无界算子构成。距离 δ 与有界可逆算子的复合具有良好的相容性。

引理 4.7.13. 设 $T \in C(X,Y)$，并设 $A\colon X \to X$, $B\colon Y \to Y$为有界可逆算子，且 A 和 A^{-1} 保持 T的定义域不变。
Then

$$\begin{aligned} &\delta(T,BT) \le ||\mathrm{id} - B||, && \delta(BT,T) \le ||\mathrm{id} - B||,\\ &\delta(T,TA) \le ||\mathrm{id} - A^{-1}||, && \delta(TA,T) \le ||\mathrm{id} - A||. \end{aligned}$$

证明。 设 $u \in \mathsf{dom}\ T$非零。对于 $v = u \in \mathsf{dom}\, BT$，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}\big((u,Tu);\mathrm{Graph}(BT)\big) \le ||(u,Tu) - (v,BTv)|| &= ||(0,(\mathrm{id} - B)Tu)||\\ &\le ||\mathrm{id} - B|| \cdot ||u||. \end{aligned}$$

若选择 $v = A^{-1}u \in \mathsf{dom}\ T$，则

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}\big((u,Tu);\mathrm{Graph}(TA)\big) \le ||(u,Tu) - (v,TAv)|| &= ||((\mathrm{id} - A^{-1})u,0)||\\ &\le ||\mathrm{id} - A^{-1}|| \cdot ||u||. \end{aligned}$$

另外两个不等式可用类似方法推导。 □

对我们而言，重要的是算子的谱隙在更一般的意义下相对于由 δ生成的拓扑是下半连续的（它们不会突然减小，但可能会突然增大）。

定理 *4.7.14.* *[Kat66*，定理 *IV.3.*1] 设 $T \in C(X,Y)$ 是一个闭算子，并设 $R\colon \zeta \mapsto (T-\zeta)^{-1} \in B(Y,X)$ 是它的预解函数。对于预解集 $\rho(T)$ 中任意一个紧ˆ子集 Γ，若 $\delta(S,T) < \delta$，则 Γ 是 $\rho(S)$ 的子集。δ 的一个明确取法是

$$\delta = \min_{\zeta\in\Gamma} \frac{1}{2}(1+|\zeta|^2)^{-1}(1+||R(\zeta)||^2)^{-1/2}.$$

*Pro*路径提升性质。设下面的交换方块为给定 n

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{Q_0} & \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_n^{\times}(M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [0,1] & \xrightarrow{\gamma} & \widetilde{\mathcal{R}}_n(M). \end{array}$$

˜根据假设， γ 经由 $\mathcal{R}_\bullet(M)_{\gamma_0,R}$ 分解，其中某个 $R > 0$满足此条件。令 $0 < c < 1$ 为一个常数，它小于面 $\{\partial_i^\varepsilon Q_0\}$对应的香肠引理中的常数。取一个正数 $\mu_0 < c/8$。由于 γ 一致连续，因此存在一个 $N \in \mathbb{N}$，使得所有满足 $|s-t| < 1/N$的 $s,t \in [0,1]$ 均满足

$$||B(\gamma_s,\gamma_t) - \mathcal{G}_{\gamma_s,\gamma_t}||_{0,0} = ||B(\gamma_s,\gamma_t)\mathcal{G}^*_{\gamma_s,\gamma_t} - \mathrm{id}||_{0,0} < \mu_0/8. \tag{4.8}$$

我们将证明以下稍强的结论。对于每个包含处于其预解集中的$(-2\mu_0, 2\mu_0)$的$P \in \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_n^{\times}(M)$，我们构造一条光滑路径$\widetilde{\gamma_{\times}Q}\colon [0,1/N] \to \Psi\mathrm{Dir}_n(M)$，该路径在边界附近为常值，提升$\gamma|_{[0,1/N]}$的限制（初值为 $Q_0 = P$），至重新参数化，并满足 $\partial_j^{\omega} Q_t = \partial_j^{\omega} Q_0$；其端点包含处于其预解集中的$(-2\mu_0, 2\mu_0)$。

我们将从给定的算子 Q_0 开始，沿着划分 $[k/N, (k+1)/N]$ 迭代应用这一构造；该算子满足我们的构造假设。所有这些曲线的并集将成为所需的同伦提升。

现在让我们更详细地描述这一构造。固定一个光滑奇单函数 φ: $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}\setminus[-3\mu_0, 3\mu_0]$，使其在 $(-c/2,\ c/2)$ 的补集上是恒等函数。该构造分为两步：第一步，将初始值 Q_0 延拓为一条路径；第二步，调整端点 $Q_{1/N}$ 的特征值。

先来看第一步：简记 $B_{\gamma_0,\ \gamma_s}$ 为 B_s，并考虑定义在 $[0,1/N]$上的映射 $t \mapsto B_t P B_t^*$。由引理 4.7.10 和推论 4.7.11 可知，该映射是一个取值于 $\Psi\mathrm{Dir}_n(M)$的光滑$\widetilde{\text{}}$映射。

为证明 $B_t P B_t^*$ 可逆，我们按如下方式论证。谱 Q_0 与 $\Gamma := [-\mu_0, \mu_0]$ 之间的距离大于 μ_0。因此，我们可以用以下方式估计定理 4.7.14中的常数 δ

$$\begin{aligned}\delta &= \min_{\zeta\in\Gamma} \frac{1}{2}(1+|\zeta|^2)^{-1}(1+||R(\zeta)||^2)^{-1/2}\\ &\geq \frac{1}{2}(1+\mu_0^2)^{-1}(1+\mu_0^{-2})^{-1/2}\\ &\geq \frac{1}{2}\mu_0(1+\mu_0^2)^{-3/2} > \frac{1}{3}\mu_0.\end{aligned}$$

最后一个不等式成立，因为 $\mu_0 < 1/8$。

另一方面，引理4.7.13与不等式（4.8）结合几何级数给出的估计，对所有 $t \in [0,1/N]$ 均可得出估计

$$\begin{aligned}\hat{\delta}(\mathcal{G}_t^* B_t P B_t^* \mathcal{G}_t, P) &\leq \hat{\delta}(\mathcal{G}_t^* B_t P B_t^* \mathcal{G}_t, \mathcal{G}_t^* B_t P) + \hat{\delta}(\mathcal{G}_t^* B_t P, P)\\ &\leq \max\{||B_t^* - \mathcal{G}_{\gamma_t,\gamma_0}||_{0,0}, ||(B_t^*)^{-1} - \mathcal{G}_{\gamma_0,\gamma_t}||_{0,0}\} + ||B_t - \mathcal{G}_{\gamma_0,\gamma_t}||_{0,0}\\ &\leq \mu_0/8 \cdot (1-\mu_0/8)^{-1} + \mu_0/8 < \mu_0/3 < \delta,\end{aligned}$$

因此，所有 $B_t P B_t^*$的预解集都包含 $[-\mu_0, \mu_0]$。

将 $t \mapsto B_t P B_t^*$ 与一个光滑、单调递增的满射自映射复合，该映射定义在 $[0,1/N]$ 上，使得复合映射是一个 $[0,1/N] \to \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_n^{\times}(M)$ 映射，并且在边界附近为常值。为方便起见，我们仍用 BPB^* 表示该复合映射。

现在进入第二步。设 $\lambda_0^+ \leq \cdots \leq \lambda_{m^+}^+$ 为 BQ_0B^* 在 $(-c,\ c)$ 内的所有正特征值，$\lambda_0^- \geq \cdots \geq \lambda_{m^-}^-$ 为其所有负特征值。选取与 $\lambda_j^{\pm}$ 对应的特征向量 $v_j^{\pm}$，使它们构成正交归一系，并选取满足 $||v_j^{\pm} - w_j^{\pm}||_0 < \mu_0/C\cdot 10^{-j}$ 的光滑紧支撑截面 $w_j^{\pm}$，其中 $C \geq 1$ 是一个待定常数。设 $\Phi\colon\ [1/N, 1+1/N] \times \mathbb{R}\setminus$

$\{0\} \to \mathbb{R}\setminus\{0\}$ 为由凸组合给出的 id 与 φ 之间的同伦，并将其第一项与 $[1/N, 1+1/N]$ 上的一个光滑、单调递增的满射自映射复合，使得在 $1/N$ 附近，$\Phi(\cdot,\ x) = x$，且在 $1+1/N$ 附近，$\Phi(\cdot,\ x) = \varphi(x)$。仍用 Φ 表示所得结果。最后，定义

$$\Theta\colon [1/N, 1+1/N] \to \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_n^{\times}(\mathfrak{S}_{g_{B_{1/N}Q_0B_{1/N}^*}}),$$
$$t \mapsto B_{1/N}Q_0B_{1/N}^* + \sum_{j=0}^{m^{\pm}} (\Phi(t,\lambda_j^{\pm}) - \lambda_j^{\pm})\langle\cdot, w_j^{\pm}\rangle w_j^{\pm}$$

以及辅助映射

$$\widetilde{\Theta}\colon [1/N, 1+1/N] \to \overline{\Psi\mathrm{DO}}^1(\mathfrak{S}_{g_{B_{1/N}Q_0B_{1/N}^*}}),$$
$$t \mapsto B_{1/N}Q_0B_{1/N}^* + \sum_{j=0}^{m^{\pm}} (\Phi(t,\lambda_j^{\pm}) - \lambda_j^{\pm})\langle\cdot, v_j^{\pm}\rangle v_j^{\pm}.$$

对于所有 $t \in [1/N, 1+1/N]$，算子 Θ_t 和 Θ_t 与 $B_{1/N}Q_0B_{1/N}^*$ 相差一个自伴的有限秩无限阶光滑化算子。因此，它们是阶为 1、与底层度量的狄拉克算子具有相同主符号的自伴伪微分算子。它们还与该狄拉克算子相差一个有界算子，因为 $B_{1/N}Q_0B_{1/N}^*$ 确实如此。由于所有 $w_j^{\pm}$ 均为紧支撑，Θ_t 具有块形式，且与 $B_{1/N}Q_0B_{1/N}^*$ 具有相同的面；因此，Θ_t 是一个块狄拉克算子。

我们通过证明 Θ 可逆来证明其可逆性，是够小的扰动。在 $B_{1/N}Q_0B_{1/N}$ 的正子空间上，也就是说，在 $B_{1/N}Q_0B_{1/N}^*$ 正定的子空间上，根据构造，我们有：

$$\widetilde{\Theta_t} \geq \Phi(t,\lambda_0^+)\mathrm{id}.$$

负子空间也有类似的结论，因此区间 $(\Phi(t,\ \lambda_0^-)\ \Phi(t,\ \lambda_0^+))$ 与 Θ_t 的谱不相交。特别地，每个 Θ_t 都是可逆的。

还需证明 Θ 是一个足够小的扰动，相对于 $\widetilde{\Theta}$。首先注意

$$\begin{aligned}
&||\langle\cdot, w_j^{\pm}\rangle w_j^{\pm} - \langle\cdot, v_j^{\pm}\rangle v_j^{\pm}||_{0,0}\\
\leq\ &||\langle\cdot, w_j^{\pm} - v_j^{\pm}\rangle||_{\mathrm{dual}}||w_j^{\pm}||_0 + ||\langle\cdot, v_j^{\pm}\rangle||_{\mathrm{dual}}||v_j^{\pm} - w_j^{\pm}||_0\\
\leq\ &(2 + ||v_j - w_j||_0)\,||v_j + w_j||_0 < 2.5\mu_0/C10^{-j}.
\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}
||\Theta_t - \widetilde{\Theta_t}||_{0,0} &\leq \sum_{j=0}^{M,N} \underbrace{|\Phi(t,\lambda_j^{\pm}) - \lambda_j^{\pm}|}_{\leq c}\, 2.5\mu_0/C10^{-j}\\
&\leq c\cdot 2.5\cdot 2\cdot 10/9\cdot \mu_0/C\\
&\leq 6\mu_0/C.
\end{aligned}$$

因此， Θ_t 的谱与区间（$\Phi(t, \lambda_0^-) + 6\mu_0/C$， $\Phi(t, \lambda_0^+) - 6\mu_0/C$）不相交。~ 如果我们选取足够大的 C，例如 $C = 12$，并将 Θ_t 与其正子空间上的最低正特征值 $\Phi(t, \lambda_0^+)$ 进行比较，就可以得到以下不等式链

$$\begin{aligned}\Theta_t = \Theta_t + \tilde{\Theta}_t - \tilde{\Theta}_t &\geq \left(\Phi(t, \lambda_0^+) - ||\tilde{\Theta}_t - \Theta_t||_{0,0}\right) \mathrm{id} \\ &\geq \left(\lambda_0^+ - ||\tilde{\Theta}_t - \Theta_t||_{0,0}\right) \mathrm{id} \geq \left(2\mu_0 - ||\tilde{\Theta}_t - \Theta_t||_{0,0}\right) \mathrm{id} \\ &\geq (2\mu_0 - 6\mu_0/C)\mathrm{id} \geq \mu_0 \mathrm{id}.\end{aligned}$$

在负子空间上也有类似的结果，因此对所有 $t \in [1/N, 1+1/N]$， Θ_t 都是可逆的。利用 $\Phi(1 + 1/N, \lambda_0^+) = \varphi(\lambda_0^+) \geq 3\mu_0$ 以及

$$\begin{aligned}\Theta_{1+1/N} &= \Theta_{1+1/N} - \tilde{\Theta}_{1+1/N} + \tilde{\Theta}_{1+1/N} \\ &\geq \left(3\mu_0 - ||\Theta_{1+1/N} - \tilde{\Theta}_{1+1/N}||_{0,0}\right) \mathrm{id} \\ &\geq (3\mu_0 - \mu_0/2)\mathrm{id} > 2\mu_0 \mathrm{id},\end{aligned}$$

我们看到， $\Theta_{1/N}$ 的谱与 $(-2\mu_0, 2\mu_0)$ 不相交。

所需的同伦提升现在由下式给出

$$Q\colon [0, 1/N] \xrightarrow{t \mapsto (N+1)t} [0, 1 + 1/N] \xrightarrow{B_{(\cdot)} Q_0 B_{(\cdot)} \cup \Theta} \widetilde{\Psi \mathrm{Dir}}_n^{\times}(M).$$

由于 $Q_{1/N}$ 满足上述构造的假设，我们可以在 $[1/N, 2/N]$ 上构造一个提升，从 $Q_{1/N}$ 开始，而不是从 Q_0 开始（但使用相同的 μ_0）。如果我们再重复该构造 $N-2$ 次，并将结果粘合起来，就得到了所需的（同伦）提升 $Q\colon [0, 1] \to \widetilde{\Psi \mathrm{Dir}}_n^{\times}(M)$。由于 g_Q 与 γ 之间的同伦由端点相对重新参数化给出，因此映射 Q 确实是一个同伦提升。

还需证明我们的构造是一条可悬挂路径。更准确地说，若 Q 也表示所构造提升的常值延拓，我们需要证明 $Q^{\mathrm{ex}} \in \Psi\mathrm{DO}^1(M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(\gamma)})$。由于 $\Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S})$ 是局部的，见命题B.0.27，因此只需对构造的每一部分证明该结论。

为验证 $\left(B_{(\cdot)} Q_0 B_{(\cdot)}^*\right)^{\mathrm{ex}} \in \widetilde{\Psi\mathrm{DO}}^1(\mathfrak{S})$，取一列实际的伪微分算子 $P_n \in \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{\gamma_0})$，使其在 Op^1 上的弗雷歇结构（即在 $\Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{\gamma_0})$ 上诱导 Atiyah-Singer 拓扑的结构）下逼近 Q_0。由于 $B - p\mathcal{G}$ 是紧支撑的，命题 B.0.15 和单位分解论证表明， $P \mapsto BPB^*$ 关于振幅拓扑是连续的。但 $(-)^{\mathrm{ex}}$（附录中记作 $-\boxtimes \mathrm{id}$）是一个连续线性映射，见定理 B.0.30，因此我们得出

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left(BP_nB^*\right)^{\mathrm{ex}} &= B^{\mathrm{ex}} \lim_{n\to\infty} P_n^{\mathrm{ex}} (B^*)^{\mathrm{ex}} \\ &= \left(BQ_0B^*\right)^{\mathrm{ex}} \in \overline{\Psi\mathrm{DO}}^1(M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathfrak{S}_{g_{\mathrm{susp}(BQ_0B^*)}}).\end{aligned}$$

~对于 Θ，验证起来甚至更容易，因为它是一个分块狄拉克算子（视为常值曲线）与一条由无限平滑算子构成的光滑曲线 W 之和。我们得出

$$\tilde{\Theta}^{\mathrm{ex}} = \left(B_{1/N} Q_0 B_{1/N}^*\right)^{\mathrm{ex}} + W^{\mathrm{ex}} \in \overline{\Psi\mathrm{DO}}^1(M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(\gamma_{1/N})})$$

根据定理B.0.28 和定理B.0.30。 □

下一个工具可以将两个相匹配的可逆伪狄拉克算子粘合在一起。为了介绍这一工具，我们需要讨论伪微分算子上的平移算子。

定义 4.7.15。设 $E \to M \times \mathbb{R}^n$ 是一个向量丛。对于 $v \in \mathbb{R}^n$，定义平移算子

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh}_v \colon \Gamma_c(M \times \mathbb{R}^n; E) &\to \Gamma_c(M \times \mathbb{R}^n; E), \\ \mathrm{Sh}_v(\sigma)(m, x) &= \sigma(m, x - v). \end{aligned}$$

平移算子通过推前在伪微分算子空间上诱导出线性映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh}_{v*} \colon \Psi\mathrm{DO}^k(M \times \mathbb{R}^n; E) &\to \Psi\mathrm{DO}^k(M \times \mathbb{R}^n; E), \\ P &\mapsto \mathrm{Sh}_v \circ P \circ \mathrm{Sh}_{-v}. \end{aligned}$$

当 E 是相切丛或旋量丛时，可以用一种不那么临时的方法来定义平移算子。平移 $\mathrm{trans}_v \colon (m, x) \mapsto (m, x + v)$ 是 $M \times \mathbb{R}^n$ 上的微分同胚。其微分给出一个等距映射

$$T\mathrm{trans}_v \colon (T(M \times \mathbb{R}^n), g) \to (T(M \times \mathbb{R}^n), \mathrm{trans}_{-v}^* g).$$

显然，$\mathrm{trans}_{-v}^* g$ 与（临时版本的）$\mathrm{Sh}_v g$ 一致。由于旋量丛构造对于保持 Pin 结构的等距变换是函子性的，我们得到 trans_v上的克利福德模丛 $\mathfrak{S}_g \to \mathfrak{S}_{\mathrm{Sh}_v g}$ 的一个同构。纤维 $(\mathfrak{S}_g)_{(m, x-v)}$ 与 $(\mathfrak{S}_{\mathrm{Sh}_v(g)})_{(m,x)}$ 相同，因此在截面层面上，通过这个克利福德丛同构进行的推前仍由下式给出：

$$\begin{aligned} \mathrm{Sh}_v \colon \Gamma_c(M \times \mathbb{R}^n; \mathfrak{S}_g) &\to \Gamma_c(M \times \mathbb{R}^n; \mathfrak{S}_{\mathrm{Sh}_v g}), \\ \mathrm{Sh}_v(\sigma)(m, x) &= \sigma(m, x - v). \end{aligned}$$

由于附录 A 中定义的索伯列夫范数仅取决于所考虑丛的局部几何，因此所有平移算子都会在相应的索伯列夫空间之间诱导等距变换

$$\mathrm{Sh}_v \colon H^k(\mathfrak{S}_g) \to H^k(\mathfrak{S}_{\mathrm{Sh}_v * g}).$$

结合上文的观察，即通过 Sh_v 进行共轭会保持（实际的）伪微分算子的集合，我们得出，这些共轭在伪微分算子集合上诱导出关于 Atiyah-Singer 拓扑连续的线性映射。关于 Atiyah-Singer 拓扑的连续性使我们能够将 Sh_{v*} 连续延拓到 Atiyah-Singer 闭包。

我们将写作 $\mathrm{Sh}_{j,\ R}$，而不写作 Sh^{Re_j}。

定义4.7.16。设 P， $Q \in \Psi\mathrm{Dir}_n(M)$ 是两个块狄拉克算子，其核包含在 $M \times \rho I^n$ 中，且满足 $\partial_i^1 P = \partial_i^{-1} Q$，其中 $\rho > 0$ 和 $1 \le i \le n$ 分别为某些量。那么，对所有 $R > \rho$，我们定义块度量

$$g_P +_{i,R} g_Q \coloneqq \mathrm{Sh}_{i,-2R_*}(g_P) \cup \mathrm{Sh}_{i,2R_*}(g_Q)$$

以及块算子

$$P +_{i,R} Q \coloneqq \mathrm{Sh}_{i,-2R_*}(P) \cup \mathrm{Sh}_{i,2R_*}(Q)$$

在 $\mathfrak{S}_{g_P +_{i,\ R} g_Q}$，其中 $\cup$ 定义见定义 4.3.19。

命题4.7.17。采用前一定义中的记号，算子$P +_{i,\ R} Q$ 是一个块狄拉克算子，其各面由下式给出

$$\partial_j^\omega (P +_{i,R} Q) \coloneqq \begin{cases} \partial_i^{-1} P, & \text{if } j = i, \omega = -1, \\ \partial_i^1 Q, & \text{if } j = i, \omega = 1, \\ \partial_j^\omega P +_{i-1,R} \partial_j^\omega Q, & \text{if } j < i, \\ \partial_j^\omega P +_{i,R} \partial_j^\omega Q, & \text{if } j > i. \end{cases}$$

若 P 和 Q 可逆，则存在一个 R_0，依赖于 P 和 Q，使得$P +_{i,\ R} Q$ 对所有 $R > R_0$ 也可逆。

证明。容易看出，由于该空间是局部的，$P +_{i,\ R} Q \in \Psi$属于 $\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{g_{P+_{i,\ R}Q}})$，参见 [AS68]。此外，很容易看出它是一个具有所述各面的块算子。符号演算意味着 $\mathrm{symb}_1(P +_{i,\ R} Q) = \mathbf{c}(g_{P+_{i,\ R}Q}\sharp(-))$。推论 4.3.20意味着 $P +_{i,\ R} Q$ 是对称的。

由于平移算子是由微分同胚的推前所诱导的，因此 $\mathrm{Sh}_{i,\ R_*}\mathfrak{D}_g = \mathfrak{D}_{\mathrm{Sh}_{i,\ R}(g)}$，从而 $\mathfrak{D}_{g_P +_{i,\ R} g_Q} = \mathfrak{D}_{g_P} +_{i,\ R} \mathfrak{D}_{g_Q}$。由此可得

$$P +_{i,R} Q - \mathfrak{D}_{g_{P+_{i,R}Q}} = P +_{i,R} Q - \mathfrak{D}_{g_P} +_{i,R} \mathfrak{D}_{g_Q} = (P - \mathfrak{D}_{g_P}) +_{i,R} (Q - \mathfrak{D}_{g_Q})$$

是两个有界算子的凸组合，因此它本身也是有界的

现在假设 P 和 Q 可逆，那么分别存在正常数 c_P和 c_Q，使得 $||P\sigma||_0 \ge c_P||\sigma||_0$和 $||Q\sigma||_0 \ge c_Q||\sigma||_0$。根据推论4.3.22，存在一个 R_0，使得对于所有 $R \ge R_0$，$P+_{i,\ R}Q$ 都有下界。由于$P +_{i,\ R} Q$ 是对称的，且与 $\mathfrak{D}_{g_{P+_{i,\ R}Q}}$ 相差一个有界算子，所以 $P +_{i,\ R} Q$ 也是自伴的，因此可逆。 □

最后，我们能够证明本节的主定理。

纤维化定理的证明*4.7.1.* 我们需要证明，每个交换外方块

$$\begin{array}{ccc} \sqcap^n_{(i,\ \varepsilon)} & \longrightarrow & \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \square[n]_\bullet & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{R}}_\bullet(M)。 \end{array}$$

都有一个虚线提升。换言之，对于给定的一组元素

$$\{P_{(j,\omega)} \in \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{n-1}(M) : \partial_j^\omega P_{(k,\eta)} = \partial_k^\eta P_{(j,\omega)} \text{ for } j<k,\ (j,\omega),(k,\eta) \neq (i,\varepsilon)\}$$

$\widetilde{\ }$以及一个块度量 $g \in \mathcal{R}_n(M)$，使得 $g_{P_{(j,\omega)}} = \partial_j^\omega g$，我们需要找到一个 $P \in \widetilde{\Psi\ \mathbf{Dir}}^{\times}_n(M)$，使得 $\partial_j^\omega P = P_{(j,\omega)}$ 且 $g_P = g$。问题在 (i,ε) 中完全对称，因此我们不妨假设 $(i,\varepsilon) = (n,1)$。由于 $\widetilde{\Psi\ \mathbf{Dir}}^{\times}_\bullet(M)$ 是一个 Kan 集，存在一个 $P \in \Psi\mathbf{Dir}_n(M)$，使得 $\partial_j^\omega P = P_{(j,\omega)}$。然而，一般而言，$g_{\hat{}P} \neq g$ 且 $g_{\partial_n^1\hat{}P} = \partial_n^1 g_{\hat{}P} \neq \partial_n^1 g$。

$\hat{}$我们首先修改 P，使所得的可逆分块狄拉克算子 P^{aux} 还满足 $g_{\partial_n^1 P^{\mathrm{aux}}} = \partial_n^1 g$。为此，选取一个光滑函数 $\chi\colon [-1,1]\to[0,1]$，使其在 -1 附近恒为 0，在 1 附近恒为 1。映射

$$\gamma\colon t \mapsto (1-\chi(t))g_{\partial_n^1\hat{P}} + \chi(t)\partial_n^1 g$$

$\widetilde{\ }$是一个光滑曲线 $\gamma\colon [-1,1]\to \mathcal{R}_{n-1}(M)_{\partial_n^1\hat{}P,\ R}$，其中 $R>0$ 足够大；这是因为假设的相容条件 $\partial_j^\omega g_{\partial_i^\varepsilon\hat{}P} = \partial_j^\omega\partial_i^\varepsilon g$ 对所有 $(j,\ \omega) \in \{1,\dots,n-1\}\times\mathbb{Z}_2$ 均成立。

路径提升命题 4.7.8 应用于 $Q_{-1} := \partial_n^1\hat{}P$ 和 γ，得到一条光滑、可悬挂的可逆分块狄拉克算子曲线 $Q\colon [-1,1]\to \widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}^{\times}_{n-1}(M)$，它在边界附近为常值，并满足 $g_{Q_1} = \partial_n^1 g$。将其以常值方式延拓为一个光滑映射 $Q\colon \mathbb{R}\to \widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}^{\times}_{n-1}(M)$。如有必要，对 Q重新参数化后，我们可以假设

$$\tilde{Q} := \mathrm{susp}(Q) = Q^{\mathrm{ex}} + \mathrm{e/o}\boxtimes\partial_n\cdot\frac{\partial}{\partial x_n}$$

是 $L^2(M\times\mathbb{R}^n;\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(\gamma)})$上的可逆算子。根据命题 4.7.17，存在一个足够大的 $R>0$，使得块狄拉克算子

$$P^{\mathrm{aux}} := \mathrm{Sh}_{n,2R_*}(\hat{P}+_{n,R}\tilde{Q})$$

是可逆的。由于 Q 的面与曲线参数无关，因此对于所有 $(j,\omega)\neq(n,1)$，都有 $\partial_j^\omega\tilde{Q} = \partial_j^\omega\sigma_n\partial_n^1\hat{}P$。我们得出 $\partial_j^\omega(P^{\mathrm{aux}}) = \partial_j^\omega P = P_{(j,\omega)}$。根据构造，$\partial_n^1(P^{\mathrm{aux}}) = \partial_n^1\tilde{Q} = Q_1$。因此，$P_{\text{辅助}}$ 是一个可逆分块狄拉克算子，并且对所有 $(j,\omega)\in\{1,\dots,n\}\times\mathbb{Z}_2$，都满足 $\partial_j^\omega g_{P^{\mathrm{aux}}} = \partial_j^\omega g$。

如前所述，光滑曲线

$$\Gamma\colon [-1,1]\to\widetilde{\mathcal{R}_n}(M)_{g_{P^{\mathrm{aux}}}},\qquad t\mapsto(1-\chi(t))g_{P^{\mathrm{aux}}}+\chi(t)g$$

对所有 $\partial_j^\omega\Gamma_t = \partial_j^\omega\Gamma_{-1}$、$t\in[-1,1]$ 以及所有面映射均成立。对 P^{aux} 和 Γ 应用路径提升引理，得到 Γ 的一个同伦提升 $\mathcal{P}$。由于 Γ 与 $g_{\mathcal{P}}$ 之间的同伦是相对于边界的，因此算子 $P_{\mathrm{fill}} ..= \mathcal{P}_1$ 就是所需的填充子。 □

4.8 算子理论加法

本节是第 3.4 节所述算子理论类比。我们将证明算子版的“角旋转”。确立这一结果后，我们便可从第 3.4 节的图示推导出该节结果的算子理论类比。此构造还会得到一个底层块度量 $g_R^{\angle}$，该度量经过平移后，可以视为本构造所产生度量的延长；本构造见命题3.4.2。关于该构造，请回顾第 4.7 节中自旋旋量丛背景下的平移算子。

命题4.8.1. 设 $n \geq 1$，并设 P 是一个块狄拉克算子，其底层块度量为 g，定义在 $M \times \mathbb{R}^n$ 上，且其核包含于 $M \times \rho I^n$ 中。那么，对于所有 $R \geq 1$，存在定义在 $M \times \mathbb{R}^{n+1}$ 上的块狄拉克算子 $P_R^{\angle}$，其底层块度量为 $g_R^{\angle}$，并满足以下性质：

(i) $P_R^{\angle}$ 的面由下式给出

$$\partial_i^{\varepsilon}(P_R^{\angle}) = \begin{cases} \sigma_{n+1}\partial_i^{\varepsilon} P, & \text{if } i < n, \\ \sigma_{n+1}\partial_i^{\varepsilon} P, & \text{if } i \geq n, \varepsilon = 1, \\ P, & \text{if } i \geq n, \varepsilon = -1. \end{cases}$$

(ii) 如果 P 可逆，那么对于所有充分大的 R，$P_R^{\angle}$ 也可逆。

证明. 与命题 3.4.2 的证明相同，设 K 是 I^2 内一个紧的、凸的、中心对称的实体，其边界 ∂K 光滑，并且在 $\{|x_1| \leq 1/2\}$ 和 $\{|x_2| \leq 1/2\}$ 内与 I^2 一致。设 $\gamma\colon [0,l] \to \partial K \cap \mathbb{R}^2_{\geq 0}$ 是以弧长为参数的光滑曲线，满足 $\gamma(0) = e_1$；设 $v\colon [0,l] \to \mathbb{R}^2$ 是垂直于 γ' 且满足 $\det(v, \gamma') > 0$ 的单位向量场；设 κ 是 γ 的曲率。回忆一下，这一符号约定意味着 $v(0) = e_1$，并且 $v' = \kappa\gamma'$。用 γ_R、v_R 和 κ_R 表示将 K 替换为 $R \cdot K$ 后得到的对应对象。

由于 $K \cap \{|x_j| \leq 1/2\}$ 是一个矩形，我们可以构造延长

$$\mathbf{K} \coloneqq K \cap \mathbb{R}^2_{\geq 0} \cup \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}^2_{>0} : x_1 \in K \text{ or } x_2 \in K\} \cup \mathbb{R}^2_{\leq 0}$$

并以常值方式延拓 γ、v、κ，得到光滑映射 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$。对于 $R \cdot K$ 以及重新缩放后的类似对象 γ_R、v_R 和 κ_R，情况也相同。

延拓后的对象通过以下方式在 $\mathbb{R}^2 \setminus R\mathbf{K}$ 上引入坐标

$$\begin{aligned} \Xi_R\colon (0,\infty) \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \setminus R\mathbf{K} \\ (r, \varphi) &\mapsto \gamma_R(\varphi) + r \cdot v_R(\varphi), \end{aligned}$$

使得

$$(\Xi_R^* \langle \cdot, \cdot \rangle)_{(r,\varphi)} = \mathrm{d}r^2 + (1 + r\kappa_R(\varphi))^2 \mathrm{d}\varphi^2.$$

现在我们已经回顾了所需的记号，可以开始构造了。为避免区分不同情形，我们先假设算子 P 是可逆的

。这并不构成限制，因为构造中的每一步都可以在不作可逆性假设的情况下完成（当然，由此得到的算子就不可能是可逆的）。

我们固定一个 c_P 下界 P，并假设它小于 1。我们将 $M\times\mathbb{R}^{n-1}$ 简记为 N，使得 $M\times\mathbb{R}^n = N\times\mathbb{R}$（最后一个坐标是指定坐标）。对于固定的 $\rho' > \max\{32/c_P, \rho\}$，算子 $\mathrm{Sh}_{n,\ 2\rho}(P)$ 限制到 $N\times\mathbb{R}_{>0}$，并将该限制记为 Q。

在 $N\times\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$ 上（以 Ξ_R 坐标表示）定义度量

$$(g_R)_{(n,r,\varphi)} \coloneqq (\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g))_{(n,r)} + (1+r\kappa_R(\varphi))^2\mathrm{d}\varphi^2$$

并在 $\mathfrak{S}_{g_R}\to N\times\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$ 上定义算子

$$\mathtt{P}_R \coloneqq \mathcal{G}(\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)\oplus\mathrm{d}\varphi^2, g_R)_*(Q\boxtimes\mathrm{id} - \not{\mathfrak{D}}_{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}g}\boxtimes\mathrm{id}) + \not{\mathfrak{D}}_{g_R}.$$

注意，$(\Xi_R)_*(g_R) = \mathrm{Sh}_{n,\ 2\rho'+R}(g)\oplus\mathrm{d}x_{n+1}^2$ 在 $N\times\Xi_R((0,\ \rho')\times\mathbb{R})$ 上，因此度量 $(\Xi_R)_*(g_R)$ 与 $\partial_n^{-1}g\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^2}$ 在此处一致。由于 $\rho'>\rho$，算子 Q 和 $\not{\mathfrak{D}}_{\mathrm{Sh}_{n,\ 2\rho'}*g}$ 在 $N\times(0,\ \rho')$ 上分解为

$$Q = \partial_n^{-1}P\boxtimes\mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes\not{D}_{(0,\rho')} \quad\text{and}\quad \not{\mathfrak{D}}_{\mathrm{Sh}_{n,2\rho'}*g} = \not{\mathfrak{D}}_{\partial_n^{-1}g}\boxtimes\mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes\not{D}_{(0,\rho')},$$

其中，$\not{D}_{(0,\rho')}$ 表示 $(0,\rho')$ 上欧几里得度量的狄拉克算子。因此，算子 $(\Xi_R)_*(\mathtt{P}_R)$ 和 $\partial_n^{-1}P\boxtimes\mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes\not{D}_{\mathbb{R}^2}$ 在 $N\times\Xi_R((0,\rho')\times\mathbb{R})$ 上的限制相同。它们在 r 方向上也作为导子作用，因此我们可以将这些算子粘合起来[8]。我们定义

$$P_R^{\not<} \coloneqq \mathrm{Sh}_{-(R+2\rho')(e_n+e_{n+1})*}\left(\partial_n^{-1}P\boxtimes\mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes\not{D}_{\mathbb{R}^2}\cup\Xi_{R,*}(\mathtt{P}_R)\right)$$

其底层度量为 $g_R^{\not<} \coloneqq \mathrm{Sh}_{-(R+2\rho')(e_n+e_{n+1})*}(g_R\cup\partial_n^{-1}g\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^2})$，定义在 $M\times\mathbb{R}^{n+1}$ 上。

注意，$P_R^{\not<}\in\Psi\overline{\mathrm{DO}}^1(\mathfrak{S}_{g_R^{\not<}})$，因为空间 $\Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{g_R^{\not<}})$ 是局部的，而 $P_R^{\not<}$ 是通过向 P 添加其他伪微分算子（Atiyah-Singer 意义下的算子）、将其与恒等函数张量积，并利用向量丛映射和微分同胚将算子向前推送而得到的。

算子 $P_R^{\not<}$ 也是一个狄拉克型块算子。事实上，它的核包含在 $M\times(R+5\rho')I^n$ 内；对于支集位于 $N\times R\cdot\mathbf{K}$ 与粘合带 $N\times\Xi_R((0,\rho')\times\mathbb{R})$ 的并集内的截面，以及支集分别位于 $N\times R\cdot\mathbf{K}$ 之外的截面，都可以验证这一点。

算子 $P_R^{\not<}$ 是对称的，因为 $\mathtt{P}_R$ 作用于 $N\times(0,\ \rho')\times\mathbb{R}$ 上时，是沿 r 方向的微分算子，因此我们可以应用推论 4.3.20。

算子 $(P-\not{\mathfrak{D}}_g)\boxtimes\mathrm{id}$ 在 $L^2(\mathfrak{S}_{g\oplus\mathrm{d}\varphi^2})$ 上诱导出一个有界算子，这也意味着根据引理 B.0.24，其主符号为零。因此，$\mathtt{P}_R$ 不同

[8] 这意味着我们处于定义 4.3.19 的设定中，尽管我们不打算明确写出常数 a 和 b。对于定义 4.3.19 中的 R，我们选择 $R = 4/c_P$ 使得 $2R < \rho'/2$。为完整起见，其余数据如下：定义 4.3.19 中的环境流形 M 在此为 $M\times\mathbb{R}^{n+1}$，分离超曲面为 $N\times\Xi_R(\rho'/2\times\mathbb{R})$，算子 P_1 为 $\partial_n^{-1}P\boxtimes\mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes\not{D}_{\mathbb{R}^2}$，作用于 $N\times\left(RK\cup\Xi_R((0,\rho')\times\mathbb{R})\right)$，且 P_2 为 $(\Xi_R)_*(\mathtt{P}_R)$

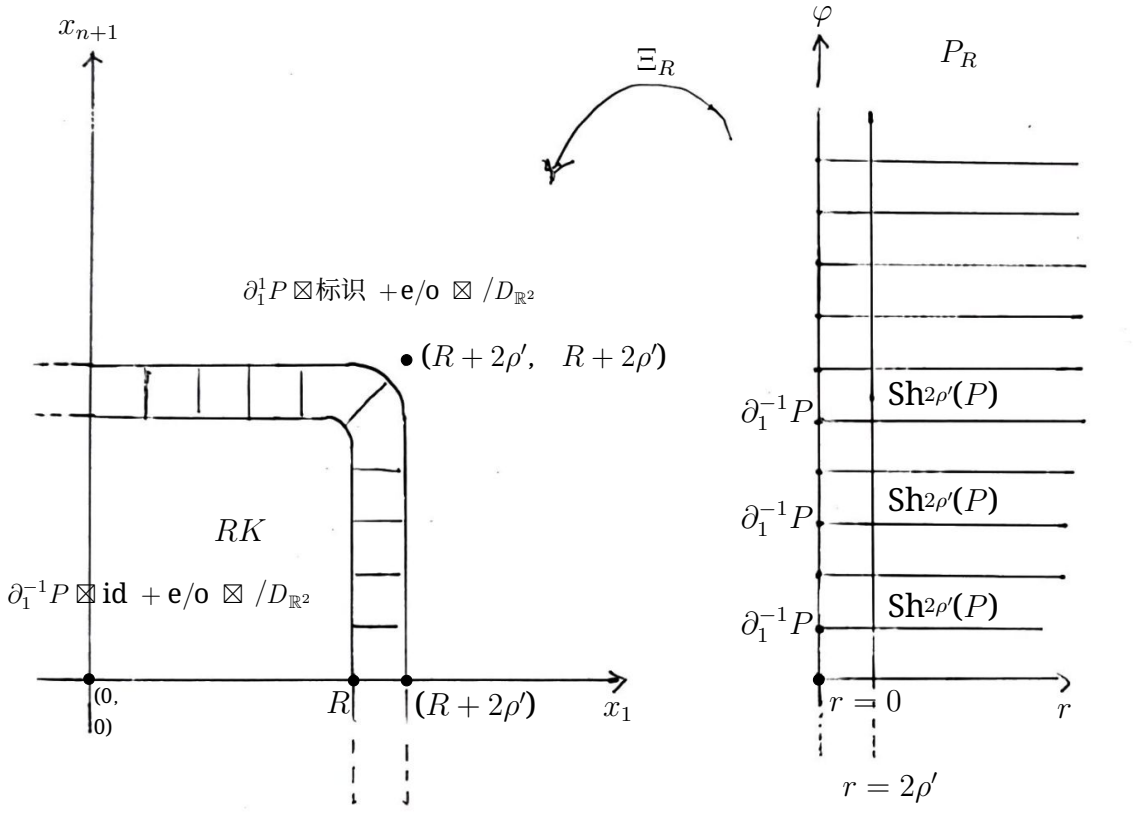


图4.1：$\left(\partial_n^{-1}P \boxtimes \mathrm{id} + \mathsf{e}/\mathsf{o} \boxtimes /D_{\mathbb{R}^2} \cup \Xi_{R,\ *}(\mathtt{P}_R)\right)$和 $\mathtt{P}_R$ 的构造。我们需要将算子移向 $-2\rho(e_n+e_{n+1})$，使这些面与给定的算子一致。右侧条带显示了 $\mathtt{P}_R$ 在 Ξ_R 坐标中的情况，尽管我们没有画出狄拉克算子直和项。

与其底层度量 g_R 的狄拉克算子相差一个有界算子，并且与其底层度量的狄拉克算子具有相同的主符号。对于 $\partial_n^{-1}P \boxtimes \mathrm{id} + \mathsf{e}/\mathsf{o} \boxtimes /D_{\mathbb{R}^2}$，情况也相同，因此并集 $(\Xi_R)_*\mathtt{P}_R \cup (\partial_n^{-1}P \boxtimes \mathrm{id} + \mathsf{e}/\mathsf{o} \boxtimes /D_{\mathbb{R}^2})$ 也具有相同性质。

从视觉上看，参见图 4.1；此外，我们只在最后两个坐标上修改算子 $P \boxtimes \mathrm{id}$，这意味着 $P_R^{\not<}$ 具有如上所述的各个面。这就证明了 (i)。

我们将在下文的推论 4.8.3 中证明，只要 R 足够大，$||\mathtt{P}_R\sigma||_0 \geq c_P/3||\sigma||_0$ 就成立。因此，$(\Xi_R)_*(\mathtt{P}_R)$ 在 $\mathfrak{S}_{(\Xi_R)_*(g_R)} \to N\times\mathbb{R}^2\backslash R\cdot\mathbf{K}$ 上有下界，下界为 $c_P/3$。由于 $\rho' > 32/c_P$，将推论 4.3.22（粘合带长度为$4/c_P$）应用于 $(\Xi_R)_*(\mathtt{P}_R)$ 和 $\partial_n^{-1}P \boxtimes \mathrm{id} + \mathsf{e}/\mathsf{o} \boxtimes /\mathsf{D}_{\mathbb{R}^2}$，可知 $P_R^{\not<}$ 有下界

$$\begin{aligned} c^2_{P_R^{\not<}} &= 1/4 \cdot \min\{c^2_{(\Xi_R)_*(\mathtt{P}_R)} - c_P^2/16, c_{\partial_1^{-1}P} - c_P^2/16\} \\ &= 1/4 \cdot (c^2_{(\Xi_R)_*(\mathtt{P}_R)} - c_P^2/16) \\ &\geq 1/4(1/9 - 1/16)c_P^2 > c_P^2/100. \end{aligned}$$

由于 $P_R^{\swarrow}$ 是块狄拉克算子，特别是自伴的，因此它可逆，这就证明了 (ii)。

□

引理 4.8.2. 沿用前一个命题证明中的记号，算子 $D..= \mathcal{G}(g_R, \mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g) \oplus \mathrm{d}\varphi^2)_*(\not{\mathfrak{D}}_{g_R}) - \not{\mathfrak{D}}_{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)} \boxtimes \mathrm{id}$ 由下式给出

$$D = (1 + r\kappa_R)^{-1}\partial_\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{2}(1 + r\kappa_R)^{-2} r(\partial_\varphi \kappa_R)\partial_\varphi \cdot .$$

证明。 简记 $\mathcal{G}(g_R, \mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g) \oplus \mathrm{d}\varphi^2)$ 为 $\mathcal{G}$。我们需要用 Ξ_R 所诱导的坐标表示 D。为此，固定一个局部的 $(\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g) \oplus \mathrm{d}\varphi^2)$-正交规范标架 $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}$，使得 $e_1, \ldots, e_n$ 与 φ 和 $e_{n+1} = \partial_\varphi$ 无关。

回忆一下定义 $\tau_{g_R, \mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)\oplus \mathrm{d}\varphi^2}$ 中的预规范映射 4.1.20 及其在相应克利福德代数之间所诱导的映射 $\Phi = \Phi_{g_R, \mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)\oplus \mathrm{d}\varphi^2}$。定义$g_R$-正交规范标架

$$f_j \coloneqq \tau_{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)\oplus \mathrm{d}\varphi^2, g_R}(e_j) = \begin{cases} e_j, & \text{if } j < n+1, \\ (1 + r\kappa_R)^{-1}\partial_\varphi, & \text{if } j = n+1. \end{cases}$$

回顾引理4.1.32 证明中的公式

$$\mathcal{G}_*(\not{\mathfrak{D}}_{g_R}) = p\mathcal{G}_*(\not{\mathfrak{D}}_{g_R}) - \alpha^{-1}\Phi(\mathrm{grad}_{g_R}\alpha)\cdot \,,$$

其中

$$\alpha^2 = \alpha^2_{g_R, \mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)\oplus \mathrm{d}\varphi^2} = \frac{\mathrm{dvol}_{g_R}}{\mathrm{dvol}_{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)\oplus \mathrm{d}\varphi^2}} = (1 + r\kappa_R).$$

对 α 求导，得到

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}(1 + r\kappa_R)^{-1/2}\left(\kappa_R \mathrm{d}r + r\partial_\varphi\kappa_R \mathrm{d}\varphi\right).$$

因此，梯度为

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}_{g_R}(\alpha) &= \mathrm{grad}_{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)+(1+r\kappa_R)^2\mathrm{d}\varphi^2}(\alpha) \\ &= \frac{1}{2}(1 + r\kappa_R)^{-1/2}\left(\kappa_R \mathrm{grad}_{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)}(r) + r(\partial_\varphi\kappa_R)\cdot(1 + r\kappa_R)^{-2}\partial_\varphi\right) \end{aligned}$$

因此，第一项为

$$\alpha^{-1}\Phi(\mathrm{grad}_{g_R}\alpha) = \frac{1}{2}(1 + r\kappa_R)^{-1}\left(\kappa_R \mathrm{grad}_{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)}(r) + r(\partial_\varphi\kappa_R)\cdot(1 + r\kappa_R)^{-1}\partial_\varphi\right).$$

确定第二个加项需要计算克里斯托费尔符号。由 [LM89，定理 II.4.14] 可得

$$\begin{aligned} p\mathcal{G}_*(\not{\mathfrak{D}}_{g_R}) &= p\mathcal{G}_*\left(\sum_{i=1}^{n+1} f_i \cdot \nabla^{\mathfrak{S}_{g_R}}_{f_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} e_i \cdot p\mathcal{G}_*\left(\nabla^{\mathfrak{S}_{g_R}}\right)_{f_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} e_i \cdot \left(\partial_{f_i} + \frac{1}{2}\sum_{j<k} {}^{g_R}_{f}\Gamma^k_{ij} e_j e_k\right), \end{aligned}$$

其中 ${}^{g_R}_{f}\Gamma^k_{ij}$ 是 g_R 的列维-奇维塔联络在局部正交标架 f_1，…，f_{n+1} 下的克里斯托费尔符号，而 ∂_{f_j} 是在识别下沿 f_j 方向的通常偏导数

$$\begin{aligned}\Gamma_c(M\times\mathbb{R}^n,\mathfrak{S}_{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}})&=\Gamma_c(M\times\mathbb{R}^n,\mathfrak{S}_{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)}\boxtimes Cl_{n,0})\\&\cong\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n,\Gamma(M,\mathfrak{S}_{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)})\otimes Cl_{n,0}).\end{aligned}$$

我们也将 f_{n+1} 记作 f_φ，以强调特定坐标。向量场 f_1、……、f_n 与 φ无关，因此交换子 $[f_j,f_\varphi]$ 由下式给出

$$\begin{aligned}[f_j,f_\varphi]=[f_j,(1+r\kappa_R)^{-1}\partial_\varphi]&=-(1+r\kappa_R)^{-1}\partial_{f_j}(r)\cdot\kappa_R\partial_\varphi\\&=-(1+r\kappa_R)^{-1}\partial_{f_j}(r)\kappa_R f_\varphi\end{aligned}$$

克里斯托费尔符号的 Koszul 公式蕴含

$${}^{g_R}_{f}\Gamma^k_{ij}={}^{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)}_{e}\Gamma^k_{ij},\quad {}^{g_R}_{f}\Gamma^\varphi_{ij}={}^{g_R}_{f}\Gamma^k_{\varphi j}=0,\quad\text{and}\quad {}^{g_R}_{f}\Gamma^\varphi_{\varphi j}=(1+r\kappa_R)^{-1}\kappa_R\partial_{f_j}(r).$$

因此，第二项为

$$\begin{aligned}p\mathcal{G}_*(\not{\mathbf{D}}_{g_R})-\not{\mathbf{D}}_{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)}\boxtimes\mathrm{id}&=p\mathcal{G}_*\left(\sum_{j=1}^{n+1}f_j\cdot\nabla^{\mathfrak{S}_{g_R}}_{f_j}\right)-\sum_{j=1}^{n}e_j\cdot\nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)}}_{e_j}\\&=\partial_\varphi\cdot\left(\partial_{f_\varphi}+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(1+r\kappa_R)^{-1}\kappa_R\partial_{f_j}(r)e_j\partial_\varphi\cdot\right)\\&=(1+r\kappa_R)^{-1}\left(\partial_\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{1}{2}\kappa_R\mathrm{grad}_{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)}(r)\cdot\right).\end{aligned}$$

将所有结果合并起来，可得

$$D=\mathcal{G}_*(\not{\mathbf{D}}_{g_R})-\not{\mathbf{D}}_{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)}\boxtimes\mathrm{id}=(1+r\kappa_R)^{-1}\partial_\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{2}(1+r\kappa_R)^{-2}r(\partial_\varphi\kappa_R)\partial_\varphi\cdot$$

如所声称的。 □

推论 4.8.3. 将 $\mathcal{G}(g_R,\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)\oplus\mathrm{d}\varphi)$ 简记为 $\mathcal{G}$. 对于 $\bar\rho>5\rho'$，定义 $N_{\bar\rho}:=N\times(0,\bar\rho)\times\mathbb{R}$. 则存在一个仅依赖于 $\bar\rho$ 的常数 C，使得在 $N_{\bar\rho}$ 上，我们有

$$\left|\left|\mathcal{G}(g_R,\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)\oplus\mathrm{d}\varphi^2)_*(\mathtt{P}_R)-Q\boxtimes\mathrm{id}-\mathrm{e/o}\boxtimes\not{D}_{\mathbb{R}}\right|\right|_{1,0}\leq C/R.$$

特别地，对于所有充分大的 R，以及所有支集包含于 $N\times\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{R}$ 内的截面，$||\mathtt{P}_R\sigma||_0\geq c_P/12||\sigma||_0$。

证明。 前述引理表明

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_*(\mathtt{P}_R)-Q\boxtimes\mathrm{id}-\mathrm{e/o}\boxtimes\not{D}_{\mathbb{R}}&=D-\partial_\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\\&=-(1+r\kappa_R)^{-1}r\kappa_R\partial_\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{1}{2}(1+r\kappa_R)^{-2}r(\partial_\varphi\kappa_R)\partial_\varphi\cdot.\end{aligned}$$

由于 $\kappa_R = 1/R \cdot \kappa(-/R)$，我们估计 $D - \partial_\varphi \cdot \partial/\partial\varphi$ 在 $N_{\bar\rho}$ 上的算子范数如下

$$\begin{aligned}\left\| D - \partial_\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\|_{1,0} &\leq \left\| \frac{r\kappa_R}{1 + r\kappa_R} \right\|_{0,0} \cdot \underbrace{\left\| \partial_\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\|_{1,0}}_{=1} + \frac{1}{2} \left\| \frac{r(\partial_\varphi \kappa_R)}{(1 + r\kappa_R)^2} \right\|_{0,0} \\ &\leq \frac{1}{R} \left\| \frac{r(\kappa \circ (1/R))}{(1 + r\kappa_R)} \right\|_{\infty, N_{\bar\rho}} + \frac{1}{R^2} \left\| \frac{r(\partial_\varphi \kappa) \circ (1/R)}{(1 + r\kappa_R)^2} \right\|_{\infty, N_{\bar\rho}} \\ &\leq C(\bar\rho)/R.\end{aligned}$$

由于 $Q \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes /D_{\mathbb{R}}$ 是块狄拉克算子，因此满足基本椭圆估计。该算子还具有下界 c_P。根据引理4.3.13，我们得到一个常数 R_0，它仅取决于 Q，使得对于所有 $R > R_0$，算子 $\mathcal{G}_*(\mathtt{P}_R)$ 与 $Q \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes /D_{\mathbb{R}}$ 在 $N_{\bar\rho}$ 上充分接近，从而$||\mathcal{G}_*(\mathtt{P}_R)\sigma||_0 > c_P/3||\sigma||_0$ 对 $N_{\bar\rho}$内所有紧支撑截面均成立。规范映射 $\mathcal{G}(g_R, \mathrm{Sh}_{r,\ 2\rho'}(g) \oplus \mathrm{d}\varphi^2)$ 是一个覆盖恒等函数的丛映射，它在相应的平方可积旋量希尔伯特空间之间诱导出一个等距映射，因此 $\mathtt{P}_R$也成立。

在 $N_{>5\rho'} ..= N \times \mathbb{R}_{>5\rho'} \times \mathbb{R}$ 上，度量 g_R and $\mathrm{Sh}_{r,\ 2\rho'}(g) \oplus \mathrm{d}\varphi^2$ decompose into

$$g_R|_{N_{>5\rho'}} = \partial_n^1 g \oplus \Xi_R^* \langle \cdot, \cdot \rangle \quad \text{and} \quad \mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)|_{N_{>5\rho'}} = \partial_n^1 g \oplus \mathrm{d}r^2 \oplus \mathrm{d}\varphi^2$$

使得 $\mathcal{G}(g_R, \mathrm{Sh}_{r,\ 2\rho'}(g) \oplus \mathrm{d}\varphi^2) = \mathrm{id}_N \boxtimes \mathcal{G}(\Xi_R^* \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathrm{d}r^2 \oplus \mathrm{d}\varphi^2)$。算子 Q在此分解为

$$Q|_{N_{>5\rho'}} = \partial_n^1 Q \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{e/o} \boxtimes \not{D}_{\mathbb{R}_{>5\rho'}}.$$

现在依照定义逐步推导可得

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_*(\mathtt{P}_R) &= (Q - \not{\mathcal{D}}_{\mathrm{Sh}_{r,2\rho'}(g)}) \boxtimes \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + \mathcal{G}_*(\not{\mathcal{D}}_{g_R}) \\ &= \partial_n^1 Q \boxtimes \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>5\rho' \times \mathbb{R}}} + \mathrm{e/o} \boxtimes \mathcal{G}(\Xi_R^* \langle \cdot, \cdot \rangle, \mathrm{d}r^2 \oplus \mathrm{d}\varphi^2)_* \big(\Xi_R^* (\not{D}_{\mathbb{R}^2}) \big),\end{aligned}$$

由此我们推得 $\mathcal{G}_*(\mathtt{P}_R)^2 \geq c_{\partial_1^n P} \mathrm{id}$是一致正的。因此 $\mathcal{G}_*(\mathtt{P}_R)$有下界，下界为 $c_{\partial_1^n P}$。通过将差值 $\bar\rho - 5\rho'$ 取足够大，我们可以应用推论 4.3.22 推得 $||\mathcal{G}_*(\mathtt{P}_R)\sigma||_0 \geq c_P/12||\sigma||_0$对 σ内所有紧支撑截面 $N \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$均成立，这就证明了补充结论。

□

算子协调集上的算子理论加法

由于 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M)$ 是一个 Kan 集，因此（组合）同伦群是良定义的，并带有组合群结构。这种群结构通过 Kan 条件形式化定义；由于我们不跟踪填充子，群结构只定义在同伦类上。我们在小节 $\widetilde{\ }$中构造了若干种几何 $\pi_n(\mathcal{R}_\bullet^+(M))$ 群结构，见小节 3.4，这些结构几乎可以在代表元层面上运作。可逆分块狄拉克算子的类似运算

已在定义 4.7.16 中引入。回顾一下，对于两个可逆块算子 P， $Q \in \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M)$，其中 $\partial_j^1 P = \partial_j^{-1} Q$ 的核包含于 $M \times \rho I^n$，算子

$$P +_{j,R} Q \coloneqq \mathrm{Sh}_{j,R}(P)|_{\{x_j \le 0\}} \cup \mathrm{Sh}_{j,R}(Q)|_{\{x_j \ge 0\}}$$

是块度量上的块狄拉克算子

$$\begin{aligned} g_{P+_{j,R}Q} &\coloneqq \mathrm{Sh}_{j,R}(g_P)|_{\{x_j \le 0\}} \cup \mathrm{Sh}_{j,R}(g_Q)|_{\{x_j \ge 0\}} \\ &= g_P +_{j,R} g_Q \end{aligned}$$

对所有 $R > \rho$ 都成立。如果 R 足够大，那么所得的块狄拉克算子也可逆。

下一个定理是定理 3.4.4 的算子理论类比。

定理4.8.4。 在 $\pi_n(\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M))$ 上有 n 多种群结构，定义如下：如果 P、Q 分别是 $[P]$、$[Q] \in \pi_n(\Psi\mathrm{Dir}_\bullet(M))$ 的代表元，且 R 足够大，那么我们定义

$$[P] +_j [Q] \coloneqq [P +_{j,R} Q].$$

如果 r_j 表示关于超平面 $\{x_j = 0\}$ 的反射，那么 $[P]$ 关于 $+_j$ 的逆元由 $[r_j^* P]$ 给出。这些结构彼此之间具有 *Eckmann-Hilton* 关系。此外， $+_1$ 与立方集合论中的群结构一致。

证明。 整个证明与定理3.4.4 的证明完全类似，唯一的不同是在证明 $+_{j,R}$ 与 R无关时遇到一个小小的技术难题。

对于两个算子 P, Q，取足够大的 $R_0 < R_1$，使得 $P +_{j,R_k} Q$ 有定义。我们希望构造它们之间的共边。

如果 $\chi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ 是一个满足 $\chi|_{\mathbb{R}\le -1} = 0$ 的光滑函数，且 $\chi|_{\mathbb{R}\ge S} = 1$ 满足 $|\chi'| \le /1/S$ 和 $|\chi''| \le 4/S^2$，那么 $P +_{j,R_\chi} Q$ 是 $g_P +_{j,R_\chi} g_Q$ 上的一条路径，连接$P +_{j,R_0} Q$ 与 $P +_{j,R_1} Q$。

如果 $\mathrm{susp}(P +_{j,R_\chi} Q)$ 是 $\Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(\overline{g_P +_{j,R} g_Q})})$ 中的一个元素，那么只要 S 足够大，算子 $\mathrm{susp}(P +_{j,R_\chi} Q)$ 就是一个可逆分块狄拉克算子，因此可作为共边。我们不能直接将定理B.0.29应用于曲线 $P +_{j,R_\chi} Q$，因此必须采用下面的“瑞士军刀技巧”：考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上的微分同胚 $\mathrm{Sh}_{j,\pm 2R_\chi}$，定义如下

$$\mathrm{Sh}_{j,R_\chi}\colon x \mapsto x + \Big((1-\chi(x_{n+1}))R_0 + \chi(x_{n+1})R_1\Big)\cdot e_j.$$

定理 B.0.28 意味着 $P \boxtimes \mathrm{id} \in \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{\overline{g_P \oplus \mathrm{d}x_{n+1}^2}})$，类似地， $Q \boxtimes \mathrm{id} \in \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{\overline{g_Q \oplus \mathrm{d}x_{n+1}^2}})$。由此可得 $\mathrm{Sh}_{j,\ -R_\chi}(P \boxtimes \mathrm{id}) \in \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{\mathrm{Sh}_{j,\ \overline{R_\chi(g)+\mathrm{d}x_{n+1}^2}}})$。$\mathrm{Sh}_{j,\ R_\chi}(Q \boxtimes \mathrm{id})$ 也有类似结果。由于 $\Psi\mathrm{DO}^1$ 是局部的，我们得出

$$\mathrm{Sh}_{j,-R_\chi}(P \boxtimes \mathrm{id}) \cup \mathrm{Sh}_{j,R_\chi}(Q \boxtimes \mathrm{id}) \in \overline{\Psi\mathrm{DO}}^1(\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(g_P +_{j,R_\chi} g_Q)})$$

因此，$\mathrm{susp}(P +_{j,R_\chi} Q) \in \Psi\mathrm{DO}^1(\overline{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(g_P +_{j,R_\chi} g_Q)}})$，因为这两个算子之差是一个微分算子。

□

分块狄拉克算子的指标可加性

作为命题 4.7.17的一个应用，我们证明了具有可逆面的块狄拉克算子的弗雷德霍姆指标的可加性公式。现有文献中已有若干此类定理，参见 [BBW93], [Bun95], [BERW17]。我们这一版本的新特点是适用于伪微分算子，更重要的是，也适用于非紧分离超曲面。

尽管 Bunke [Bun95] 是首位证明此类可加性定理的人，但我们在记号和策略上遵循 [BERW17]。

对于 $\alpha \in \{0,\dots,3\}$，设 $P_\alpha \in \Psi\mathrm{Dir}_n(M)$ 是底层度量为 g_α 的块狄拉克算子。对于固定但任意的 $i \in \{1,\dots,n\}$，假设 $\partial_i^1 P_\alpha = \partial_i^{-1} P_\beta$对于 $(\alpha,\ \beta) \in \{(0,1),(2,3),(0,3),(2,1)\}$（这意味着底层度量的相应面彼此相同），并且所有其他面均可逆。令 R_0 为一个正数，使得所有 P_j 的核都位于 $M \times R_0 I^n$ 的内部。对于所有 $R > R_0$，定义 $P_{\alpha\beta,\ R} := P_\alpha +_{R,\ i} P_\beta$。这些是定义在 $\mathfrak{S}_{g_{\alpha\beta,\ R}}$ 上的块狄拉克算子，其中 $g_{\alpha\beta,\ R} = g_\alpha +_{R,\ i} g_\beta$。

定理 4.8.5 (指标可加性)。存在一个 $R_1 > R_0$，使得对于所有 $R > R_1$，块狄拉克算子 $P_{\alpha\beta,R}$ 均有可逆面，因此是无界弗雷德霍姆算子。它们的指标与 R 无关，而且满足以下可加性公式：

$$\mathrm{index}(P_{01}) + \mathrm{index}(P_{23}) = \mathrm{index}(P_{03}) + \mathrm{index}(P_{21}) \in KO^{-(d+n)}(\mathrm{pt}). \tag{4.9}$$

证明。由于面算子与粘合构造可交换，根据推论 4.3.22，我们可以找到一个充分大的 R_1，使得 $P_{\alpha\beta,R}$ 对所有$R > R_1$都有可逆面。命题 4.3.7 表明，$P_{\alpha\beta,R}$ 是一个 Fredholm 算子。

赋值

$$s \mapsto \mathcal{G}(g_{\alpha\beta,(1-s)R_1+sR_2}, g_{\alpha\beta,R_1})_* \circ P_{\alpha\beta,(1-s)R_1+sR_2} \circ \mathcal{G}(g_{\alpha\beta,R_1}, g_{\alpha\beta,(1-s)R_1+sR_2})_*$$

是一个连接$P_{\alpha\beta,R_1}$ 与一个和$P_{\alpha\beta,R_2}$酉等价的算子的无界弗雷德霍姆算子路径。由于指标在同伦和酉等价下不变，因此我们有 $\mathrm{index}(P_{\alpha\beta,R_1}) = \mathrm{index}(P_{\alpha\beta,R_2})$。

在下文中，如果不会引起混淆，我们将省略希尔伯特空间和算子中的后缀 R。令 $H_{\alpha\beta} := L^2(\mathfrak{S}_{g_{\alpha\beta}})$。令$H^{\mathrm{op}}_{\alpha\beta}$ 为带有克利福德作用 $-\mathbf{r}$的相反克利福德模，其中该作用是典范右作用的负作用，并配备相反分次 $-\mathrm{e}/\mathrm{o}$。算子 $P^{\mathrm{op}}_{\alpha\beta}$ 与$P_{\alpha\beta}$“相同”，但作用于 $H^{\mathrm{op}}_{\alpha\beta}$ 上。

根据 [Ebe17，引理 2。20]所声称的公式等价于

$$\mathrm{index}(P_{01}) + \mathrm{index}(P_{23}) + \mathrm{index}(P^{\mathrm{op}}_{03}) + \mathrm{index}(P^{\mathrm{op}}_{21}) = 0. \tag{4.10}$$

左侧可写成单个算子 P 的指标。事实上，设 $H = H_{01} \oplus H_{23} \oplus H_{03} \oplus H_{21}$ 具有克利福德作用 r 和分次 ι，则有

$$r = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{01} & & & \\ & \mathbf{r}_{23} & & \\ & & -\mathbf{r}_{03} & \\ & & & -\mathbf{r}_{21} \end{bmatrix}, \qquad \iota = \begin{bmatrix} \mathrm{e}/\mathrm{o}_{01} & & & \\ & \mathrm{e}/\mathrm{o}_{23} & & \\ & & -\mathrm{e}/\mathrm{o}_{03} & \\ & & & -\mathrm{e}/\mathrm{o}_{21} \end{bmatrix}.$$

于是算子 P 可表示为

$$P = \begin{bmatrix} P_{01} & & & \\ & P_{23} & & \\ & & P_{03} & \\ & & & P_{21} \end{bmatrix}.$$

为便于后续讨论，我们将索伯列夫空间 $H^1 := H^1_{01} \oplus H^1_{23} \oplus H^1_{03} \oplus H^1_{21} \subseteq H$ 合并。

取 λ_0，μ_0：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，使得 $\operatorname{supp} \lambda_0 \subseteq \mathbb{R}_{\geq -1}$、$\operatorname{supp} \mu_0 \subseteq \mathbb{R}_{\leq 1}$，且 $\lambda_0^2 + \mu_0^2 = 1$。我们可以假设 $|\lambda_0'|$，$|\mu_0'| \leq 1$。定义 λ_R，μ_R：$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，使其满足 $\lambda_R(x) = \lambda_0(R^{-1}x_i)$ 且 $\mu_R(x) = \mu_0(R^{-1}x_i)$。算子

$$J_0 := \begin{bmatrix} & & -\mu_R & -\lambda_R \\ & & -\lambda_R & \mu_R \\ \mu_R & \lambda_R & & \\ \lambda_R & -\mu_R & & \end{bmatrix}$$

是 $H = H_R$ 上良定义的算子，因为例如对于右上角，限制相一致

$$\mathfrak{S}_{g_{21}}|_{\operatorname{supp} \lambda_R} = \mathfrak{S}_{g_1}|_{\operatorname{supp} \lambda_R} = \mathfrak{S}_{g_{01}}|_{\operatorname{supp} \lambda_R}$$

并且我们可以利用这些恒等式将截面从 H_{21} 传递到 H_{01}。其他项也有类似结果。

算子 $J := J_0\iota$ 因此是自伴、Clifford 线性、奇（相对于 ι），并且是 $\operatorname{Fred}^{d+n,\,0}(H)$ 中的有界对合。注意，出于代数原因，J 不可能是本质正或本质负。为验证等式（4.10），只需在 $\operatorname{Hom}(H^1,\ H)$ 中找到一条连接 P 与 J 的路径，使其取值为无界、自伴、奇、Clifford 线性 Fredholm 算子。我们声称这样的路径由下式给出

$$P_s \colon [0, \pi/2] \to \operatorname{Hom}(H^1, H), \quad s \mapsto \cos(s)P + \sin(s)J.$$

显然，每个 P_s 都是自伴、奇且 Clifford 线性的。剩下要证明的是，当 R 足够大时，P_s 是 Fredholm 算子。

P 和 J 的反对易子是算子

$$\{P, J\} := PJ + JP = \begin{bmatrix} & & -\mu_R' & -\lambda_R' \\ & & -\lambda_R' & \mu_R' \\ \mu_R' & \lambda_R' & & \\ \lambda_R' & -\mu_R' & & \end{bmatrix} \iota\partial_{x_i}$$

因为 λ_R 和 μ_R 在远离 $\{-R < x_i < R\}$的地方局部常数，并且 P 在 x_i方向上作用于条带 $\{-R < x_i < R\}$上时是一个微分算子。它是一个有界算子，并且通过增大 R，我们可以使其算子范数任意小（但仍为正）。然而，如果 $n > 1$，反对易子就不再是紧的，这正是我们现在需要偏离 [BERW17]中所给证明的原因。

证明 P_s 具有 Fredholm 性质的论证与命题 4.3.7 的证明类似。不过， P_s 并非块狄拉克算子，且会混合不同丛的截面，因此我们无法直接从命题 4.3.7 推导出 Fredholm 性质。不过，鉴于两者相似，我们不再重复所有细节。

先约定一些记号：元素 $u \in H$ 可以看作一个分量为 $u_{\alpha\beta} \in H_{\alpha\beta}$ 的元组；我们不会在记号上区分只有一个非零分量的向量与该分量本身。

对于所有 $u \in H^1$，我们有等式

$$||P_s u||_0^2 = \cos(s)^2||Pu||_0^2 + \sin(s)^2||u||_0^2 + \cos(s)\sin(s)\langle\{P, J\}u, u\rangle \tag{4.11}$$

类似地

$$||P_s u_{\alpha\beta}||_0^2 = \cos(s)^2||P_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}||_0^2 + \sin(s)^2||u_{\alpha\beta}||_0^2 + \cos(s)\sin(s)\langle\{P, J\}u_{\alpha\beta}, u_{\alpha\beta}\rangle.$$

如果 $u_{\alpha\beta}$ 的支集包含于 $\{\omega x_j > R\}$ ，且 $P_{\alpha\beta}$ 在此处分解，那么根据 $\partial_j^\omega P_{\alpha\beta}$的可逆性，我们得到估计

$$\begin{aligned}||P_s u_{\alpha\beta}||_0^2 &\geq c(j,\omega)^2\cos(s)^2||u_{\alpha\beta}||_1^2 + \sin(s)^2||u_{\alpha\beta}||_0^2 + \cos(s)\sin(s)\langle\{P, J\}u_{\alpha\beta}, u_{\alpha\beta}\rangle \\ &\geq \underbrace{\left(c(j,\omega)^2 - ||\{P, J\}||_{0,0}\right)}_{>0}||u_{\alpha\beta}||_1^2\end{aligned}$$

因为常数 $1 > c(j,\ \omega)$ 可以选取得与 R无关，参见推论4.3.22。

现在假设 $u_{\alpha\beta}$ 包含在一个固定的紧邻域 K 中，该邻域的内部包含 $P_{\alpha\beta}$的核。对于 $s \in [0, \pi/2)$，经典的椭圆估计引理4.3.2 以及 $||P_s u_{\alpha\beta}||_0^2$ 与 $||P_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}||_0^2$ 之间由方程（4.11）描述的关系给出

$$\begin{aligned}||u_{\alpha\beta}||_1^2 &\leq C\left(||u_{\alpha\beta}||_0^2 + ||P_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}||_0^2\right) \\ &= C\big(||u_{\alpha\beta}||_0^2 + \cos(s)^{-2}||P_s u_{\alpha\beta}||_0^2 - \tan(s)^{-2}||u_{\alpha\beta}||_0^2 \\ &\qquad - \tan(s)\langle\{P, J\}u_{\alpha\beta}, u_{\alpha\beta}\rangle\big) \\ &\leq \cos(s)^{-2}(1 + ||\{P, J\}||_{0,0}) \cdot C(||u_{\alpha\beta}||_0^2 + ||Pu_{\alpha\beta}||^2).\end{aligned}$$

现在我们利用 $\{\phi_l\}_{l\in L}$ 引理 4.3.3 中的单位分解将这些不等式拼接起来。与命题 4.3.7的证明中一样，我们有

$$\begin{aligned}||u||_1^2 &= \sum_{\alpha\beta}||u_{\alpha\beta}||_1^2 \leq (2n+1)\sum_{\alpha\beta}\sum_{l\in L}||\phi_l u_{\alpha\beta}||_1^2 \\ &\leq (2n+1)\sum_{\alpha\beta}\left(C_{\alpha\beta,0}(s)(||\phi_0 u_{\alpha\beta}||_0^2 + ||P_s\phi_0 u_{\alpha\beta}||_0^2) + \sum_{L\setminus 0} C_{\alpha\beta,l}(s)||P_s\phi_l u_{\alpha\beta}||_0^2\right) \\ &\leq C(s)\sum_{\alpha\beta}\left(||\phi_0 u_{\alpha\beta}||_0^2 + ||P_s u_{\alpha\beta}||_0^2 + \sum_L ||[P_s, \phi_l\cdot]u_{\alpha\beta}||_0^2\right) \\ &= C(s)\left(||P_s u||_0^2 + ||\phi_0 u||_0^2 + \sum_L ||[P_s, \phi_s\cdot]u||_0^2\right).\end{aligned}$$

由于 $[P_s, \phi_l \cdot] = \cos(s)[P, \phi_l \cdot] = \cos(s)\mathrm{grad}(\phi_l)\cdot$，我们最终得到

$$||u||_1^2 \leq C(s)\left(||P_s u||_0^2 + ||\phi_0 u||^2 + \sum_L ||\mathrm{grad}(\phi_l)\cdot u||_0^2\right).$$

和前面一样，算子 $\phi_0\cdot$和 $\mathrm{grad}(\phi_l)\cdot$都是紧算子，因为由紧算子组成的分块矩阵仍是紧算子。引理 4.3.8现在可得P_s 具有闭像和有限维核。由于 P_s 是自伴算子，因此它必为 Fredholm 算子。

总之，$s \mapsto P_s$ 是连接 P_0 与可逆算子$J = P_1$的一条连续路径。由指标的同伦不变性可知，$\mathrm{index}(P) = \mathrm{index}(J) = 0$，定理得证。

□

如 [GL83], 所示，我们可推出以下推论。

推论 4.8.6。设 (M^d, g_0) 是一个闭自旋流形，且 $\not{D}_{g_0}$ 可逆。设 $\chi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ 满足 $\chi(t) = 0$，其中 $t \ll 0$，且 $\chi(t) = 1$，其中 $t \gg 0$。指标差映射 $\pi_n(\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M)) \to KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt})$ 定义为

$$P \mapsto \mathrm{index}\big(\chi \cdot \mathrm{susp}(\mathcal{G}(g_P, g_\chi)_* P) + (1-\chi)\cdot \not{D}_{\mathrm{susp}(g_\chi)}\big),$$

其中 $g_\chi = \chi \cdot g_P + (1-\chi)(g_0 \oplus \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n})$ 是黎曼度量的插值分块映射，是一个良定义的映射，尤其与插值函数 χ 无关。此外，指标映射是一个良定义的群同态。

4.9 与实K理论的比较

在费尽心力构造 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M)$ 并证明它的若干性质之后，我们想知道它是否是实 K-理论的分类空间。幸运的是，答案是肯定的，因此我们可以精确地表述定理B:

定理 4.9.1。设 (M^d, g_0) 是一个自旋流形，且 $\not{D}_{g_0}$ 是一个可逆算子。那么悬挂

$$\Psi\mathrm{Dir}_\bullet^\times(M) \xleftarrow[\simeq]{\mathrm{incl}} B_\bullet \xrightarrow{\mathrm{susp}_\bullet} \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M)$$

是一个弱同伦等价。

由于典范映射 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M) \to \widetilde{\mathcal{R}}_\bullet(M)$ 是一个 Kan纤维化，且底空间是组合可缩的，因此只需证明到纤维的限制

$$\Psi\mathrm{Dir}_\bullet^\times(M)_{g_0} \xleftarrow[\simeq]{\mathrm{incl}} B_{\bullet,g_0} \xrightarrow{\mathrm{susp}_\bullet} \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M)_{g_0}$$

是弱同伦等价。

证明分两步进行。第一步是将两种不同的可逆伪狄拉克算子的立方集合与 KK-理论进行比较。更确切地说，我们将构造一个图表

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\Psi\mathrm{Dir}_\bullet^\times(M)_{g_0}) & \xrightarrow{\cong} & KK(Cl_{0,d}, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_n(\mathrm{susp}_\bullet)} & & \downarrow{\scriptstyle \cong\, \tau_{Cl_{0,n+1}}(-)\sharp\alpha_{n+1}} \\ \pi_n(\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M)_{g_0}) & \longrightarrow & KK(Cl_{0,d+n+1}, \mathbb{R}) \end{array} \tag{4.12}$$

我们将在下文的定理 4.9.9 中证明该交换图是可交换的，由此可推得 π_n(悬挂$_\bullet$) 是单射。

第二步是证明 π_n(悬挂$_\bullet$) 可分解如下：

$$\pi_n(\Psi\mathrm{Dir}_\bullet^\times(M)_{g_0}) \hookrightarrow KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt}) \twoheadrightarrow \pi_n(\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M)_{g_0}).$$

若 $n \geq 1$，那么这些映射都是群同态，因此，由于所有 KO理论群都是循环群，π_n(悬挂$_\bullet$) 也必定是满射。若 $n = 0$，我们则“手动”证明 π_0(悬挂$_\bullet$) 的满射性。

将 π_n(悬挂$_\bullet$) 与 KK理论进行比较的思路，受到 Lukas Buggisch 的博士论文 [Bug19], 的启发。他在文中证明，在高指标理论的背景下，Hitchin 和 Gromov-Lawson 的指标差一致。更确切地说，他为所有光滑闭流形 X建立了一个交换图

$$\begin{array}{ccc} [X, \mathrm{Riem}^+(M)] & \xrightarrow{\mathrm{inddif}_H} & KK\big(Cl_{0,d}, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}\times X, C^*\pi_1(M))\big) \\ & \searrow^{\mathrm{inddif}_{GL}} & \downarrow{\scriptstyle \tau_{Cl_{0,1}}(-)\sharp\alpha_1} \\ & & KK\big(Cl_{0,d+n+1}, \mathcal{C}(X, C^*\pi_1(M))\big). \end{array}$$

遗憾的是，他的结果和证明无法采用归纳方法处理。此外，其中一些证明依赖于狄拉克算子的某些性质，而这些性质并不适用于一般的伪狄拉克算子，例如 Lichnerowicz 公式。这就是我们给出完整证明的原因。

Kasparov KK 群

我们回顾证明所需的 KK理论基本事实。我们不再详述所有细节，因为例如 [Kas80] 和 [Bla98] 中均有介绍。

对于可分、分次的 C^*-代数 A, B （实数、实或复数），阿贝尔群$KK(A, B)$定义为 Kasparov（A-B）-模（E, ρ, F）的同伦类集合。回顾一下，Kasparov 模由一个分次、可分的 Hilbert$B$-右模 E，一个分次的 $*$-同态 ρ: $A \to \mathbf{Lin}_B(E)$ 到 E 的可伴、连续 B-右线性端omorphism 空间中的映射，以及一个奇算子 $F \in$**Lin**$_B(E)$ 组成，并且满足以下模紧算子意义下的恒等式：

$$\rho(a)(F - F^*) \equiv 0, \quad \rho(a)(F^2 - \mathrm{id}) \equiv 0, \quad [\rho(a), F] \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \mathcal{K}_B.$$

这里，$\mathcal{K}_B$ 是 B-紧算子的集合，其定义为所有 $\theta_{e_1,e_2}..= e_1 \cdot (- e_2)$ 对所有 $e_j \in E$ 的闭线性张成。进一步回顾，两个 Kasparov（A-B）-模（E_0, ρ_0, F_0）和（E_1, ρ_1, F_1）之间的同伦，是一个 Kasparov（A-$\mathcal{C}([0,1], B)$）-模，它在酉等价意义下限制为给定的两个模。

这些群推广了实 K-同调和 C^*-代数的实 K-理论，具体来说，

$$KO^d(A) \cong KK(A \otimes Cl_{0,d}, \mathbb{R}) \quad \text{and} \quad KO_d(A) \cong KK(\mathbb{R}, A \otimes Cl_{0,d}).$$

事实上，Kasparov 证明了群 $KK(A \otimes Cl_{p_1,\ q_2},\ B \otimes Cl_{p_2,\ q_2})$ 仅取决于 $d = (p_1 - q_2)\ -(q_1 - p_2)$，见 [Kas80，定理 5。4]，并且典范同态

$$\begin{aligned} \tau_{Cl_{p,q}} \colon KK(A,B) &\to KK(A \otimes Cl_{p,q}, B \otimes Cl_{p,q}), \\ [E, \rho, F] &\mapsto [E \otimes Cl_{p,q}, \rho \otimes \mathrm{id}, F \otimes \mathrm{id}] \end{aligned}$$

是一个同构 [Kas80，定理 5 的证明。2]。

以下同构将其与我们的设定联系起来

$$\begin{aligned} [\mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}, \{\infty\}; \mathrm{Fred}_0^{d,0}(H), GL_0(H)] &\to KK(Cl_{0,d}, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})) \\ F &\mapsto [\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1}, H), \check{\rho}, F], \end{aligned}$$

见 [Ebe17, 附录 A]。这里，H 是一个分次、充足的 HilbertCl_d,0-右模，带有右作用 ρ 和分次 ι。$Cl_{0,d}$ 左作用 $\check{}\rho$ 是唯一一个在向量层面定义为 $\check{}\rho(v) = \rho(v) \circ \iota$ 的作用。空间 $\mathrm{Fred}_0^{d\,0}$,(H) 是由所有满足 $F^2 - \mathrm{id}$ 为紧的算子构成的弱等价子空间，而 $GL_0(H)$ 是由对合构成的子空间 [Ebe17, 附录 A]。

为后续讨论之需，描述 $\hat{}KK(Cl_{0,p}, \mathbb{R})$ 与 $KO^{-p}(\mathrm{pt})$ 之间的一个显式同构将很有用。令 $\mathfrak{M}_{r,s}$ 为由有限生成分次 $Cl_{r,s}$-模的同构类构成的阿贝尔幺半群。回忆一下，幺半群 $\mathfrak{M}_{r,s}$ 与 $\mathfrak{M}_{s,r}$ 是典范同构的。事实上，若 $\rho\colon Cl_{r,s} \to \mathrm{End}(W, \iota)$ 是一个分次代数同态，其中 ι 是分次，那么映射 $\mathbb{R}^{r,s} \ni v \mapsto \rho(v) \circ \iota$ 可扩张为一个分次代数同态 $\check{}\rho\colon Cl_{s,\ r} \to \mathrm{End}(W, \iota)$。对应关系 $\rho \mapsto \check{}\rho$ 给出了这一同构的一个例子。

$\hat{}\qquad\hat{}\qquad\hat{}\hat{}$回忆一下，$KO^{-p}(\mathrm{pt}) \cong \mathfrak{M}_{p,\ 0}/\mathrm{incl}^*\mathfrak{M}_{p+1,\ 0} \cong \mathfrak{M}_{0,\ p}/\mathrm{incl}^*\mathfrak{M}_{0,\ p+1}$。第一个同构可见于 [LM89，第 1 节。9] 或 [EH21]，第二个同构由刚才构造的同构诱导。

引理 4.9.2. 映射

$$KK(Cl_{0,p}, \mathbb{R}) \to KO^{-p}(\mathrm{pt}) \quad \textit{given by} \quad [E, \rho, F] \mapsto [\ker(F)]$$

是一个同构。

证明。我们可以假设 F 是自伴的，并且与 $Cl_{0,\ p}$ 分次交换，参见[Bla98，第 17 节4]。由于 $Cl_{0,\ p}$ 是含幺代数，恒等函数

$$\rho(1) \cdot (F^2 - \mathrm{id}) = (F^2 - \mathrm{id}) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ \mathcal{K}_{Cl_{0,p}}$$

这意味着 F 是一个 Fredholm 算子。因此，核是一个有限维的$Cl_{0,\ p}$-模。

为证明该映射良定义，我们使用 $KK_{oh}(Cl_{0,p},\mathbb{R})$，而不是$KK(Cl_{0,p},\mathbb{R})$。前一个群是 Kasparov 模在由算子同伦和添加退化 KK-模所生成的等价关系下的等价类群。回顾一下，算子同伦是一个 $Cl_{0,p}$-$\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$-模 (E,ρ,F_t)，其中希尔伯特空间 E和表示 ρ均独立于 $t\in I$。典范映射 $KK_{oh}(Cl_{0,p},\mathbb{R})\to KK(Cl_{0,p},\mathbb{R})$ 是一个同构，见 [Bla98，第148]页。

退化模的算子具有平凡的核，而两个算子同ˆ ˆ伦算子 F_0， F_1 在 $\mathfrak{M}_0$ 中表示同一个元素p/，包括$^*\mathfrak{M}_{0,\ p+1}$，见 [LM89，定理 III.10。8]。总之，该映射良定义。

该映射显然是满射：每个元素 $[M,\rho]$ 都是 $[M,\rho,0]+x_{\mathrm{deg}}$的像（需要退化模 x_{deg} 来确保我们的希尔伯特空间是充足的）。

要证明该映射也是单射，假设 ker(F) 上的 $Cl_{0,p}$-模结构可扩张为 $Cl_{0,d+1}$-模结构。若 pr$^{\ker(F)}$：$E\to\ker(F)$ 表示到核上的正交投影，则容易验证 $[E,\rho,F+\rho(e_{n+1})\circ\mathrm{pr}_{\ker(F)}]$ 是一个退化 Kasparov 模。此外，$[E,\rho,F_t]$ withF_t ..$=F+t\rho(e_{n+1})\circ\mathrm{pr}^{\ker(F)}$ 是这两个 Kasparov 模之间的算子同伦。因此，$[E,\rho,F]$ 已经在 $KK(Cl_{0,p},\mathbb{R})$ 中表示零元，所以该映射是单射。

□

Kasparov 的 KK-群的优点在于存在 Kasparov 积，它是一种双线性配对

$$\sharp_D\colon KK(A_1,B_1\otimes D)\otimes KK(A_2\otimes D,B_2)\to KK(A_1\otimes A_2,B_1\otimes B_2).$$

存在一些元素

$$\alpha_n=[L^2(\mathbb{R}^n,Cl_{n,0}),\check{\mathbf{r}},\not{D}_{\mathbb{R}^n}(1+\not{D}^2_{\mathbb{R}^n})^{-1/2}]\in KK(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n,Cl_{0,n}),\mathbb{R})=KO_n(\mathbb{R}^n)$$

and

$$\beta_n=[\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n,Cl_{0,n}),\lambda,\frac{\lambda(x)}{(1+||x||^2)^{1/2}}]\in KK(\mathbb{R},\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n,Cl_{0,n}))=KO^{-n}(\mathbb{R}^n),$$

其中 λ 表示左乘，并且这些元素满足

$$\alpha_n\sharp\beta_n=1\in KK\big(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n,Cl_{0,n}),\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n,Cl_{0,n})\big)\text{ and }\beta_n\sharp\alpha_n=1\in KK(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

复数情形的详细证明（针对 $n=1$ ）可见于 [CELY17，第 99 页起105]。每个 n 的实数情形都可归结为所引用的结果，因为 Kasparov 积与复化可交换 [Kas80，定理 4.4。2] 以及复化后的元素 $\alpha_n^{\mathbb{C}}=\alpha_1^{\mathbb{C}}\sharp_{\mathbb{C}}\ldots\sharp_{\mathbb{C}}\alpha_1^{\mathbb{C}}$和 $\beta_n^{\mathbb{C}}=\beta_1^{\mathbb{C}}\sharp_{\mathbb{C}}\ldots\sharp_{\mathbb{C}}\beta_1^{\mathbb{C}}$，见 [Kas80，第 546 页起547]。Kasparov 证明了

$$(-)\sharp\alpha_n\colon KK(A,B\otimes\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n;Cl_{0,n}))\to KK(A,B)$$

是一个同构[9], [Kas80，定理 5。7]。

一般而言，计算 Kasparov 积很困难。为了降低这一难度，我们将使用 Baaj 和 Julg 引入的无界Kasparov模 [BJ83], ，我们称之为谱三元组，遵循 [CMR07]的惯例。

定义 4.9.3. 设 A 和 B 为可分、分次的实 C^*-代数。一个 A-B谱三元组 (E, ρ, D) 由一个分次希尔伯特 B-右模 E组成，并配有一个分次 $*$-同态 $\rho\colon A \to \mathbf{Lin}_B(E)$，其映入连续、可取伴随算子且为$B$-右线性的算子集合，以及一个奇、自伴且正则的 B-右线性映射 D，满足：

(1) 对于稠密子集 A中的所有元素 a，分次交换子 $[\rho(a)\ D]$ 均可延拓为有界算子。(2) 对于所有 $a \in A$，算子 $\rho(a)(1+D^2)^{-1}$ 均为紧算子[10] 。

两个 A-B 谱三元组 $(E_j,\ \rho_j,\ D_j)$ 之间的同伦是一个 A-$\mathcal{C}([0,1];\ B)$ 谱三元组 $(E,\ \rho,\ D)$，其限制为给定的谱三元组。若上下文已明确 C^*-代数 A 和 B，我们就简称为谱三元组，并将所有谱三元组的同伦类集合记为 $\Psi(A,\ B)$。

Baaj和Julg证明了，有界变换

$$b\colon \Psi(A,B) \to KK(A,B) \quad \text{given by} \quad (E,\rho,D) \mapsto \left(E,\rho, D/(1+D^2)^{1/2}\right)$$

是满射 [BJ83]。Kucerovski 的以下结果给出了判定一个谱三元组表示 Kasparov 积的充分条件。

定理 *4.9.4* ([*Kuc97*，引理 *10*，定理 13]). 设 $(E_1, \rho_1, D_1) \in \Psi(A, C)$ 且 $(E_2, \rho_2, D_2) \in \Psi(C, B)$ 为两个谱三元组。假设 $E = (E_1 \otimes_{\rho_2} E_2, \rho_1 \otimes id\ D) \in \Psi(A, B)$ 满足以下性质：

(i) 对于纯次数 $\rho_1(A)E_1$ 的稠密子集中的所有 x，这些算子

$$DT_x - (-1)^{\deg(x)} T_x D_2 \quad \text{and} \quad D_2 T_x^* - (-1)^{\deg(x)} T_x^* D$$

可延拓为有界算子，其中 $T_x := x \otimes (-)$。

(*ii*) $\operatorname{dom} D \subseteq \operatorname{dom} D_1$。

(iii) 存在一个 $c \in \mathbb{R}$，使得

$$\langle Dx, (D_1 \otimes_{\rho_2} \mathrm{id})x\rangle_B + \langle (D_1 \otimes_{\rho_2} \mathrm{id})x, Dx\rangle_B \geq c\langle x, x\rangle_A$$

对于所有 $x \in \operatorname{dom} D$。

那么，*Kasparov* 模 $(E_1 \otimes_{\rho_2} E_2, \rho_1 \otimes \mathrm{id}\ D/(1+D^2)^{1/2})$ 表示 $(E_1, \rho_1, D_1/(1+D_1^2)^{1/2})$ 与 $(E_2, \rho_2, D_2/(1+D_2^2)^{1/2})$ 的 *Kasparov* 积。

[9] 这里，我们对 $D = \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^n; Cl_{0,n})$ 应用了 Kasparov 积，并且 $A_2 = B_2 = \mathbb{R}$.

[10] 在 Hilbert C^*-模意义下紧，i.e., $\rho(a)(1+D^2)^{-1} \in \mathcal{K}_B \subset \mathbf{Lin}_B(E)$

比较映射的构造

我们将通过构造谱三元组，得到图表（4.12）中的水平映射。首先，回顾一下，适用于 $\rho > 0$ 的骰子函数是一个函数

$$\mathrm{dice}_\rho \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

仅当 $\partial_j \mathrm{dice}\rho(x) \neq 0$ 时 $|x_j| > \rho$。我们可以选择（并且确实如此）使函数为真函数、在原点附近为零，且全微分有界，构造见第3.2 节。

构造 $\pi_n(\Psi\mathrm{Dir}^\times_\bullet(M)_{g_0}) \to \Psi(Cl_{0,\ d},\ \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1}))$:
取一个光滑函数 $\chi\colon \mathbb{R} \to [0,1]$，使得 $\chi(t) = 1$ 对于 $t \gg 0$，并且 $\chi(t) = 0$ 对于$t \ll 0$。给定一个元素 $P \in \Omega^n_{\not{D}_{g_0}}(\Psi\mathrm{Dir}^\times_\bullet(M)_{g_0})$，它是一个光滑块映射$P$: $\mathbb{R}^n \to \Psi\mathrm{Dir}^\times(M)_{g_0}$，且在某个 $\rho > 0$ 之外限制为 $\not{D}_{g_0}$，定义块映射

$$Q\colon \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \Psi\mathrm{Dir}^\times(M)_{g_0} \quad \text{via} \quad (x,t) \mapsto \chi(t)P + (1-\chi(t))\not{D}_{g_0}.$$

对于选定的 ρ，定义

$$h = h_\rho\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}_{\geq 1} \quad \text{via} \quad x \mapsto (1+\mathrm{dice}_\rho(x)^2)^{1/4}.$$

引理 4.9.5. 令 $\mathbf{r}$ 为 $\mathfrak{S}_{g_0}$ 上的典范 $Cl_{d,0}$-右作用，并令$\check{}\mathbf{r}$ 为诱导的 $Cl_{0,d}$-左作用。三元组 $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1}, L^2(M,\mathfrak{S}_{g_0})), \check{}\mathbf{r}\ hQh)$ 是一个 $Cl_{0,d}$-$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})$谱三元组。

证明。 典范同构

$$L^2(\mathfrak{S}_{g_0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1}) \cong \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1}; L^2(\mathfrak{S}_{g_0})) \quad \text{induced by} \quad f \otimes \sigma \mapsto f \cdot \sigma,$$

其中 $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})$ 是平凡分次的，它将右侧识别为一个 Hilbert$Cl_{0,d}$-$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})$-双模。

将块映射 hQh 视为 $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1}, L^2(\mathfrak{S}_{g_0}))$ 上的算子时，它作为一个 $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})$-右线性映射是自伴的，因为它逐点自伴。

算子值映射 Q 是 $Cl_{d,0}$-右线性的，因此它与相应的 $Cl_{0,d}$-左作用分次交换。事实上，只需对向量 $\mathbb{R}^d \subseteq Cl_{0,d}$证明这一点，这很容易计算得到

$$\begin{aligned} Q \circ \check{\mathbf{r}}(v) &= Q \circ \mathbf{r}(v) \circ \mathrm{e/o} = \mathbf{r}(v) \circ Q \circ \mathrm{e/o} \\ &= -\mathbf{r}(v) \circ \mathrm{e/o} \circ Q = -\check{\mathbf{r}}(v) \circ Q. \end{aligned}$$

因此，谱三元组的第一个条件得以满足。

由于 Q 是一个块映射，且在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的某个紧子集之外取值于可逆算子，因此存在 $c_Q > 0$，使得对于所有 $\sigma \in L^2$（$\mathfrak{S}_{g_0}$）以及该紧子集补集中的所有 x，都有 $||Q_x\sigma||_0^2 \geq c_Q^2||\sigma||_0^2$。结合 $hQ = Qh$，可得

$$(hQh)^2 = h^4Q^2 = (1+\mathrm{dice}_\rho(x)^2)Q^2 \geq c_Q^2(1+\mathrm{dice}_\rho(x)^2)$$

对于给定紧子集之外的所有 x 都成立。由于流形 M 是闭的，且 hQh: $\mathbb{R}^{n+1} \to \Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{g_0})$ 取值于椭圆算子，根据前述不等式，$(1+hQh)^{-1}$ 是一个（范数）连续的紧算子映射，并且在 ∞ 附近为零。因此，$(1+hQh)^{-1}$ 是一个 $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})$- 紧算子，故谱三元组的第二个条件也得到了满足。 □

不同的选择会得到同伦的谱三元组[11], 因此我们得到一个良定义的映射

$$\pi_n(\Psi\mathrm{Dir}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0}) \to \Psi(Cl_{0,d}, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})) \quad \text{given by} \quad [P] \mapsto [hQh].$$

引理 4.9.6。 与有界变换复合

$$\pi_n(\Psi\mathrm{Dir}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0}) \longrightarrow \Psi(Cl_{0,d}, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})) \xrightarrow{b} KK(Cl_{0,d}, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1}))$$

当 $n \geq 1$ 时是同构，当 $n = 0$时是双射。

证明。 将 $\mathbb{R}^{n+1} \cup \{\infty\}$ 简记为 S^{n+1}，并将 $\mathrm{Fred}^{d,0}(L^2(\mathfrak{S}_{g_0}))$ 记为 Fred^d。考虑以下图表

$$\begin{array}{ccc} & & [S^{n+1}, \{\infty\}; \mathrm{Fred}^d_0, GL_0] \xrightarrow{\cong} KK(Cl_{0,d}, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})) \\ & \overset{P\mapsto b(hQh)}{\nearrow} & \big\downarrow \mathrm{incl} \\ \pi_n(\Psi\mathrm{Dir}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0}) & \xrightarrow[P\mapsto b(Q)]{} & [S^{n+1}, \{\infty\}; \mathrm{Fred}^d, GL]. \end{array}$$

根据谱变形论证，包含映射在同伦类上诱导出一个双射，参见 [Ebe17，附录 A] 或 Atiyah-Singer [AS69，第 12] 页。下方的水平映射表示指标差，参见定理 4.1.41，因此它同样是同构，或分别为双射。最后，上方的水平映射是一个同构，[Ebe17 附录 A]对其有很好的描述。如果 $H = (H, \rho, \iota)$ 是一个希尔伯特空间，带有一个充足的 $Cl_{d,0}$-右作用 ρ 和分次 ι，那么该映射由下式给出

$$\big(F\colon (S^{n+1}, \infty) \to (\mathrm{Fred}^{d,0}, GL_0)\big) \quad \mapsto \quad \big(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1}, H), \check{\rho}, F\big) \in \Psi(Cl_{0,d}, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})).$$

从这一描述很容易看出，该复合与命题中的复合一致。

剩下要证明图表是交换的。由于 h 和 Q 可交换，且 h是正函数，因此算子 Q 和 hQh 具有相同的核，以及相同的正子空间和负子空间。由泛函演算可知

$$s \mapsto sb(Q) + (1-s)b(hQh)$$

是 $\mathrm{incl} \circ b(Q)$ 与 $b(hQh)$ 之间的同伦，其取值属于 Fredholm 算子，因为核与 s 无关且为有限维。 □

[11]具体来说：骰子ρ的不同选择、 $[P]$的代表元 P，以及 P 与 $\not{\partial}_{g_0}$ 之间的插值路径，都可以通过路径连接起来，而这些路径会产生谱三元组的算子同伦。

构造 $\pi_n(\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0}) \to \Psi(Cl_{0,d+n+1},\mathbb{R})$:

取一个光滑函数 $\chi\colon\ \mathbb{R}\to[0,1]$，使得 $\chi(t)=1$ 对于 $t\gg 0$ 成立，并且 $\chi(t)=0$对于 $t\ll 0$成立。对于每个元素 $P\in\Omega^n_{g_0}\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0}$，我们定义一个块狄拉克算子的块映射

$$Q\colon\mathbb{R}\to\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_n(M)_{g_0}\quad\text{ by }\quad t\mapsto\chi(t)P+(1-\chi(t))\mathfrak{D}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}}.$$

其悬挂

$$\mathrm{susp}(Q)=\chi\circ\mathrm{pr}_{n+1}\cdot P^{\mathrm{ex}}+(1-\chi\circ\mathrm{pr}_{n+1})\cdot\mathfrak{D}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}}+\partial_{x_{n+1}}\cdot\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}$$

是 $\mathfrak{S}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}}\to M\times\mathbb{R}^{n+1}$ 上的一个块狄拉克算子。对于使得 $\mathrm{susp}(Q)$ 的核包含于 ρI^{n+1} 的 $\rho>0$，定义函数

$$h:=h_\rho:=(1+\mathrm{dice}_\rho^2)^{1/4}\colon\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}.$$

作用 $\check{\mathbf{r}}$ 将 $L^2(M\times\mathbb{R}^{n+1};\mathfrak{S}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle})$ 变成一个 Hilbert $Cl_{0,d+n+1}$-$\mathbb{R}$-双模，其上 $h\mathrm{susp}(Q)h$ 作为奇对称无界算子作用，其定义域是由所有紧支撑光滑截面构成的稠密子空间。

引理 4.9.7. 三元组 $(L^2(M\times\mathbb{R}^{n+1},\mathfrak{S}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}),\check{\mathbf{r}}\ h\text{悬挂}(Q)h)$ 是一个 $Cl_{0,d+n+1}$-$\mathbb{R}$谱三元组。

证明。 我们需要证明

(o) 算子 $h\text{悬挂}(Q)h$ 的闭包是自伴的，

(i) 对所有 $v\in Cl_{0,n+d+1}$，分次交换子 $[\check{\mathbf{r}}(v)\ h\text{悬挂}(Q)h]$ 可扩张为有界算子，并且

(ii) 对所有 $v\in Cl_{0,n+d+1}$，$\check{\mathbf{r}}(v)(1+(hQh)^2)^{-1}$ 是紧算子。

关于 (o) 的证明与 [HR00，命题 10.2 的证明类似。10]: 由于悬挂(Q) 在 ρI^{n+1}之外分解，它在dice_ρ 和$h=h_\rho$上作为微分算子作用。因此，

$$\begin{aligned}[h\mathrm{susp}(Q)h,\log(1+\mathrm{dice}_\rho)]&=[h^2\mathrm{susp}(Q),\log(1+\mathrm{dice}_\rho)]+[\mathrm{grad}(h)\cdot,\log(1+\mathrm{dice}_\rho)]\\&=h^2[\mathrm{susp}(Q),\log(1+\mathrm{dice}_\rho)]\\&=h^2\mathrm{grad}(\log(1+\mathrm{dice}_\rho))\cdot\\&=(1+\mathrm{dice}_\rho^2)^{1/2}(1+\mathrm{dice}_\rho)^{-1}\mathrm{grad}(\mathrm{dice}_\rho)\cdot.\end{aligned}$$

我们选择 dice_ρ 使其为真映射且具有有界导数，因此交换子$[h\mathrm{susp}(Q)h,\log(1+\mathrm{dice}_\rho)]$可扩张为有界算子。借助 $\log(1+\mathrm{dice}_\rho)$，我们找到光滑函数 $\varphi_n\colon\ M\times\mathbb{R}^{n+1}\to[0,1]$，使其在紧集上一致成立，并且使 $[h\mathrm{susp}(Q)h,\varphi_n]\to 0$ 在范数意义下成立。

现在假设 $u \in L^2(\mathfrak{S}_{g_0 \oplus \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}})$ 属于最大定义域。由于 $\operatorname{susp}(Q)$ 是块算子，它将支集位于内部 $M \times RI^{n+1}$ 的截面映射为支集也位于该处的截面，因此

$$h\big(\operatorname{susp}(Q)\big)hfu = f \cdot h\big(\operatorname{susp}(Q)\big)hu + [h\big(\operatorname{susp}(Q)\big)h, f]u$$

对于所有紧支撑函数 f，它也有界。算子 $h(\operatorname{susp}(Q) - \not{D}_{g_0 \oplus \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}})h$ 在紧集上有界，因此，[HR00, 引理 10.2.5] 的证明表明，fu 也属于 $h\operatorname{susp}(Q)h$ 的最小定义域，因为我们可以选择 Friedrichs磨子，使其将支集包含在 $\operatorname{supp}(f)$ 中的截面映射为支集包含在固定紧邻域 L 中的截面，该邻域是 $\operatorname{supp}(f)$ 的紧邻域。特别地，$\varphi_n u$ 属于 $h\operatorname{susp}(Q)h$ 的最小定义域。由于 u 是平方可积的，我们有 $\varphi_n u \xrightarrow{n\to\infty} u$ 在范数下，而

$$h\operatorname{susp}(Q)h\varphi_n u = \varphi_n h\operatorname{susp}(Q)hu + [h\operatorname{susp}(Q)h, \varphi_n]u \xrightarrow{n\to\infty} u,$$

因此 u 属于 $h\operatorname{susp}(Q)h$ 的最小定义域。

条件（i）成立，因为 $[\check{\mathbf{r}}(v)\ h\operatorname{susp}(Q)h] = 0$。

条件（ii）的证明借鉴自 [Ebe16，定理2。40]与其中给出的证明不同之处在于，我们避免使用强制函数。

注意，对于所有 $(i,\varepsilon) \in \{1,\dots,n+1\} \times \mathbb{Z}_2$，将 $\operatorname{susp}(Q)$ 限制到 $\{\varepsilon x_i > \rho\}$ 后得到的算子，按照定义4.3.11 的意义有下界。对 $\operatorname{susp}(Q)$ 的所有限制归纳应用推论 4.3.22 可知，对于某个 $c > 0$，以及所有充分大的 $\rho' \geq \rho$，支集位于 $\rho' I^{n+1}$ 补集中的所有截面 $u \in \Gamma_c(M \times \mathbb{R}^{n+1}, \mathfrak{S}_{g_0 \oplus \langle \cdot,\cdot \rangle})$，均有 $||\operatorname{susp}(Q)u||_0 \geq c||u||_0$。为使记号清晰，我们不失一般性地假设 $\rho' = \rho$。因此，若 χ 是一个支集包含于 ρI^{n+1} 补集中的光滑函数，则有

$$\begin{aligned} ||h\operatorname{susp}(Q)h\chi u||_0 \cdot ||\chi u||_0 \geq c||h\chi u||_0 \cdot ||\chi u||_0 &\geq c \inf\{h(t) : t \in \operatorname{supp}\chi\}||\chi u||_0^2 \\ &=: \operatorname{low} \cdot ||\chi u||_0^2. \end{aligned}$$

由于 $\operatorname{susp}(Q)$ 是 $g_0 \oplus \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$ 上的块狄拉克算子，因此算子 $\operatorname{susp}(Q) - \not{D}_{g_0 \oplus \langle \cdot,\cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}}$ 有界，这意味着交换子 $[\operatorname{susp}(Q)\ \chi]$ 是一个有界算子。根据引理 4.2.6，如果 u 对所有充分大的 $R > 0$ 都支撑在那里，则 $\operatorname{susp}(Q)u$ 支撑于 $M \times RI^{n+1}$。因此，若 $\operatorname{supp}\chi$ 包含于 RI^{n+1}，则算子 $[\operatorname{susp}(Q)\ \chi]$ 也支撑于 $M \times RI^{n+1}$。由此可知，$[h\operatorname{susp}(Q)h, \chi] = h[\operatorname{susp}(Q)\ \chi]h$ 也可延拓为有界算子，其算子范数有界于

$$|||[h\operatorname{susp}(Q)h, \chi]|||_{0,0} \leq \sup\{h(t)^2 : t \in \operatorname{supp}([\operatorname{susp}(Q), \chi])\} \cdot |||[\operatorname{susp}(Q), \chi]|||_{0,0}.$$

结合这两个不等式可得

$$\begin{aligned} ||\chi u||_0 &\leq \operatorname{low}^{-1}||h\operatorname{susp}(Q)h\chi u||_0 \\ &\leq \operatorname{low}^{-1}(|||[h\operatorname{susp}(Q)h, \chi]u||_0 + ||\chi h\operatorname{susp}(Q)hu||_0) \\ &\leq \operatorname{low}^{-1}\left(|||[h\operatorname{susp}(Q)h, \chi]|||_{0,0} \cdot ||u||_0 + ||\chi||_\infty ||h\operatorname{susp}(Q)hu||_0\right) \\ &\leq \operatorname{low}^{-1}\max\{|||[h\operatorname{susp}(Q)h, \chi]|||_{0,0}, ||\chi||_\infty\} \cdot (||u||_0 + ||h\operatorname{susp}(Q)h||_0) \\ &\leq \operatorname{low}^{-1}\sqrt{2}\max\{|||[h\operatorname{susp}(Q)h, \chi]|||_{0,0}, ||\chi||_\infty\}\left(||u||_0^2 + ||h\operatorname{susp}(Q)h||_0^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

如果我们将 Q 解释为复化 $\mathfrak{S}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}\otimes\mathbb{C}$上的复线性算子，就可以扩展前面的不等式链

$$\begin{aligned}||\chi u||_0 &\leq \mathrm{low}^{-1}\sqrt{2}\max\{|||[h\mathrm{susp}(Q)h,\chi]|||_{0,0},||\chi||_\infty\}\left(||u||_0^2+||h\mathrm{susp}(Q)h||_0^2\right)^{1/2}\\&=\mathrm{low}^{-1}\sqrt{2}\max\{|||[h\mathrm{susp}(Q)h,\chi]|||_{0,0},||\chi||_\infty\}||(h\mathrm{susp}(Q)h+i)u||_0\end{aligned}$$

对于所有实截面 $u\in\Gamma_c(\mathfrak{S}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}\otimes\mathbb{C})$。由于 $h\mathrm{susp}(Q)h$ 是自伴算子，其谱为实数，因此 $(h\mathrm{susp}(Q)h\pm i)^{-1}$ 存在，且其算子范数不超过 1。因此，将 $u=(h\mathrm{susp}(Q)h+i)^{-1}v$ 代入后，前一个不等式变为

$$||\chi(h\mathrm{susp}(Q)h+i)^{-1}v||_0\leq\mathrm{low}^{-1}\sqrt{2}\max\{|||[h\mathrm{susp}(Q)h,\chi]|||_{0,0},||\chi||_\infty\}||v||_0,$$

这意味着

$$\begin{aligned}||\chi\cdot(1+(h\mathrm{susp}(Q)h)^{-2})||_{0,0}&\leq||\chi(h\mathrm{susp}(Q)h+i)^{-1}||_{0,0}\cdot||(h\mathrm{susp}(Q)h+i)^{-1}||_{0,0}\\&\leq\mathrm{low}^{-1}\sqrt{2}\max\{|||[h\mathrm{susp}(Q)h,\chi]|||_{0,0},||\chi||_\infty\}.\end{aligned}$$

取 $\tilde{\eta}_0\colon\ \mathbb{R}\to[0,1]$，它是紧支撑的，并且在区间$[0,a]$上恒等于 1，其中 $a:=\max\mathrm{dice}_\rho((\rho+1)I^{n+1})$。如果 $||\mathrm{d}\,\mathrm{dice}_\rho||_\infty\leq B$，那么中值定理给出 $|\mathrm{dice}_\rho(x)|\leq B||x||$，对所有 $x\in\mathbb{R}^{n+1}$ 均成立。对于所有 $m\in\mathbb{N}$，取一个满足下列条件的光滑函数 $\tilde{\eta}_m\colon\ \mathbb{R}_{\geq0}\to[0,1]$

$$\tilde{\eta}_m|_{[0,a+(m-1)m/2]}=1,\ \tilde{\eta}_m|_{[a+m(m+1)/2,\infty)}=0,\ \text{and}\ \left|\tilde{\eta}_m'|_{a+[(m-1)m/2,m(m+1)/2]}\right|\leq2/m,$$

其中，区间 $[(m-1)m/2,\ m(m+1)/2]$ 的长度为 m。令 $\eta_m:=\tilde{\eta}_m\circ\mathrm{dice}_\rho$。由于 η_m 在 ρI^{n+1}上为常数，我们有 $[\mathrm{susp}(Q)\ h]=\mathrm{grad}(h)$。回忆一下，$h_\rho=(1+\mathrm{dice}_\rho^2)^{1/4}$。我们估计

$$\begin{aligned}\left|\left|[h\mathrm{susp}(Q)h,\eta_m]\right|\right|_{0,0}&=\left|\left|[h^2\mathrm{susp}(Q),\eta_m]+[h\mathrm{grad}(h)\cdot,\eta_m]\right|\right|_{0,0}\\&=||h^2\mathrm{grad}(\eta_m)\cdot||_{0,0}=||h^2\tilde{\eta}_m'\circ\mathrm{dice}_\rho\cdot\mathrm{grad}(\mathrm{dice}_\rho)||_{0,0}\\&\leq||h^2||_{\infty,\mathrm{supp}\,\eta_m}\cdot||\eta_m'\circ\mathrm{dice}_\rho\cdot\mathrm{grad}(\mathrm{dice}_\rho)||_{0,0}\\&\leq\left(1+\left(\frac{a+m(m+1)}{2}\right)^2\right)^{1/4}\frac{2B}{m}\\&\leq\mathrm{C}_a\cdot B.\end{aligned}$$

算子 $\eta_0(1+(h\mathrm{susp}(Q)h)^2)^{-1}$ 是紧的，因为它经由.....分解为$H^1_{\mathrm{supp}\,\eta_0}$，即 H^1 中支集包含于 $\mathrm{supp}\ \eta_0$的元素所构成的空间，因此只需验证 $(1-\eta_0)(1+(h\mathrm{susp}(Q)h)^2)^{-1}$是紧的。显然，该序列逐点收敛:

$$\eta_m(1-\eta_0)(1+(h\mathrm{susp}(Q)h)^2)^{-1}\xrightarrow{m\to\infty}(1-\eta_0)(1+(h\mathrm{susp}(Q)h)^2)^{-1}.$$

根据以下估计，该极限也是 $\eta_m(1-\eta_0)(1+(h\mathrm{susp}(Q)h)^2)^{-1}$ 的范数极限

：

$$\begin{aligned}
&||(\eta_l-\eta_m)(1-\eta_0)(1+(h\mathrm{susp}(Q)h)^2)^{-1}||_{0,0}\\
=&||(\eta_l-\eta_m)(1+(h\mathrm{susp}(Q)h)^2)^{-1}||_{0,0}\\
\leq&\ \mathrm{low}^{-1}\sqrt{2}\max\{||h\mathrm{susp}(Q)h||_{0,0},||\eta_l-\eta_m||_\infty\}\\
\leq&\ \mathrm{low}^{-1}\sqrt{2}\mathrm{C}_a\max\{B,1\}\\
\leq&\ \sup\{h(t)^{-1}:t\in\mathrm{supp}\,(\eta_l-\eta_m)\}/c\cdot\sqrt{2}\mathrm{C}_a\max\{B,1\}\xrightarrow{m\to\infty}0,
\end{aligned}$$

因为 h 是真映射，且 $\mathrm{supp}\,(\eta_l-\eta_m)$ 位于 $(a+m(m+1)/2)I^{n+1}$ 的补集内。总之，$(1-\eta_0)(1+(h\mathrm{susp}(Q)h)^2)^{-1}$ 是紧的，因为它是一个紧算子序列的范数极限。 □

同样，不同的可容许选择会得到同伦的谱三元组，因此我们得到一个良定义的映射

$$\pi_n(\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0},\not{\mathrm{D}}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle})\to\Psi(Cl_{0,d+n+1},\mathbb{R})\quad\text{via}\quad[P]\mapsto[h\mathrm{susp}(Q)h].$$

引理 4.9.8. 刚才定义的映射与有界变换 b 复合后，在 $n\geq 1$成立时是一个群同态。

证明。 考虑图表

$$\begin{array}{ccccc}
\pi_n(\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0}) & \xrightarrow{[P]\mapsto[hQh]} & \Psi(Cl_{0,d+n+1},\mathbb{R}) & \xrightarrow{b} & KK(Cl_{0,d+n+1},\mathbb{R})\\
& \searrow^{[P]\mapsto\ker(Q)} & & & \cong\downarrow\ker(-)\\
& & & & KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt}).
\end{array}$$

垂直映射是引理4.9.2中的映射，因此是一个同构。根据推论 4.8.6，对角映射是一个群同态。因此，水平复合也必定是一个群同态。 □

无界代表元 α_{n+1}:
谱三元组 $(L^2(\mathbb{R}^{n+1},Cl_{n+1},0),\check{\mathrm{r}}\ /\mathrm{D}_{\mathbb{R}^{n+1}})\ \in\ \Psi(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1},Cl_{0,n+1})\ \mathbb{R})$ 是众所周知的。其有界变换代表基本类 $\alpha_{n+1}\in KO_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})$，因为其复化代表 $K_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})$ 中的基本类，参见[HR00，第 314 页及后续]，，且复化诱导一个同构 $KO_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})\ \to K_{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})$。

计算 Kasparov 积时，我们将使用 $h/\mathrm{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}h$而不是 $/\mathrm{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}$。这没有问题，因为这两个算子在 $(L^2(\mathbb{R}^{n+1},Cl_{n+1},0),\check{\mathrm{r}})$ 上的有界变换在 $KK(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1},Cl_{0,n+1})\ \mathbb{R})$ 中表示同一个类。事实上，取一个小开球 $rD^{n+1}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$，使得 $h=1$ 在该集合上成立。零延拓j: $\mathcal{C}_0(rD^{n+1})\ \hookrightarrow\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})$ 是一个同伦等价（按 C^*-代数的意义），因为 rD^{n+1} 和 $\mathbb{R}^{n+1}$ 真同伦等价。根据 [HR00，命题 10.8.8]，并且由于 $h/\mathrm{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}h$和 $/\mathrm{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}$在 rD^{n+1}上一致，我们有

$$j^*\big(b[\not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}]\big)=[\![\not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}|_{rD^{n+1}}]\!]=j^*\big(b[h\not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}h]\big)\in KK(\mathcal{C}_0(rD^{n+1},Cl_{0,n+1}),\mathbb{R}).$$

这里，$[\![\not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}|_{rD^{n+1}}]\!]$ 表示在 [HR00，定义 10.8 中定义的 K-同调类。3]。现在该结论由 KK-理论的同伦不变性得出，参见[Bla98，命题 17.9。1]。

从现在起，如果底层的希尔伯特 C^*-模和表示可由上下文明确判断，我们将仅用其算子来表示一个谱三元组。

Kasparov 积的计算

我们已经构造了图表 (4.12) 中的水平同态，因此接下来只需证明该图表可交换。若在构造上方和下方的水平箭头时选用相同的插值函数 χ，则有

$$\operatorname{susp}\left(\chi\operatorname{susp}(P)+(1-\chi)\not{\mathfrak{D}}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}\right)=\operatorname{susp}(\chi P+(1-\chi)\not{\mathfrak{D}}_{g_0}).$$

因此接下来只需证明 $\tau_{Cl_{0,n+1}}(b([hQh]))\sharp\alpha_{n+1}=b([h\operatorname{susp}(Q)h])$。

第一步是注意到底层的希尔伯特 C^*-模典范同构

$$\begin{aligned}&\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1},L^2(\mathfrak{S}_{g_0}))\otimes Cl_{0,n+1}\otimes_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})\otimes Cl_{0,n+1},\mathrm{taut}\otimes\check{\mathbf{r}}}L^2(\mathbb{R}^{n+1},Cl_{n+1,0})\\ \cong\ &\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1},L^2(\mathfrak{S}_{g_0}))\otimes_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1}),\mathrm{taut}}L^2(\mathbb{R}^{n+1},Cl_{n+1,0})\\ \cong\ &L^2(M\times\mathbb{R}^{n+1};\mathfrak{S}_{g_0}\boxtimes Cl_{n+1,0})\cong L^2(M\times\mathbb{R}^{n+1},\mathfrak{S}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}),\end{aligned}$$

其中，taut 是通过左乘法得到的 $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R})$ 在 $L^2(\mathbb{R}^{n+1},Cl_{n+1,0})$ 上的左作用。第一个同构是泛同构，第二个同构由.....诱导。

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^{n+1},L^2(\mathfrak{S}_{g_0}))\otimes_{\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})}\Gamma_c(\mathbb{R}^{n+1},Cl_{n+1,0})&\to\Gamma_c(M\times\mathbb{R}^{n+1},\mathfrak{S}_{g_0}\boxtimes Cl_{n+1,0}),\\ \sigma\otimes\varphi&\mapsto((m,x)\mapsto\sigma(x)(m)\otimes\varphi(x)).\end{aligned}$$

下一步是证明 $[h\text{悬挂}(Q)h]$ 表示$\tau_{Cl_{0,n+1}}(b([hQh]))$与 $\alpha_{n+1}=b([h\not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}h])$ 的 Kasparov 积，方法是证明它满足定理 4.9.4的条件。

定理 4.9.9。 对于每个 $[P]\in\pi_n(\Psi\mathrm{Dir}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0})$，令 $Q:=\chi P+(1-\chi)\not{\mathfrak{D}}_{g_0}$对于某个 $\chi:\mathbb{R}\to[0,1]$，其中 $\chi(t)=1$ 对于 $t\gg0$，且 $\chi(t)=0$ 对于 $t\ll0$。则有

$$\tau_{Cl_{0,n+1}}(b([hQh]))\sharp\alpha_{n+1}=b(\tau_{Cl_{0,n+1}}([hQh]))\sharp\alpha_{n+1}=b([h\operatorname{susp}(Q)h]).$$

证明。 为验证定理 4.9.4 的第一个条件，只需证明

$$h\operatorname{susp}(Q)hT_\sigma+(-1)^{\deg(\sigma)}T_\sigma h\not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}h$$

延拓为作用于 $L^2(\mathbb{R}^{n+1},\ Cl_{n+1,\ 0})$ 上有界算子，对所有 $\sigma\in\Gamma_c(M\times\mathbb{R}^{n+1},\ \mathfrak{S}_{g_0})$均成立，且次数为纯次数；因为在我们的情形中，条件$(i)$ 中定理4.9.4 的第二个算子是第一个算子的伴随算子。回想一下，T_σ 定义为

$$T_\sigma\coloneqq\sigma\otimes(-)\colon L^2(\mathbb{R}^{n+1},Cl_{n+1,0})\to L^2(M\times\mathbb{R}^{n+1};\mathfrak{S}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}).$$

我们滥用记号，将 $\mathrm{e}/\mathrm{o}\boxtimes \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}$ 简写为 $\not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}$。由莱布尼茨法则可知，分次交换子 $[\not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}, T_\sigma]$ 表示为

$$\begin{aligned}[\not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}, T_\sigma] &= \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}} T_\sigma - (-1)^{\deg(\sigma)} T_\sigma \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}} \\ &= (-1)^{\deg(\sigma)} \sum_{j=1}^{n+1} \partial_{x_j}(\sigma) \otimes \partial_j \cdot \\ &=: \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}(\sigma) \cdot .\end{aligned}$$

我们利用这个恒等函数来计算

$$\begin{aligned}&h\mathrm{susp}(Q) h T_\sigma - (-1)^{\deg(\sigma)} T_\sigma h \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}} h \\ &= h(Q^{\mathrm{ex}} + \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}) h T_\sigma - (-1)^{\deg(\sigma)} T_\sigma h \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}} h \\ &= h Q^{\mathrm{ex}} h T_\sigma + h \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}(\sigma) \cdot h + (-1)^{\deg(\sigma)} h T_\sigma \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}} h - (-1)^{\deg(\sigma)} T_\sigma h \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}} h \\ &= h Q^{\mathrm{ex}} h T_\sigma + h \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}(\sigma) \cdot h.\end{aligned}$$

由于 σ 是紧支撑的，利用富比尼定理和三角不等式可得

$$||h\text{悬挂}(Q) h T_\sigma - (-1)^{\deg(\sigma)} T_\sigma h \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}} h||_{0,0} \leq \left(||Q^{\mathrm{ex}}\sigma||_0 + ||\not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}\sigma||_0\right) \cdot ||h^2||_{\infty, \mathrm{supp}\,\sigma},$$

这证明了定理 4.9.4的第一个条件。

第二个条件 $\mathrm{dom}(h\text{悬挂}(Q)h) \subseteq \mathrm{dom}(hQ^{\mathrm{ex}}h)$ 显然成立，因为根据定义，$\mathrm{dom}\,(\text{悬挂}(h\text{悬挂}(Q)h)) = \mathrm{dom}\,(hQ^{\mathrm{ex}}h) \cap \mathrm{dom}\,(h \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}} h)$。

为了证明第三个条件，我们需要证明存在一个 $c \in \mathbb{R}$，使得

$$\langle hQ^{\mathrm{ex}}hu, h\mathrm{susp}(Q)hu\rangle + \langle h\mathrm{susp}(Q)hu, hQ^{\mathrm{ex}}hu\rangle \geq c||u||_0^2 \tag{4.13}$$

对所有的 $u \in \Gamma_c(M \times \mathbb{R}^{n+1}; \mathfrak{S}_{g_0 \oplus \langle\cdot,\cdot\rangle})$ 都成立。回忆恒等函数

$$\not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}} Q^{\mathrm{ex}} + Q^{\mathrm{ex}} \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}} = \sum_{j=1}^{n+1} \partial_j \cdot (\partial_j Q)^{\mathrm{ex}} =: \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}(Q^{\mathrm{ex}}).$$

引理 4.5.5 的证明 中以及 h 和 Q^{ex} 可交换。计算

$$\begin{aligned}\langle h\not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}} hu, hQ^{\mathrm{ex}}hu\rangle &= \langle Q^{\mathrm{ex}} \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}} hu, h^3 u\rangle \\ &= \langle -\not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}} Q^{\mathrm{ex}} hu, h^3 u\rangle + \langle \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}(Q^{\mathrm{ex}}) hu, h^3 u\rangle \\ &= -\langle Q^{\mathrm{ex}} hu, \mathrm{grad}(h^2) hu\rangle - \langle hQ^{\mathrm{ex}}hu, h\not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}} hu\rangle \\ &\quad + \langle \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}(Q^{\mathrm{ex}}) h^2 u, h^2 u\rangle\end{aligned}$$

可推出

$$\begin{aligned}&\langle hQ^{\mathrm{ex}}hu, h\mathrm{susp}(Q)hu\rangle + \langle h\mathrm{susp}(Q)hu, hQ^{\mathrm{ex}}hu\rangle \\ &= 2||hQ^{\mathrm{ex}}hu||_0^2 + \langle \mathrm{grad}(h^2) \cdot Q^{\mathrm{ex}}hu, hu\rangle + \langle \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}(Q^{\mathrm{ex}}) h^2 u, h^2 u\rangle.\end{aligned}$$

富比尼定理给出

$$\begin{aligned}&||hQ^{\mathrm{ex}}hu||_0^2 + \langle \mathrm{grad}(h^2) \cdot Q^{\mathrm{ex}}hu, hu\rangle + \langle \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}(Q^{\mathrm{ex}}) h^2 u, h^2 u\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} h(t)^2 \left(2||Q^{\mathrm{ex}}u_t||_0^2 + \langle \mathrm{grad}(h^2) Q^{\mathrm{ex}} u_t, u_t\rangle + \langle \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}(Q^{\mathrm{ex}}) u_t, u_t\rangle\right) \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

其中 $u_t = u(-t) \in \Gamma(M, \mathfrak{S}_{g_0} \otimes Cl_{n+1,0})$ 是对切片 $M = M \times \{t\}$ 的限制。

我们将在每个切片上证明所需的不等式（4.13）。差值 $B - \not{D}_{g_0}$是一个零阶伪微分算子的块映射，因为 $Q: \mathbb{R}^{n+1} \to \Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)_{g_0}$ 是固定度量 g_0上的伪狄拉克算子的块映射。因此，$/D_{\mathbb{R}^{n+1}}(Q^{\mathrm{ex}}) = /D_{\mathbb{R}^{n+1}}(B^{\mathrm{ex}})$ 在 $\mathfrak{S}_{g_0} \otimes Cl_{n+1,0} \to M \times \{t\}$ 上限制为有界算子，对所有 $t \in \mathbb{R}^{n+1}$均成立。它们的算子范数有统一的上界。由此可得

$$\langle \not{D}_{\mathbb{R}^{n+1}}(Q^{\mathrm{ex}})u_t, u_t\rangle \geq c_1 ||u_t||_0^2$$

对所有 $c_1 \geq -\sup\{||/D_{\mathbb{R}^{n+1}}(B^{\mathrm{ex}})|_{M\times\{t\}}||_{0,0} : \ t \in \mathbb{R}^{n+1}\} > -\infty$。

另一方面，$Q_t^{\mathrm{ex}} := Q^{\mathrm{ex}}|_{M\times\{t\}} = Q_t \otimes \mathrm{id}_{Cl_{n+1},0}$ 是闭流形 M上的一阶椭圆算子，因此希尔伯特空间 $L^2(M; \mathfrak{S}_{g_0}\otimes Cl_{n+1,0})$ 分解为特征子空间 $\mathrm{Eig}(Q_t^{\mathrm{ex}}, \lambda_i(t))$，其中 $(\lambda_i(t))_{i\in\mathbb{Z}}$ 是特征值序列，且满足 $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$。该特征值序列在两个方向上都无界，参见[LM89，定理 II.5.8]。

将到 $\mathrm{Eig}(Q_t^{\mathrm{ex}}, \lambda_i(t))$ 的正交投影记为 $\Pi_{\lambda_i(t)}$，将 Q_t^{ex} 的谱记为 Σ_t。算子 Q^{ex} 与 $\mathrm{grad}(h^2)\cdot$ 反对易。因此，若 $\mathrm{grad}(h^2)(t) \neq 0$，则它限制为一个同构

$$\mathrm{grad}(h^2)\cdot : \mathrm{Eig}(Q_t^{\mathrm{ex}}, \lambda_i(t)) \to \mathrm{Eig}(Q_t^{\mathrm{ex}}, -\lambda_i(t)).$$

这意味着

$$\begin{aligned}
&2h^2||Q^{\mathrm{ex}}u_t||_0^2 + \langle \mathrm{grad}(h^2)\cdot Q^{\mathrm{ex}}u_t, u_t\rangle \\
&= \sum_{\lambda,\mu\in\Sigma_t} 2h^2\langle (Q^{\mathrm{ex}})^2\Pi_\lambda u_t, \Pi_\mu u_t\rangle + \langle \mathrm{grad}(h^2)\cdot Q^{\mathrm{ex}}\Pi_\lambda u_t, \Pi_\mu u_t\rangle \\
&= \sum_{\lambda,\mu\in\Sigma_t} 2h^2\lambda^2(t)\langle \Pi_\lambda u_t, \Pi_\mu u_t\rangle + \lambda\langle \mathrm{grad}(h^2)\cdot \Pi_\lambda u_t, \Pi_\mu u_t\rangle \\
&= \sum_{\lambda\in\Sigma_t} 2h^2\lambda^2(t)\langle \Pi_\lambda u_t, \Pi_\lambda u_t\rangle + \lambda\langle \mathrm{grad}(h^2)\cdot \Pi_\lambda u_t, \Pi_{-\lambda} u_t\rangle.
\end{aligned}$$

Q_t^{ex} 的谱是对称的，且 $h \geq 1$，因此我们可以估计

$$\begin{aligned}
&2h^2||Q^{\mathrm{ex}}u_t||_0^2 + \langle \mathrm{grad}(h^2)\cdot Q^{\mathrm{ex}}u_t, u_t\rangle \\
&\geq \sum_{\lambda\in\Sigma_t} \lambda^2||\Pi_\lambda u_t||_0^2 - ||\mathrm{grad}(h^2)||_\infty \cdot |\lambda| \cdot ||\Pi_\lambda u_t||_0 ||\Pi_{-\lambda} u_t||_0 \\
&= \sum_{\lambda\in\Sigma_t\cap\mathbb{R}_{\geq 0}} \lambda^2\left(||\Pi_\lambda u_t||_0^2 + ||\Pi_{-\lambda} u_t||_0^2\right) - 2||\mathrm{grad}(h^2)||_\infty \cdot |\lambda| \cdot ||\Pi_\lambda u_t||_0 ||\Pi_{-\lambda} u_t||_0 \\
&\geq \sum_{\lambda\in\Sigma_t\cap\mathbb{R}_{\geq 0}} \left(\lambda^2 - ||\mathrm{grad}(h^2)||_\infty \cdot |\lambda|\right)\left(||\Pi_\lambda u_t||_0^2 + ||\Pi_{-\lambda} u_t||_0^2\right).
\end{aligned}$$

由于 $||\mathrm{grad}(h^2)||_\infty \leq B$对某个 $B \in \mathbb{R}$成立，且由于 $Q: \ \mathbb{R}^{n+1} \to \Psi\mathrm{Dir}^{\times}(M)_{g_0}$是一个块映射，并且自伴椭圆算子的特征值关于椭圆算子连续变化 [BBW93，第 17A 节]，集合

$$\{i \in \mathbb{Z} : \text{存在一个 } t \in \mathbb{R}^{n+1}, \text{ 使得 } \lambda_i^2(t) < ||\mathrm{grad}(h^2)|| \cdot |\lambda_i(t)|\}$$

是有限的。因此，存在一个 $c_2 \in \mathbb{R}$，使得

$$\lambda^2(t) - ||\mathrm{grad}(h^2)||_\infty \cdot |\lambda(t)| \geq c_2$$

对所有 $\lambda(t) \in \Sigma_t$ 以及所有 $t \in \mathbb{R}^{n+1}$。我们得出

$$h^2||Q^{\mathrm{ex}}u_t||_0^2 + \langle \mathrm{grad}(h^2)Q^{\mathrm{ex}}u_t, u_t\rangle \geq c_2||u_t||_0^2.$$

注意，如果 $\mathrm{grad}(h^2)(t) = 0$，则这个不等式显然成立。

在 t 上对这些不等式积分，得到

$$\langle hQ^{\mathrm{ex}}hu, h\mathrm{susp}(Q)hu\rangle + \langle h\mathrm{susp}(Q)hu, hQ^{\mathrm{ex}}hu\rangle \geq \min\{c_1, c_2\}||u||_0^2,$$

因此，定理4.9.4的第三个也是最后一个条件成立。应用该定理可推出

$$\tau_{Cl_{0,n+1}}(b([hQh]))\sharp\alpha_{n+1} = b([h\mathrm{susp}(Q)h])$$

定理得证。 □

推论 4.9.10。 算子悬挂 悬挂$_\bullet$: $\Psi\mathrm{Dir}_\bullet^\times(M)_{g_0} \to \widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M)_{g_0}$在所有同伦群上诱导出一个单射。

证明。 回顾这个分裂图表

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(\Psi\mathrm{Dir}_\bullet^\times(M)_{g_0}) & \longrightarrow & KK(Cl_{0,d}, \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^{n+1})) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_n(\mathrm{susp}_\bullet)} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{Cl_{0,n+1}}(-)\sharp\alpha_{n+1}} \\ \pi_n(\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M)_{g_0}) & \longrightarrow & KK(Cl_{0,d+n+1}, \mathbb{R}). \end{array}$$

根据引理 4.9.6，上方的水平映射是双射；根据 Kasparov 理论，右侧的垂直映射是同构。根据前述定理，该图表可交换，因此左侧垂直箭头与下方水平箭头的复合是双射。特别地，π_n(悬挂$_\bullet$) 在道路连通分支集合及所有同伦群上都是分裂单射。 □

对 $\pi_n(\widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M))$ 的确定

回顾推论 4.12中的图表（4.9.10）。我们知道四个群中有三个同构于 $KO^{-(d+n+1)}$(点)，因此剩下的情况如下

$$\begin{array}{ccc} KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt}) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \pi_n(\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M)_{g_0}) & \longrightarrow & KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt}). \end{array}$$

群 $KO^{-(d+n+1)}$(pt) 是循环群，因此，如果我们能够证明存在一个满射映射 $KO^{-(d+n+1)}$(pt) $\twoheadrightarrow \pi_n(\widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M))$，那么 $\pi_n(\widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M))$ 也将是循环群，而通过简单的图表追踪即可推出 π_n(susp$_\bullet$) 也是满射。

总之，我们还需要证明下面的定理。

定理 4.9.11。 如果 M 是一个闭的、 d维的自旋流形，配备黎曼度量 g_0 ，且 $\not{D}_{g_0}$ 可逆，那么存在一个满射

$$KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt}) \twoheadrightarrow \pi_n(\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_{\bullet}^{\times}(M)_{g_0}, \not{\mathcal{D}}_{g_0})$$

对所有 $n \in \mathbb{N}_0$ 均成立。

证明思路与 [Ebe17，命题 43]中的思路相同。我们将把集合 $\Omega^n_{\not{\mathcal{D}}_{g_0}} \widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}_{\bullet}^{\times}(M)_{g_0}$（赋予适当的拓扑）与 $(B + \mathbf{Kom})^{\times}$进行比较；后者是可逆算子的可逆紧扰动所构成的空间 B，并证明这两个空间弱同伦等价。后一个空间与 $\Omega\mathrm{Fred}^{d+n}$同伦等价，见 [Ebe17，命题 4.3 的证明及引理 49]，；它是 $KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt})$ 的分类空间。

请注意，引用的论证仅适用于一个固定的（但任意选取的）希尔伯特空间，该空间带有一个充足的 $Cl_{d+n+1,0}$-右作用，即。estyle id='10'>即，一个包含所有不可约 $Cl_{d+n+1,0}$-表示的无限多个副本的右作用。必须固定希尔伯特空间，这正是我们使用纤维 $\widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}_{\bullet}^{\times}(M)_{g_0}$ 而非全空间$\widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}_{\bullet}^{\times}(M)$ 的原因。

首先固定记号。令 $\mathcal{B}$ 为 $L^2(M \times \mathbb{R}^n, \mathfrak{S}_{g_0})$ 上所有紧支撑有界算子的集合，并令 $\mathbf{B}$ 为 $\mathcal{B}$ 中由所有自伴、奇且 Clifford 线性算子构成的子集。我们赋予$\mathbf{B}$ 算子范数拓扑，使其成为一个局部凸向量空间。此外，我们将$\mathbf{B}_{act} = \mathbf{B} \cap \Psi\mathrm{DO}^0_c(\mathfrak{S}_{g_0})$ 定义为所有紧支撑的零阶伪微分算子中自伴、奇且 Clifford 线性的算子所构成的集合。

进一步，令 $\mathcal{K}$ 为 $L^2(M \times \mathbb{R}^n, \mathfrak{S}_{g_0})$ 上所有紧算子的集合，并令

$$\mathbf{Kom} \coloneqq \{A \in \mathcal{K} : A \text{ is s.a., odd, Clifford-linear}\}.$$

最后，我们用 ∇ 表示 $\mathfrak{S}_{g_0}$ 上的旋量联络，并定义算子$T \coloneqq (1 + \nabla^*\nabla)^{-1/4}$。

回忆一下，我们将索伯列夫空间 H^s 定义为所有紧支撑截面 $\Gamma_c(M \times \mathbb{R}^n, \mathfrak{S}_{g_0})$ 在范数下的闭包

$$||u||_s^2 \coloneqq \int_{M\times\mathbb{R}^n} \langle (1 + \nabla^*\nabla)^s u, u\rangle_{\mathfrak{S}_{g_0}} \mathrm{dvol}(g_0)$$

因此 $T\colon H^s \to H^{s+1/2}$ 是等距同构。

引理 4.9.12. 赋值 $B \mapsto TBT$ 给出了良定义的连续映射

$$T(-)T\colon \mathcal{B} \to \mathcal{K} \quad and \quad T(-)T\colon \mathbf{B}_{(act)} \to \mathbf{Kom}$$

其像是稠密的。

证明. 映射 $T(–)T$ 是连续的，因为 T 是一个有界算子。

旋量联络 ∇ 是偶的且 Clifford 右线性，因此，如果 B 是自伴、奇且 Clifford 右线性的，那么算子 TBT就是自伴、奇且 Clifford 线性的。因此，只需证明 TBT 是紧的。

由于 B 的支集包含于某个 $R>0$中的 $M\times RI^n$，任意满足 $\chi\equiv 1$ 且定义在 $M\times RI^n$ 上的紧支撑函数都满足 $B=B\chi$。因此，算子 TBT：$H^0\to H^0$ 可分解如下

$$H^0\xrightarrow{T}H^{1/2}\xrightarrow{\chi\cdot}H^{1/2}_{\mathrm{supp}\,(\chi)}\hookrightarrow H^0_{\mathrm{supp}\,(\chi)}\xrightarrow{B}H^0\xrightarrow{T}H^{1/2}\hookrightarrow H^0.$$

根据 Rellich 引理，包含映射 ${H^{1/2}}_{\mathrm{supp}\,(\chi)}\hookrightarrow H^0_{\mathrm{supp}\,(\chi)}$ 是紧的，因此 TBT是紧的。

我们首先证明 $T(-)T$：$\mathcal{B}\to\mathcal{K}$ 具有稠密像。由于对所有 $s\in\mathbb{R}$，T：$H^s\to H^{s+1/2}$都是等距映射，因此它诱导出一个同胚 T：$H^\infty\to H^\infty$，其中 $H^\infty=\bigcap_{s\in\mathbb{R}}H^s$ 赋予逆极限拓扑。因此，T 将稠密子集 $W\subseteq H^\infty$ 映射到稠密子集。

对于每个稠密子集 $W\subseteq H^\infty$，由 W得到的秩一投影集合 $\{\langle -\,w_1\rangle w_2:\ w_j\in W\}$ 的线性包是 $\mathcal{K}$的稠密子集。恒等式

$$T\circ\langle -,w_1\rangle w_2\circ T=\langle T(-),w_1\rangle T(w_2)=\langle -,T(w_1)\rangle T(w_2)$$

意味着 $T(-)T$ 将由 W 得到的秩一投影双射到由 $T(W)$得到的秩一投影。张量积 $\Gamma(M,\mathfrak{S}_{g_0})\otimes\Gamma_c(\mathbb{R}^n,Cl_{n,0})$ 是 $\Gamma_c(M\times\mathbb{R}^n,\mathfrak{S}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle})$ 的稠密子空间，而后者本身是 H^∞的稠密子集。显然，

$$\{\langle -,\sigma_1\otimes\varphi_1\rangle\sigma_2\otimes\varphi_2\ :\ \sigma_j\in\Gamma(M,\mathfrak{S}_{g_0}),\varphi\in\Gamma_c(\mathbb{R}^n,Cl_{n,0})\}\subseteq\Psi\mathrm{DO}^0_c(\mathfrak{S}_{g_0})\subseteq\mathcal{B}$$

由于这些截面是紧支撑的。因此，$T\Psi\mathrm{DO}^0_c(\mathfrak{S}_{g_0})T$和$T\mathcal{B}T$ 在 $\mathcal{K}$中稠密。

为了证明限制 $T(-)T:\mathbf{B}\to\mathbf{Kom}$ 具有稠密像，我们利用 [Ebe17]的投影（4.7）。若 Γ 表示由标准基$e_j\in\mathbb{R}^{d+n}\subseteq Cl_{d+n,0}$生成的乘法群，则投影 $\Pi_{\mathcal{K}}$：$\mathcal{K}\to\mathbf{Kom}$ 定义为

$$K\mapsto\frac{1}{4|\Gamma|}\left[\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma K\gamma^{-1}-\mathrm{e/o}\gamma K\gamma^{-1}\mathrm{e/o}\right)-\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma K\gamma^{-1}-\mathrm{e/o}\gamma K\gamma^{-1}\mathrm{e/o}\right)^*\right].$$

如果我们能够证明此赋值导出了一个投影 $\Pi_{\mathcal{B}}$：$\mathcal{B}\to\mathbf{B}$，那么交换图

$$\begin{array}{ccccc}\Psi\mathrm{DO}^0_c(\mathfrak{S}_{g_0})&\hookrightarrow&\mathcal{B}&\xrightarrow{T(-)T}&\mathcal{K}\\ \downarrow\Pi_{\mathcal{B}}&&\downarrow\Pi_{\mathcal{B}}&&\downarrow\Pi_{\mathcal{K}}\\ \mathbf{B}_{act}&\hookrightarrow&\mathbf{B}&\xrightarrow{T(-)T}&\mathbf{Kom}\end{array}$$

这意味着 $T(-)T$ 到$\mathbf{B}$ 和$\mathbf{B}_{act}$ 的限制也具有稠密像。

注意，若 A 和 B 分别支集于 $M\times RI^n$ 和 $M\times SI^n$内，则 $A+B$ 支集于 $M\times(R+S)I^n$内。若 f 是覆盖恒等函数的向量丛映射，则 fA 和 Af 仍是有界算子，且支集在$M\times RI^n$内。容易验证，若 A 支集于 $M\times RI^n$内，则 A^*也支集于 $M\times RI^n$内。

总之，$\prod_{\mathcal{B}}$：$\mathcal{B}\to\mathbf{B}$ 是良定义的，至此证明完成。 □

由于我们讨论的是非紧流形，因此下一个结果不能由一般理论推出。

引理 4.9.13. 算子 $T\mathfrak{D}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}T\colon\ H^0\to H^0$ 是有界的。

证明依赖于以下抽象算子理论结果。

引理 4.9.14. 设 P 是一个可能无界、自伴、非负的算子， B 是一个有界自伴算子，且满足 $B\geq 1$。则有

$$(B+P)^{-1/4}\leq(1+P)^{-1/4}.$$

证明。 显然有 $B+P\geq 1+P$，因此两个算子都是可逆的。由于无界算子的逆是有界的，我们可以应用 [Mur90，定理 2.2.5 (4)], 的证明，推出 $(1+P)^{-1}\geq($ $B+P)^{-1}$。再两次应用 [Mur90，定理 2.2.6]，可推出 $(B+P)^{-1/4}\leq(1+P)^{-1/4}$。□

引理的证明 *4.9.13*。 对于 $c\geq 1$，定义 $T_c\coloneqq(c+\nabla^*\nabla)^{-1/4}$。由于与 c和 $\nabla^*\nabla$ 相乘可交换，无界泛函演算表明， $T_c\circ T^{-1}$是有界的，且算子范数为 $||T_c\circ T^{-1}||_{0,0}\leq c$。因此，对于某个 $c\geq 1$， $T\mathfrak{D}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}T$有界当且仅当 $T_c\mathfrak{D}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}T_c$ 有界。

由于 M 是闭的，存在一个 $c>0$ 使得 $c-\mathrm{scal}(g_0)/4>1$。利用 Lichnerowicz 公式和引理 4.9.14 可推出

$$\begin{aligned}T_c\mathfrak{D}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}T_c&=(c-\mathrm{scal}(g_0)/4+\mathfrak{D}^2_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle})^{-1/4}\mathfrak{D}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}(c-\mathrm{scal}(g_0)/4+\mathfrak{D}^2_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle})^{-1/4}\\&\leq(1+\mathfrak{D}^2_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle})^{-1/4}\mathfrak{D}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}(1+\mathfrak{D}^2_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle})^{-1/4}\\&=\mathfrak{D}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}(1+\mathfrak{D}^2_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle})^{-1/2},\end{aligned}$$

所以 $T_c\mathfrak{D}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}T_c$ 是有界的。 □

定理的证明 *4.9.11*。 设 $B\coloneqq T\mathfrak{D}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}T$。由推论 B.0.25 可知符号映射 $^1_K\colon\ \Psi\mathrm{DO}^1_K(\mathfrak{S}_{g_0})\to\overline{\mathrm{Symb}}^0_K(\mathfrak{S}_{g_0})$ 对所有紧集 $K\subseteq M\times\mathbb{R}^n$都是连续的，且其核包含于 $\mathcal{K}(H^1,H^0)$ 根据引理 B.0.24。因此

$$\mathfrak{B}\coloneqq\{P-\mathfrak{D}_{g_0}\ :\ P\in\Omega^n_{g_0}\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet(M)_{g_0}\}$$

嵌入到 $\mathcal{K}(H^1,\ H^0)$ 中。事实上，它甚至嵌入到更小的空间 $\mathbf{K}_c(H^1,\ H^0)$ 中；该空间由所有从 $H^1(\mathfrak{S}_{g_0})$ 到 $H^0(\mathfrak{S}_{g_0})$ 的紧算子组成，这些算子 $=L^2(\mathfrak{S}_{g_0})$ 是奇的、自伴的（视为无界算子），且为 Clifford 线性。因此，我们为 $\mathfrak{B}$ 配备 $\mathcal{K}(H^1,$ $H^0)$ 的算子范数拓扑所诱导的子空间拓扑。我们为下排的空间赋予相应的拓扑，使得下图中的垂直箭头成为同胚:

$$\begin{array}{ccccc}\mathfrak{B} & \longleftarrow & \mathbf{B}_{act} & \xrightarrow{T(-)T} & \mathbf{Kom}\\ \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{D}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}+}\ \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\cong} & & \downarrow{\scriptstyle\cong\ B+}\\ \Omega^n_{\mathfrak{D}_{g_0}}\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet(M)_{g_0} & \longleftarrow & \mathfrak{D}_{g_0}+\mathbf{B}_{act} & \xrightarrow{T(-)T} & B+\mathbf{Kom}.\end{array}$$

该图表限制在可逆算子的子空间上：

$$\begin{array}{ccccc} U_0 & \longleftarrow & U_{1/2} & \xrightarrow{T(-)T} & U_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \not{\mathcal{D}}_{g_0\oplus\langle\cdot,\cdot\rangle}+}\cong & & \downarrow\cong & & \cong\downarrow{\scriptstyle B+} \\ \Omega^n_{\not{\mathcal{D}}_{g_0}}\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0} & \longleftarrow & (\not{\mathcal{D}}_{g_0}+\mathbf{B}_{act})^{\times} & \xrightarrow{T(-)T} & (B+\mathbf{Kom})^{\times}. \end{array}$$

注意， $U_{1/2}$ 是 U_1 在 $T(-)T$ 作用下在$\mathbf{B}_{act}$中的原像。此外，$\mathbf{B}_{act}$ 是一个局部凸拓扑向量空间，且它到 $\mathfrak{B}$ 的包含映射连续并具有稠密像（因为无限平滑算子在紧算子中稠密，正如引理 4.9.12的证明中所述）。根据 Palais 定理 [Pal66，定理 12], 的推论可知，两个映射 $T(-)T:\ U_{1/2}\to U_1$ 以及包含映射$U_{1/2}\hookrightarrow U_0$都是弱同伦等价。这尤其意味着我们有一串双射构成的 zig-zag

$$\pi_0(\Omega^n_{\not{\mathcal{D}}_{g_0}}\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0})\xleftarrow{\cong}\pi_0((\not{\mathcal{D}}_{g_0}+\mathbf{B}_{act})^{\times})\xrightarrow{\cong}\pi_0((B+\mathbf{Kom})^{\times}).$$

我们将在下文的引理 4.9.15 中证明，满射 $\pi_0(\Omega^n_{g_0}\widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0})\twoheadrightarrow\pi_n(\widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0})$ 是一个群同态，因此我们有如下 zig-zag

$$\pi_n(\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0})\twoheadleftarrow\pi_0(\Omega^n_{\not{\mathcal{D}}_{g_0}}\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0})\xrightarrow{\cong}\pi_0((B+\mathbf{Kom})^{\times}).$$

结合 Ebert 的结果：$(B+\mathbf{Kom})^{\times}$ 同伦等价于 $\Omega\mathrm{Fred}^{d+n}$，参见 [Ebe17，引理 4.9 或命题 4 的证明。3], 通过取同构的逆，该之字形关系给出以下满射：

$$KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt})\twoheadrightarrow\pi_n(\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0}).\qquad\square$$

引理 4.9.15。 映射 $\pi_n(\mathrm{susp}_\bullet):\pi_n(\Psi\mathrm{Dir}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0})\to\pi_n(\widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0})$ 经由……分解 $\pi_0(\Omega^n_{\not{\mathcal{D}}_{g_0}}\widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0})$。

证明。 显然，悬挂也诱导出一个映射

$$\pi_n(\Psi\mathrm{Dir}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0})\xleftarrow{\cong}\pi_n(B_{\bullet,g_0},\not{\mathcal{D}}_{g_0})\xrightarrow{\pi_n(\mathrm{susp}_\bullet)}\pi_0(\Omega^n_{\not{\mathcal{D}}_{g_0}}\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0})$$

因为在 $B_{n+1,\ g_0}$ 中 P_{-1} 与 P_1 之间的组合同伦，沿最后 n 个坐标悬挂后，会变成 $\mathrm{susp}(P_{-1})$ 与 $\mathrm{susp}(P_1)$ 之间的一条路径。

尚需证明映射 $\pi_0(\Omega^n_{\not{\mathcal{D}}_{g_0}}\widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0})\to\pi_n(\widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M))$ 良定义：它将道路连通分支的一个代表元映射到其共边。记 $\mathbf{B}_{act}$ 为 $\mathfrak{S}_{g_0}\to M\times\mathbb{R}^n$ 上所有紧支撑零阶伪微分算子构成的局部凸向量空间，这些算子是自伴、奇且 Clifford 线性的，并赋予算子范数拓扑。典范映射$\iota\colon\mathbf{B}_{act}\to\mathfrak{B}$ 是连续、单射的线性映射，且具有稠密像，因此，根据

Palais 的结果 [Pal66，定理的推论 12]，它限制为一个弱等价$\iota^{-1}(U_0) \to U_0$。

如果 P_{-1}，$P_1 \in \Omega^n_{\not{D}_{g_0}} \widetilde{\Psi \mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)$ 表示同一道路连通分支，那么对 P_j 作微小扰动 $\tilde{P}_j$，使得 $\tilde{P}_j - \not{D}_{g_0} \in \iota^{-1}(U_0)$ 仍表示同一道路连通分支。因此，我们可以找到一条参数化足够缓慢的路径 $Q\colon \mathbb{R} \to \not{D}_{g_0} + \iota^{-1}(U_0)$，它连接 $\tilde{P}_{-1}$ 与 $\tilde{P}_1$，并且 susp(Q) 可逆。

然而，susp(Q) 可能还不是块算子，因为振幅拓扑无法控制核的直径。为了解决这个问题，考虑光滑块映射

$$t \mapsto B_t \coloneqq Q_t - \not{D}_{g_0}$$

由零阶紧支撑伪微分算子构成（因此是有界算子）。

为了便于阅读，我们将从记号中省略 ι。对于每个给定的 $\varepsilon > 0$，我们都能找到一个足够大的 $N \in \mathbb{N}$，使得如果 $t \in [k/N, (k+1)/N]$，那么对所有 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $||B_t - B_{k/N}||_{0,0} < \varepsilon/3$。

假设 $B_{k/N}$ 的支集包含在 $M \times R_k I^n$ 内。作为块映射，B 在无穷远处局部恒定，因此我们可以（并且确实）假设序列 $(R_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ 有界。令 R 为该序列的上确界。取函数 $\chi\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$，使其在 RI^n 上恒等于 1，并在 $2RI^n$ 的补集上恒等于零。于是路径 $t \mapsto \chi B \chi$ 满足

$$\begin{aligned} ||B_t - \chi B_t \chi||_{0,0} &\leq ||B_t - B_{k/N}||_{0,0} + ||B_{k/N} - \chi B_t \chi||_{0,0} \\ &= ||B_t - B_{k/N}||_{0,0} + ||\chi(B_{k/N} - B_t)\chi||_{0,0} \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon. \end{aligned}$$

由于可逆性是一个开条件，我们可以选取足够小的 $\varepsilon > 0$，使得 $t \mapsto \not{D}_{g_0} + \chi B_t \chi$ 是一个连接 $\tilde{P}_{-1}$ 和 P_1 的可逆算子块映射。

然而，我们还不能构造悬挂，因为尚不清楚路径 $t \mapsto \chi B_t \chi$ 在振幅拓扑下是否连续。幸运的是，该路径的取值都属于支集包含在 $M \times 2RI^n$ 内的算子；换言之，我们有一条连续路径 $\mathbb{R} \to \Psi\mathrm{DO}^0_{M\times 2RI^n}(\mathfrak{S}_{g_0})$（目标配备了算子范数拓扑，且取值 $P_{\pm 1}$ 局部恒定）。由于 $\Psi\mathrm{DO}^0_{M\times 2RI^n}(\mathfrak{S}_{g_0}) \hookrightarrow \Psi\mathrm{DO}^0_{M\times 2RI^n}(\mathfrak{S}_{g_0})$ 连续且像稠密，我们现在可以利用 Palais 定理（以及光滑化理论），将 $t \mapsto \chi B_t \chi$ 替换为一条光滑路径 $\hat{} B_t\colon \mathbb{R} \to \Psi\mathrm{DO}_{M\times 2RI^n}(\mathfrak{S}_{g_0})$，其取值为满足 $\not{D}_{g_0} + \hat{} B_t$ 可逆的算子；该路径连接 P_{-1} 和 P_1，且其悬挂是一个可逆分块狄拉克算子。

P_{-1} 和 P_1 的不同插值可以通过凸组合连接起来，而这是一条可悬挂路径。因此，将道路连通分支中的元素映射到其共边类，确实给出了一个良定义的映射。

要看出复合

$$\pi_n(B_\bullet, \not{D}_{g_0}) \xrightarrow{\pi_n(\mathrm{susp}_\bullet)} \pi_0(\Omega^n_{\not{D}_{g_0}} \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0}) \twoheadrightarrow \pi_n(\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)_{g_0})$$

与 π_n(悬挂•)：$\pi_n(B_{\bullet,\ g_0},\ \not{\mathcal{D}}_{g_0}) \to \pi_n(\widetilde{\Psi}\mathrm{Dir}_{\bullet}^{\times}(M)_{g_0})$ 相符，只需注意，在 susp(P) 与其微小扰动$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }_{\times}$susp(P) 之间的凸组合的悬挂，产生了连接这两个元素的共边，位于 $\pi_n(\Psi\mathbf{Dir}_{\bullet}(M)_{g_0})$ 中。

□

一个直接推论是证明定理 4.9.1 ： 算子悬挂映射是弱同伦等价。

定理的证明*4.9.1*。 正如本章开篇所述，只需$\widetilde{\ }^{\times}$证明该结论对纤维上的限制成立 $B_{\bullet,\ g_0} \hookrightarrow \Psi\mathrm{Dir}_{\bullet}(M)_{g_0}$。由推论 4.9.10可知，悬挂在所有同伦群上诱导单射映射。若 $n \geq 1$，则定理 4.9.11和图表（4.12）给出一列满射

$$KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt}) \twoheadrightarrow \pi_n(\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_{\bullet}^{\times}(M)_{g_0}) \twoheadrightarrow KK(Cl_{0,d+n+1},\mathbb{R}) = KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt}).$$

由于循环群之间的满射端omorphism都是双射，图表（4.12）中的四个映射有三个是同构，因此剩下的同态π_n(悬挂•) 也必定是同构。

若 $n = 0$，我们利用 $\Psi\mathrm{DO}^1(\mathfrak{S}_{g_0}) \hookrightarrow \overline{\Psi\mathrm{DO}}^1(\mathfrak{S}_{g_0})$ 是稠密的这一点，推得 $\Omega^0_{\not{\mathcal{D}}_{g_0}}\Psi\mathrm{Dir}_{\bullet}^{\times}(M)_{g_0} \hookrightarrow \Omega^0_{\not{\mathcal{D}}_{g_0}}\widetilde{\Psi}\mathrm{Dir}_{\bullet}^{\times}(M)_{g_0}$是弱同伦等价。由引理 4.9.15可知， π_0(susp•) 的满射性现在成立。

□

第5章

指标差的因子分解

我们为构造 $\widetilde{\Psi}\mathrm{Dir}_\bullet^\times(M)$ 以及证明它是实 K-理论的分类空间，投入了大量精力。接下来还需证明定理 C，即指标差经由共边空间分解。我们将在第5.1节给出该定理的精确表述及证明。$\widetilde{\ }$关于特殊 $\mathcal{R}_\bullet^+(M)$ 中 M 非平凡性的应用，将依据现有文献（尤其是定理 D）在第 5.2节给出。

5.1 分解定理

定理 5.1.1 (因子分解定理)。 设 $B_\bullet$ 为定义 *4.5.3*中的立方子集。存在一个与之弱同伦等价的立方子集 $A_\bullet \subseteq \mathcal{R}_\bullet^+(M)$使得下图在同伦意义下交换：

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{R}_\bullet^+(M) & \hookleftarrow & A_\bullet & \xrightarrow{\text{susp}} & \widetilde{\mathcal{R}}_\bullet^+(M) \\
\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{D}_\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{D}_\bullet} & & \downarrow{\scriptstyle \mathfrak{D}_\bullet} \\
\Psi\mathrm{Dir}_\bullet^\times(M) & \hookleftarrow & B_\bullet & \xrightarrow{\text{悬挂}} & \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M)。
\end{array}$$

两个映射 $\mathfrak{D}_\bullet \circ$悬挂和悬挂 $\circ \mathfrak{D}_\bullet$ 并不一致。我们将通过为正标量曲率度量的块映射找出合适的条件，使误差项悬挂 $\circ \mathfrak{D}_\bullet - \mathfrak{D}_\bullet \circ$悬挂的算子范数足够小，从而证明这个定理。由于可逆性是一个开条件，凸插值于是构成这两个映射之间的同伦。

定义 5.1.2。 令 $A_\bullet$ 为 $\mathcal{R}_\bullet^+(M)$ 的以下立方子集：一个块映射

$g \in \mathcal{R}_n^+(M)$ 包含于 A_n 当且仅当它满足以下条件：

$$\sum_{j=1}^{n} |\mathrm{tr}((\partial_j g^{\mathrm{op}})^2)| + |\mathrm{tr}(\partial_j^2 g)| + |\mathrm{tr}(\partial_j g)|^2 < \frac{1}{8}\mathrm{scal}(g(t)), \tag{5.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} ||\partial_j g^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},g(t)} < \min\{d^{-1}, 2^{-(d+4)}\mathrm{low}(t)\}, \tag{5.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} |||[\not{\mathfrak{D}}^{\mathrm{ex}}_{g(t)}, \nabla^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}g}}_{\partial_j}]|||_{1,0;M\times t} < 1/32 \cdot \mathrm{low}(t)^2, \tag{5.3}$$

其中 $\mathrm{low}(t) \coloneqq \inf\{||\not{\mathfrak{D}}_{g(t)}v||_{0,g(t)} : ||v||_{1,\ g(t)} = 1\} = \mathrm{low}\ \not{\mathfrak{D}}_g(t)$。

引理 5.1.3. 集合序列确实构成 $\mathcal{R}^+_\bullet$（M）的一个立方子集 .

证明. 证明与证明 $B_\bullet$ 是立方子集的情形类似。注意，三个定义条件都是局部且稳定的，因此此引理可由引理2.2.7得出。

□

接下来，我们希望证明该包含映射是弱同伦等价。我们采用与之前相同的策略：首先证明 $A_\bullet$ 是一个 Kan 集，然后对组合同伦群的元素使用通常的缩放技巧。

命题 5.1.4. 立方子集 $A_\bullet$ 是一个 *Kan* 集。

定理的证明 *5.1.1*。 证明与 $B_\bullet$ 是 Kan 的证明类似。事实上，我们撰写该证明时特意采用了一种方式，使其很容易加以补充，从而证明这个命题。我们将采用相同的构造，但与命题 4.5.12 的证明不同，我们需要更谨慎地选择常数 $R_1 > 1$。

我们先回顾这一构造。给定一个立方 n-角

$$\sqcap^n_{(i,\varepsilon)} = \{g_{(j,\omega)} \in A_{n-1} : \partial^\omega_j g_{(k,\eta)} = \partial^\eta_{k-1} g_{(j,\omega)};\ j < k; (j,\omega),(k,\eta) \neq (i,\varepsilon)\},$$

存在一个足够大的 $\rho > 0$，使得所有块映射 $g_{(j,\omega)}$ 都能在 ρI^{n-1}之外以适当的方式分解。我们将 $\sigma_j g_{(j,\omega)}$ 限制为一个映射 $\{\omega x_j > \rho\} \to \mathrm{Riem}^+(M)$。根据相容性要求，这些限制在其定义域的交集上彼此一致，因此我们可以将它们粘合起来，得到一个映射

$$g_0 \colon \left(\mathrm{Cub}^\rho_{n,1,1}\right)^c \to \mathrm{Riem}^+(M),$$

其中，若 $j \neq i,\ \varepsilon x_i \geq -\rho\}$ 是直径为 ρ的长方体，则 $\mathrm{Cub}^\rho_{n\ ,\ i,\ \varepsilon} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n :$ $x_j \in [-\rho,\rho]$。令 $K \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ 为一个包含 ρI^{n-1}、以原点为中心对称且具有光滑边界的紧凸子集。令 $Q_K \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : p_i(x) \in K,\ \varepsilon x_i \geq -\rho\}$ 为底面是 K的长方体。将 g_0 限制后得到

$$g_0 \colon Q^c_K \cap \{\varepsilon x_i < \rho + R_1\} \to \mathrm{Riem}^+(M),$$

对于固定选取的 $R_1 > 1$。

对于选定的 K，存在唯一的范数 $||\vdash||_K$，其单位球为 K。由于 ∂K 光滑，该范数在 $\mathbb{R}^{n-1}\backslash\{0\}$ 上光滑。取一个足够大的 $R_2 = R_2(\rho,\ R_1)$，其具体取值将在后文确定。选取 $\chi\colon\ \mathbb{R}\to[0,1]$，使其在 $\mathbb{R}_{\leq 1.2}$ 上恒等于 $\mathbf{1}$，在 $\mathbb{R}_{\geq R_2-1}$ 上为零，且其一阶导数和二阶导数满足 $\chi'\leq 1.3/R_2$ 和 $|\chi''|\leq 10/R_2^2$。此外，选取一个单调递增函数 $q\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$，使其在 $\mathbb{R}_{\leq\rho}$ 上为恒等函数，在 $\mathbb{R}_{\rho+R_1}$ 上为取值为 $\rho+R_1-1$ 的常值映射，且其导数满足 $q'\leq 1$ 和 $|q''|\leq 1.2/R_1$。映射 q 定义了一个映射

$$\begin{aligned} q\colon \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n\\ (x_1,\dots,x_n) &\mapsto (x_1,\dots,x_{i-1},q(x_i),x_{i+1},\dots,x_n). \end{aligned}$$

最后，我们定义

$$\begin{aligned} H\colon (Q_K^c\cap\{\varepsilon x_i<\rho+R_1\})\times[0,1] &\to Q_K^c\cap\{\varepsilon x_i<\rho+R_1\},\\ (x,t) &\mapsto x-2\varepsilon(\rho+R_1)te_i \end{aligned}$$

并令

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^n &\to \mathrm{Riem}^+(M),\\ x &\mapsto \begin{cases} g_0\circ H\big(q(x),\chi(||p_i(x)||_K)\big), & \text{if } x\in Q_K^c,\\ g_{(i,-\varepsilon)}(p_i(x)), & \text{if } x\in Q_K. \end{cases} \end{aligned}$$

注意，g 定义良好且光滑，因为 g_0 在集合 $\{-\varepsilon x_i>\rho\}$ 上与 $g_{(i,-\varepsilon)}\circ p_i$ 一致，并且 ∂Q_K 属于映射 $H\circ(q(-)\ \chi(||p_i(-)||_K))$ 下 $\{-\varepsilon x_i>\rho\}$ 的原像。

命题 4.5.12 证明中的相同论证 g 表明它是一个光滑块映射，也是 $\sqcap^n_{(i,\varepsilon)}$ 在 $\mathcal{R}_n^+(M)$中的一个填充子；我们已经知道这样的填充子必然存在。接下来要证明，只要 R_1 和 R_2取得足够大，g 就属于 A_n。

我们需要为 R_1 和 R_2 找到一个足够大的下界，使得 g 满足第一个条件。这稍微棘手一些，因为它涉及二阶导数。我们将 $H(q(-)\ \chi(||p_i(-)||_K))$ 简记为 φ。回忆一下（二阶全）导数的链式法则：

$$D^2(g_0\circ\varphi)=D^2_{\varphi(-)}g_0(D\varphi\cdot,D\varphi\cdot)+D_{\varphi(-)}g_0\cdot D^2\varphi(\cdot,\cdot).$$

用矩阵形式表示，φ 的一阶导数和二阶导数为

$$\begin{aligned} D\varphi &= DH\cdot(Dq,D_{||-||_K\circ p_i}\chi\cdot D_{p_i}||-||_K\cdot p_i(-))\\ &= Dq-\big(2\varepsilon(\rho+R_1)\cdot D_{||-||_K\circ p_i}\chi\cdot D_{p_i}||-||_K\cdot p_i(-)\big)\,e_i \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} D^2\varphi &= D^2q-2\varepsilon(\rho+R_1)\cdot\big[(\chi'(||p_i(-)||_K))'\cdot D_{p_i}||-||_K\cdot p_i\\ &\qquad +\chi'(||p_i(-)||_K)D(D_{p_i}||-||_K\cdot p_i)\big]e_i\\ &= D^2q-2\varepsilon(\rho+R_1)\big[\chi''(||p_i(-)||_K)\cdot(D_{p_i}||-||_K\cdot p_i\otimes D_{p_i}||-||_K\cdot p_i)\\ &\qquad +\chi'(||p_i(-)||_K)\cdot D^2_{p_i}||-||_K(p_i(-),p_i(-))\big]e_i. \end{aligned}$$

由此，块映射 g 在 Q_K^c上的一阶导数和二阶导数可表示为：对于 $j<i$，有

$$\begin{aligned}\partial_j g &= \partial_j g_0\circ\varphi - \partial_i g_0\circ\varphi\cdot 2\varepsilon(\rho+R_1)\chi'\partial_j||\text{-}||_K,\\ \partial_j^2 g = D^2 g(e_j,e_j) &= (\partial_j^2 g_0)\circ\varphi + (\partial_i^2 g_0)\circ\varphi\cdot\big(2\varepsilon(\rho+R_1)\chi'\partial_j||\text{-}||_K\big)^2\\ &\quad - 4(\partial_i\partial_j g_0)\circ\varphi\cdot\varepsilon(\rho+R_1)\chi'\partial_j||\text{-}||_K\\ &\quad + (\partial_i g_0)\circ\varphi\cdot 2\varepsilon(\rho+R_1)\big(\chi''(\partial_j||\text{-}||_K)^2+\chi'\partial_j^2||\text{-}||_K\big),\end{aligned}$$

对于 $j>i$，我们有

$$\begin{aligned}\partial_j g &= \partial_j g_0\circ\varphi - \partial_i g_0\circ\varphi\cdot 2\varepsilon(\rho+R_1)\chi'\partial_j||\text{-}||_K,\\ \partial_j^2 g = D^2 g(e_j,e_j) &= (\partial_j^2 g_0)\circ\varphi + (\partial_i^2 g_0)\circ\varphi\cdot 2\varepsilon(\rho+R_1)\chi'\partial_{j-1}||\text{-}||_K\\ &\quad - 4(\partial_i\partial_j g_0\circ\varphi)\cdot\varepsilon(\rho+R_1)\chi'\partial_{j-1}||\text{-}||_K\\ &\quad + (\partial_i g_0)\circ\varphi\cdot 2\varepsilon(R+R_1)[\chi''(\partial_{j-1}||\text{-}||_K)^2+\chi'\partial_{j-1}^2||\text{-}||_K],\end{aligned}$$

并且，对于 $j=i$，我们有

$$\begin{aligned}\partial_i g &= (\partial_i g_0)\circ\varphi\cdot q',\\ \partial_i^2 g &= (\partial_i^2 g_0)\circ\varphi\cdot(q')^2+(\partial_i g_0)\circ\varphi q''.\end{aligned}$$

根据定义，$|q''|\le 1.2/R_1$，因此我们可以选取足够大的 R_1，使得

$$\begin{aligned}&\sup\Big\{\mathrm{tr}(\partial_i^2 g)-\mathrm{tr}(\partial_i^2 g_0)\circ\varphi\cdot(q')^2\ :\ t\in Q_K^c\Big\}\\ &<\frac{1}{3}\min\Big\{\frac{1}{8}\mathrm{scal}(g_0)-\sum_{j=1}^n|\mathrm{tr}((\partial_j g_0^{\mathrm{op}})^2)|+|\mathrm{tr}(\partial_j^2 g_0^{\mathrm{op}})|+\mathrm{tr}(\partial_j g_0^{\mathrm{op}})^2\Big\}.\end{aligned}$$

回想一下，在不包含原点的每个闭子集上，$\partial_j||\text{-}||_K$ 和 $\partial_j^2||\text{-}||_K$ 都是有界的。还要回想一下，g_0 在 Q_K^c上具有有界的一阶和二阶导数。由于 $|\chi'|$ 或 χ'' 出现在除 $j=i$ 之外的所有偏导数 $\partial_j g$ 和 $\partial_j^2 g$ 中，并且由于 $|\chi'|\le 1.3/R_2$ 和 $|\chi''|\le 10/R_2^2$，我们可以将 R_2 取为充分大（取决于 R 和 R_1），使得

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in\overline{Q_K^c}}\Big\{\sum_{j=1}^n|\mathrm{tr}(((\partial_j g)^{\mathrm{op}})^2)-\mathrm{tr}((\partial_j g_0^{\mathrm{op}})^2)\circ\varphi|\\ &\qquad+\sum_{j\ne i}^n|\mathrm{tr}(\partial_j^2 g)-\mathrm{tr}(\partial_j^2 g_0)\circ\varphi|\\ &\qquad+\sum_{j=1}^n|\mathrm{tr}(\partial_j g)|^2-|\mathrm{tr}(\partial_j g_0)|^2\circ\varphi\Big\}\\ &<\frac{1}{3}\min\Big\{\frac{1}{8}\mathrm{scal}(g_0)-\sum_{j=1}^n|\mathrm{tr}((\partial_j g_0^{\mathrm{op}})^2)|+|\mathrm{tr}(\partial_j^2 g_0)|+|\mathrm{tr}(\partial_j g_0)|^2\Big\}.\end{aligned}$$

由于 g_0 满足条件5.1，因此 g 也通过一个简单的三角不等式论证满足该条件。

因此，若我们增大 R_2，使其还满足 $R_2 > 2(\rho+R_1)B_1B_2\mathcal{I}^{-1}$，其中 $\mathcal{I} = \min\{\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2\}$ 是

$$\mathcal{I}_1 := \inf\left\{\frac{1}{32}\operatorname{low}_{\mathfrak{D}_{g_0}}(t)^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}|||[\mathfrak{D}_{g_0}^{\mathrm{ex}}, \nabla_j^{\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}g_0}}]||| \,:\, t \in Q_K^c\right\}$$

and

$$\mathcal{I}_2 := \inf\left\{\min\{d^{-1}, 2^{-(d+4)}\operatorname{low}(t)\} - \sum_{k=1}^{n}||\partial_k g_0^{\mathrm{op}}||_{\mathrm{op},g_0(t)} \,:\, t \in Q_K^c\right\},$$

那么 g 也满足 $A_\bullet$ 其余的定义条件。注意，$\mathcal{I} > 0$，因为 $g_0|_{Q_K^c}$ 是 A_n 中退化元素的限制的并集，而 A_n 的定义条件是局部的。

因此，$g \in A_n$ 是给定立方 n-角的填充子，所以 $A_\bullet$ 是一个 Kan 集。

□

推论 5.1.5。 包含映射 $A_\bullet \hookrightarrow \mathcal{R}_\bullet^+(M)$ 是弱同伦等价。

证明。 证明与推论 4.5.13 中证明 $B_\bullet \hookrightarrow \Psi\mathrm{Dir}_\bullet^\times(M)$是弱同伦等价的证明类似。

□

L $\widetilde{\quad}$引理 5.1.6. 悬挂限制为立方映射 $\mathrm{susp}\colon A_\bullet \hookrightarrow \mathcal{R}_\bullet^+(M)$.

证明。 通过反复应用引理C.1.1 可得

$$\begin{aligned}|\mathrm{scal}(\mathrm{susp}(g)) - \mathrm{scal}(g)| &= \left|\sum_{j=1}^{n}\frac{3}{4}(\mathrm{tr}((\partial_j g)^{\mathrm{op}})^2) - \mathrm{tr}(\partial_j^2 g) - \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\partial_j g)^2\right| \\ &< \sum_{j=1}^{n}|\mathrm{tr}((\partial_j g)^{\mathrm{op}})^2)| + |\mathrm{tr}(\partial_j^2 g)| + |\mathrm{tr}(\partial_j g)^2| \\ &< \frac{1}{8}\mathrm{scal}(g).\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{scal}(\mathrm{susp}(g))(m,\ t) > \frac{7}{8}\mathrm{scal}(g(t))(m) > 0$，这就证明了该结论。 □

Lichnerowicz 公式表明，$\mathfrak{D}_\bullet$ 限制为立方映射 $\widetilde{\mathcal{R}_\bullet^+}(M) \to \widetilde{\quad}\times\Psi$狄拉克算子$_\bullet$ (M)。根据 $A_\bullet$ 狄拉克算子的第二和第三个定义条件，它限制为立方映射 $A_\bullet \hookrightarrow B_\bullet$。因此，我们有两个立方映射

$$\mathfrak{D}_\bullet \circ \mathrm{susp},\ \mathrm{susp} \circ \mathfrak{D}_\bullet\colon A_\bullet \to \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_\bullet^\times(M).$$

令人惊讶的是，这两个映射并不相同。我们将通过控制它们之间的差异，证明它们是同伦的。

定义 5.1.7. 定义误差项为

$$\mathfrak{Err}(g) \coloneqq \mathfrak{D}_{\mathrm{susp}(g)} - \mathrm{susp}(\mathfrak{D}_g).$$

引理 5.1.8。 对于每个块映射 $g \in \mathcal{R}_n(M)$，误差项 $\mathfrak{Err}(g)$ 是一个零阶微分算子，且具有块形式。它可以用以下公式表示

$$\mathfrak{Err}(g) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4} \left(\mathrm{tr}\partial_j g^{\mathrm{op}}\right) \partial_j \cdot .$$

证明。 由于两个主符号相同的一阶微分算子之差， $\mathfrak{Err}(g)$ 是一个零阶微分算子。该公式可由引理 4.5.1中克里斯托费尔符号的计算得出。由于 g 是块度量，$\mathfrak{Err}(g)$ 相应地分解，因此它是一个零阶块算子。 □

引理 5.1.9。 对于每个 $g \in A_n$ 以及所有 $u \in H^1(\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(g)})$，以下估计均成立

$$\begin{aligned} ||\mathfrak{Err}||^2_{\mathrm{op},t} &< \frac{1}{64}\mathrm{scal}(g(t)), \\ ||\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}(g)}u||_0 - ||\mathfrak{Err}(g)u||_0 &\geq \frac{1}{2}\min\{1, 1/8\inf\{\mathrm{scal}(g(t))^{1/2} \,:\, t \in \mathbb{R}^n\}\} \cdot ||u||_1. \end{aligned}$$

证明。 第一个估计由引理 5.1.8以及（逐纤维）算子范数满足 C^*-恒等式

$$\begin{aligned} ||\mathfrak{Err}||^2_{\mathrm{op},t} &= ||\mathfrak{Err}^*\mathfrak{Err}||_{\mathrm{op},t} \\ &= \left|\left|\frac{1}{16}\sum_{k,l}\mathrm{tr}(\partial_k g)\mathrm{tr}(\partial_l g)\partial_k^*\partial_l\right|\right|_{\mathrm{op},t} \\ &= \left|\left|\frac{1}{16}\sum_{k\leq l}\mathrm{tr}(\partial_k g)\mathrm{tr}(\partial_l g)(\partial_k\partial_l + \partial_l\partial_k)\right|\right|_{\mathrm{op},t} \\ &= \left|\left|\frac{2}{16}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{tr}(\partial_k g)^2\mathrm{id}\right|\right|_{\mathrm{op},t} \\ &= \frac{2}{16}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{tr}(\partial_k g(t))^2 < \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\mathrm{scal}(g(t)). \end{aligned}$$

这个不等式结合 Lichnerowicz 公式，推出第二个不等式

其依据是以下一系列估计。

$$\begin{aligned}
&||\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}(g)}u||_0 - ||\mathfrak{Err}(g)u||_0 \\
=&\left(||\nabla u||_0^2 + \frac{1}{4}||\mathrm{scal}(g)^{1/2}u||_0^2\right)^{1/2} - ||\mathfrak{Err}(g)u||_0 \\
\geq&\left(||\nabla u||_0^2 + \frac{1}{4}||\mathrm{scal}(g)^{1/2}u||_0^2\right)^{1/2} - \sqrt{\frac{1}{64}}||\mathrm{scal}(g)^{1/2}u||_0 \\
\geq&\left(||\nabla u||_0^2 + \frac{1}{4}||\mathrm{scal}(g)^{1/2}u||_0^2\right)^{1/2} - 1/8||\mathrm{scal}(g)^{1/2}u||_0 \\
\geq&\frac{1}{2}\left(||\nabla u||_0^2 + \frac{1}{8}||\mathrm{scal}(g)^{1/2}u||_0^2\right)^{1/2} \\
\geq&\frac{1}{2}\min\Big\{1, 1/8\inf\{\mathrm{scal}(g(t))^{1/2} \,:\, t\in\mathbb{R}^n\}\Big\}\cdot||u||_1.
\end{aligned}$$

□

我们可以利用前述引理重新证明$\mathrm{susp}(\mathfrak{D}_g)$ 是可逆的，这一点我们已知可由条件 5.2 和 5.3成立。

推论 5.1.10. 对于每个 $g\in A_n$，块狄拉克算子 $\mathrm{susp}(\mathfrak{D}_g)$ 都是可逆的。

证明。 Lichnerowicz 公式蕴含 $||\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}(g)}u||_0^2 \geq 1/4|\mathrm{scal}(g)^{1/2}u||_0^2$，尤其是，该算子可逆。由引理 5.1.9 以及

$$||\mathrm{susp}(\mathfrak{D}_g)u||_0 \geq \left|||\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}g}u||_0 - ||\mathfrak{Err}(g)u||_0\right|$$

我们得出 $\mathrm{susp}(\mathfrak{D}_g)$ 的核是平凡的，且像是闭的。由于 $\mathrm{susp}(\mathfrak{D}_g)$ 是自伴的，它也是满射的，因此可逆。 □

定义 5.1.11. 设 $\chi\colon \mathbb{R}\to[0,1]$ 是一个光滑映射，在$\mathbb{R}_{\leq -1}$ 上恒等于 0，在 $\mathbb{R}_{\geq 1}$ 上恒等于 1，并令

$$\mathcal{H}_\bullet\colon (\square[1]\otimes A)_\bullet \to \widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_\bullet(M)$$

是如下立方映射：如果 $\varphi\in\square[1]_k$ 且 $g\in A_{n-k}$，则

$$\mathcal{H}_n(\varphi,g) = \chi\circ\boldsymbol{\sigma}(\varphi)\cdot\mathrm{susp}\mathfrak{D}_{\sigma_1^k g} + (1-\chi)\circ\boldsymbol{\sigma}(\varphi)\cdot\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}(\sigma_1^k g)},$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}\varphi = \sigma_n\ldots\sigma_{k+1}\varphi$。更确切地说，$\mathcal{H}_n(\varphi,\ g)\in\Psi\overline{\mathrm{DO}}^1(\mathfrak{S}_{\mathrm{susp}(\sigma_1^k g)})$ 是由下式定义的唯一算子

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_n(\varphi,g)(u)(m,t) = \\
&\quad\chi(\boldsymbol{\sigma}(\varphi)(t))\cdot\left(\mathrm{susp}\mathfrak{D}_{\sigma_1^k g}u\right)(m,t) + (1-\chi(\boldsymbol{\sigma}(\varphi)(t))\cdot\left(\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}(\sigma_1^k g)}u\right)(m,t).
\end{aligned}$$

定理 5.1.12. 序列 $\mathcal{H}_\bullet$ 由良定义的映射构成，并组装成一个立方映射。它是悬挂 $\circ\,\mathfrak{D}_\bullet$ 与 $\mathfrak{D}_\bullet\circ$ 悬挂之间的同伦。

证明. 为验证良定义性，我们需要检查对于所有 $n \in \mathbb{N}_0$，$\mathcal{H}_{n+1}(\sigma_{k+1}\varphi, g) = \mathcal{H}_{n+1}(\varphi, \sigma_1 g)$，并且对于所有 $\varphi \in \square[1]_k$ 和 $g \in A_{n-k}$，$\mathcal{H}_n(\varphi, g)$ 是一个可逆分块狄拉克算子。

我们首先证明，$\mathcal{H}_n$ 保留了 $(\square[1] \otimes A)^\bullet$ 的等价关系。设 $\varphi \in \square[1]_k$ 和 $g \in A_{n-k}$ 给定。由于 $\sigma_{k+1}\varphi \in \square[1]_{k+1}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}_{n+1}(\sigma_{k+1}(\varphi), g) \\
&= \chi \circ \sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_{k+2}(\sigma_{k+1}\varphi) \operatorname{susp} \not{D}_{\sigma_1^{k+1} g} \\
&\quad + (1 - \chi \circ \sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_{k+2}(\sigma_{k+1}\varphi)) \not{D}_{\operatorname{susp}(\sigma_1^{k+1} g)} \\
&= \chi \circ \sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_{k+1}\varphi \operatorname{susp} \not{D}_{\sigma_1^{k+1} g} + (1 - \chi \circ \sigma_n \circ \cdots \circ \sigma_{k+1}\varphi) \not{D}_{\operatorname{susp}(\sigma_1^{k+1} g)} \\
&= \mathcal{H}_{n+1}(\varphi, \sigma_1 g)
\end{aligned}$$

在整个证明过程中，我们稍微滥用了记号，没有标明复合 $\boldsymbol{\sigma}$ 的长度，即我们写作 $\boldsymbol{\sigma}\varphi$ 而不是 $\boldsymbol{\sigma}\sigma_{k+1}\varphi$。

算子 $\mathcal{H}_n(\varphi, g)$ 具有块形式。事实上，若 φ 为常数，则

$$\mathcal{H}_n(\varphi, g) = \begin{cases} \not{D}_{\operatorname{susp}(\sigma_1^k g)}, & \text{if } \varphi \equiv -1, \\ \operatorname{susp}(\not{D}_{\sigma_1^k g}), & \text{if } \varphi \equiv 1. \end{cases}$$

若 φ 不是常数，则根据引理2.1.3，存在唯一的坐标 t_s，使得$1 \le s \le k$ 且 $\varphi(t) = t_s$。容易看出，$M \times RI^n$既是$\not{D}_{\operatorname{susp}(\sigma_1^k g)}$ 和悬挂 $(\not{D}_{\sigma_1^k g})$ 的核，也是 $\mathcal{H}_n(g, \varphi)$ 的核。由于 $\mathcal{H}_n(\varphi, g)$ 是微分算子，它会缩小支集，因此特别可以限制到每个 $U_R(\varepsilon)$。$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$-线性意味着

$$\begin{aligned}
(\Phi_\varepsilon)_* \Big(\mathcal{H}_n(\varphi, g)|_{U_R(\varepsilon)} \Big) = \\
\Bigg(\chi(t_{c(\varepsilon)(s)}) \operatorname{susp} \not{D}_{\sigma_1^k g}(\varepsilon|_{\{1,\dots,k\}}) + (1 - \chi(c(\varepsilon)(s))) \not{D}_{\operatorname{susp}\sigma g}(\varepsilon_{\{1,\dots,k\}}) \boxtimes \mathrm{id} \\
+ \mathrm{e/o} \boxtimes \sum_{j \in \operatorname{dom}\varepsilon|_{\{k+1,\dots,n\}}} \partial_j \frac{\partial}{\partial t_j} \Bigg).
\end{aligned}$$

因此，对所有充分大的 $R > 0$，只要 $g|_{U_R(\varepsilon)}$ 不依赖于由 $\operatorname{supp}\ \varepsilon$ 参数化的变量，算子 $\mathcal{H}_n(\varphi, g)$ 就会按要求在 $U_R(\varepsilon)$ 上分解。

算子 $\mathcal{H}_n(\varphi, g)$ 是 $\operatorname{susp}(\not{D}_{\sigma_1^k g})$ 和 $\not{D}_{\operatorname{susp}(\sigma_1^k g)}$ 的凸组合，其中使用的是正实值函数而非实数。这意味着 $\mathcal{H}_n(\varphi, g)$ 是一个与 $\not{D}_{\operatorname{susp}(\sigma_1^k \sigma(g))}$ 具有相同符号的微分算子，而块形式意味着它与 $\not{D}_{\operatorname{susp}(\sigma_1^k g)}$ 仅相差一个有界算子。作为对称微分算子的凸组合，$\mathcal{H}_n(\varphi, g)$ 是一个对称微分算子，其主符号具有有限传播速度，因此根据 [HR00, Prop 10.2.11]，$\mathcal{H}_n(\varphi, g)$ 是自伴算子。

到目前为止，我们已经证明 $\mathcal{H}_n(\varphi, g)$ 是一个块狄拉克算子。接下来，我们将通过证明它有下界，进而证明它可逆，这将用到引理

5.1.9:

$$\begin{aligned}
||\mathcal{H}_n(\varphi,g)||_0 &\geq \Big|\,||\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}(\sigma_1^k g)}u||_0 - ||(\mathcal{H}_n(\varphi,g)-\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}(\sigma_1^k g)})u||_0\Big| \\
&= \Big|\,||\mathrm{susp}\mathfrak{D}_{\sigma_1^k g}u||_0 - ||(\chi\circ\boldsymbol{\sigma}(\varphi))\mathrm{susp}\mathfrak{D}_{\sigma_1^k g} - (\chi\circ\boldsymbol{\sigma}(\varphi))\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}(\sigma_1^k g)})||_0\Big| \\
&= \Big|\,||\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}\sigma_1^k g}u||_0 - ||(\chi\circ\boldsymbol{\sigma}(\varphi))\mathfrak{Err}(\sigma_1^k g)u||_0\Big| \\
&\geq ||\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}(\sigma_1^k g)}u||_0 - ||\mathfrak{Err}(\sigma_1^k g)u||_0 \\
&\geq \frac{1}{2}\min\Big\{1, 1/8\inf\{\mathrm{scal}(\sigma_1^k g)(t)^{1/2} \,:\, t\in\mathbb{R}^n\}\Big\}||u||_1.
\end{aligned}$$

现在我们验证 $\mathcal{H}_\bullet$ 是一个立方映射。根据 $\mathcal{H}_n(\varphi,\ g)$ 是一个块映射的证明，以及 susp 和 $\mathfrak{D}$ 是立方映射这一点，我们推得

$$\begin{aligned}
\partial_i^\varepsilon\mathcal{H}_n(\varphi,g) &= \lim_{R\to\infty}\delta_i^{R\varepsilon^*}H_n(\varphi,g)(i,\varepsilon) \\
&= \lim_{R\to\infty}\delta_i^{R\varepsilon^*}\Big(\chi\circ\boldsymbol{\sigma}(\varphi)|_{M\times\mathbb{R}^n(i,\varepsilon)}\cdot\mathrm{susp}\,\mathfrak{D}_{\sigma_1^k g}(i,\varepsilon) \\
&\qquad \big(1-\chi\circ\boldsymbol{\sigma}(\varphi)|_{M\times\mathbb{R}^n(i,\varepsilon)}\big)\cdot\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}(\sigma_1^k g)}(i,\varepsilon)\Big) \\
&= \lim_{R\to\infty}\delta_i^{R\varepsilon^*}(\chi\circ\boldsymbol{\sigma}(\varphi)|_{M\times\mathbb{R}^n(i,\varepsilon)})\cdot\mathrm{susp}\mathfrak{D}_{\delta_i^{R\varepsilon^*}\sigma_1^k g} \\
&\qquad 1-\delta_i^{R\varepsilon^*}(\chi\circ\boldsymbol{\sigma}(\varphi)|_{M\times\mathbb{R}^n(i,\varepsilon)})\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}(\delta_i^{R\varepsilon^*}\sigma_1^k g)} \\
&= \begin{cases}\mathcal{H}_{n-1}(\partial_i^\varepsilon\varphi,g), & \text{if } i\leq k,\\ \mathcal{H}_{n-1}(\varphi,\partial_{i-k}^\varepsilon g), & \text{if } i>k.\end{cases}
\end{aligned}$$

对于退化映射，我们在下面的计算中使用一个简单的观察结果 $(f\cdot P)\boxtimes\mathrm{id} = \sigma_{n+1}(f)\cdot(P\boxtimes\mathrm{id})$：

$$\begin{aligned}
&\sigma_i\mathcal{H}_n(\varphi,g) = \mathrm{Cycl}(i,n+1)_*\left(\mathcal{H}_n\boxtimes\mathrm{id} + \mathrm{e/o}\boxtimes\not{D}_{\mathbb{R}}\right) \\
&= \mathrm{Cycl}(i,n+1)_*\Big(\chi\circ\sigma_{n+1}\boldsymbol{\sigma}(\varphi)(\mathrm{susp}\mathfrak{D}_{\sigma_1^k g}\boxtimes\mathrm{id}) \\
&\qquad +(1-\chi)\circ\sigma_{n+1}\boldsymbol{\sigma}(\varphi)(\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}\,\sigma_1^k g}\boxtimes\mathrm{id}) + \mathrm{e/o}\boxtimes\not{D}_{\mathbb{R}}\Big) \\
&= \mathrm{Cycl}(i,n+1)_*\Big(\chi\circ\sigma_{n+1}\boldsymbol{\sigma}(\varphi)\mathrm{susp}\mathfrak{D}_{\sigma_{n+1}\sigma_1^k g} \\
&\qquad +(1-\chi\circ\sigma_{n+1}\boldsymbol{\sigma}(\varphi))\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}\sigma_{n+1}\sigma_1^k g}\Big) \\
&= \chi\circ\sigma_i\boldsymbol{\sigma}(\varphi)\mathrm{susp}(\mathfrak{D}_{\sigma_i\sigma_1^k g}) + (1-\chi)\circ\sigma_i\boldsymbol{\sigma}(\varphi)\mathfrak{D}_{\mathrm{susp}\sigma_i\sigma_1^k g} \\
&= \begin{cases}\mathcal{H}_{n+1}(\sigma_i\varphi,g), & \text{if } i\leq k,\\ \mathcal{H}_{n+1}(\varphi,\sigma_{i-k}g), & \text{if } i>k.\end{cases}
\end{aligned}$$

最后，我们需要证明 $\mathcal{H}_\bullet$ 是 susp $\circ\mathfrak{D}_\bullet$ 与 $\mathfrak{D}_\bullet\circ$susp 之间的一个同伦。如果 $\varphi = (-1,\ldots,-1)\in\square[1]_k$，那么

$$\mathcal{H}_n(\varphi,g) = \mathrm{susp}(\mathfrak{D}_{\sigma_1^k g}) = \sigma_1^k(\mathrm{susp}\mathfrak{D}_g)$$

并且如果 $\varphi=(1,\dots,1)\in\square[1]_k$，那么

$$\mathcal{H}_n(\varphi,g)=\not{D}_{\mathrm{susp}(\sigma_1^k g)}=\sigma_1^k(\not{D}_{\mathrm{susp}(g)}),$$

因此， $\mathcal{H}_n$ 确实是 susp $\circ\not{D}_\bullet$ 与 $\not{D}_\bullet\circ$susp 之间的一个同伦。 □

5.2 应用

我们概述本文工作与现有文献的联系，并给出主定理的一些应用。本节的阐述不如论文其余部分详尽，因为缺少的细节可以在现有文献中找到。我们还给出了一个更强的一致蕴含同痕猜想的反例；该猜想断言，在一个弱等价的子集上定义的悬挂 susp : $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$ $\dashrightarrow$ $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$，是一个弱等价。

与 Botvinnik、Ebert 和 Randal-Williams 工作的关系：

对于$\mathrm{Riem}^+(M)$ 的同伦群中非平凡元素，若不考虑流形的基本群，最强的检测结果由 Botvinnik、Ebert 和 Randal-Williams 在 [BERW17]中取得。他们运用同伦论中的精妙工具，证明了指标差在有理数意义下是满射。

定理 5.2.1 ([BERW17，定理 A])。 设 M^d 是一个维数为 $d\geq 6$ 的闭自旋流形。则

$$\pi_n(\mathrm{inddif})\otimes\mathbb{Q}\colon \pi_n(\mathrm{Riem}^+(M))\otimes\mathbb{Q}\to KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt})\otimes\mathbb{Q}$$

是满射。若 $d+n+1\equiv 1,2 \bmod 8$，使得 $KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt})\cong\mathbb{Z}_2$，则 π_n(指标差)是满射。

根据定理 5.1.1，指标差通过 $\widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M)$分解，因此我们得出：

推论 5.2.2。 设 M^d 是一个维数为 $d\geq 6$ 的闭自旋流形。则

$$\pi_n(\not{D}_\bullet)\otimes\mathbb{Q}\colon \pi_n(\widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M))\otimes\mathbb{Q}\to\pi_n(\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}^{\times}_\bullet}(M))\otimes\mathbb{Q}=KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt})\otimes\mathbb{Q}$$

是满射。若 $d+n+1\equiv 1,2 \bmod 8$，使得 $KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt})\cong\mathbb{Z}_2$，则 $\pi_n(\not{D}_\bullet)$是满射。

与 Hitchin 工作的关系：

Hitchin 最先发现，$\mathrm{Riem}^+(M)$若 M^d是维数为 $8k$ 且至少带有一个正标量曲率度量的任意闭自旋流形，则它可以不是可缩的。尽管这是前文所述 Botvinnik、Ebert 和 Randal-Williams 结果的推论，但仍值得详细回顾 Hitchin 的结果，因为我们将在下文中用到这些结果。Hitchin 在 [Hit74] 中的论证大致如下：微分同胚群

Diff(M) 通过拉回作用在 Riem$^+$(M) 上。对于每个基点 $g_0 \in$ Riem$^+$(M) 的选取，拉回会为每个元素 $[\varphi] \in \pi_n$(Diff(M)) 产生元素 $[\varphi^* g_0] \in \pi_n$(Riem$^+$($M$))。关键的观察是，(Hitchin) 指标差与拉回作用的复合

$$\pi_n(\mathrm{Diff}(M)) \xrightarrow{\text{pull back}} \pi_n(\mathrm{Riem}^+(M)) \xrightarrow{\text{inddif}} KO^{-(d+n+1)}(\mathrm{pt})$$

与黏合构造$M \times D^{n+1} \cup_\varphi M \times D^{n+1} \to S^{n+1}$全空间的拓扑指标相等，前提是该全空间是自旋流形。更准确地说，在上述条件下，我们有

$$\mathrm{inddif}(\varphi^* g_0, g_0) = \alpha(M \times D^{n+1} \cup_\varphi M \times D^{n+1}).$$

在 $n = 0, 1$ 的情形下，存在微分同胚 $\varphi \in \pi_n$(Diff(M))，使得

$$M \times D^{n+1} \cup_\varphi M \times D^{n+1} \cong (M \times S^{n+1}) \# \Sigma^{d+n+1},$$

其中 Σ^{d+n+1} 是一个异球，且满足 $\alpha(\Sigma^{d+n+1}) \neq 0$。由于拓扑指标$\alpha$: Ω_*^{Spin}(pt) $\to KO^{-*}$(pt) 是环同态，我们推得

$$\alpha((M \times S^{n+1}) \# \Sigma^{d+n+1}) = \alpha(M) \underbrace{\alpha(S^{n+1})}_{=0} + \alpha(\Sigma^{d+n+1}) \neq 0.$$

这意味着 π_0(Riem$^+$(M)) 和 π_1(Riem$^+$(M)) 都是非平凡的。

为后续讨论起见，我们指出，这些特殊微分同胚属于 π_n(Diff(D^d, S^{d-1})) 的像；该群由嵌入圆盘 $D^d \subseteq M$ 上的微分同胚组成，它们在 S^{d-1} 附近是恒等函数。

我们与本文工作的联系由定理 5.1.1给出。左侧的竖直映射是一个立方映射，用于刻画（Hitchin）指标差的空间层面描述。将同伦群应用于定理5.1.1 中的图表，并结合 Hichtin 的结果，可得以下推论。

推论 5.2.3。 设 M^d 是一个维数为 $8k$ 的闭自旋正标量曲率流形。那么 $\sim$ $\sim\pi_0(\mathcal{R}_\bullet^+(M))$ 和 $\pi_1(\mathcal{R}_\bullet^+(M))$ 均非平凡。

与 Ruberman 工作的关系：

$\widetilde{\ }$我们给出一个例子，其中 悬挂$_\bullet$: $\mathcal{R}_\bullet^+(M)$ $\dashrightarrow$ $\mathcal{R}_\bullet^+(M)$ 不是弱同伦等价。以下命题只是对[Rub01]中的结果重新表述。

命题 5.2.4. [Rub01，推论 5.2，定理 5.5] 对于 $n \geq 2$ 和 $k > 10n$，定义 $M := \#_{2n}\mathbb{CP}^2 \# _k \overline{\mathbb{CP}^2}$。则 悬挂$_\bullet$: $\mathcal{R}_\bullet^+(M)$ $\dashrightarrow$ $\widetilde{\mathcal{R}_\bullet^+}(M)$ 在连通分支层面上不是单射。事实上，每个共边类都包含无穷多个不同的同痕类。

非满射性结果：

$\widetilde{\text{我们还可以将 Hitchin 的方法直接应用于 }} \mathcal{R}^+_\bullet(M)$，从而在其同伦群中构造非平凡元素。固定一个基点 $g_0 \in \text{Riem}^+(M)$。对应的基点在 $\pi_k(\mathcal{R}^+_\bullet(M))$ 中为 $g_0 \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^k}$。再固定一个嵌入圆盘$D^{d+k} \subseteq M \times \mathbb{R}^k$。

令 φ 为 Hitchin 在上文小节中（针对 $n = 0$）所用的微分同胚。由于该微分同胚在嵌入圆盘的边界附近是恒等函数，且该圆盘位于某个 $M \times RI^k$ 的内部，因此拉回 $g_{..} = \varphi^*(g_0 \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^k})\widetilde{}$ 是一个块度量。我们声称，当 $d + k \equiv 0$ 模 8 时，$[g] \neq 0 \in \pi_k(\mathcal{R}^+_\bullet(M))$。

假设情况并非如此，那么就存在一个定义在 $M \times \mathbb{R}^{k+1}$ 上的块度量 G，满足 $\partial_1^{-1} G = g$，并且若 $(i, \varepsilon) \neq (1, -1)$，则有 $\partial_i^\varepsilon G = g_0 \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^k}$。选取充分大的 $R' > R$，使得 G 在 $M \times R'I^{k+1}$ 之外分解。然后，G 在

$$M \times \mathbb{R} \times \mathbb{T}^k = M \times \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^k / 2R'\mathbb{Z}^k),$$

它充当正标量曲率度量 $\bar{g} \in \text{Riem}^+(M \times \mathbb{T}^k)$ 与$g_0 \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{T}^k}$之间的共边。由于这一构造具有局部性，$\bar{g}$就是我们将 Hitchin 的构造应用于 $g_0 \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{T}^k}$ 在 $M \times \mathbb{T}^k$ 上所得到的正标量曲率度量。因此，这两个度量的 Gromov-Lawson 指标差为零。另一方面，定理 5.1.1，或者说 [Ebe17], 的定理 A 与 Hitchin 的结果结合起来，现在可以推出

$$\text{inddif}_{GL}\left(\bar{g}, g_0 \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{T}^k}\right) = \text{inddif}_H\left(\bar{g}, g_0 \oplus \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{T}^k}\right) = \alpha(\Sigma^{d+k+1}) \neq 0,$$

这就产生了矛盾。

现在，若假设 $\dim M = 2$ 或 3，那么 M 是自旋的，当且仅当它是$\widetilde{\text{可定向的}}$，见 [LM89，第86]页。上述论证现在表明，$\pi_6(\mathcal{R}^+_\bullet(S^2))\widetilde{}$和 $\pi_5(\mathcal{R}^+_\bullet(M^3))$均非平凡。然而，根据 [RS01，定理 3.4] 以及[BK19，定理 1.1]，对于所有维数为 2 或 3 的可定向正标量曲率流形，$\text{Riem}^+(M)$都是可缩的。这个论证证明了引言中的定理 D：

$\widetilde{\textbf{定理 5.2.5。}}$ 悬挂 悬挂$_\bullet$：$\mathcal{R}^+_\bullet(M) \dashrightarrow \mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 不是弱等价，如果 维数$(M) = 2$ 或 3。

第6章

正标量曲率 Hatcher 谱序列

分解定理的一个推论5.1.1 是：指标差无法区分同一个同调类中的不同同痕类。这个问题必须借助指标理论之外的工具和技术来解决。

作为初步尝试，我们将充分利用在第3章和第5章中对同痕与共边问题所做的“空间化”：比较映射 $\mathrm{susp}_\bullet\colon \mathcal{R}^+_\bullet(M) \dashrightarrow \mathcal{R}^+_\bullet(M)$，定义在弱等价立方子集 $A_\bullet \subseteq \mathcal{R}^+_\bullet(M)$上，使我们能够定义同伦纤维 $\mathrm{hofib}\left(A_\bullet \to \widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet(M)}\right)^{\sim}$，我们将其简写为 $\mathrm{hofib}_\bullet$。由于 $A_\bullet$ 和 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 是立方 Kan 集，出于形式上的原因，$\mathrm{hofib}_\bullet$ 也是立方 Kan 集。其同伦群的组合描述使我们能够在这些群上定义一个过滤，称为同痕滤过。粗略地说，这个过滤衡量了一般共边距离同痕有多远。本节的主要结果——定理 6.3.3 中陈述的正标量曲率 Hatcher 谱序列——近似刻画了一个滤过子群与其后继之间的差异。

本章结构如下。首先，我们将在第 6.1 节建立构造正标量曲率 Hatcher 谱序列所需的几何基础。这包括定义 6.1.1 中对同痕滤过的讨论、定义 6.1.9 中对缺陷纤维化的讨论，以及二者之间的联系；引理 6.1.10 对此作出了解释。

其次，我们将在第 6.2 节给出一种谱序列的抽象构造，它将阿贝尔群正合对导出谱序列的构造加以推广。在我们的设定中，某些阿贝尔群可以由幺半群甚至仅由带基点集合取代。

最后，在第 6.3 节中，我们将定理 6.2.8 的这一抽象谱序列构造应用于前面建立的几何基础，从而导出正标量曲率 Hatcher 谱序列。

6.1 几何基础

回顾一下，我们在第5 章定义了一个弱等价立方子集 $\widetilde{\ } \quad A_\bullet \hookrightarrow \mathcal{R}^+_\bullet(M)$，它是 Kan 的，并且悬挂映射的取值落在 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$中。在

本节中，使用稍大一些的模型会更方便，该模型由以下内容给出：

$$A_n := \left\{ g \in \mathcal{R}_n^+(M) \,:\, (1+d)\sum_{j=1}^{n} |\mathrm{tr}((\partial_j g^{\mathrm{op}})^2)| + |\mathrm{tr}(\partial_j g)|^2 + |\mathrm{tr}(\partial_j^2 g)| < \mathrm{scal}(g) \right\}.$$

注意，它与第5章中刚刚提到的对应对象具有相同的性质。

在整个小节中，我们固定一个概念上不区分 $\widetilde{\mathcal{R}_0^+}(M)$ 与其在退化映射 $\widetilde{\ }$ 下的像。此外，我们将 hofib$_\bullet$(susp$_\bullet$: $A_\bullet \to \mathcal{R}_\bullet^+(M)$; g_0) 简记为 hofib$_\bullet$，并用 d 表示 M 的维数。

我们先从同痕滤过的定义开始。为此，回顾定义 2.1.26 中立方集合的环路集合。

定义 6.1.1。 对于 $0 \le p \le n$，我们将 同痕滤过的第 p 项定义为

$$F_p\Omega_{g_0}^n \mathrm{hofib}_\bullet := \Big\{ g \in \Omega_{g_0}^n \mathrm{hofib}_\bullet \,:\, g_{(m,x)} = g_{(m,x)}^{(p+1)} + \sum_{j=p+2}^{n+1} \mathrm{d}x_j^2 \text{ and}$$
$$(1+d)\sum_{j=p+2}^{n+1} |\mathrm{tr}((\partial_j g^{\mathrm{op}})^2)| + |\mathrm{tr}(\partial_j g)^2| + |\mathrm{tr}(\partial_j^2 g)| < \mathrm{scal}(g) \Big\}.$$

这里， $g^{(p+1)}{}_{(m,\ x)}$ 表示将 g 限制到 $T_mM \oplus T_x\mathbb{R}^{n+1}$ 中的子空间 $T_mM \oplus \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_{p+1})$ 上。

对 $\Omega_{g_0}^n$hofib$_\bullet$ 的过滤诱导出 π_n(hofib$_\bullet$)的过滤；后者是 $\Omega_{g_0}^n$hofib$_\bullet$的同伦类集合。非正式地说，集合 $F_p\Omega_{g_0}^n$hofib$_\bullet$ 由在最后 $(n-p)$ 个坐标方向上构成同伦的块度量组成。这一观察启发了定义 6.1.2 和引理 6.1.3。

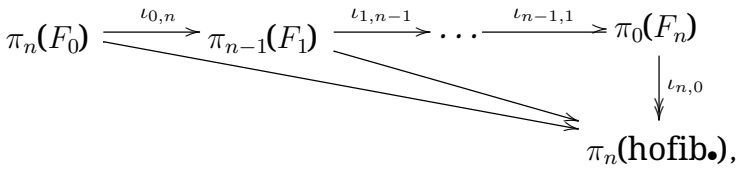
$\widetilde{\ }$**定义 6.1.2**。 令 $\mathcal{R}^+(M \times RI^n)$ 表示由所有具有正标量曲率、且在每个面附近具有乘积结构的黎曼度量构成的拓扑空间，并赋予光滑惠特尼拓扑。对于 $p \ge 0$，令 F_p 为底层集合如下的拓扑空间

$$F_p := \left\{ g \in \widetilde{\mathcal{R}_{p+1}^+}(M) \,:\, \partial_1^1 g \in \mathcal{R}_p^+(M),\, \partial_j^\omega g = g_0 \text{ for } (j,\omega) \neq (1,1) \right\}$$

其拓扑是由延长映射给出的来自 $\widetilde{\ }$ 嵌入 $\mathcal{R}^+(M \times RI^{p+1}) \hookrightarrow \mathcal{R}^+(M \times SI^{p+1})$ 的余极限拓扑（的子空间拓扑）。

我们提醒读者， F_p 带有由豪斯多夫空间之间的嵌入所诱导的余极限拓扑。根据引理 2.2.12 和引理2.2.13，每个从紧空间到 $\widetilde{\ }$ 的连续 F_p 映射都经由某个 $\mathcal{R}^+(M \times RI^{n+1})$分解。这一观察将在接下来的证明中发挥重要作用。

引理 6.1.3. 悬挂诱导出一个映射 $\pi_{n-p}(F_p) \to \pi_n(\mathrm{hofib}_\bullet)$，其像是 $F_p\Omega^n_{g_0}$ $\mathrm{hofib}_\bullet$ 的共边类集合。此外，这些悬挂可分解为一列映射



其中所有 $i_{p,n-p}$ 均由“沿第一个参数变量取悬挂”诱导，而$\iota_{n,0}$ 将一个同痕类映射到其共边类。

证明。 为便于后续讨论，我们将由连续映射诱导的态射定义为 $\iota_{p,q}$ 。令

$$F_p^{slow} \coloneqq \{g \in F_p \,:\, \partial_1^1 g \in A_p(M)\}$$

and

$$\Omega^{q,\infty}F_p^{(slow)} \coloneqq \{g\colon \mathbb{R}^q \to F_{(slow)p}\colon \quad g = g_0 \text{ 附近的光滑块映射 } \infty,$$
$$(1+d)\cdot\sum_{j=1}^{q} |\mathrm{tr}((\partial_j g)^2)| + |\mathrm{tr}(\partial_j g)^2| + |\mathrm{tr}(\partial_j^2 g)| < \mathrm{scal}(g)\}.$$

后一个空间包含于由连续块映射建模的环空间中；当然，该环空间与经典环空间弱同伦等价。通过用光滑映射逼近连续映射，并结合重新缩放论证，可知包含映射 $\Omega^{q,\infty}F_p^{slow} \hookrightarrow \Omega^q F_p^{slow}$和 $F_p^{slow} \hookrightarrow F_p$均为弱同伦等价，见下文引理6.1.4 。

定义

$$\mathrm{susp}\colon \Omega^{q,\infty}F_p^{(slow)} \to \Omega^{q-1}F_{p+1}^{(slow)}$$

via

$$\mathrm{susp}(g)(t_1,\dots,t_{q-1})_{(m,x_1,\dots,x_{p+2})} \coloneqq g(x_{p+2},t_1,\dots,t_{q-1})_{(m,x_1,\dots,x_{p+1})} + \mathrm{d}x_{p+2}^2.$$

根据以下论证，这些映射是连续的：回忆一下函数与截面之间的伴随关系

$$\mathcal{C}^\infty(N;\mathrm{Riem}^+(M\times I^p)) \cong \Gamma^\infty(M\times I^n\times N;\mathrm{Pos}(T(M\times I^p))\times N),$$

其中， N是带角面的光滑紧流形，而 $\mathrm{Pos}(T(M\times I^p))$ 是 $M\times I^p$ 上 $T(M\times I^p)$ 的所有正定对称双线性形式构成的丛。在此伴随下，悬挂由以下纤维丛之间的光滑映射诱导

$$\mathrm{Pos}(TM\times I^p)\times I\times I^{q-1} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1^*(-)+\mathrm{pr}_2^*\langle\cdot,\cdot\rangle} \mathrm{Pos}(T(M\times I^p\times I))\times I^{q-1}, \qquad (6.1)$$

通过后复合。因此，它诱导出一个连续映射 $\Omega^{q,\infty}F_p \to \Omega^{q-1}F_{p+1}$。事实上，这个映射经由.....分解到光滑环空间。

映射 $\iota_{p,\,q}$ 现在定义为

$$\iota_{p,q}\colon \pi_q(F_p) = \pi_0(\Omega^{q,\infty}F_p^{(slow)}) \xrightarrow{\pi_0(\mathrm{susp})} \pi_0(\Omega^{q-1}F_{p+1}^{(slow)}) = \pi_{q-1}(F_{p+1}),$$

并且 $\iota_{n,\,0}$： $\pi_0(F_n^{slow}) \to \pi_n(\mathrm{hofib}_\bullet)$ 是满射，它将块度量的同痕类映射为其共边类。

显然，

$$\iota_{p+k,q-k}\circ\cdots\circ\iota_{p,q}(g)(t_1,\ldots,t_{q-k-1})_{(m,x_1,\ldots,x_{p+k+2})} = g(x_{p+2},\ldots,x_{p+k+2},t_1,\ldots,t_{q-k-1})_{(m,x_1,\ldots,x_{p+1})} + \sum_{j=p+2}^{p+k+2}\mathrm{d}x_j^2$$

对于 $k<q$ 以及所有复合有定义的度量，均成立。因此，复合$\pi_q(F_p)\to\pi_{p+q}(\mathrm{hofib}_\bullet)$ 将块映射送到其悬挂的共边类。

接下来需要证明，悬挂 $\pi_{n-p}(F_p)\to\pi_n(\mathrm{hofib}_\bullet)$ 的像是 $F_p\Omega^n_{g_0}\mathrm{hofib}_\bullet$的共边类集合。考虑映射

$$\mathfrak{pr}\colon F_p\Omega^n_{g_0}\mathrm{hofib}_\bullet \to \Omega^{n-p,\infty}F_p^{slow},\qquad g\mapsto \left(y\mapsto g_{(\cdot,\cdot,y)}\restriction_{T(M\times\mathbb{R}^{p+1})}\right).$$

若在集合 $F_p\Omega^n_{g_0}\mathrm{hofib}_\bullet$ 上赋予余极限拓扑，将其视为拓扑空间，则 $\mathfrak{pr}$是连续的，并且是 $\mathrm{susp}:\Omega^{n-p,\,\infty}F_p^{slow}\to F_p\Omega^n_{g_0}\mathrm{hofib}_\bullet$ 的逆映射。

特别地，悬挂映射将群 $\pi_{n-p}(F_p)$ 映到 $F_p\Omega^n_{g_0}\mathrm{hofib}_\bullet$ 的同痕类上，因而也映到 $F_p\Omega^n_{g_0}\mathrm{hofib}_\bullet$ 的共边类上。 □

引理 6.1.4. 设 $\Omega^{q,\,\infty}F_p$ 和 F_p^{slow}与引理 *6.1.3* 的证明中所述相同。那么包含映射

$$F_p^{slow}\hookrightarrow F_p \qquad and \qquad \Omega^{q,\infty}F_p^{(slow)}\hookrightarrow\Omega^qF_p^{(slow)}$$

是弱同伦等价。

证明。 为证明第一个结论，我们将证明与之等价的命题：每个映射 $(D^n,\ S^{n-1})\to(F_p,\ F_p^{slow})$ 都可以通过这类映射之间的同伦变形为映射 $D^n\to F_p^{slow}$。

给定这样一个映射 $g\colon(D^n,\ S^{n-1})\to(F_p,\ F_p^{slow})$。由于 F_p 是豪斯多夫空间之间嵌入的序列余极限，我们可以找到足够大的 ρ，使得每个 $g(t)$ 都分解在 $M\times\rho I^{p+1}$ 上。

根据假设，每个 $g(t)$ 都分解为

$$g(t)|_{\{x_1>\rho\}} = g(t)^{TM} + \sum_{j=1}^{p+1}\mathrm{d}x_j^2,$$

其中， g^{TM}是 $TM\subseteq T(M\times\mathbb{R}^{p+1})$上的诱导度量。$g(t)$的块形式意味着它不依赖于坐标 x_1。因此，存在唯一的映射

$\gamma\colon D^n \times \rho I^p \to \mathrm{Riem}^+(M)$，使得 $g(t) =$ 悬挂$(\gamma(t, -))$于 $\{x_1 > \rho\}$上。映射 γ关于 D^n变量连续，关于 ρI^p变量光滑。

回想一下，A_p 的定义条件是g的二阶喷射的代数表达式。由紧致性可知，因此可以找到一个充分大的 $R > 1$，使得映射$x \mapsto \gamma(t, x/R)$对所有 $t \in D^n$都是 A_p 中的一个元素。

取一个充分大的 $L = L(R) > 0$，以及一个单调递增的光滑函数 $\Phi\colon [\rho, \rho + L] \to [1, R]$，使其满足

$$\begin{aligned} &\Phi \equiv 1 \text{ near } \rho, && \Phi \equiv R \text{ near } \rho + L,\\ &0 \le \Phi' \ll 1, && |\Phi''| \ll 1. \end{aligned}$$

对每个 $s \in [0,1]$，令 $\Phi_s := (1-s)\cdot 1 + s\Phi$。由于 $\gamma|_{\partial\rho I^p} = \mathrm{const}_{g_0}$，我们可以通过 g_0 将其延拓为一个块映射 $\gamma\colon \mathbb{R}^n \to \mathrm{Riem}^+(M)$。映射

$$\begin{aligned} \gamma^s_{\mathrm{aux}}\colon D^n \times [\rho, \rho+L] \times \rho I^p &\to \mathrm{Riem}^+(M),\\ (t, x_1, \dots, x_{p+1}) &\mapsto \gamma\big(t, 1/\Phi_s(x_1)\cdot(x_2, \dots, x_{p+1})\big) \end{aligned}$$

可以延拓为一族块映射

$$\gamma^s_{\mathrm{aux}}\colon D^n \times \mathbb{R}^{p+1} \to \mathrm{Riem}^+(M).$$

考虑映射

$$\mathcal{H}\colon D^n \times [0,1] \to F_p \quad \text{given by} \quad (t,s) \mapsto g(t)|_{\{x_1 \le \rho\}} \cup \mathrm{susp}(\gamma^s_{\mathrm{aux}})|_{\{x_1 \ge \rho\}}.$$

此映射是良定义的，因为当 $|\Phi'|$ 和 $|\Phi''|$ 足够小时，$g(t)$ 在 $\{x_1 = \rho\}$ 附近与 $= \mathrm{susp}(\gamma^s_{\mathrm{aux}})$ 一致，且 $\mathrm{scal}(\gamma^s_{\mathrm{aux}}) > 0$，见下文的引理 6.1.5。它满足 $\mathcal{H}(-,0) = \gamma$，并且 $\mathcal{H}(-,1)$ 的取值在 F_p^{slow} 中。由于 $|(1/\Phi)'| \le 1$ 且 $|(1/\Phi)''| \le 1$，映射 $\mathcal{H}$ 限制为映射 $S^n \times [0,1] \to F_p^{slow}$。

因此，$\mathcal{H}$ 是 g 与一个取值于 F_p^{slow} 的映射之间的对的同伦，故第一个结论得证。

为了证明 $\Omega^{q,\infty}F_p^{(slow)} \hookrightarrow \Omega^q F_{(slow)p}$ 是弱同伦等价，我们考虑

$$\bar{\Omega}^{q,\infty}F_p^{(slow)} := \{g\colon \mathbb{R}^n \to F_p^{(slow)} \;:\; g \text{ smooth block map}, g = g_0 \text{ near } \infty\},$$

所有取值于 $F_p^{(slow)}$ 的光滑块映射构成的空间，不受“速度约束”。近似理论（详见第 2.2.2 节）表明，包含映射 $\bar{\Omega}^{q,\infty}F_p^{(slow)} \hookrightarrow \Omega^q F_p^{(slow)}$ 是弱同伦等价。

我们将证明，包含映射 $\Omega^{q,\infty}F_p^{(slow)} \hookrightarrow \bar{\Omega}^{q,\infty}F_{(slow)p}$ 是同伦等价。

考虑映射 $R\colon \bar{\Omega}^{q,\infty}F_{(slow)p} \to \mathbb{R}_{\ge 1}$，其定义为

$$R(g) := \sup_{M\times\mathbb{R}^{p+1}\times\mathbb{R}^q} \left\{ 1 + (1+d)\sum_{j=1}^{q} |\mathrm{tr}((\partial_j g)^2)| + |\mathrm{tr}(\partial_j g)^2| + |\mathrm{tr}(\partial_j^2 g)| \right\}.$$

R 的取值始终有限，因为我们仅代入取值于块度量中的块映射。映射 R 也是连续的，因为它是 g 的二阶喷射的代数表达式；此处将 g 视为定义在空间 $M \times \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q$ 上的截面。

映射 $\mathfrak{m}\colon \bar{\Omega}^{q,\infty} F_{(slow)_p} \to (0,1]$ 也有同样的结论，其定义如下：

$$g \mapsto \frac{1}{2d} \inf\left(\left\{(\mathrm{scal}(g(t))(m,x))^{1/2} : (m,x,t) \in M \times \mathbb{R}^{p+1} \times \mathbb{R}^q\right\}\right).$$

包含映射 $\varphi\colon \Omega^{q,\infty} F_{(slow)_p} \hookrightarrow \bar{\Omega}^{q,\infty} F_{(slow)_p}$ 是一个同伦等价。其同伦逆由 $\psi\colon g \mapsto g \circ \left(\mathfrak{m}/(1+\mathfrak{m}^2)^{1/2} \cdot R^{-1}\right)$ 给出。恒等函数与 $\varphi \circ \psi$ 之间的同伦，以及恒等函数与 $\psi \circ \varphi$ 之间的同伦，分别由下式给出：

$$(g,s) \mapsto g \circ \left(s \cdot \mathfrak{m}/(1+\mathfrak{m}^2)^{1/2} \cdot R^{-1} + (1-s) \cdot 1\right).$$

因为如果 $g \in A_n$，那么所有对 g 的重新参数化中比 g “更慢”的，也都是 A_n 的元素。 □

引理 6.1.5。 由 γ^s_{aux} （在引理*6.1.4* 的证明中定义）的悬挂具有正标量曲率。

证明。 我们由此得知

$$\begin{aligned} 0 < \mathrm{scal}(\mathrm{susp}(\gamma)) &= \mathrm{scal}(\gamma) + \sum_{j=2}^{p+1} \frac{3}{4}\mathrm{tr}((\partial_j \gamma^{op})^2) - \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\partial_j \gamma)^2 - \mathrm{tr}(\partial_j^2 \gamma) \\ &=: \mathrm{scal}(g) + \mathfrak{err}(g) \end{aligned}$$

$\mathfrak{err}(\gamma) > -$标量曲率$(\gamma)$。映射 g 的块形式实际上意味着，对于某个 $\varepsilon > 0$，有 $\mathfrak{err}(\gamma) >$ 标量曲率$(\gamma) + \varepsilon$。 γ^s_{aux} 的相关微分为

$$\partial_j \gamma^s_{\mathrm{aux}} = \begin{cases} \frac{1}{\Phi_s(x_1)} \cdot (\partial_j \gamma)(1/\Phi_s(x_1) \cdot (x_2, \ldots, x_{p+1}), & \text{if } j > 1, \\ \frac{-\Phi_s'(x_1)}{\Phi_s(x_1)} \cdot \sum_{k=2}^{p+1} (\partial_k \gamma)(1/\Phi_s(x_1) \cdot (x_2, \ldots, x_{p+1}))x_k, & \text{if } j = 1, \end{cases}$$

and

$$\partial_j^2 \gamma^s_{\mathrm{aux}} = \frac{1}{\Phi_s(x_1)^2} \cdot (\partial_j^2 \gamma)(1/\Phi_s(x_1) \cdot (x_2, \ldots, x_{p+1})), \qquad \text{if } j > 1.$$

最后一个偏导数为

$$\begin{aligned} \partial_1^2 \gamma^s_{\mathrm{aux}} =& \frac{(\Phi_s')^2}{\Phi_s^4} \cdot \sum_{k,l=2}^{p+1} (\partial_k \partial_l \gamma)(1/\Phi_s(x_1) \cdot (x_2, \ldots, x_{p+1}))x_k x_l \\ &+ \frac{-\Phi_s'' \Phi_s + 2(\Phi_s')^2}{\Phi_s^4} \cdot \sum_{k=2}^{p+1} (\partial_k \gamma)(1/\Phi_s(x_1) \cdot (x_2, \ldots, x_{p+1}))x_k. \end{aligned}$$

由于对所有 $t \in D^n$， $\gamma(t, -)$ 在 ρI^p 之外是常数，因此映射 γ^s_{aux} 在 $\rho R \cdot I^p$ 之外是常数。于是，通过增大 $L(R)$，我们可以使 $|\partial_1 \gamma^s_{\mathrm{aux}}|$ 和 $|\partial_1^2 \gamma^s_{\mathrm{aux}}|$ 任意小（只需选择导数足够小的 Φ ）。

特别地，这意味着我们可以选择 L 和 Φ，使得

$$\begin{aligned}\mathfrak{err}(\gamma^s_{\mathrm{aux}}) &= \Phi_s(x_1)^{-2}\cdot \mathfrak{err}(\gamma)\circ 1/\Phi_s + \frac{3}{4}\mathrm{tr}((\partial_1\gamma^{s,op}_{\mathrm{aux}})^2) - \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\partial_1\gamma^s_{\mathrm{aux}})^2 - \mathrm{tr}(\partial_1^2\gamma^s_{\mathrm{aux}})^2\\ &> -\Phi_s(x_1)^{-2}\cdot \mathrm{scal}(\gamma)\circ 1/\Phi_s + \varepsilon\\ &\quad + \frac{3}{4}\mathrm{tr}((\partial_1\gamma^{s,op}_{\mathrm{aux}})^2) - \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\partial_1\gamma^s_{\mathrm{aux}})^2 - \mathrm{tr}(\partial_1^2\gamma^s_{\mathrm{aux}})^2\\ &> -\Phi_s(x_1)^{-2}\cdot \mathrm{scal}(\gamma^s_{\mathrm{aux}})\circ 1/\Phi_s = \mathrm{scal}(\gamma^s_{\mathrm{aux}}),\end{aligned}$$

从而 scal(susp(γ^s_{aux})) 为正。 □

$F_p\Omega^n_{g_0}$hofib• in π_n(hofib•) 的像构成一个子集过滤。我们稍后会看到，这个过滤实际上是子群过滤，并且过滤群与其前驱群的商与谱序列的无穷页相同。为了建立谱序列，我们首先需要将映射 $\iota_{p,q}$ 视为与一个纤维化相关的长正合列的边界算子。下一个定义将引入该纤维化的全空间。

定义 6.1.6。对于 $p\geq 0$，令 G_p 为一个拓扑空间，其底层集合定义为

$$G_p \coloneqq \Big\{ g\in \widetilde{\mathcal{R}^+}(M\times\mathbb{R}^{p+1}) : \partial_1^1 g\in \mathcal{R}^+_p(M),\\ \partial_j^\omega g = g_0 \text{ for } (j,\omega)\neq(1,1),(p+1,1)\Big\}$$

其拓扑为由包含映射 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$（）（）导出的余极限拓扑（的子空间拓扑）。我们进一步定义 .. : 。

注意，引理 6.1.4 的证明也表明，包含映射 $G_p^{slow}\hookrightarrow G_p$是弱同伦等价。

存在典范映射 ↾: $G^{(slow)}_{p+1}\to F_{(slow)p}$，由 $g\mapsto \partial^1_{p+1}g$ 给出。要证明该映射是塞尔纤维化，恐怕很困难，因为我们必须处理任意连续映射。幸运的是，在我们的设置中，下面这个较弱的条件更容易验证，而且足以满足我们的目的。

定义 6.1.7。两个光滑流形之间，或仿射弗雷歇空间的两个开子集之间的光滑映射 p: $E\to B$，若对所有给定的实线外方块

$$\begin{array}{ccc} D^n\times\{0\} & \xrightarrow{f} & E\\ \downarrow & \overset{\mathcal{H}}{\nearrow} & \downarrow p\\ D^n\times[0,1] & \xrightarrow{h} & B\end{array}$$

其中 f 和 h 光滑，且 h 在 $[0,1]$, 的边界附近静止，则存在一个光滑映射 $\mathcal{H}$，它在 $[0,1]$ 的边界附近静止，并使该图表可交换。

下一个引理并不令人意外，因为连续映射可以相对于它们已经光滑的闭子集进行光滑逼近。借助这类逼近，下一个引理将作为塞尔纤维化的类似命题得到证明。

引理6.1.8。设 $p\colon E \to B$ 是光滑范畴中的一个纤维化。那么 p 是一个同伦纤维化，也就是说，对于 B 的所有道路连通分支，从每个纤维到同伦纤维的比较映射都是弱同伦等价。

证明。取一点 $b_0 \in B$，并用 $F := p^{-1}(\{b_0\})$ 表示它的纤维。纤维比较映射

$$j\colon F \hookrightarrow \mathrm{hofib}(f; b_0) \qquad \text{given by} \qquad f \mapsto (f, \mathrm{const}_{b_0})$$

若对于每个 $\varphi\colon (D^n, S^{n-1}) \to (\mathrm{hofib}(f;\, b_0)\ F)$，都能找到一个对的同伦 $H\colon [0,1] \times (D^n,\ S^{n-1}) \to (\mathrm{hofib}(f;\, b_0)\ F)$，将 φ 变形为一个目标为 F 的映射，那么它就是弱同伦等价。

每个映射 $\varphi\colon (D^n, S^{n-1}) \to (\mathrm{hofib}(p;\, b_0)\ F)$ 都由一个交换图给出

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{1\} & \xrightarrow{\varphi^{(1)}} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ D^n \times [0,1] & \xrightarrow{\varphi^{(2)}} & B \end{array}$$

使得 $\varphi^{(2)}$ 在 $S^{n-1} \times [0,1] \cup D^n \times \{0\}$ 上的限制是取值为 b_0的常值映射。根据逼近理论，存在一个同伦 $\varphi_t^{(1)}$，使得 $\varphi_0^{(1)} = \varphi^{(1)}$，且 $\varphi_1^{(1)}$ 是光滑映射。该同伦可以选为在边界附近静止。我们分三步修改这个同伦，使其成为一个在 $D^n \times \{0,1\}$ 附近静止的图表同伦。

首先，我们对 $\varphi^{(2)} = \varphi_{-1}^{(2)}$ 重新参数化，使所得结果 $\varphi_0^{(2)}$ 在边界附近静止。我们可以选择插值同伦 $\varphi_t^{(2)}$，使其满足 $t \in [-1, 0]$ 并且相对于边界。接下来，对于所有 $t \in [0,1]$，我们定义同伦

$$\varphi_t^{(2)}(x,s) = \begin{cases} \varphi^{(2)}(x, (1+t)s), & s \in [0, (1+t)^{-1}], \\ p(\varphi^{(1)}_{(1+t)s-1}(x)), & s \in [(1+t)^{-1}, 1]. \end{cases}$$

该映射是 $\varphi_1^{(2)}$ 尚不光滑，但它在 $D^n \times \{0,1\}$ 附近光滑，并且在边界 $D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times [0,1]$上为常值。因此，作为最后一步，我们可以利用逼近理论，将其相对于边界作同伦，得到一个在 $D^n \times \{0,1\}$附近静止的光滑映射 $\varphi_2^{(2)}$。

这个图表同伦限制到该图表同伦

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} \times \{1\} & \xrightarrow{\varphi_t^{(1)}} & F \\ \downarrow & & \downarrow p \\ S^{n-1} \times [0,1] & \xrightarrow{\varphi_t^{(2)}} & b_0 \end{array}$$

总之，每个映射 $\varphi\colon (D^n, S^{n-1}) \to (\mathrm{hofib}(p;\ b_0)\ F)$ 都可以通过偶映射的同伦变形为一个光滑映射 ψ，使得 $\psi^{(2)}$ 在 $D^n \times \partial[0,1]$ 附近保持静止。

为简化记号，不妨先假设 φ 具有这一性质。由于 $p\colon E \to B$ 是光滑范畴中的纤维化，我们可以找到一个提升 Φ，其限制为

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{1\} & \xrightarrow{\varphi^{(1)}} & E \\ \downarrow & \overset{\Phi}{\nearrow} & \downarrow p \\ D^n \times [0,1] & \xrightarrow{\varphi^{(2)}} & B, \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S^{n-1} \times \{1\} & \xrightarrow{\varphi^{(1)}|_{S^{n-1}}} & F \\ \downarrow & \overset{\Phi|_{S^{n-1}}}{\nearrow} & \downarrow \\ S^{n-1} \times [0,1] & \xrightarrow{\varphi^{(2)}|_{S^{n-1}}} & b_0. \end{array}$$

我们用 Φ 定义 $\mathcal{H}\colon [0,1] \times D^n \times [0,1] \to E$ 为 $\mathcal{H}\colon (t,x,s) \mapsto \Phi(x,ts)$.

所需的同伦 $H\colon [0,1] \times (D^n, S^{n-1}) \to (\mathrm{hofib}(f, b_0)\ F)$ 是与下式对应的连续映射

$$\begin{array}{ccc} [0,1] \times D^n \times \{1\} & \xrightarrow{\mathcal{H}} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ [0,1] \times D^n \times [0,1] & \xrightarrow{p \circ \mathcal{H}} & B, \end{array}$$

因此，引理得证。 □

命题 6.1.9. 对于所有 $p \geq 0$，到最后一个前面的限制 $\intercal\colon G_{p+1} \to F_p$是良定义且连续的。此外，序列

$$F_{p+1} \xhookrightarrow{\mathrm{incl}} G_{p+1} \xrightarrow{\intercal} F_p$$

是光滑范畴中的纤维化。

证明。 立方恒等式意味着 $\intercal = \partial^1_{p+2}$ 将 G_{p+1} 映射到 F_p。

到最后一个前面的限制是连续映射 $\mathcal{R}^+(M \times RI^{p+2}) \to \mathcal{R}^+(M \times RI^{p+1})$，因为它由向量丛映射的拉回诱导。由于这些限制映射与包含映射 $\mathcal{R}^+(M \times RI^q) \hookrightarrow \mathcal{R}^+(M \times SI^q)$相容，它们诱导出映射 $G_{p+1} \to F_p$，该映射与 $\intercal$一致。

给定一个由光滑映射构成的交换图

$$\begin{array}{ccc} D^n \times \{0\} & \xrightarrow{f} & G_{p+1} \\ \downarrow & & \downarrow \intercal \\ D^n \times [0,1] & \xrightarrow{h} & F_p \end{array}$$

使得 h 在 $D^n \times \partial[0,1]$附近是静止的。由引理2.2.12，映射 f 和 h 分别经由 $\mathcal{R}^+(M \times \rho I^{p+2})$ 和 $\mathcal{R}^+(M \times \rho I^{p+1})$分解，因为 G_{p+1} 和 F_p是相对 T_1 包含映射的余极限。令 $\Phi\colon D^n \times \partial[0,1]^2 \to F_p$ 由下式给出

$$\begin{array}{ll} h(-,0),\ \text{on } D^n \times 0 \times [0,1], & h,\ \text{on } D^n \times 1 \times [0,1], \\ h(-,0),\ \text{on } D^n \times [0,1] \times 0, & h,\ \text{on } D^n \times [0,1] \times 1. \end{array}$$

由于 h 在 $\partial[0,1]$附近是静止的，我们可以将 Φ 延拓为定义在 $D^n \times I^2$上的光滑映射，并且在 I^2 每个面的 ∂I^2附近不依赖于法向变量。令 $\Psi(x,\ t)$为通过延长 $[\rho, \rho+1] \ni s \mapsto \Phi(x,\ s-\rho,\ t)$得到的块映射，并令$\mathcal{H}\colon\ D^n \times [0,1] \to G_{p+1}$由下式给出

$$\mathcal{H}(x,t) \coloneqq f \cup \operatorname{susp}\Phi\left(x, \frac{(-)-\rho}{R}, t\right) =: f|_{\{x_{p+2}\le\rho\}} \cup \operatorname{susp}\left({}_R\Psi(x,t)\right)|_{\{x_{p+2}\ge\rho\}}.$$

若 R 足够大，使得

$$|\operatorname{tr}((\partial_{sR}\Psi)^2)| + |\operatorname{tr}(\partial_{sR}\Psi)^2| + |\operatorname{tr}(\partial_{sR}^2\Psi)| < \operatorname{scal}({}_R\Psi(x,t))(s),$$

则 $\operatorname{susp}({}_R\Psi)(x,t)$ 是 $M\times\mathbb{R}^{p+1}\times\mathbb{R}$ 上的正标量曲率度量，并且在 $M\times\mathbb{R}^{p+1}\times\{\rho\}$ 附近也与 $f(x)$ 一致。因此，$\mathcal{H}\colon\ D^n\times[0,1] \to G_{p+1}$ 是良定义的。映射 $\mathcal{H}$ 是光滑的，因为 Φ 光滑，而且 susp 是光滑弗雷歇空间之间的光滑映射，因为 susp 由向量丛映射诱导，见公式6.1。由 ${}_R\Psi(x,t)(\rho+R) = h(x,t)$ 可知，$\gamma(\mathcal{H}(x,t)) = h(x,t)$，因此 $\mathcal{H}$ 提升了同伦 h。提升 $\mathcal{H}$ 在 $\partial[0,1]$ 附近也静止，因为 Φ 在 $\in[0,1]^2$ 的角点 (1, 1) 附近静止。因此，最后一个前面的面 γ 上的限制是光滑范畴中的纤维化。 □

引理 6.1.8 和命题 6.1.9 给出了一个同伦群长正合列。我们希望将连接同态 $\partial_q\colon\ \pi_q(F_p) \to \pi_{q-1}(F_{p+1})$ 与 $\iota_{p,q}$ 联系起来。在陈述下一个引理之前，我们先回顾一下，每个纤维化 $F \hookrightarrow E \to B$ 都通过 Puppe序列诱导出一个同伦群长正合列，例如参见 [DK01, 定理 6.42]。在这个图景中，边界映射$\partial_1\colon\ \pi_1(B) \to \pi_0(F)$由在纤维的基点处计算纤维传输给出。有鉴于此，我们用 $(-1)\partial_1$ 表示在基点处计算逆纤维传输的映射。

引理 6.1.10. 对所有 $p \ge 0$ 和 $q \ge 1$，我们有

$$\iota_{p,q} = (-1)^q\partial_q\colon \pi_q(F_p) \to \pi_{q-1}(F_{p+1}).$$

证明。我们先考虑 $q=1$ 的情形。回顾一下，$\partial_1\colon\ \pi_1(F_p) \to \pi_0(F_{p+1})$ 来自 Puppe序列。每个映射 d（可能仅定义在弱等价子空间上），都使图表

$$\begin{array}{ccc} \Omega F_p & \xrightarrow{-d-} & F_{p+1} \\ {\scriptstyle\simeq_w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\simeq_w} \\ \operatorname{hofib} & \longrightarrow & \operatorname{hofib}(\gamma) \end{array}$$

同伦交换给出 $\partial_1 = \pi_0(d)$。这里，hofib 是典范映射 $\operatorname{hofib}(\gamma) \to G_{p+1}$ 的同伦纤维。同伦纤维是用块映射定义的，例如，

$$\begin{aligned}\operatorname{hofib}(\gamma) = \{(g,\gamma) \mid g \in G_{p+1},\ \gamma\colon \mathbb{R} \to F_p \text{ block map},\\ \lim_{t\to-\infty}\gamma(t) = g_0, \lim_{t\to\infty}\gamma(t) = \gamma(g)\}.\end{aligned}$$

不难验证，复合

$$\delta\colon \Omega^{1,\infty}F_p \xhookrightarrow{\simeq} \Omega F_p \longrightarrow \mathrm{hofib} \longrightarrow \mathrm{hofib}(\uparrow)$$

由.....给出

$$(t \mapsto g(t)) \mapsto (g_0, t \mapsto g(t))$$

并且复合

$$\mathrm{susp}\colon \Omega^{1,\infty}F_p \xhookrightarrow{\mathrm{susp}} F_{p+1} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{hofib}(\uparrow)$$

由.....给出

$$(t \mapsto g(t)) \mapsto (\mathrm{susp}(g), \mathrm{const}_{g_0}).$$

我们将为所有 $g \in \Omega^{1,\infty}F_p$ 构造一条连接 $\delta(\bar{g})$ 与 $\mathrm{susp}(g)$ 的路径，其中 $\bar{\cdot}$ 是环空间上的标准对合。这将进而推出 $q = 1$ 的结论。

取一个 $\rho > 0$，使得光滑块映射 $g\colon \mathbb{R} \to F_p$ 在 $M \times [-\rho, \rho]$ 之外为常值（取值为 g_0）。令 $\Phi\colon [-\rho, \rho] \times [-1, 1] \to [-\rho, \rho]$ 为满足以下条件的光滑映射

$$\Phi(-, -1) = -\rho \quad \text{and} \quad \Phi(-, s) = \begin{cases} -\rho, & \text{near } \mathbb{R}_{\le -\rho}, \\ s \cdot \rho, & \text{near } \mathbb{R}_{\ge \rho}. \end{cases}$$

固定 $R \ge 1$，使得对所有 $(t, s) \in [-\rho, \rho] \times [-1, 1]$，都有 $R^{-1}(|\partial_t \Phi(t, s)| + |\partial_t^2 \Phi(t, s)|) < 1$，并定义路径

$$H_g\colon [-1, 1] \to \mathrm{hofib}(\uparrow),$$
$$s \mapsto [\mathrm{susp}(t \mapsto g(\Phi(t/R, s))),\ t \mapsto g(-\Phi(t, -s))].$$

我们需要证明这条路径是一个良定义的映射。

首先，我们证明对所有 $s \in [-\rho, \rho]$，$\mathrm{susp}(t \mapsto g(\Phi(t/R, s)))$ 的标量曲率均为正。由于 s 在计算中并不重要，我们将 $\Phi(-/R, s)$ 简记为 ${}_R\Phi$。链式法则给出

$$\begin{aligned} &|\mathrm{scal}(\mathrm{susp}(g \circ {}_R\Phi)) - \mathrm{scal}(g \circ {}_R\Phi)| \\ &= \Big| \frac{3}{4}\mathrm{tr}((\partial_t g^{op})^2) \cdot R^{-2}{}_R(\partial_t \Phi)^2 - \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\partial_t g)^2 \cdot R^{-2}{}_R(\partial_t \Phi)^2 \\ &\qquad - \mathrm{tr}(\partial_t^2 g) \cdot R^{-2}{}_R(\partial_t \Phi)^2 - \mathrm{tr}(\partial_t g) \cdot R^{-2}{}_R(\partial_t^2 \Phi) \Big| \\ &< (1 + d) \cdot \sum_{j=1}^{q} |\mathrm{tr}((\partial_j g)^2)| + |\mathrm{tr}(\partial_j g)^2| + |\mathrm{tr}(\partial_j^2 g)|, \end{aligned}$$

只要 R 足够大即可。这意味着 $\mathrm{scal}(\mathrm{susp}(g \circ {}_R\Phi)) > 0$。

由 $\mathrm{susp}(t \mapsto g(\Phi(t/R, s))) = g(s\rho) + \mathrm{d}t^2$ on $\{t \ge R\}$ 可得 $\mathrm{susp}(t \mapsto g(\Phi(t/R, s))) = g(s\rho)$，这与

$$\lim_{t \to \infty} g(-\Phi(t/R, -s)) = g(-\Phi(\rho R/R, -s)) = g(s\rho).$$

因此， H_g 的取值在 hofib(ι) 中。它也是光滑的，因为 Φ 是一个光滑映射。

元素 $H_g(1)$ 和悬挂(g) 通过两条路径相连

$$[0,1] \ni \lambda \mapsto [\mathrm{susp}(g(\lambda \cdot (-/R) + (1-\lambda)\Phi(-/R, 1))), \mathrm{const}_{g_0}],$$

and

$$[1,R] \ni r \mapsto [\mathrm{susp}(g(-/r)), \mathrm{const}_{g_0}],$$

而 $\delta(g)$ 和 $H_g(-1)$ 则通过一条路径相连

$$\lambda \mapsto [g_0, g(-\lambda \mathrm{id} - (1-\lambda)\Phi(-/R, 1))].$$

因此，元素悬挂(g) 和 $\delta(\bar{g})$ 位于同一个路径连通分支中，这就推出了情形 $q = 1$ 的结论。

一般情形 $q \geq 1$ 可由如下特殊情形推出。根据定义， $\partial_q = \pi_0(\Omega^{q-1}\delta)$，因此只需比较这两个映射

$$\Omega^{q-1}\mathrm{susp}_1, \mathrm{susp}_q \colon \Omega^{q,\infty}F_p \to \Omega^{q-1}F_{p+1}.$$

第一个映射定义为

$$\big((t_1, \ldots, t_q) \mapsto g(t_1, \ldots, t_q)\big) \mapsto (t_1, \ldots, t_{q-1}) \mapsto \Omega^{q-1}\mathrm{susp}(g)(t_1, \ldots, t_{q-1}),$$

其中

$$\Omega^{q-1}\mathrm{susp}(g)(t_1, \ldots, t_{q-1})_{(m,x_1,\ldots,x_{p+2})} = g(t_1, \ldots, t_{q-1}, x_{p+2})_{(m,x_1,\ldots,x_{p+1})} + \mathrm{d}x_{p+2}^2$$

而第二个映射 susp_q 定义为

$$\mathrm{susp}_q(g)(t_1, \ldots, t_{q-1})_{(m,x_1,\ldots,x_{p+2})} = g(x_{p+2}, t_1, \ldots, t_{q-1})_{(m,x_1,\ldots,x_{p+1})} + \mathrm{d}x_{p+2}^2.$$

因此，

$$\mathrm{susp}_q(g) = \Omega^{q-1}\mathrm{susp}_1 \circ (1\ 2\ \ldots\ q),$$

其中 $(1\ 2\ \ldots\ q)(g)(t_1, \ldots, t_q) = g(t_q, t_1, \ldots, t_{q-1})$。

由此恒等式可通过以下方式推出所述结论

$$\begin{aligned}\iota_{p,q} &= \pi_0(\mathrm{susp}_q) = \pi_0(\Omega^{q-1}\mathrm{susp}_1 \circ (1\ 2\ \ldots\ q)) \\ &= (-1)^{q-1}\pi_0(\Omega^{q-1}\mathrm{susp}_1) = (-1)^{q-1}\pi_0(\delta \circ \bar{\cdot}) \\ &= (-1)^q \pi_0(\Omega^{q-1}\delta) = (-1)^q \partial_q.\end{aligned}$$

□

若 $p \geq 1$，则每个元素 $g \in G_{p+1}$ 或 $g \in F_p$ 至少会在一对相对面上限制为基点 g_0。这使我们能够沿公共面将两个块度量粘合在一起。遗憾的是，由于以下原因，粘合构造无法赋予空间 H 结构：度量所分解的那些立方体之外的立方体长度未知，而且将块度量映射到其所分解范围之外最小立方体的直径的函数并不连续。不过，不同的选择会得到可以规范地变形为彼此的元素，因此我们仍然可以在同伦群上引入“类似 H-空间的群结构”。

回忆一下， $\mathrm{Sh}_{j,R}\colon x \mapsto x + Re_j$ 是一个微分同胚，并且缩写 $\mathrm{Sh}_{j,R}(g) \coloneqq \mathrm{Sh}_{j,R*}(g) \coloneqq \mathrm{Sh}^*_{j,-R}(g)$。

引理 6.1.11. 对于 $p \geq 1$ 和 $q \geq 0$，在$\pi_q(G_{p+1})$ 上有 p 个幺半群结构，其定义如下：

令 $g, h\colon D^n \to G_{p+1}$ 表示 $[g], [h] \in \pi_q(G_{p+1})$，并假设它们经由 $\mathcal{R}^+($ $M \times RI^{p+2})$分解。那么，对于所有 $2 \leq j \leq p+1$，我们定义

$$(g +_{j,R} h)(t) \coloneqq \mathrm{Sh}_{j,-2R}(g(t))|_{\{x_j \leq 0\}} \cup \mathrm{Sh}_{j,2R}(h(t))|_{\{x_j \geq 0\}}$$

and

$$[g] +_j [h] \coloneqq [g +_{j,R} h] \in \pi_q(G_{p+1}).$$

如果 $p \geq 2$，那么所有这些幺半群结构彼此之间都满足 *Eckmann-Hilton* 关系。如果 $q \geq 1$，那么这些幺半群结构与该同伦群的群结构满足 *Eckmann-Hilton* 关系。

对于 $\pi_q(F_p)$，同样的结论也成立。

证明。 由于 $\mathrm{Sh}_{j,-2R}(g(t))$ 和 $\mathrm{Sh}_{j,2R}(h(t))$ 在 $\{x_j = 0\}$ 附近与基点一致，因此度量 $(g +_{j,R} h)$ 是良定义的，且具有正标量曲率。平移算子也保持 G_{p+1} 的定义条件，因此 $g +_{j,R} h \in G_{p+1}$。

对于 $R_0 \leq R_1$ 以及所有 $s \in [0,1]$，我们令 $R_s \coloneqq (1-s)R_0 + sR_1$。相对于 ∂D^n 的、介于 $g +_{j,R_0} h$ 与 $g +_{j,R_1} h$ 之间的同伦由 $s \mapsto g +_{j,R_s} h$给出。

令 $g, h\colon (D^n \times I^n, \partial D^n \times I) \to (G_{p+1}, g_0)$ 为相对于边界的同伦。对于充分大的 R，映射 $g +_{j,R} h$ 是相对于边界的同伦，介于 $g(-,0) +_{j,R} h(-,0)$ 与 $g(-,1) +_{j,R} h(-,1)$ 之间。

不难验证，这些结构满足结合律，中性元由基点 g_0 给出。

证明当 $p \geq 2$时，这些结构彼此满足 Eckmann-Hilton 关系，这与高阶同伦群是阿贝尔群的证明完全相同。

证明这些幺半群结构与来自同伦群的群结构满足 Eckmann-Hilton 关系，这在形式上与 H-空间的证明相同。

□

推论 6.1.12。 对于 $q \geq 1$，群 $\pi_q(G_{p+1})$ 和 $\pi_q(F_p)$ 在 $p+q \geq 2$ 时是阿贝尔群。

读者肯定已经注意到，这里的记号和表述与定理 3.4.4 有相似之处。这并非巧合，因为这种相似性也延续到了同伦纤维。

命题 6.1.13。 对于所有 $n \geq 1$，在 $\pi_n(\mathrm{hofib}_\bullet g_0)$ 上有 n-多个群结构，定义如下：若 g, h 表示 $[g], [h] \in \pi_n(\mathrm{hofib}_\bullet)$ 且在 $M \times RI^{n+1}$ 之外分解，则

$$[g] +_j [h] \coloneqq [g +_{j,R} h]$$

对所有 $2 \leq j \leq n+1$。

若 r_j 表示关于超平面 $\{x_j = 0\}$ 的反射，则 $+_j$ 中 $[g]$ 的逆元由 $[r_j^* g]$ 给出。这些结构彼此满足 *Eckmann-Hilton* 关系。此外，$+_2$ 与立方集合论所给出的群结构一致。

证明。 由于构造 $g \mapsto g^\angle$ 保悬挂，见命题 3.4.2，定理 3.4.4 证明中的所有论证都可立即推广到同伦纤维。

□

推论 6.1.14。 映射 $\iota_{p,\,q}\colon\ \pi_q(F_p)\ \to \pi_{q-1}(F_{p+1})$ 对所有 $p \in \mathbb{N}_0$ 和所有 $q \geq 1$ 都是幺半群同态。此外，$\iota_{p,\,0}\colon\ \pi_0(F_p)\ \to \pi_0(\mathrm{hofib}_p)$ 对 $p \geq 1$ 是幺半群同态。

证明。 对于 $q > 1$，结论由引理 6.1.10 得出，因此只需检验 $q = 1$ 的情形。

若将 $\pi_1(F_p)$ 中的元素视为块映射 $\gamma\colon \mathbb{R} \to F_p$ 的同伦类，则群结构由 $[\gamma_1]\cdot[\gamma_2] = [\gamma_1(\cdot - 2\rho) \cup \gamma_2(\cdot + 2\rho)]$ 给出，其中对所有充分大的 $\rho > 0$，只要 γ_j 在 $[-\rho, \rho]$ 之外为常值（取值为 g_0）即可。

现在结论由下式得出

$$\begin{aligned}\iota_{p,1}([\gamma_1]\cdot[\gamma_2]) &= [\mathrm{susp}(\gamma_1(\cdot + 2\rho) \cup \gamma_2(\cdot - 2\rho))]\\ &= [\mathrm{Sh}_{-2\rho}(\mathrm{susp}(\gamma_1))|_{\{x_{p+2}\leq 0\}} \cup \mathrm{Sh}_{2\rho}(\mathrm{susp}(\gamma_2))|_{\{x_{p+2}\geq 0\}}]\\ &= \iota_{p,1}([\gamma_1]) +_{p+2} \iota_{p,1}([\gamma_2]).\end{aligned}$$

要证明 $\iota_{p+1,\,0}$ 是幺半群同态，可利用 $\pi_{p+1}(\mathrm{hofib}_\bullet)$ 上的几何加法；根据命题 6.1.13，它与通常的加法一致。 □

定义 6.1.15. 将以下子空间定义为正标量曲率伪同伦 空间

$$C_p^{\mathrm{psc}}(M) \coloneqq \{g \in G_p\ :\ \partial_1^1 g = g_0\}$$

G_p的。

引理 6.1.16. 包含映射 $C_p^{\mathrm{psc}}(M)\ \hookrightarrow G_p^{slow}$是弱同伦等价。

证明。 实际上，我们将证明以下稍强的结论：每个块映射 $g\colon\ \mathbb{R}^n\ \to\ G_p^{slow}$都可以通过块映射的同伦变形为一个块映射$\mathbb{R}^n \to C_p^{\mathrm{psc}}(M)$，使得若 $g(t)\ \in C_p^{\mathrm{psc}}(M)$，则在 $t \in \mathbb{R}^n$处的同伦始终保持在$C_p^{\mathrm{psc}}(M)$中。

我们找一个充分大的 $R > 0$，使得对所有 $t \in \mathbb{R}^n$，$g(t)$ 都分解在 $M \times RI^{p+1}$之外。由于每个块映射都由其在某个充分大的立方体上的限制唯一确定，我们可以找到一个充分大的 $\rho > R$，使得对所有 $t \in \mathbb{R}^n$，$(\partial_1^1 g(t))_\rho^\angle$ 都是正标量曲率度量，其中 $(\partial_1^1 g(t))_\rho^\angle$ 指的是命题 3.4.2 在 $\mathbb{R}^{p+1}$ 中点 $(\rho, 0, \ldots, 0, \rho)$ 周围的 x_1- x_{p+1} 平面上的构造，示意图见图 6.1。到目前为止，$(\partial_1^1 g(t))_\rho^\angle$ 只是定义在 $\{x_1 \geq \rho, x_{p+1} \leq \rho\}$上的度量。我们利用它在 $\{x_{p+1} = \rho\}$附近的乘积形式，将其延拓到 $\{x_1 \geq \rho\}$。由于 $g(t)$ 与 $(\partial_1^1 g(t))_\rho^\angle$ 在 $\{x_1 = \rho\}$附近一致，映射

$$t \mapsto g(t)|_{\{x_1\leq\rho\}} \cup (\partial_1^1 g(t))_\rho^\angle|_{\{x_1\geq\rho\}}$$

是一个光滑块映射 $\mathbb{R}^n \to G_p$，我们将其记为 $g \cup (\partial_1^1 g)_\rho^\angle$。如果 $g(t)$ 属于 $C_p^{\mathrm{psc}}(M)$，那么 $g(t) \cup (\partial_1^1 g(t))_\rho^\angle$也属于其中。

我们断言，这个映射与 g 同伦，并且存在一个具有所需性质的同伦。由于 $\partial_1^1 g(t) =$ 悬挂$(h(t, -))$，其中 $h(t, -)\colon \mathbb{R}^p \to \mathrm{Riem}^+(M)$ 是一个属于子集 A_p 的块映射，因此 $(\partial_1^1 g)_\rho^\angle$到半平面的延拓满足

$$(\partial_1^1 g(t))_\rho^\angle = \mathrm{susp}(\mathfrak{h}_\rho(t, -)),$$

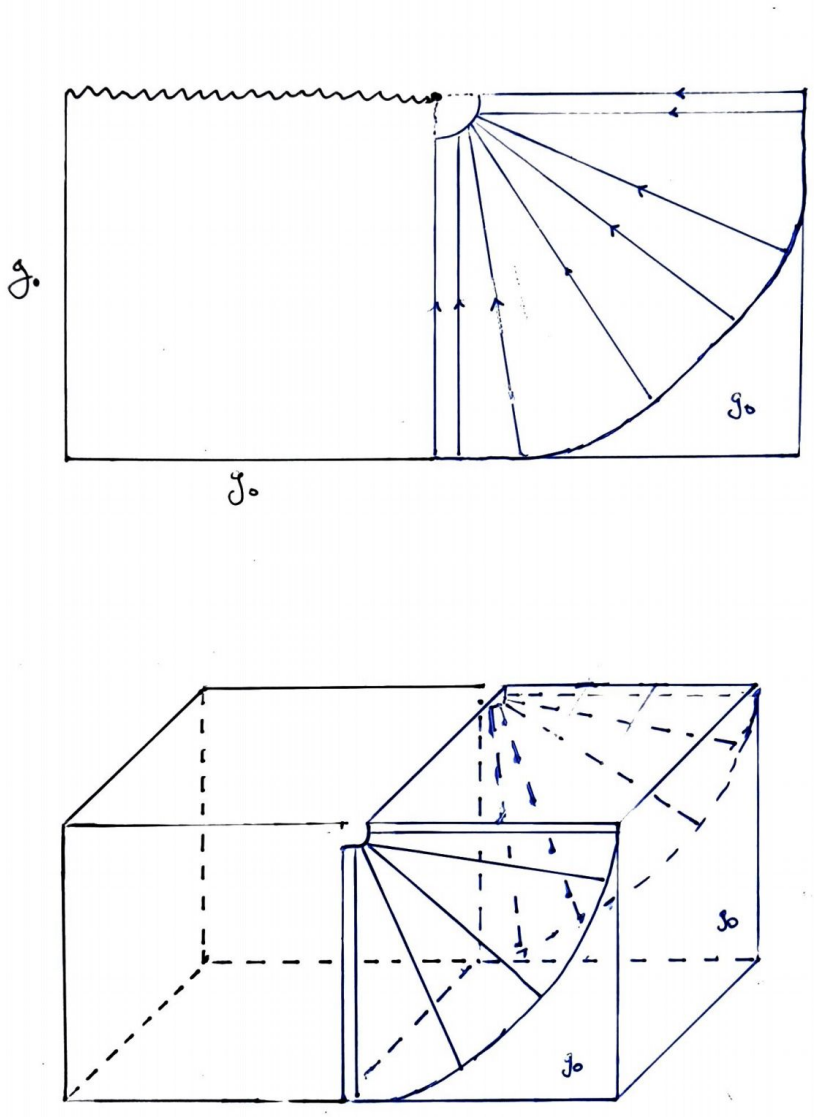


图 6.1： $p = 1$ 和 $p = 2$的构造。

其中 $\mathfrak{h}_\rho(t,-):\{x_1\geq\rho\}\subseteq\mathbb{R}^{p+1}\to\mathrm{Riem}^+(M)$ 与 x_1 无关，且在 $\{x_1=\rho\}$ 和 $\{x_1\geq 2\rho\}$ 的邻域内也保持这一性质，参见命题 3.4.2。我们可以假设，在对第二个分量中的 $h(t,-)$ 进行缩放之后（缩放因子与 t 无关）[1]，$h(t,-)$ 的参数变化足够缓慢，使得 $\mathfrak{h}_\rho(t,-)$ 满足与 A_{p+1} 中元素相同的速度约束。

若 $\varphi\colon[\rho,2\rho]\to[\rho,2\rho]$ 是一个光滑、单调递增的满射函数，在边界附近为常数，并且 $\mathrm{supp}\,(\varphi'-1)$ 包含于 $\{x_1=\rho\}$ 和 $\{x_1=2\rho\}$ 的一个足够小的邻域内，在该邻域上，对于所有 $t\in\mathbb{R}^n$，$\mathfrak{h}_\rho(t;-)$ 仍与 x_1 无关，那么 $\mathrm{susp}(\mathfrak{h}_\rho(t;\varphi(-),-))$ 仍是一个正标量曲率度量，而凸组合给出以下一串同伦

$$\begin{aligned} g(t)\cup(\partial_1^1 g(t))^{\angle}_{\rho} &= g(t)\cup\mathrm{susp}(\mathfrak{h}_\rho(t,-)) \\ &\simeq g(t)\cup\mathrm{susp}(\mathfrak{h}_\rho(t,\varphi(-),-)), && \text{via } s\mapsto(1-s)\mathrm{id}+s\varphi, \\ &\simeq g(t)\cup\mathrm{susp}(\mathfrak{h}_\rho(t,\rho,-)), && \text{via } s\mapsto(1-s)\varphi+s\rho. \end{aligned}$$

注意，最后一个同伦是正标量曲率度量的同伦，因为 $\mathfrak{h}_\rho(t,\ (1-s)\rho+s\rho,\ -)$ 满足 A_{p+1} 的速度约束，因为 $\mathfrak{h}_\rho(t,\ \varphi(-))$ 满足该约束。

如果 $g\in C^{\mathrm{psc}}_p(M)$，使得 $\partial_1^1 g(t)=g_0$，那么 $(\partial_1^1 g(t))^{\angle}_{\rho}=g_0$，并且这些同伦始终处于 $C^{\mathrm{psc}}_p(M)$ 中。 □

推论 6.1.17。集合 $\pi_q(G_{p+1})$ 具有 $(p+1)$ 个与 *Eckmann-Hilton* 相关的幺半群结构，它们扩展了引理 *6.1.11*中的结构。

证明。引理 6.1.11 中定义的加法限制在 $\pi_q(C^{\mathrm{psc}}_p(M))$上。额外的幺半群结构由 $+_1$给出。 □

6.2 谱序列的抽象构造

我们描述构造正标量曲率 Hatcher 谱序列所需的代数工具。由于我们考虑的集合并非全都是阿贝尔群，因此必须跳出同调代数的范畴。

起点是以下由 $\mathbb{Z}$ 分次、带基点集合构成的正合对

$$\begin{array}{ccc} D_{p-1,q+1} & \xrightarrow[i_{p-1,q+1}]{(1,-1)} & D_{p,q} \\ & {\scriptstyle k_{p,q}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle j_{p,q}} & \\ & {\scriptstyle(-1,0)}\qquad {\scriptstyle(0,0)} & \\ & E_{p,q}. & \end{array} \tag{6.2}$$

这里，图表中的元组表示相应映射的双分次。我们还要求集合 $D_{p,\,q}$ 满足以下性质：

- $D_{p,q}=0$ 如果 $p<0$.
- $D_{p,\,0}$ 是幺半群，当 $p\geq 1$ 时；当 $p\geq 2$ 时，它是阿贝尔的。

[1]请注意，这不会改变块映射 h的同伦型

- $D_{p,\,q}$ 是群，当 $q \geq 1$ 时；当 $p+q \geq 2$ 时，它是阿贝尔的。

特别地，$D_{p,\,q}$ 不是幺半群，当且仅当 $p=q=0$；它不是交换幺半群，当且仅当 $p+q \leq 1$。我们要求集合 $E_{p,\,q}$ 满足

- $E_{p,\,q}=0$，如果 $p<0$ 或 $q<0$。
- $E_{p,\,0}$ 是幺半群，如果 $p \geq 2$；如果 $p \geq 3$，则是阿贝尔的。
- $E_{p,\,q}$ 是群，如果 $q \geq 1$；如果还满足 $p+q \geq 2$，则是阿贝尔的。

特别地，$E_{p,\,q}$ 不是幺半群，当且仅当 $q=0$ 且 $p \leq 1$；它不是交换幺半群，当且仅当 $p+q \leq 1$ 或 $(p,\ q)=(2,\ 0)$。我们进一步要求

- 图表（6.2）中的所有映射在定义域和目标都是幺半群时，都是幺半群同态。

这尤其意味着，当映射的定义域是幺半群或群时，映射的核，即基点的原像，是一个子幺半群或子群。阿贝尔幺半群的正合列通常性质很差；如果核是平凡的，幺半群同态不一定是单射，而且幺半群同态定理不成立[2]。

如果目标是阿贝尔群，那么同态定理仍然成立。

引理 6.2.1。给定阿贝尔幺半群的一个正合列

$$0 \longrightarrow L \overset{f}{\hookrightarrow} M \overset{g}{\twoheadrightarrow} A \longrightarrow 0.$$

如果 A 是阿贝尔群，那么 $M/f(L)=$ 余核 (f) 也是阿贝尔群，并且 $\tilde{g}$ 诱导出一个同构 $\bar{g}:\ M/f(L) \xrightarrow{\cong} A$。

证明。回想一下，$M/f(L)=M/\sim$ 是关于等价关系的等价类集合

$$m_1 \sim m_2 :\Longleftrightarrow \exists l_1, l_2 \in L \text{ s.t. } m_1+f(l_1)=m_2+f(l_2).$$

它继承了来自 M 的阿贝尔幺半群结构。根据正合性，典范映射 $\bar{g}$ 是良定义且满射的。

要证明 $M/f(L)$ 是阿贝尔群，我们作如下论证：对于所有 $x \in M$，由于 g 是满射，存在一个 $y \in M$，使得 $g(y)=-g(x)$。因此，根据正合性，$[y] \in M/f(L)$ 是 $[x] \in M/f(L)$ 的加法逆元，所以 $M/f(L)$ 是阿贝尔群。

我们已经知道 $\bar{g}$ 是满射。由于 $M/f(L)$ 是阿贝尔群，只需证明 $\ker(\bar{g})$ 是平凡的。但这直接源于以下事实：$g^{-1}(0)=f(L)$，且 $M \to M/f(L)$ 是满射。 □

[2] 一个反例是 $(\mathbb{N}_0,+) \to (\mathbb{Z}_2,\times)$，$n \mapsto [2^n]$。这个幺半群同态不是单射，但其核为零；同态定理不成立，因为 $\mathbb{N}_0/\{0\}=\mathbb{N}_0 \neq (\mathbb{Z}_2,\times)$

由于 $E_{p,\ q} = 0$ 如果 $q < 0$，前述引理推出以下结论。

推论 6.2.2. 映射 $\iota_{p,q}\colon D_{p,q} \to D_{p+1,q-1}$ 是幺半群同构，如果$p \geq 1$ 且 $q < 0$。

尽管我们无法运用同调代数的工具，将这个正合对转化为谱序列，但我们仍然可以通过模仿由正合对构造谱序列的过程，以一种临时的方式构造谱序列。对于 $r \geq 1$，我们定义

$$Z^r_{p,q} \coloneqq k^{-1}_{p,q}\left(\operatorname{im}[i^{r-1}\colon D_{p-r,q+r-1} \to D_{p-1,q}]\right),$$
$$B^r_{p,q} \coloneqq j_{p,q}\left(\ker[i^{r-1}\colon D_{p,q} \to D_{p+r-1,q-r+1}]\right).$$

这些集合构成一个包含链

$$0 = B^1_{p,q} \subseteq B^2_{p,q} \subseteq \cdots \subseteq Z^2_{p,q} \subseteq Z^1_{p,q} = E_{p,q}$$

并利用这个包含链来定义

$$Z^\infty_{p,q} \coloneqq \bigcap_{r\geq 1} Z^r_{p,q} = Z^{p+1}_{p,q} \quad \text{and} \quad B^\infty_{p,q} \coloneqq \bigcup_{r\geq 1} B^r_{p,q} = B^{p+2}_{p,q},$$

其中我们利用推论 6.2.2 推得 $B^\infty_{p\ ,q} = B^{q+2}_{p\ q\ ,}$。

对于 $q \geq 1$，我们定义

$$E^r_{p,q} \coloneqq Z^r_{p,q}/B^r_{p,q}.$$

注意，群$Z^r_{0,\ 1}$ 和 $B^r_{0,\ 1}$ 不必是阿贝尔群，因此 $E^r_{0,\ 1}$ 可能只是由左陪集构成的一个基点集。

现在我们定义微分。对于 p，$q \geq 0$，我们令

$$d^r_{p,q} \coloneqq j_{p-r,q+r-1} \circ (i^{r-1})^{-1} \circ k_{p,q}\colon Z^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}.$$

对于所有其他集合，我们将微分定义为零，即，取基点为值的常映射。

引理 6.2.3。

(i) 微分是良定义的。

(ii) 像$d^r_{p,\ q} = B^{r+1}_{p-r,\ q+r-1}/B^r_{p-r,\ q+r-1}$ 对于 $r \geq 2$ 以及 像 $d^1_{p,\ q} = B^2_{p-1,\ q}$。

(iii) 核$d^r_{p,\ q} = Z^{r+1}_{p\ q\ ,}$ 对于 $r \geq 1$。

这个引理的证明受到以下讨论的启发： [Boa99]。然而，我们不能依靠同构定理来识别各种商集，因此必须“手动”计算所有内容。

证明。我们从证明（i）开始。对于 $d^1_{p,\,q}$，无需证明任何内容，因此我们假设 $r \geq 2$。

根据定义，$k_{p,\,q}\colon Z^r_{p,\,q} \to \operatorname{im}[i^{r-1}\colon D_{p-r,\,q+r-1} \to D_{p-1,\,q}]$。由于 $r \geq 2$，i^{r-1} 的定义域是一个群。我们也可以排除 $(p,\,q) = (1,\,0)$ 的情形，因为微分 $d^r_{1,\,0}$ 的目标为零，因此 i^{r-1} 的目标也是一个幺半群。

因此，满足 $i^{r-1}(x) = i^{r-1}(y) = k_{p,\,q}(a)$ 的每一对元素 $x,\, y \in D_{p-r,\,q+r-1}$ 自动属于 $\ker[i^r\colon D_{p-r,\,q+r-1} \to D_{p,\,q-1}]$。根据正合性，存在一个元素 $e \in \ker i^{r-1}$，使得 $x \cdot e = y$。显然，

$$j_{p-r,q+r-1}(e) \in j_{p-r,q+r-1}(\ker i^{r-1}) = B^r_{p-r,q+r-1},$$

因此，映射 $d^r_{p,\,q}\colon a \mapsto j_{p-r}(x) \in B^{r+1}_{p-r,\,q+r-1}/B^r_{p-r,\,q+r-1} \subseteq E^r_{p,\,q}$ 是良定义的。

对于（ii），我们先考虑 $r = 1$ 的情形。由正合性，$k_{p,q}\colon Z^1_{p,q} \to \operatorname{im} k_{p,q}$，因此

$$\operatorname{im} d^1_{p,q} = j_{p-1,q}(\operatorname{im} k_{p,q}) = j_{p-1,q}(\ker i_{p-1,q}) = B^2_{p-1,q}.$$

对于 $r \geq 2$，论证类似。由正合性，$k_{p,q}\colon Z^r_{p,q} \to \operatorname{im} i^{r-1} \cap \ker i_{p-1,q}$。由于 $(i^{r-1})^{-1}(\operatorname{im} i^{r-1} \cap \ker i_{p-1,q}) = \ker i^r$，我们发现，对于所有 $x \in \ker i^r$，都存在一个元素 $a \in Z^r_{p,q}$，使得 $i^{r-1}(x) = k_{p,q}(a)$。因此，$d^r_{p,q}$ 满射到 $B^{r+1}_{p-r,q+r-1}/B^r_{p-r,q+r-1}$。

现在我们证明（iii）：若 $x \in Z^r_{p,q}$ 属于 $d^r_{p,q}$ 的核，则存在一个 $\xi \in D_{p-r,q+r-1}$，使得 $k_{p,q}(x) = i^{r-1}(\xi)$，并且

$$j_{p-r,q+r-1}(\xi) \in j_{p-r,q+r-1}\left(\ker i^{r-1}\colon D_{p-r,q+r-1} \to D_{p-1,q}\right) = B^r_{p-r,q+r-1}.$$

因此，存在一个 $\tilde{\eta} \in \ker j_{p-r,q+r-1} \subseteq D_{p-r-1,q+r}$（如果 $q \geq 0$，这是一个群），使得 $\xi \cdot i_{p-r,q+r}(\tilde{\eta}) \in \ker i^{r-1}$。由正合性，存在一个 $\eta \in D_{p-r-1,q+r}$，使得 $\tilde{\eta} = \iota_{p-r,q+r}(\eta)$，从而 $\xi \cdot \iota_{p-r,q+r}(\eta) \in \ker \iota^{r-1}$。如果 $(p,q) \neq (1,0)$，那么 i^{r-1} 的定义域和值域都是幺半群，且 i^{r-1} 是一个幺半群映射，因此

$$\begin{aligned} 0 &= i^{r-1}(\xi \cdot i_{p-r,q+r}(\eta)) = i^{r-1}(\xi) i^{r-1}(i_{p-r,q+r}(\eta)) \\ &= k_{p,q}(x) \cdot i^r(\eta), \end{aligned}$$

或者等价地，$k_{p,q}(x) = i^r(\eta^{-1})$。因此，$x \in k^{-1}_{p\,q,}(\operatorname{im} i^r) = Z^r_{p,q}$。

若 $(p,q) = (1,0)$，则 $d^r_{1,0} = 0$，因为目标为零，所以 $r \geq 2$。关于 $d^1_{1,0}$ 的结论由带基点集合的正合性立即得出。□

推论 6.2.4. $E^{r+1}_{p\,,q} = H^r(E^r, d^r)_{p,q}$ 对所有 $q \geq 1$ 均成立。

备注 6.2.5. 读者或许会想知道，对于 $r \geq 2$，我们如何定义 $E^r_{p,0}$，因为 $E^1_{p,0}$ 只是一个幺半群。答案是，我们并不定义！由于 $B^2_{p,0} = B^\infty_{p\,,0}$，构造商集 $E^2_{p,0} = Z^2_{p,0}/B^2_{p,0}$ 并无益处，即使这些幺半群是阿贝尔群。

如果所有带基点集合都是阿贝尔群，且所有映射都是同态，那么这里构造的谱序列就与 [Boa99] 或 [Wei94] 中所述、由正合对导出的通常谱序列一致。

谱序列的收敛性

现在我们来讨论这个谱序列的收敛性。我们将类比由阿贝尔群的正合对导出的谱序列，证明所构造的谱序列收敛到

$$\varinjlim [D_{p-1,q+1} \to D_{p,q}]$$

在假设某个比较映射存在的前提下。我们利用推论6.2.2将此余极限与 $D_{p+q+1,-1}$ 等同，并定义

$$F_{p,q} \coloneqq \operatorname{im} [D_{p,q} \xrightarrow{i^{q+1}} D_{p+q+1,-1}].$$

注意，如果 $p+q \geq 2$，那么 $F_{p,q}$ 是阿贝尔群，因为在这种情况下，$D_{p+q,0}$ 是阿贝尔群，并且 $\iota_{p+q,0}\colon D_{p+q,0} \twoheadrightarrow D_{p+q+1,-1}$ 是满射。

引理 6.2.6. 设 p、$q \geq 0$ 和 $p+q \geq 2$。若映射

$$\mathfrak{I}_{p,q}\colon Z^{\infty}_{p,q} \xrightarrow{j^{-1}_{p,q}} D_{p,q} \xrightarrow{i^{q+1}} F_{p,q}/F_{p-1,q+1}$$

良定义，则它是满射，且以 $B^{\infty}_{p,q}$ 为核。特别地，它诱导出一个同构

$$Z^{\infty}_{p,q}/B^{\infty}_{p,q} \xrightarrow{\cong} F_{p,q}/F_{p-1,q+1}.$$

备注6.2.7。$\mathfrak{I}_{p,q}$ 良定义的一个充分条件如下：对于所有满足 $j_{p,q}(x_1) = j_{p,q}(x_2)$ 的 x_1，$x_2 \in D_{p,q}$，存在 y_1，$y_2 \in \ker j_{p,q}$，使得 $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$。例如，当 $D_{p,q}$ 是一个（不一定是阿贝尔的）群时，该条件成立。

证明。由正合性，$Z^{\infty}_{p,q} = \ker k_{p,q} = j_{p,q}(D_{p,q})$，因此如果 $\mathfrak{I}_{p,q}$ 存在，那么它显然是满射。

为证明 $\ker \mathfrak{I}_{p,q} = B^{\infty}_{p,q}$，我们如下论证：取 $x \in D_{p,q}$，满足 $\mathfrak{I}_{p,q}(x) = 0$，或者等价地，满足 $i^{q+1}(x) \in F_{p-1,q+1} \subseteq F_{p,q}$。根据定义，存在一个 $y \in D_{p-1,q+1}$，使得 $i^{q+2}(y) = \iota^{q+1}(x)$。于是 $x + \iota_{p-1,q+1}(-y) \in \ker i^{q+1} \subseteq D_{p,q}$。正合性意味着

$$j_{p,q}(\ker i^{q+1}) \ni j_{p,q}(x - i_{p-1,q+1}(y)) = j_{p,q}(x).$$

因此，在 $\mathfrak{I}_{p,q}\colon Z^{\infty}_{p,q} \to F_{p,q}/F_{p-1,q+1}$ 下，基点的原像与 $j_{p,q}(\ker i^{q+1}) = B^{\infty}_{p,q}$ 一致。

我们将引理6.2.1应用于短正合列

$$0 \longrightarrow B^{\infty}_{p,q} \hookrightarrow Z^{\infty}_{p,q} \xrightarrow{\mathfrak{I}_{p,q}} F_{p,q}/F_{p-1,q+1} \longrightarrow 0$$

从而可得，$\mathfrak{I}_{p,q}\colon Z^{\infty}_{p,q}/B^{\infty}_{p,q} \to F_{p,q}/F_{p-1,q+1}$ 诱导一个同构。 □

我们在以下定理中总结本小节的成果。

定理 6.2.8。 对于满足方程 *(6.2)* 下方条件的每个带基点集合的正合对，都存在一个第一象限谱序列 $(E^r_{p,q}, d^r_{p,q})$，它以 $E^1_{p,q} = E_{p,q}$ 为起始项，且其第一页上的微分由 $d^1_{p,q} = j_{p-1,q} \circ k_{p,q}$ 给出。若比较映射 $\mathfrak{I}_{p,q}$：$Z^{\infty}_{p,q} \to F_{p,q}/F_{p-1,q+1}$ 是良定义的，则该谱序列收敛到 $D_{p+q+1,-1}$，其中 $p+q \geq 2$。

6.3 缺陷纤维化的应用

现在我们准备构造正标量曲率 Hatcher 谱序列。回忆命题 6.1.9光滑范畴中的纤维化

$$F_{p+1} \overset{\text{incl}}{\hookrightarrow} G_{p+1} \overset{\restriction}{\longrightarrow} F_p$$

对于 $p \geq 1$。由于 $F_0 = G_0$，我们可以通过在此情形下设定 $p \leq -1$，将纤维化延拓至$F_p = G_p = \{*\}$。根据引理 6.1.10，这些纤维化在同伦群上诱导出如下长正合列

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\substack{p\in\mathbb{Z}\\ q\geq -1}} \pi_{q+1}(F_p) & \xrightarrow{\quad\iota_{p,q}\quad} & \bigoplus_{\substack{p\in\mathbb{Z}\\ q\geq 0}} \pi_q(F_{p+1}) \\ & {\scriptstyle \pi_q(\restriction)} \swarrow \quad \searrow {\scriptstyle \pi_q(\text{包含})} & \\ & \bigoplus_{\substack{p\in\mathbb{Z}\\ q\geq 0}} \pi_q(G_{p+1})。 & \end{array}$$

我们将 $\pi_q(\restriction)$ 简记为 $\restriction_{p+1,\,q}$，并将 $\pi_q(\text{incl})$ 简记为 $\text{incl}_{p+1,\,q}$。我们尚未处于上一节所述的情形，因为这些序列终止于 $\pi_0(F_p)$。下一个引理使我们能够将这一对延伸到负半平面 $q < 0$。

引理 6.3.1。 带基点集合的序列

$$\pi_0(G_{p+1}) \xrightarrow{\restriction_{p+1,0}} \pi_0(F_p) \xrightarrow{\iota_{p,0}} \pi_p(\text{hofib}_\bullet) \twoheadrightarrow 0$$

是正合的。

证明。 对于 $p < 0$，无须证明。对于所有 $p \geq 0$，我们都有短正合列

$$0 \longrightarrow \ker \iota_{p,0} \hookrightarrow \pi_0(F_p) \xrightarrow{\iota_{p,0}} \pi_p(\text{hofib}_\bullet) \longrightarrow 0.$$

元素 $\sigma \in \Omega^p_{g_0}\text{hofib}_\bullet$ 表示零元，当且仅当存在一个 $\frown h \in \text{hofib}_{p+1} \subseteq \mathcal{R}^+_{p+2}(M)$ 满足

$$\begin{aligned} &{}^{\text{hofib}}\partial^1_1 h = \partial^1_2 h = \sigma, && {}^{\text{hofib}}\partial^{-1}_1 h = \partial^{-1}_2 h = g_0, \\ &{}^{\text{hofib}}\partial^\omega_j h = \partial^\omega_{j+1} h = g_0 \text{ for } j \geq 2. \end{aligned}$$

若 cycl(2 : $p+2$) 表示循环置换 (2 3 … $p+2$)，则可计算得

$$\begin{aligned} \text{cycl}(2:p+2) \circ \delta^\varepsilon_2(x_1,\dots,x_{p+1}) &= \text{cycl}(2:p+2)(x_1,\varepsilon,x_2,\dots,x_{p+1}) \\ &= (x_1,x_2,\dots,x_{p+1},\varepsilon) = \delta^\varepsilon_{p+2}. \end{aligned}$$

这意味着，h 是 hofib^{p+1} 中连接 g_0 与 σ 的同伦，当且仅当 cycl(2，$p+2$) $_*h \in G_p$ 满足 $\restriction(h) = \partial^1_{p+2}(h) = \sigma$。

特别地，$\ker \iota_{p,0} = \text{im}\restriction_{p+1,0}$。 □

如果我们定义

$$D_{p,q} \coloneqq \pi_q(F_p) \text{ if } q \geq 0 \text{ and } D_{p,q} = \pi_{p+q}(\mathrm{hofib}_\bullet) \text{ if } q < 0,$$
$$E_{p,q} \coloneqq \pi_q(G_p) \text{ if } q \geq 0 \text{ and } E_{p,q} = 0 \text{ if } q < 0,$$

那么我们就处于上一节的设定中。事实上，所需的幺半群和群结构由引理 6.1.11 得出。映射 $j_{p,q}$ 和 $k_{p,q}$ 在 $q \geq 1$ 时是群同态，因为它们由连续映射诱导。对于 $q = 0$ 以及适当的 p，这是因为几何加法与包含映射以及到各面的限制相容。映射 $\iota_{p,q}$，对于 $p+q \geq 1$，由推论 6.1.14 可知是幺半群同态。

根据定理 6.2.8，这导出一个第一象限谱序列，其起始项为 $E_{p,q} = \pi_q(G_p)$，且第一页上的微分由 $d^1_{p,q} = \mathrm{incl}_{p-1,q} \circ \jmath_{p,q}$ 给出。根据引理6.1.16，我们可以用正标量曲率伪同伦的同伦群 $E^1_{p,q} = \pi_q(C^{\mathrm{psc}}_p(M))$ 来替代它。谱序列的收敛性由下面的引理保证，该引理将通过几何方法证明。

引理 6.3.2。映射

$$\mathfrak{I}_{p,q} \colon Z^\infty_{p,q} \xrightarrow{\mathrm{incl}^{-1}_{p,q}} \pi_q(F_p) \xrightarrow{\iota^{q+1}} F_{p,q}/F_{p-1,q+1}.$$

是良定义的。

证明。只需证明，每一对由 $\mathrm{incl}_{p,q}([g_{-1}]) = \mathrm{incl}_{p,q}([g_1])$ 相关的元素 $[g_{-1}], [g_1] \in \pi_q(F_p)$ 都满足 $\iota^{q+1}([g_{-1}]) - \iota^{q+1}([g_1]) \in F_{p-1,q+1}$。设 $h\colon \mathbb{R}^q \times \mathbb{R} \to G_p$ 是一个块映射，它作为 g_{-1} 与 g_1 之间的同伦。我们可以假设 h 光滑，g_j 是 $\Omega^{q+1,\infty} F_p$ 的元素，并且经过可能的重新参数化后，$\mathrm{susp}(h)$ 具有正标量曲率。

由于 $\partial^1_{p+q+1}\mathrm{susp}(h) = \mathrm{susp}(\partial^1_q h)$，可知 $[\partial^1_{p+q+1}\mathrm{susp}(h)] \in F_{p-1,q+1}$。假设 $\mathrm{susp}(h)$ 在 $M \times \rho I^{p+q+2}$ 之外分解，其中 ρ 足够大。将命题 3.4.2 应用于 $\partial^1_{p+q+1}\mathrm{susp}(h)$ 的 x_{p+q+1}-x_{p+q+2} 方向，并将其粘合到 $\mathrm{susp}(h)|_{\{x_{p+q+1} \leq \rho\}}$ 上，我们得到一个块度量 $\mathrm{susp}(h) \cup (\partial^1_{p+q+1}\mathrm{susp}(h))^\curlywedge$，它作为 $\iota^{q+1}(g_1) +_{p+q+1} \partial^1_{p+q+1}(\mathrm{susp}(h))$ 之间的共边。利用几何加法与立方集合论中 $\pi_{p+q+1}(\mathrm{hofib}_\bullet)$ 的加法一致这一点，我们得出

$$[\iota^{q+1}\ g_1\ ] + [\partial^1_{p+q+1}\quad h\ ] = [\iota^{q+1}\ g_{-1}\ ], \qquad [\iota^{q+1}\ g_1\ ] - (\ )\,\mathrm{susp}(\ )\,(\ ),$$
$$[\iota^{q+1}\ g_{-1}\ ] \in F_{p-1\ q+1} \qquad \mathfrak{I}_{p\ q}$$

从而得到 $(\ )\,(\ )$,。因此，, 是良定义的。 □

至此，我们证明了本章的主要结果。

定理 6.3.3（正标量曲率 Hatcher 谱序列）。存在一个第一象限谱序列，以 $E^1_{p,q} = \pi_q(C^{\mathrm{psc}}_p(M))$ 为起始项，其第一页上的微分由 $d^1_{p,q} = \pi_q(\restriction \circ$包含$)$: $\pi_q(C^{\mathrm{psc}}_p(M)) \to \pi_q(C^{\mathrm{psc}}_{p-1}(M))$ 给出，并收敛到 $\pi_{p+q}($ 同纤维 $\bullet)$，其中 $p+q \geq 2$。

第7章

日之余

我们的总体目标是奠定基础，以开展一项关于正标量曲率$\widetilde{\ }$度量的研究计划，类似于通过 $\mathbf{Diff}_\bullet(M)$ 研究 $\mathbf{Diff}_\bullet(M)$。这一目标已经实现。$\widetilde{\ }$我们构造了核心对象 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$，即 M 上所有正标量曲率块度量构成的立方集合（第3.1节）；证明它是一个 Kan 集（定理 3.3.1）；通过悬挂映射$\widetilde{\ }$ $\mathbf{susp}_\bullet$：$\mathcal{R}^+_\bullet(M) \dashrightarrow \mathcal{R}^+_\bullet(M)$，将其与正标量曲率度量空间 $\mathrm{Riem}^+(M)$ 的立方模型 $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 联系起来（引理 5.1.6）；并建立了研究这些空间之间差异的第一个、超越指标理论的工具，即 Hatcher 谱序列的正标量曲率版本（定理 6.3.3）。

这很重要，因为我们证明了指标差经由 $\sim\mathcal{R}^+_\bullet(M)$（定理 5.1.1），因此指标差作为协边不变量的能力已臻极限——它无法检测任何高阶同痕信息。为了得到这一分解结果，我们基于可逆块狄拉克算子的概念，构造了一个新的实 K理论模型。这个新模型的主要特点是，Gromov-Lawson 指标差可以用立方映射来建模，该映射将正标量曲率分块度量映射到其狄拉克算子。

现在我们来说明接下来可以如何进行。为了获得关于 $\widetilde{\mathbf{Diff}}_\bullet(M)$ 的信息，可以利用纤维化

$$\mathrm{hAut}_\bullet(M)/\widetilde{\mathrm{Diff}}_\bullet(M) \longrightarrow B\widetilde{\mathrm{Diff}}_\bullet(M) \longrightarrow B\mathrm{hAut}_\bullet(M)$$

因为可以通过外科理论研究纤维，并通过阻碍理论研究底空间。正标量曲率度量领域中没有同伦自同构的直接对应物，但遵循“推广可能带来更易计算的对象”这一原则，我们可以考虑$\widetilde{\ }$ $\mathcal{R}^+_\bullet(M)$ 的配边版本。这是立方集合 $\mathbf{Bord}^+_\bullet(d)$：其 0-立方体是由一个闭自旋流形及其上的一个正标量曲率度量构成的二元组，1-立方体是这些对象的配边，2-立方体是配边的配边，依此类推。一般而言，$\mathbf{Bord}^+_\bullet(d)$ 的一个 n-立方体，是一个 $(d+n)$ 维紧致自旋流形，带有 $2n$ 个（可能为空的）面；该流形配有一个正标量曲率度量，且在每个面附近具有乘积结构[1]。相应的、不带正标量曲率度量数据的立方集合 $\mathbf{Bord}_\bullet(d)$

[1]实际上，应当将它们延长，以便最终得到一个“块流形”；但为求简便，这里暂且忽略这一点。

应当是 $\Omega^{\infty+d}MSpin$ 的一个立方模型，因为它是 Quinn 的配边空间的立方类比。

这两个集合都是 Kan。事实上，证明 $\mathbf{Bord}_\bullet^+(d)$ 是 Kan 的过程甚至比证明 $\widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M)$ 是 Kan 的过程更简单。存在一个显然的映射，从 $\widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M^d)$ 到遗忘映射的同伦纤维

$$\widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M^d) \to \mathrm{hofib}_\bullet\big(\mathbf{Bord}_\bullet^+(d) \to \mathbf{Bord}_\bullet(d), M^d\big).$$

Stolz 的结果 [Sto98] 及其直接推广应当蕴含：如果 M 是单连通的，那么这个映射是弱同伦等价。事实上，同伦纤维化

$$\widetilde{\mathcal{R}^+_\bullet}(M^d) \longrightarrow \mathbf{Bord}_\bullet^+(d) \longrightarrow \mathbf{Bord}_\bullet(d)$$

应当是 [Sto98] 中正合序列的空间层面描述（对于单连通自旋流形的情形）。如果 M 不是单连通的，那么就必须为 $\mathbf{Bord}_\bullet^+(d)$ 和 $\mathbf{Bord}_\bullet(d)$ 的模型补充到 $B\pi_1(M)$的参考映射。

在我们的指标理论考量中，完全忽略了基本群。在未来的工作中，可以构造一个适用于高指标理论的 $\Psi\mathrm{Dir}^\times_\bullet(M)$ 和 $\widetilde{\Psi\ \mathrm{Dir}}^\times_\bullet(M)$版本。这种方法需要将本文发展出的理论扩展到 Hilbert C^*-模上的伪微分算子。此外，我们还需要为定理 4.9.1 给出新的证明，因为一般 K-代数的 K 理论群未必是循环群（在定理 4.9.1的证明中，曾利用这一假设从满射性推出双射性），而且 Kucerovsky 定理 [Kuc97] 并不能直接应用（因为正性条件在小扰动下并不保持不变）。不过，这些障碍很可能都能克服。

模型 $\Psi\mathrm{Dir}^\times_\bullet(M)$ 和 $\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^\times_\bullet(M)$ 作为实 K-理论分类空间的优势在于，它们突显了狄拉克算子的作用。本文所发展的分析使我们能够定义立方集合 $\mathcal{R}_{\mathrm{inv}\bullet}(M)$，其元素是狄拉克算子可逆的所有分块度量。证明 $\Psi\mathrm{Dir}_\bullet(M)$ 是 Kan 集合的过程也表明 $\mathcal{R}_{\mathrm{inv}\bullet}(M)$ 是 Kan 集合，因为仔细分析这一证明可以发现，所有应用到的构造都会保留狄拉克算子；换句话说，如果我们对一个狄拉克算子进行这样的构造，得到的仍是狄拉克算子。

我们为 Hatcher 谱序列构造了一个正标量曲率版本，但到目前为止，这个谱序列还无法用于显式计算。微分 $d^1_{p,q}$在微分同胚群的 Hatcher 谱序列中可在范围 $q \ll p$ 内计算，因为 *Igusa* 稳定化映射

$$\Sigma\colon C(M \times I^p) \to C(M \times I^{p+1})$$

在所有次数为 $\leq q$ 的同伦群上诱导同构。借助我们在此发展的方法，很容易为正标量曲率伪同伦定义一个类似的稳定化映射。正标量曲率版本的 Igusa 的稳定化结果将具有重要意义，而且其研究价值也是独立的。

附录 A

索伯列夫空间

为方便读者，我们将回顾索伯列夫空间理论。这也为我们明确记号和约定提供了机会。谨此说明：本节所述内容并非作者的原创成果，而是汇集自以下资料： [AS68], [BBB13], [LM89]和 [Pal65]。

在本节中， $E \to M$ 表示一个复向量丛[1] ，其定义在一个不一定紧致的流形 M^d （无边界）上； h 是一个厄米度量 E。黎曼度量 g 在 M 上定义了一个典范的博雷尔正则测度 dvol_g ，其定义在M上。如果 M 可定向，该测度由其体积形式给出；如果 M 不可定向，则由其定向覆盖上的体积形式的一半给出。在本节中，我们称元组 $(E, h, \nabla) \to (M, g)$ 为一个几何丛。

定义 A.0.1。设 $(E, h) \to (M, g)$ 是黎曼流形上的一个厄米向量丛。其在 $\Gamma_c(E)$上的 L^2-内积 定义为

$$\langle u_1, u_2 \rangle \coloneqq \int_M h_x(u_1(x), u_2(x)) \mathrm{dvol}_g(x).$$

平方可积截面 $L^2(M; E)$ 的希尔伯特空间（或简记为 $L^2(E)$）是 $\Gamma_c(E)$ 关于由 L^2-内积诱导的范数取完备化所得的空间。

联络 ∇： $\Gamma(E) \to \Gamma(T^\vee M \otimes E)$ 是满足莱布尼茨法则的线性映射： $\nabla(fu) = \mathrm{d}f \otimes u + f\nabla u$。无需借助索伯列夫理论即可证明，每个联络都有形式伴随，参见 [BBB13，第 6 节。6]它是一个算子∇^* 且由

$$\langle \nabla^* u, v \rangle = \langle u, \nabla v \rangle.$$

无界算子理论 [Gru09，定理 12。11] 意味着 $\nabla^*\nabla$是一个（无界）自伴算子，因此我们可以对其应用无界泛函演算。

[1]当然，这一讨论对实向量丛和 Real 丛也同样适用。只需将厄米度量替换为黎曼度量即可。此时，索伯列夫空间是实向量空间和 Real 向量空间。

定义 A.0.2。 设 $(E,\ h,\ \nabla) \to (M,\ g)$ 是黎曼流形上的一个带联络的厄米向量丛。对于每个 $s \in \mathbb{R}$，通过以下方式在$\Gamma_c(E)$上定义$Sobolev\ \ s$范数

$$||u||_s^2 \coloneqq \int_M h_x((\mathrm{id} + \nabla^*\nabla)^s u(x), u(x))\mathrm{dvol}_g(x).$$

索伯列夫空间 $s\text{-}space\ \ H^s(E)$ 定义为 $\Gamma_c(E)$ 关于索伯列夫 s-范数的完备化。

事实上，索伯列夫空间是希尔伯特空间，并且 $H^0(E) = L^2(E)$。在本文中，我们将交替使用这两种记号。

警告： 索伯列夫范数和索伯列夫空间的定义在很大程度上取决于厄米度量 h、联络 ∇ 以及测度 vol_g 的选择。不同的选择可能会得到不同构的拓扑 向量空间。换言之，对于不同的选择， $\Gamma_c(E)$ 上的恒等函数未必能延拓为连续线性映射。

设 K 是一个紧集，且等于其内部的闭包。在 K上定义索伯列夫截面有两种不等价的方式。第一种方式是将 $\Gamma_c(K^\circ, E|_{K^\circ})$ 关于受限的索伯列夫范数完备化。根据我们是将该空间视为独立空间还是作为子空间来考虑，分别将所得空间记为 $H^s(K, E)$、 $H^s(E|_K)$ 或 $H^s_K(E)$。[2] of $H^s(M;\ E)$

第二种方法只有在 $s \geq 0$时才有效。我们定义 $H^s(K \subseteq M,\ E) \coloneqq \{u|_K : u \in H^s(E)\}$。这里有两个范数 $H^s(K \subseteq M,\ E)$。第一个就是通常的索伯列夫范数，只是将积分定义域改为：

$$||u||_{s,K}^2 \coloneqq \int_K h_x((\mathrm{id} + \nabla^*\nabla)^s u(x), u(x))\mathrm{dvol}_g(x).$$

第二个范数取所有延拓的索伯列夫范数的下确界 ：

$$||u||_{s,K\subseteq M} \coloneqq \{||\tilde{u}||_s \ :\ \tilde{u}|_K = u\}.$$

一般而言$||u||_{s,\ K} \leq ||u||_{s,\ K\subseteq M}$ 但只有在 $s = 0$时，它们才总是一致。

此外，索伯列夫空间的两种变体并不相同。一般而言$H(E|_K) \subseteq H(K \subseteq M,\ E)$但例如，每个截面 $u \in H^1(E|_K)$在边界处均为零，参见 [Gru09，注释 4。26]。

讨论非紧流形上的伪微分算子时，我们使用索伯列夫空间的其他版本，这些版本不是赋范空间。下一个定义对 [AS68]中的定义略作了修改。

定义 A.0.3. 对于每个 $s \in \mathbb{R}$，以及每一对 (L, K) 相对紧开子集，若满足 $K \subseteq L$，则零延拓给出一个等距嵌入 $H^s(K, E|_K) \hookrightarrow H^s(L, E|_L)$。定义 $H^s_{cpt}(E)$ 为关于所有这些包含映射的余极限。

[2]通常，空间 $H^s_K(E)$ 表示所有支集位于 K 内的截面 u 的集合，这意味着对于所有 $v \in \Gamma_c(E)$， $\langle u, v\rangle_{L^2} = 0$。如果 K 是其内部的闭包，这两个空间之间的差异就微乎其微：按照这种解释， $H^s_K(E)$ 等于 K 中所有相对紧开子集 L° 的 $H^s(E|_{L^\circ})$ 的交集。

定义 A.0.4. 对于每个 $s \geq 0$，定义 $H^s_{loc}(E)$ 为所有满足以下条件的局部平方可积函数 $L^2_{loc}(E)$ 构成的子向量空间：$x \mapsto h_x((1+\nabla^*\nabla)^s u(x)\ u(x))$ 是局部平方可积的。对于负的 s，定义 $H^s_{loc}(E)$ 为$H^{-s}_{cpt}(E^\vee)$ 的对偶空间。

注意，对所有 $s \geq 0$，$\Gamma(E) \subseteq H^s_{loc}(E)$。当 s 是整数时，结论显然；一般情形可由 $||(1+\nabla^*\nabla)^t u||_0 \leq ||(1+\nabla^*\nabla)^s u||_0 \text{if } 0 \leq t \leq s$ 得出（这里允许范数取无穷大）。

向量空间 $H^s_{loc}(E)$ 带有由半范数 $|\vdash|_{s,\ K\subseteq M} \text{if } s \geq 0$ 诱导的自然弗雷歇拓扑。尽管 $H^s_{cpt}(E)$ 包含于 $H^s_{loc}(E)$ 中，$H^s_{cpt}(E)$ 上的余极限拓扑并非 $H^s_{loc}(E)$ 的子空间拓扑。另请注意，这两种拓扑均不依赖于几何数据 h、∇ 和 vol_g 的选择。

示例 A.0.5。若 $\mathbb{C}^N \to \mathbb{R}^n$ 是赋予标准度量和平凡联络的平凡丛，则 $\nabla^*\nabla = -\sum_{j=1}^n \partial^2_{x_j}$ 是标准拉普拉斯算子。傅里叶变换使我们能够对（标准）Sobolev s-范数给出另一种描述

$$||u||^2_s = \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.$$

存在正常数 $c_s \leq C_s$，它们仅依赖于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $s \in \mathbb{N}$，使得

$$c_s(1+|\xi|^2)^s \leq \sum_{|\alpha|\leq n} |\xi|^{2\alpha} \leq C_s(1+|\xi|^2)^s,$$

因此，对于积分 s，（标准）索伯列夫 s范数等价于

$$|||u|||^2_s \coloneqq \sum_{k=0}^s ||\nabla^k u||^2_0.$$

对于 $s=1$，将前一个例子 $|||\vdash|||_1$ 明显推广到几何丛，所得结果与 $|\vdash||_1$一致。这使我们有机会在讨论块伪算子时进行归纳证明。

上的标准索伯列夫范数 $\mathbb{R}^n$ 还提供了另一种在向量丛上构造索伯列夫范数的方法：为 E 选择局部平凡化，并为 M选择底空间坐标图，在坐标图和平凡化中局部定义索伯列夫范数，然后通过单位分解将它们粘合起来。这样得到的索伯列夫范数会极大地依赖于所用坐标图、平凡化和单位分解的选择。实际上，要验证两种不同的选择会得到同一个拓扑空间 H^s，更不用说得到等价的索伯列夫范数，需要繁琐的工作。然而，可以证明，例如参见 [BBB13，第197页及后续页]，，$u \in H^s_{loc}$ 当且仅当其在某些相对紧平凡化定义域上的每个限制 U 都属于 $H^s(U \subseteq \mathbb{R}^n;\ \mathbb{C}^N)$。这一观察颇有用处，因为伪微分算子的定义性质具有局部性，讨论这类算子时便可运用这一点。

[LM89，第176] 中给出的证明概要可按以下方式推广到非紧流形。

定理 A.0.6 (索伯列夫正则性)。 对于所有紧邻域 $K \subseteq M$ 以及每个 $s > k + n/2$，存在常数 $C(K,\ s)$，使得所有支集位于 K 内的光滑截面 $u \in \Gamma(E)$满足

$$||u||_{C^k} \leq C(K,s)||u||_s.$$

特别地， $H^s(E) \subseteq \Gamma^k(M;\ E)$。

定理 A.0.7 (Rellich 引理)。 对每个相对紧开子集 $K \subseteq M$以及任意一对实数 $s < t$，包含映射 $H^t(K;\ E|_K) \hookrightarrow H^s(E)$ 都是紧算子。

下一个结果通常只针对紧流形表述，尽管对于 $\mathbb{R}^n$，证明很容易调整以适用于几何设置。

命题 A.0.8 (完美配对)。 对于每个 $(E, h, \nabla) \to (M, g)$ 以及任意截面$u, v \in \Gamma_c(E)$，内积

$$\langle u, v\rangle \coloneqq \int_M h_x(u(x), v(x))\mathrm{dvol}_g(x)$$

可延拓为唯一的非退化双线性形式

$$\langle -, -\rangle \colon H^s(E) \times \overline{H^{-s}(E)} \to \mathbb{C}.$$

对所有 $s \in \mathbb{R}$。

证明。 我们需要证明 $\langle \cdot, \cdot\rangle^\flat \colon H^{-s}(E) \xrightarrow{\quad} \overline{H^s(E)}^\vee$ 是一个同构；事实上，它将是一个等距同构。柯西-施瓦茨不等式 $\langle u, v\rangle \trianglelefteq ||u||_s||v||_{-s}$ 表明， $\langle \cdot, \cdot\rangle$ 可延拓为一个连续双线性形式。此外，它还说明 $||\langle -\ v\rangle||_{\mathrm{dual}} \leq ||v||_{-s}$。

另一方面，对所有 $v \in \Gamma_c(E)$，我们有

$$\begin{aligned} ||v||_{-s}^2 &= \langle (1 + \nabla^*\nabla)^{-s}v, v\rangle \leq ||(1 + \nabla^*\nabla)^{-s}v||_s \cdot ||\langle -, v\rangle||_{\mathrm{dual}} \\ &= ||v||_{-s} \cdot ||\langle -, v\rangle||_{\mathrm{dual}}, \end{aligned}$$

这意味着 $||v||_{-s} \leq ||\langle -\ v\rangle||_{\mathrm{dual}}$，从而得到等号。因此， $\langle \cdot, \cdot\rangle^\flat$ 是等距的，特别是单射且像为闭集。

如果 $\langle \cdot, \cdot\rangle^\flat$ 不是满射，那么根据哈恩-巴拿赫定理，我们可以找到一个非零泛函 $\theta \in H^s(E)^{\vee\vee}$，它在 $H^{-s}(E)$ 的像上恒为零。由于 $H^s(E)$ 是希尔伯特空间，因此它是自反的，所以存在唯一的 $u_\theta \in H^s(E)$，满足 $\mathrm{ev}_{u_\theta} = \theta$。这意味着

$$0 = \theta(\langle -, v\rangle) = \mathrm{ev}_{u_\theta}(\langle -, v\rangle) = \langle u_\theta, v\rangle,$$

对所有 $v \in H^{-s}(E)$ 都成立。由于 $\Gamma_c(E)$ 在 $H^s(E)$ 和 $H^{-s}(E)$ 中稠密，这意味着 $u_\theta = 0$，与我们的初始假设 $\theta \neq 0$ 矛盾。 □

若 $H^\infty := \operatorname{invlim}_k H^k(E) = \bigcap_k H^k(E)$ 配备逆极限拓扑，则相对于光滑（弱）拓扑， $H^\infty(E)$ 是 $\Gamma(M; E)$ 的子空间。类似地， $H^\infty_{cpt} = \Gamma_c(E)$ 和 $H^\infty_{loc} = \Gamma(E)$ 也是如此，其中光滑截面配备光滑（弱）拓扑 [AS68]。若我们定义 $H^{-\infty} =$ 余极限 ${}_kH^k = \bigcup H^k$ 并赋予其余极限拓扑，则完美配对给出 $H^{-\infty} = (H^\infty)^\vee$。

重要说明： 虽然希尔伯特空间结构 $L^2(E) = H^0(E)$ 在几何上有其动机，但其他索伯列夫空间上的内积并非如此。它们的作用是赋予其中的元素正则性。因此，索伯列夫s范数并不十分重要（除了 $s = 0$）。我们只关注其底层拓扑向量空间。这引出了可希尔伯特化向量空间以及可希尔伯特化向量空间链 [Pal65]的概念。事实上，命题 A.0.8将$\{H^k(E)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 确定为 Pal65 意义下的离散希尔伯特空间链，参见 [Pal65，定义 VIII.1。1]。

定义 A.0.9。离散希尔伯特空间链是一个希尔伯特空间序列 $\{H^k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ 使得

(i) 若 $k \le l$，则 H^l 是 H^k 的线性子空间，且包含映射连续，
(ii) 交集 $H^\infty := \bigcap_k H^k$ 在 H^0 （因此也在所有 H^k）中稠密，且

(iii) H^0 是一个希尔伯特空间。

对于负的 k，我们设 $H^k := (H^{-k})^\vee$。可以证明，存在一个包含映射$H^l \hookrightarrow H^k$，对所有 $k \le l \in \mathbb{Z}$，见 [Pal65，第126]页。

我们想了解外张量积下索博列夫空间的构造如何变化。

引理 A.0.10 ([Pal65，定理 XIV.2])。 对于每一对几何丛$(E_j, h_j, \nabla_j) \to (M_j, g_j)$ 以及所有 $s \ge 0$，外张量积的索博列夫空间 $(E_1 \boxtimes E_2, h_1 \boxtimes h_2, \nabla_1 \boxtimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \boxtimes \nabla_2 \to M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ 由下式给出

$$H^s_{cpt}(E_1 \boxtimes E_2) = \bigcap_{0\le s\le t} H^t_{cpt}(E_1) \otimes H^{s-t}_{cpt}(E_2)$$

and

$$H^s_{loc}(E_1 \boxtimes E_2) = \bigcap_{0\le t\le s} H^t_{loc}(E_1) \otimes H^{s-t}_{loc}(E_2)$$

在 [Pal65]，该引理仅针对闭流形上的厄米向量丛得到了证明。然而，这个证明同样适用，因为我们只考虑紧子集上的（半）范数。或者，也可以先证明该引理适用于$\mathbb{C}^N \to \mathbb{R}^n$ 配备标准厄米度量和黎曼度量的平凡丛，然后利用局部拼接论证，以及以这种方式得到的两个范数在紧子集上等价这一事实。

下一个定义是对 [AS68], 的轻微修改，它将 [Pal65] 的类似定义推广到了非紧流形。

定义 A.0.11。设 $E, F \to X$ 是 (M, g) 上的两个厄米向量丛，并设 $r \in \mathbb{Z}$。用 $Op_k^r(E, F)$ 表示所有连续线性映射 $H_{cpt}^s(E) \to H_{loc}^{s-r}(F)$ 的集合，用 $Op^r(E, F)$ 表示所有线性映射 $H_{cpt}^\infty(E) \to H_{loc}^\infty(F)$ 的集合，这些映射对所有 $k \in \mathbb{Z}$ 都可延拓为连续线性映射 $H_{cpt}^k(E) \to H_{loc}^{k-r}(F)$。

请注意，在 Op^r的定义中，我们无需要求线性映射 $H^\infty \to H^\infty$ 连续，因为 H^∞ 采用逆极限拓扑，其连续性可由延拓的连续性推出。读者可能会想，为什么我们在 Op^r 的定义中将范围限制为整数阶索伯列夫空间。原因是这对我们的目的已足够，而且在许多情况下，更容易验证某个算子属于 Op^r，因为若 s 是整数阶，我们就可以避免对（$1+\nabla^*\nabla$）^{s}进行泛函演算论证[3]

我们可以用有界收敛拓扑将 Op_s^r 赋予弗雷歇空间结构。这意味着，连续线性映射序列 T_α：$H_{cpt}^s \to H^{s-r_{loc}}$收敛到 T，当且仅当对所有紧邻域K都有$||T_\alpha - T||_{s,s-r;K} \to 0$，其中

$$||S||_{s,s-r;K} \coloneqq \sup\{||Sf||_{s-r;K} : f \in H^s(K, E|_K) \text{ with } ||f||_s = 1\}.$$

典范包含

$$Op^k \hookrightarrow \prod_{m\in\mathbb{Z}} Op_m^k \quad \text{given by} \quad A \mapsto (\dots, A, A, A, \dots)$$

具有闭像，因此 Op^k 也是弗雷歇空间。空间 Op^k 具有局部性，即当且仅当 $fAg \in Op^k$ 对所有光滑且紧支撑的实值函数 f 和 g成立时，$A \in Op^k$。

[3]如果 s 是负的，我们可以利用完美配对将其化为非负的 s。

附录 B

伪微分算子的基础

我们将回顾伪微分算子的基础，以建立记号并方便读者阅读，因为一般文献通常只针对紧流形发展这套理论，而我们主要研究非紧流形。这里介绍的内容并非真正的新内容，作者也不声称这些段落具有原创性。在本文中，我们需要处理伪微分算子空间上的若干种拓扑。许多已有证明实际上都能证明连续性，只要仔细追踪常数即可，这正是我们撰写本附录的原因。熟悉伪微分算子的读者，应特别留意*Atiyah-Singer* 闭包 $\Psi\mathrm{DO}^k(E,F)$ 在定义 B.0.20中所采用的构造，该构造最初定义于 [AS68], 广义符号正合列引理 B.0.24，以及 Atiyah 和 Singer 考虑更广泛类别的原因，见定理 B.0.28 和B.0.29。

我们将向量丛上的伪微分算子定义为：在局部看起来像欧几里得空间开子集上的平凡丛上的伪微分算子的算子。因此，我们将先考虑这个模型情形。

由于伪微分算子的定义需要用到傅里叶变换，我们不能在实向量丛上定义它们，而必须在 Real 向量丛上定义。回顾一下，Real 向量丛是配备了 $\mathbb{C}$-反线性对合 $\cdot: E \to E$ 的复向量丛E。在本文中，我们只讨论由实向量丛经复化得到的 Real 向量丛，也就是说，每个 Real 向量丛都具有 $E = E' \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 的形式，并且对合就是作用于第二个因子上的复共轭。此外，我们在本文中进行的每一种构造，都是在底层实向量丛上的构造。出于这个原因，只有在本节中，我们才区分实向量丛与 Real 向量丛。

定义 B.0.1. 设 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 为开集，且 k 为实数。光滑映射p: $U \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{End}(\mathbb{C}^{N_1}, \mathbb{C}^{N_2})$ 是一个k 阶振幅，如果它在每个紧子集$K \subseteq U$上都具有以下渐近行为

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n \; \exists C_{\alpha,\beta,K} : ||\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha p(x,\xi)|| \leq C_{\alpha,\beta,K}(1+||\xi||)^{k-|\alpha|}. \tag{B.1}$$

如果振幅还满足以下条件，则称其为实

$$\overline{p(x,\xi)} = p(x,-\xi). \tag{B.2}$$

我们用 $A_k(U\times\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^{N_1},\ \mathbb{C}^{N_2})$ 表示所有实振幅的集合。

下一个定理引自 [BBB13], ，它指出振幅在光滑函数上诱导出线性算子。我们遵循作者的约定，记为 đξ =$(2\pi)^{-n/2}$dξ。

定理 B.0.2 ([BBB13，定理 8.3])。每个振幅 p 在 $U\times\mathbb{R}^n$ 上定义一个线性映射

$$\mathrm{Op}(p)\colon \mathcal{C}_c^\infty(U,\mathbb{C}^{N_1})\to\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{C}^{N_2})$$

由公式给出

$$(\mathrm{Op}(p))(x) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle)p(x,\xi)\hat{u}(\xi)đ\xi. \tag{B.3}$$

更进一步，如果 $U=\mathbb{R}^n$，那么这个公式会在施瓦茨空间之间诱导出一个映射

$$\mathrm{Op}(p)\colon \mathcal{S}(\mathbb{C}^{N_1})\to\mathcal{S}(\mathbb{C}^{N_2}).$$

我们遵循 [BBB13] 的做法，将赋值 $p\mapsto\mathrm{Op}(p)$ 称为 的量子化 p。自然会问，振幅 p 是否由其量子化唯一确定Op(p) ，以及在什么条件下 Op(p) 会限制为实值函数之间的映射。下一个命题将给出答案。

命题 B.0.3. 设 p 是 $U\times\mathbb{R}^n$上的一个振幅。那么

(i) $p=0$ *if and only if* $\mathrm{Op}(p)|_{\mathcal{C}_c^\infty(U,\mathbb{R}^{N_1})}=0$.

(ii) p 是实的，当且仅当 Op(p) 下降为 $\mathcal{C}_c^\infty(U,\mathbb{R}^{N_1})\to\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R}^{N_2})$。

证明。对于 (i)，我们通过逆否命题证明非平凡方向。假设存在一点 (x_0,ξ_0) 使得 $p(x_0,\xi_0)\neq 0$。由于傅里叶变换是施瓦茨函数集合上的双射 [Kön04，第331] 页，振幅的衰减条件意味着 $\xi\mapsto p(x,\xi)\hat{}\,u(\xi)$ 是一个施瓦茨函数。事实上，对于每个 $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ 和 $l\geq 0$，我们有

$$\begin{aligned}
|\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)\hat{u}(\xi)| &\leq \sum_{\beta\leq\alpha}||\partial_\xi^\beta p(x,\xi)||\cdot||\partial_\xi^{\alpha-\beta}\hat{u}(\xi)||\\
&\leq \sum C_{\beta,0,K}(1+||\xi||)^{k-|\beta|}\cdot||\partial_\xi^{\alpha-\beta}\hat{u}(\xi)||\\
&\leq \sum C_{\beta,0,K}D_{\alpha-\beta,l+k}(1+||\xi||)^{k-|\beta|}(1+||\xi||)^{-(k-|\beta|+l)}\\
&\leq \underbrace{\Big(\sum C_{\beta,0,K}D_{\alpha-\beta,l+k}\Big)}_{=:D'_{\alpha,l}}(1+||\xi||)^{-l}.
\end{aligned}$$

因此，如果我们能找到一个实值函数 u ，其在 U 中的支集是紧的，并且$p(x_0,\xi_0)\hat{}u(\xi_0) \neq 0$，那么证明即告完成，因为逆傅里叶变换是所有平方可积函数上的酉算子 [Kön04，第333]页。

注意，对于任意 $A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^{N_1},\mathbb{C}^{N_2})$， $A|_{\mathbb{R}^{N_1}} = 0$ 蕴含 $A = 0$ ，因此我们可以选取一个实向量 v_0 ，使得 $p(x_0,\xi_0)v_0 \neq 0$。根据下面的引理 B.0.4，我们可以找到任意大的 $R \in(\mathbb{R}_{>0})^n$ ，使得将$\prod_{j=1}^n \exp(-1/(1-R_j^2x_j^2))$延拓到 $\mathbb{R}^n$并在其余处取零后，其在 ξ_0处的傅里叶变换不为零。因此，

$$\varphi(x) \coloneqq \prod_{j=1}^{n} \exp\left(\frac{-1}{1-R^2(x_j-(x_0)_j)^2}\right)$$

其在 U 内具有紧支撑（因为 R 选取得足够大），且其傅里叶变换在 ξ_0处不为零。

对于 (ii)，设 p 是一个实振幅。如果 u 是 $\cdot$的特征函数，那么 $\mathrm{Op}(p)(u)$也是特征函数，计算如下：

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{Op}(p)(x)} &= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} \exp(\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle)p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\text{đ}\xi} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\exp(\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle)p(x,\xi)\hat{u}(\xi)}\text{đ}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle)\overline{p(x,\xi)\hat{u}(\xi)}\text{đ}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\mathrm{i}\langle x,-\xi\rangle)p(x,-\xi)\hat{u}(-\xi)\text{đ}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\det(-\mathrm{id})| \exp(\mathrm{i}\langle x,\xi\rangle)p(x,\xi)\hat{u}(\xi)\text{đ}\xi = \mathrm{Op}(p)(x).
\end{aligned}$$

对于另一个方向，注意 $p(x,\ \xi) - p(x,\ -\xi)$也是一个振幅。如果 $\mathrm{Op}(p)$限制为一个线性映射 $\mathcal{C}_c^\infty(U,\ \mathbb{R}^{N_1}) \to \mathcal{C}^\infty(U,\ \mathbb{R}^{N_2})$，那么前面的计算表明

$$\mathrm{Op}(p - \overline{p}(-,-\mathrm{id}(-)) = 0.$$

根据第（i）部分，这个等式意味着 $p - p(-,-\mathrm{id}(-)) = 0$，因此 p 是实的。 □

引理 B.0.4。 对于每个 $\xi_0 \in \mathbb{R}$ ，都存在一个 $R_0 > 0$ ，使得对于所有 $R > R_0$，$x \mapsto \exp(-1/(1-R^2x^2))$ 的傅里叶变换在 ξ_0 处不为零。

证明。 变量代换表明

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \exp(-\mathrm{i}x\xi_0)\exp\left(\frac{-1}{1-R^2x^2}\right)\text{đ}x &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\mathrm{i}Rx\frac{\xi_0}{R}\right)\exp\left(\frac{-1}{1-R^2x^2}\right)\text{đ}x \\
&= R^{-1}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\mathrm{i}y\frac{\xi_0}{R}\right)\exp\left(\frac{-1}{1-y^2}\right)\text{đ}y \\
&= R^{-1}\int_{-1}^{1} \exp\left(-\mathrm{i}y\frac{\xi_0}{R}\right)\exp\left(\frac{-1}{1-y^2}\right)\text{đ}y \\
&=: h(R).
\end{aligned}$$

勒贝格控制收敛定理得出

$$\lim_{R\to\infty} R\cdot h(R)=\int_{-1}^{1}\exp(-\mathrm{i}y\cdot 0)\exp\left(\frac{-1}{1-y^2}\right)\mathrm{d}y>0.$$

由于 h 连续依赖于 $R\in\mathbb{R}_{>0}$，结论得证。 □

定义 B.0.5。线性映射 $P\colon \mathcal{C}_c^\infty(U,\ \mathbb{C}^{N_1})\ \to\ \mathcal{C}^\infty(U,\ \mathbb{C}^{N_2})$ 称为阶为 k 的典范伪微分算子，若存在一个（必然唯一的）p阶振幅 k，使得 $P=\mathrm{Op}(p)$。

在实数情形下，线性映射 $P\colon \mathcal{C}_c^\infty(U,\ \mathbb{R}^{N_1})\ \to \mathcal{C}^\infty(U,\ \mathbb{R}^{N_2})$ 若其复线性延拓是阶为 k的伪微分算子，则称为阶为 k 的典范伪微分算子。

注意，根据命题 B.0.3，实数情形下算子的振幅必为实数。然而，典范伪微分算子并不足以满足我们的需求。我们需要将算子限制在一个更小的子类中，以便定义主符号。

定义 B.0.6。阶为 k 的典范伪微分算子称为主经典，若其振幅 p 满足以下假设：

(i) 对每个 $x\in U$ 和每个 $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$，极限

$$\mathrm{symb}_k(p)(x,\xi)\coloneqq\lim_{\lambda\to\infty}\lambda^{-k}\cdot p(x,\lambda\xi)$$

存在。它称为 p 的 主符号 。

(ii) 对某个截断函数（因而也对所有截断函数）χ，满足

$$\chi(\xi)=\begin{cases}0, & \text{if } |\xi| \text{ is small},\\ 1, & \text{if } |\xi|\geq 1,\end{cases}$$

函数 $p(x,\xi)\ -\chi(\xi)\ \cdot$符号映射$_k(p)(x,\xi)$ 是一个 $k-1$ 阶（典范）振幅。

例 B.0.7. 下面的例子取自 [BBB13]。

1. 每个 k 阶微分算子 $P=\sum_{|\alpha|\leq k}a_\alpha(x)\partial^\alpha$ 都是 k 阶主经典伪微分算子。事实上，利用傅里叶反演公式，不难看出 P 的振幅为 $p(x,\xi)\ =\sum_{|\alpha|\leq k}i^{|\alpha|}a_\alpha(x)\xi^\alpha$。

   主符号由符号映射$_k(P)(x,\ \xi)\ =\ \sum_{|\alpha|=k}i^k a_\alpha(x)\xi^\alpha$给出。实际上，这一观察正是定义 $\mathrm{Op}(p)$ 的公式的动机。

2. 作为 1 的特殊情形，恒等映射 $\mathrm{id}\ =\mathrm{Op}(\mathrm{id})$ 是一个零阶主经典伪微分算子。更一般地，与矩阵值函数 $f\in\mathcal{C}^\infty(U;\ \mathbb{R}^{N_1\times N_2})$ 相乘是一个零阶伪微分算子。当然，当且仅当 f 是实值函数时，该算子才是实的。主符号由 $\mathrm{symb}_0(f\cdot)(x,\ \xi)\ =f(x)\cdot$ 给出。

3. 每个光滑函数 $K\colon U\times U\to \mathrm{End}(\mathbb{R}^{N_1},\ \mathbb{R}^{N_2})$，只要 $K(x,\ \cdot)$ 对所有 $x\in U$ 都具有紧支集，就定义了一个 $-\infty$ 阶主经典伪微分算子；这意味着对于所有 $k\in\mathbb{Z}$，它都是 k 阶。因此，主符号为 0。

例*3*的证明. 我们将计算 K 的振幅。由于 $K(x,\cdot)$ 具有紧支集，且 $\eta\mapsto \hat{}u(\eta)$ 是施瓦茨函数，因此映射 $(y,\eta)\ \mapsto K(x,y)\hat{}u(\eta)$ 可积，所以下列等式链中的所有运算都是有效的

$$\begin{aligned}
(Ku)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)u(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\int_{\mathbb{R}^n} \exp(\mathrm{i}\langle y,\eta\rangle)\hat{u}(\eta)đ\eta dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \exp(\mathrm{i}\langle y,\eta\rangle)K(x,y)\hat{u}(\eta)đ\eta dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \exp(\mathrm{i}\langle x,\eta\rangle)\exp(\mathrm{i}\langle y-x,\eta\rangle)K(x,y)\hat{u}(\eta)đ\eta dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} \exp(\mathrm{i}\langle x,\eta\rangle)\exp(\mathrm{i}\langle z,\eta\rangle)(2\pi)^{n/2}K(x,z-x)\hat{u}(\eta)đz đ\eta \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\mathrm{i}\langle x,\eta\rangle)k(x,\eta)đ\eta.
\end{aligned}$$

这里，$k(x,-\eta)$ 是 $z\mapsto(2\pi)^{n/2}K(x,z-x)$ 的傅里叶变换。由于对于所有 $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$，$z\mapsto(\partial_x^\alpha K)(x,z-x)$ 都是紧支撑的，因此其傅里叶变换是施瓦茨函数（沿 η 方向）。因此，对于所有 $s\in\mathbb{Z}$，$K=\mathrm{Op}(k)$ 是一个 s 阶伪微分算子。 □

注记 B.0.8. 阶为 $-\infty$ 的伪微分算子称为 平滑算子。这个名称源于这样一个事实：此类算子作用于任意平方可积函数时，会得到光滑函数，参见下文定理 B.0.18 。

这是一个深刻的计算结果，例如见 [BBB13，定理 8。19], 典范算子和主经典伪微分算子在微分同胚下保持不变，具体而言：

设 $\kappa\colon U\to V$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的相对紧开子集之间的一个微分同胚，并且 $P=\mathrm{Op}(p)$ 是一个典范算子或主经典伪微分算子，其阶为 k，振幅在第一个变量上具有紧支撑；这意味着存在一个紧子集，使得 $p(x,\ -)=0$ 对所有 $x\in K^c$均成立。那么，拉回 $\kappa^*(P)\coloneqq P(\cdot\circ\kappa^{-1})\circ\kappa$ 仍是一个典范算子或主经典伪微分算子，其阶为 k，且振幅在第一个变量上具有紧支撑。此外，若 q 表示 κ^*P的振幅，则

$$\mathrm{symb}_k(q)(x,\xi)=\mathrm{symb}_k(p)(\kappa(x),{}^T(D_x\kappa)^{-1}(\xi)).$$

换言之，符号映射$_k(P)$ 的变换方式如同 $\mathrm{Hom}(\pi^*\mathbb{C}^{N_1},\ \pi^*\mathbb{C}^{N_2})\to T^\vee U$的一个截面。

现在我们可以定义任意流形上的伪微分算子了。

定义 B.0.9. 设 $E, F \to M$ 是流形 M 上的实向量丛。线性映射 $P\colon \Gamma_c(E) \to \Gamma(F)$ 若满足以下条件，则称为一个 阶数为 k 的主经典（典范）伪微分算子：对所有 $x_0 \in M$，存在 x_0 附近的局部坐标图 (U, κ)、局部平凡化 $\Phi\colon E_U \to U \times \mathbb{C}^{N_1}$、$\Psi\colon F_U \to U \times \mathbb{C}^{N_2}$，以及一个光滑函数$f\colon M \to [0,1]$，该函数在 x_0 的某个邻域内恒等于 1，且其支集紧支于 U 内；在将截面与函数作显然识别后，线性映射

$$\kappa_*\left(\left(\Psi \circ f \cdot P \circ \Phi^{-1}\right)\right) : \mathcal{C}_c^\infty(\kappa(U), \mathbb{R}^{N_1}) \to \mathcal{C}^\infty(\kappa(U), \mathbb{R}^{N_2})$$

是一个阶为 k 的主经典（典范）伪微分算子。若 p_f 是表示振幅，我们定义

$$\operatorname{symb}_k(P)(x_0, \xi) \coloneqq \lim_{\lambda \to \infty} \frac{p_f(x_0, \lambda\xi)}{\lambda^k}.$$

我们称这样的选择 $(U,\ \kappa,\ \Phi,\ \Psi,\ f)$ 为一个振幅数据。所有主经典伪微分算子构成的集合记为 $\Psi\mathrm{DO}^k(E,\ F)$，所有典范伪微分算子构成的集合记为 $C\Psi\mathrm{DO}^k(E,\ F)$。

注 B.0.10。 *(主)*符号 在坐标变换下相应地变换，因此给出一个光滑同态

$$\operatorname{symb}_k(P)\colon \pi^*E \to \pi^*F,$$

其中 $\pi\colon\ T^\vee M \setminus \{0\} \to M$。符号是次数为 k 的正齐次函数，这意味着 符号映射$_k(P)(x,\ \lambda\xi) = \lambda^k$符号映射$(P)(x,\ \xi)$ 对所有 $\lambda > 0$ 均成立。证明见 [BBB13，定理 8。19]。

注意，Pu 可能不是紧支撑的。然而，在应用分析工具时，控制支集的增长会很方便。沿用[LM89，第 183] 页，我们作如下定义。

定义 B.0.11。 伪微分算子 $P \in \Psi\mathrm{DO}^k(E, F)$ 的支集包含于 K，当且仅当 $\operatorname{supp} Pu \subseteq K$对所有 $u \in \Gamma_c(E)$ 成立，且 $Pu = 0$当 $\operatorname{supp} u \cap K = \emptyset$。

由命题 B.0.3 可知，$p_f \equiv 0$ 对所有 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$ 其支集与 K 不相交的情况成立。特别地，符号映射$_k(P)(x,\ -) = 0$对所有 $x \in K^c$成立。

定义 B.0.12。 对于每个 $k \in \mathbb{R}$ 以及每个紧子集 $K \subseteq M^n$，令

$$\operatorname{Symb}^k(E, F) \coloneqq \{\sigma \in \Gamma(T^\vee M \setminus \{0\}, \operatorname{Hom}(\pi^*E, \pi^*F)) \,|\, \sigma(x, \lambda\xi) = \lambda^k \sigma(x, \xi)\}$$

所有阶为 k 且.....的（光滑）符号所构成的向量空间

$$\operatorname{Symb}_K^k \coloneqq \{\sigma \in \operatorname{Symb}^k(E, F)\ :\ \sigma(x, -) = 0 \text{ if } x \in K^c\}$$

它是所有支集位于 K的符号构成的子空间。将伪微分算子映射到其主符号的映射，当然记作

$$\operatorname{symb}_k\colon \Psi\mathrm{DO}^k(E, F) \to \operatorname{Symb}^k(E, F).$$

如果我们选择一个黎曼度量，那么就可以将所有符号的集合识别为 $\Gamma(S(T^\vee M), \mathrm{Hom}(\pi^* E,\ \pi^* F))$，其中 $S(T^\vee M)$表示由所选黎曼度量确定的余切丛 $T^\vee M$ 的单位球面丛。

伪微分算子的定义条件具有局部性。若要验证伪微分算子的某个性质，例如两个伪微分算子的复合仍是伪微分算子，人们可能会想先在局部坐标中验证该性质，然后利用单位分解论证，将整体命题化为局部命题。然而，任意的单位分解 $\{\chi_j\}$ 都不足以从伪微分算子的局部性质推出其整体性质，即使每个 χ_j 的支集都包含在一个坐标图中也是如此。这是因为我们需要两个不同的坐标图来检测 $\chi_j P \chi_i u$ ，而我们没有可供比较的这种情形的模型。

下面的引理是对 [Gru09，引理 84] 在非紧流形上的推广，可帮助我们克服这一困难。

引理 B.0.13 (覆盖引理)。设 E、 $F \to M$ 是光滑流形 M上的向量丛。那么存在一个由坐标图构成的开覆盖 $\{\kappa_i :\ U_i \to V_i\}_{i\in I}$，使得这些丛在其上平凡化，并且存在一个从属的单位分解$\{\chi_i\}_{i\in I}$，使每个四元组$(\chi_j, \chi_k, \chi_l, \chi_m)$ 的支集都包含在某个 U_i中。

证明。 根据 [Gre78，定理 2']存在一个完备黎曼度量 g 定义在 M 上，且具有正的单射半径。利用这一信息，很容易构造一个可数的局部有限坐标图集族 $\{\kappa_j : U_j \to V_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 其目标 V_j 两两不相交，且其定义域可缩。

令 $1/3 > \delta > 0$ 小于 g的单射半径，并令 $d = \mathrm{dist}(-, x_0)$ 为以 $x_0 \in M$ 为中心的距离函数。由于 g完备， d是真映射。若紧集 $K_n := d^{-1}([n-1, n])$ 非空，则用有限多个半径为 δ 的测地球覆盖它们。这些测地球共同构成 M的可数局部有限开覆盖 $\{U_j\}_{j\in\mathbb{N}}$。若 log 表示测地指数映射 $\exp : B_\delta(0) \to U_j$的逆映射，则 $\{j+\log : U_j \to B_\delta(j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ 是一个可数的局部有限坐标图集，其目标互不相交。特别地，向量丛在坐标图定义域上都可平凡化，因为可缩仿紧空间上的每个丛都是平凡的， [tD08，定理 14.3.1]。仔细检查 [Gru09] 中引理 8.4 的证明可知，它仍适用于刚构造的覆盖，并且能得到具有所述性质的覆盖和单位分解。

□

例 B.0.7 中给出的所有例子都可以推广到流形上的向量丛。非正式地说，这些例子都具有相当局部的性质。不过，也存在全局定义在截面上的线性算子，要猜出它们的局部振幅并据此将其识别为伪微分算子，可能并不容易。引理 B.0.13 的第一个应用，是下面这个有用的伪微分算子刻画；它将算子本身置于中心，而非振幅。在陈述该刻画之前，回顾附录 A 中的内容： $\Gamma_c(M,\ E) = H^\infty_{cpt}$ 和$\Gamma(M,\ E) = H^\infty_{loc}$，它们使我们能够为这些空间赋予拓扑（采用索伯列夫空间的逆极限拓扑）。

定理 B.0.14（[AS68，第509]页）。设 $E, F \to M$ 是 M上的 Real 向量丛。线性映射 $P\colon \Gamma_c(M,E) \to \Gamma(M,F)$ 是一个 k阶伪微分算子，当且仅当 P 连续，并且对每个点 $x_0 \in M$，都存在一个包含 x_0的坐标图 (U,κ)、平凡化 $\Phi\colon E_U \to \mathbb{C}^{N_1}$, $\Psi\colon F_U \to U \times \mathbb{C}^{N_2}$，以及一个光滑函数$f\colon M \to [0,1]$，该函数在 x_0 附近恒等于 1，且紧支撑于 U 内；在将截面与函数识别后，函数

$$p_f(y,\xi) \coloneqq \exp(\mathrm{i}\langle y,\xi\rangle)\Psi \circ P(f \cdot \Phi^{-1}(\cdot, \exp(-\mathrm{i}\langle \kappa(\cdot),\xi\rangle)))$$

是一个阶为 k的实振幅。

证明概要。由于覆盖引理给出的单位分解是局部有限的，因此 P 连续，当且仅当每个加项 $\chi_j P \chi_k$ 都连续。

由于 χ_j 和 χ_k 的支集都包含在可缩坐标图 U_i中，只需在局部坐标下验证所有加项 $\chi_j P \chi_k$ 满足所述等价关系即可。但这已在 [Gru09，第173页及后续页]中完成。 □

覆盖引理还可用于将下述关于复合性质的命题约化到局部情形；这些性质在 [AS68，第510]页中是针对复数情形陈述的。

命题 B.0.15。设 E、F、G 是 M上的实向量丛。

(i) 若 $P \in \Psi DO^k(E,F)$、$Q \in \Psi DO^l(F,G)$ 且 $f \in \mathcal{C}_c^\infty(M)$，则 $PfQ \in \Psi DO^{k+l}(E,G)$，并且 $symb(PfQ) = f symb(P) symb(Q)$。特别地，若 $P \in \Psi DO^k_K(E,F)$、$Q \in \Psi DO^l_L(F,G)$，则 $PQ \in \Psi DO^{k+l}_{K\cup L}(E,G)$。

(ii) $P \in \Psi DO^k_{(K)}(E,F)$ 意味着 $P^\vee \in \Psi DO^k_{(K)}(F^\vee, E^\vee)$，且 $P^* = (h_{E\#} \circ P^\vee \circ h_F^\flat) \in \Psi DO^k_{(K)}(\bar{F}, \bar{E})$；条件是 E和 F分别配备黎曼度量 h_E和 h_F。此外，$symb(P^\vee) = symb(P)^\vee$，且 $symb(P^*) = symb(P)^*$。

证明概要。利用覆盖引理，将这些陈述归结为以下情形：M 是 $\mathbb{R}^d$的开邻域，且 E 和 F 是平凡丛。现在根据局部版本即可得出该陈述，局部版本见 [BBB13，定理 8。27]。 □

该命题意味着 $\Psi\mathrm{DO}^0_K(E,E)$ 是一个 $*$-代数，并且符号映射 symb 是一个 $*$-同态。若 M是闭的，则 $\Psi\mathrm{DO}^0_M(E,E) = \Psi\mathrm{DO}^0(E,E)$ 是含幺的。此外，在这种情况下，$\Gamma_c(M,E) = \Gamma(M,E)$，因此讨论伪微分算子是否可逆是有意义的。尽管下面的结果是引理 B.0.23 的简单推论，我们还是在此先行陈述。

命题 B.0.16。设 $E, F \to M$是闭流形 M 上的实向量丛。若 $P \in \Psi\mathrm{DO}^k(E,F)$ 可逆，则 $P^{-1} \in \Psi\mathrm{DO}^{-k}(F,E)$。

我们利用命题 B.0.3 赋予 $\Psi\mathrm{DO}^k(E,F)$ 弗雷歇空间结构；若将考察范围限制在 $\Psi\mathrm{DO}^k_K(E,E)$，则甚至可赋予其弗雷歇代数结构。

定理 B.0.17。 设 E、F、G 是 M 上的实向量丛。在 $\Psi\mathrm{DO}^k(E、F)$ 上存在一个由以下半范数诱导的弗雷歇结构：对于由坐标图 κ：$U \to V$、E_U 和 F_U 的平凡化 Φ、Ψ（分别对应 E_U 和 F_U）、支集包含于 U 内的光滑函数 f，以及 α、$\beta \in \mathbb{N}_0^n$ 组成的 $A = (U、\kappa、\Phi、\Psi、f、\alpha、\beta)$，定义

$$||P||_A := \sup\left\{\frac{\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta p_f(x,\xi)}{(1+|\xi|)^k}\right\}. \tag{B.4}$$

此外，命题 *B.0.15* 中的复合映射（联合）连续。

证明概要。 关于弗雷歇向量空间结构的结果是经典的，例如 [AS71] 中就提到了这一结果。证明两个伪微分算子的复合仍是伪微分算子的过程，只要仔细追踪相关估计中的常数，也能表明该复合关于此弗雷歇结构是连续的。

□

$\Psi\mathrm{DO}^k(E,\ F)$上还有其他来自算子理论的拓扑。这些拓扑源于伪微分算子可以延拓到索伯列夫空间这一事实。

定理 B.0.18 ([AS68，第512]页)。 每个阶为 k

$$P\colon \Gamma_c(M,E) \to \Gamma(M,F)$$

对每个 $s \in \mathbb{R}$，都可延拓为一个连续线性算子

$$P_s\colon H^s_{cpt}(M,E) \to H^{s-k}_{loc}(M,F). \tag{B.5}$$

此外，这些延拓诱导出一个连续映射

$$\Psi\mathrm{DO}^k(E,F) \to Op^k(E,F).$$

该定理可由覆盖引理以及以下局部版本立即推出；该版本见 [Wel08，定理 4.3。4] 只需在证明过程中跟踪各项估计中的常数即可。

引理 B.0.19。 设 $p\colon U \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{N_1}, \mathbb{C}^{N_2})$ 是一个 k 阶振幅，且其第一个变量的支集包含于紧集 K 中。

则 $\mathrm{Op}(p)\colon \Gamma_c(U, \mathbb{C}^{N_1}) \to \Gamma_K(U, \mathbb{C}^{N_2})$ 可延拓为 *Sobolev* 空间 $H^s(U, \mathbb{C}^{N_1}) \to H^{s-k}_K(U; \mathbb{C}^{N_2})$ 之间的有界映射，其算子范数为

$$||\mathrm{Op}(p)||_{s,s-k} \leq C\mathrm{vol}(K) \cdot \sum_{|\beta| \leq |s-k|+n+1} ||p||_{\beta,0}.$$

这里，$||p||_{\beta,0}$ 表示所有有效上界的下确界$C_{\beta,\ 0,\ K}$ 即振幅估计 *B.1*中的下确界。

利用前一个定理，我们可以作出如下定义。

定义 B.0.20。 记 $\Psi\mathrm{DO}^k(E,F)$ 为 $\overline{\Psi\mathrm{DO}}^k(E,F)$ 在 Op^k 中经由典范包含所得的闭包。我们称这个弗雷歇空间为 $\Psi\mathrm{DO}^k(E,F)$ 的 *Atiyah-Singer* 闭包。

我们还将考虑第三种完备化。

定义 B.0.21. 对于每个 $s \geq k$，我们用 $\Psi\mathrm{DO}_s^k(E,F)$ 表示 $Op_s^k(E,F)$ 中 $E\mathrm{DO}\,F$ (E,F) 的闭包。我们将这个集合称为 $\Psi\mathrm{DO}^k(E,F)$ 的 *Sobolev*闭包 。

我们可以为 $\Psi\mathrm{DO}^k(E,F)$ 赋予三种不同的拓扑：Amp，即通过所有表示振幅描述的 Fréchet 结构；AS，即来自 Atiyah-Singer 闭包的子空间拓扑；以及S_s，即来自 Sobolev 闭包的子空间拓扑。对于这三种拓扑，命题 B.0.15 中的运算都是连续的，并且可连续延拓到相应的闭包。它们之间的关系如下：

定理 B.0.22. 对于紧流形 M 上的任意两个 *Real* 向量丛 E,F，恒等映射诱导出连续映射

$$(\Psi\mathrm{DO}^k(E,F),\mathrm{Amp}) \longrightarrow (\Psi\mathrm{DO}^k(E,F),\mathrm{AS}) \longrightarrow (\Psi\mathrm{DO}^k(E,F),\mathrm{S}_s)$$

证明。 第一个包含映射的连续性由定理 B.0.18 得出。第二个映射显然连续。 □

除了光滑弗雷歇拓扑外，$\mathrm{Symb}_K^k(E,\ F)$上还有另一种合理的拓扑，使 $\mathrm{Symb}_K^k(E,\ F)$成为巴拿赫空间。其范数定义为在球丛的所有点上取算子范数的上确界。其完备化记为$\mathrm{Symb}_K^k(E,\ F)$。它可以识别为从球丛 $S(T^\vee M)$到$\mathrm{Hom}(\pi^*E,\ \pi^*F)$的连续截面集合，这些截面的支集包含于 K内。

引理 B.0.23。 如果 $\Psi\mathrm{DO}^k(E,F)$ 带有振幅拓扑，而符号映射$^k(E,F)$带有光滑拓扑，那么符号映射连续且具有连续右逆 ρ。这两个映射限制在支集位于 K内的算子和符号所构成的子空间上，因此我们有以下两个分裂正合序列

$$0 \longrightarrow C\Psi\mathrm{DO}_{(K)}^{k-1}(E,F) \longrightarrow \Psi\mathrm{DO}_{(K)}^k(E,F) \underset{\rho}{\overset{\mathrm{symb}^k}{\rightleftarrows}} \mathrm{Symb}_{(K)}^k(E,F) \longrightarrow 0$$

证明。我们首先构造右逆 ρ，紧密遵循 [Wel08]。

我们选取一个开覆盖 $\{U_\mu\}$，并如覆盖引理所示，取其从属的单位分解 $\{\phi_\mu\}$。对于每个 ϕ_μ，我们选取一个支集包含于 U_μ的光滑函数，使其在 supp ϕ_μ上恒等于 1。最后，我们固定一个截断函数 $\chi\colon\ \mathbb{R}\to[0,1]$，使其在 $\mathbb{R}_{\leq 0}$ 上满足$\chi\equiv 0$，并在 $\mathbb{R}_{\geq 1}$上满足 $\chi\equiv 1$。

设 $\sigma\in\Gamma(T^\vee M\setminus\{0\},\ \mathrm{Hom}(\pi^*E,\ \pi^*F))$ 为给定的符号。在标识 $T^\vee U_\mu = U_\mu\times\mathbb{R}^n$ 和 $E_{U_\mu} = U_\mu\times\mathbb{C}^{N_1}$ 下，符号 $F_{U_\mu} = U_\mu\times\mathbb{C}^{N_2}$，$\sigma$ 对应于一个光滑的矩阵值映射

$$s_\mu\colon U_\mu\times\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{N_1},\mathbb{C}^{N_2}).$$

令 $p_\mu(x,\ \xi) = \chi(||\xi||)\sigma_\mu(x,\ \xi)$，并将其延拓为在 $U_\mu \times \mathbb{R}^n$ 上为零。由于 s_μ 关于第二个分量是 k 阶齐次的，它是一个 k 阶振幅。P_μ 定义如下：

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{C}^\infty(U_\mu, \mathbb{C}^{N_1}) & \xrightarrow{\psi_\mu \mathrm{Op}(p_\mu)} & \mathcal{C}_c^\infty(U_\mu, \mathbb{C}^{N_2}) & \xrightarrow{\cong} & \Gamma_c(U_\mu, F) \\ \cong\uparrow & & & & \downarrow \\ \Gamma_c(U_\mu, E) & & \xrightarrow[P_\mu]{} & & \Gamma(M, F) \end{array}$$

并设

$$\rho(\sigma) \coloneqq P \coloneqq \sum_\mu P_\mu.$$

当然，这些识别由坐标图和平凡化给出。显然，$P \in C\Psi\mathrm{DO}^k(E,\ F)$，因为它在局部上是一个振幅的量子化。

在选定的平凡化中，$\mathrm{symb}_k(P_\mu)$ 表示为

$$\begin{aligned} \mathrm{symb}_k(P_\mu)(x,\xi) &= \mathrm{symb}_k\left(\psi_\mu \cdot \xi(||-||)s_\mu(-,-)\right)(x,\xi) \\ &= \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\psi_\mu(x)\chi(||\lambda\xi||)s_\mu(x,\lambda\xi)}{\lambda^k} \\ &= \psi_\mu(x)\chi(||\lambda\xi||)s_\mu(x,\xi) = \psi_\mu(x)s_\mu(x,\xi). \end{aligned}$$

滥用一下记号，我们有

$$\mathrm{symb}_k(P) = \sum_\mu \mathrm{symb}_k(P_\mu)\phi_\mu = \sum_\mu \psi_\mu s_\mu \phi_\mu = \sum_\mu \phi_\mu s_\mu = \sigma.$$

显然，$p_\mu(x,\ \xi) - \chi(||\xi||)\mathrm{symb}(p_\mu)(x,\ \xi) = 0$ 是一个阶为 $\leq k-1$ 的振幅。因此，每个 $P \cdot \phi_\mu$ 都是一个阶为 k 的主经典伪微分算子，P也如此。因此，ρ 确实是 symb^k 的右逆。注意，ρ 是$\mathcal{C}^\infty(M,\ \mathbb{R})$-线性的，并且如果 σ 是实的，那么 $\rho(\sigma)$ 也是实的。

由于 ρ 是通过将局部右逆拼接起来构造的，它限制为符号映射的一个右逆 ρ: Sy mb$^k_K(E,\ F) \to \Psi\mathrm{DO}^k_K(E,\ F)$。

这两个映射 symb_k 和 ρ 都是线性的，因此只需验证它们在 0 处连续。

在构造 ρ 时，我们按照覆盖引理选取了一个单位分解，因此只需在局部坐标中验证其连续性。我们需要用 s_μ 的半范数来控制 $\psi_\mu p_\mu$ 的振幅半范数。为此，我们计算

$$\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \psi_\mu(x)\chi(\xi)s_\mu(x,\xi) = \sum_{\substack{\alpha'+\alpha''=\alpha \\ \beta'+\beta''=\beta}} \partial_x^{\alpha'}\psi_\mu(x)\partial_\xi^{\beta'}\chi(\xi)\partial_x^{\alpha''}\partial_\xi^{\beta''}s_\mu(x,\xi).$$

每个加项 $\partial_x^{\alpha''}s_\mu(x,\xi)$ 都是 k 阶齐次函数，因此链式法则意味着 s

$$||\partial_x^{\alpha''}\partial_\xi^{\beta''}s_\mu(x,\xi/||\xi||)|| \leq C_{\alpha'',\beta''} \sum_{l\leq|\beta''|} ||D^{\otimes l}|_{TS^{n-1}}s_\mu(x,\xi)|| \cdot (1+||\xi||)^{k-|\beta''|}$$

在 supp χ 上，其中 $D^{\otimes l}|_{TS^{n-1}} s_\mu(x, \xi/||\xi||)$ 表示将 $s_\mu(x,-)$ 限制到 $(\mathbb{R}\xi^\perp)^{\otimes l}$ 后得到的第 l 次迭代（全）微分。函数 χ 在原点附近为零，并在某个紧集之外恒等于 1。因此，

$$\partial_\xi^{\beta'} \chi \leq C_{\beta'}(1 + ||\xi||)^{k-|\beta'|}$$

对所有 $\beta' \neq 0$ 均成立。将这些不等式合并，我们得到

$$||\psi_\mu \chi s_m||_{\alpha,\beta;U_\mu} \leq C \sum_{l \leq |\alpha|+|\beta|} ||D^{\otimes l}_{(x,\xi)} s_\mu||,$$

其中 $D^{\otimes l}_{(x,\xi)} s_\mu$ 表示 s_μ 的 l 阶迭代全微分。这表明 ρ 是连续的。

由以下关于在坐标图定义域内紧支撑的振幅的不等式，我们可推出符号映射的连续性

$$||\mathrm{symb}_k(p)||_{C^\alpha;U_\mu} \leq \sum_{\alpha'+\alpha''=\alpha} ||p||_{\alpha',\alpha'';U_\mu},$$

其中 $||p||_{\alpha',\alpha'';U_\mu}$ 表示振幅定义不等式B.1 中的最小常数，其中紧集包含 p 的支集。 □

引理 B.0.24。 </style}符号映射也是连续的，若 $\mathbf{DO}^k_K(E,F)$ 带有 *s-Sobolev* 拓扑 S_s，且 $\mathrm{Symb}^k_K(E,F)$ 带有 C^0-拓扑。到完备化的连续延拓给出巴拿赫空间的短正合列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(H^s, H^{s-k}) \longrightarrow \overline{\Psi\mathrm{DO}}^k_{s,K}(E,F) \xrightarrow{\overline{\mathrm{symb}}^k} \overline{\mathrm{Symb}}^k_K(E,F) \longrightarrow 0.$$

证明。 我们将通过证明符号映射连续来说明

$$||\mathrm{symb}_k(P)||_\infty \leq C_{s,k}||P||_{s,s-k}.$$

我们先考虑特殊情形 $s = k = 0$。$\mathrm{symb}_0(P)$ 的支集是紧的，因此可以找到一个 $(x_0, \xi_0) \in S(T^\vee M)$，使得 $||\mathrm{symb}_0(P)(x_0,\xi_0)||_{\mathrm{op}} = ||\mathrm{symb}_0(P)||_\infty$。根据归功于 Gohberg 的一个结果（参见 [See65, 定理 2.2], 或原始文献 [Goh60],），在局部坐标中应用该结果，可找到一个光滑截面序列 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得

(i) $u_n(x) = 0$ if $|x - x_0| > 1/n$,

(ii) $||u_n||_0 = 1$,

(iii) $||\chi P u_n - \mathrm{symb}_0(P)(x_0, \xi_0)u_n||_0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ 对于某个（因而也对所有）在 $|x - x_0| > 1$ 上为零且在 $|x - x_0| < 1/2$ 上恒等于 1 的光滑函数 $\chi \leq 1$。

我们还可以进一步假设

(iv) 所有 $u_n(x_0, \xi_0)$ 都共线、非零，并且满足

$$||\mathrm{symb}(P)(x_0,\xi_0)u_n(x_0,\xi)|| = ||\mathrm{symb}(P)(x_0,\xi_0)||_{\mathrm{op}}||u_n(x_0,\xi_0)||,$$

否则，我们可以用 $A_n \cdot u_n$ 替换 u_n，其中 A_n 是 E 上的局部自同态，它将 $u_n(x_0,\ \xi_0)$ 映射为一个使 $\mathrm{symb}_k(P)(x_0,\ \xi_0)$ 的算子范数取到的向量。

特殊情形的结论现在由性质（iii）和

$$\lim_{n\to\infty} ||\mathrm{symb}_0(P)(x_0,\xi_0)u_n||_0 = ||\mathrm{symb}_0(P)(x_0,\xi_0)||_{\mathrm{op}} = ||\mathrm{symb}_0(P)||_\infty.$$

我们如下将一般情形归约到特殊情形：取一个包含 K 且使 K 位于其内部的紧邻域 L，再选取 $\Lambda_{-s} \in \Psi\mathrm{DO}_L^{-s}(E,\ E)$ 和 $\Lambda_{s-k} \in \Psi\mathrm{DO}_L^{s-k}(F,\ F)$，使得 $\mathrm{symb}_j(\Lambda_j) = \mathrm{id}$ 在 $S(T^\vee M)|_K$ 上成立。于是，$\mathrm{symb}_0(\Lambda_{s-k}P\Lambda_s) = \mathrm{symb}_k(P)$ 在 $S(T^\vee M)$ 上成立，并且

$$||\Lambda_{s-k}P\Lambda_{-s}||_{0,0} \leq ||\Lambda_{s-k}||_{s-k,0}||P||_{s,s-k}||\Lambda_{-s}||_{0,s},$$

这就推出了一般结论。

还需证明连续延拓给出了所述的短正合列。紧算子属于 symb_k 的核，因为相对于算子范数，每个有限秩算子都可以由无限阶光滑化算子逼近，而后者属于 symb_k 的核。

反过来，假设给定了一个不属于核的 $P \in \Psi\mathrm{DO}_K^k(E,\ F)$。首先考虑特殊情形 $s = k = 0$。通过对角序列论证，我们可以将 Gohberg 的结果延拓到完备化。假设 $\mathrm{symb}(P)(x_0,\ \xi_0) \neq 0$，并且 P 是紧的。若 u_n 是一个满足性质（i）至（iv）的序列，那么 Pu_n 将有一个收敛子列。为简化记号，我们假设整个序列都收敛。根据性质（iii），序列 $\mathrm{symb}_0(P)(x_0,\ \xi_0)u_n$ 必定收敛。条件（i）意味着其极限为零。但条件（ii）和（iv）则意味着

$$\lim_{n\to\infty} ||\overline{\mathrm{symb}}_0(P)(x_0,\xi_0)u_n||_0 = ||\overline{\mathrm{symb}}_0(P)(x_0,\xi_0)||_{\mathrm{op}} \neq 0,$$

这就产生了矛盾。

假设对于一般的 s 和 k，存在一个紧 $P \in \Psi\mathrm{DO}_K^k(E,\ F)$，使得 $\mathrm{symb}_k(P) \neq 0$。那么 $\Lambda_{s-k}P\Lambda_{-s} \in \Psi\mathrm{DO}^0(E,\ F)$ 将是一个符号非零的紧算子，这与特殊情形相矛盾。

我们首先证明，在特殊情形 $s = k = 0$ 和 $E = F$ 下，symb_k 是满射。在这种情况下，symb_0 是 $*$-代数之间的一个同态，其像稠密，因此它必定是满射。

在 $E \neq F$ 的情形下，我们将 $\Psi\mathrm{DO}_K^0(E,F)$ 识别为 $\Psi\mathrm{DO}_K^0(E\oplus F, E\oplus F)$ 中奇算子的闭子空间，并将 $\mathrm{Symb}_K^0(E,F)$ 识别为 $\mathrm{Symb}_K^0(E\oplus F, E\oplus F)$ 中取值于奇自同态的元素所构成的闭子空间。这些包含映射是等距的，且与符号映射相交换，因此符号映射的像必定是闭的。由引理 B.0.23 可知，symb_0 的像稠密，因此符号映射必定是满射。

对于一般的 s 和 k，我们像之前一样论证：对于每个给定的符号

$$\sigma \in \Gamma_K\big(S(T^\vee M), \mathrm{Hom}(\pi^*E, \pi^*F)\big)$$

选取 $Q \in \overline{\Psi\mathrm{DO}}^0(E,\ F)$，使得符号映射$_0(Q) = \sigma$，并选取一个主符号为恒等函数的伪微分算子 $\Lambda_k \in \Psi\mathrm{DO}^s_K(F)$。那么 $\Lambda_k Q \in \Psi\mathrm{DO}^k_K(\overline{E,\ F})$，且其主符号满足

$$\mathrm{symb}_k(P) = \mathrm{symb}_0(Q) = \sigma$$

在 $S(T^\vee M)$ 上。 □

推论 B.0.25. 符号映射延拓至 *Atiyah-Singer* 闭包

$$\mathrm{symb}_k \colon \overline{\Psi\mathrm{DO}}^k_K(E,F) \to \overline{\mathrm{Symb}}^k_K(E,F).$$

值得指出的是，右逆 ρ 通常不能延拓为连续截面 $\rho\colon \mathrm{Symb}^k_K(E,F) \to \Psi\mathrm{DO}^k_K(E,F)$。然而，若我们控制符号的高阶喷射，则右逆可延拓为连续截面。

引理 B.0.26. 若 $\Psi\mathrm{DO}^k_{s,K}(E,F)$ 赋予 s-*Sobolev* 拓扑 $\overline{S_s}$，且 $\mathrm{Symb}^k_K(E,F)$ 赋予 $C^{|s-k|+\dim M+1}$-拓扑，则右逆 ρ 是连续的。此外，若 E 和 F 是带有联络的黎曼向量丛，且 ∇ 表示 $\mathrm{Hom}(E,F)$上的诱导联络，则

$$||\rho(\sigma)||_{s,s-k} \le C \sum_{r\le |s-k|+\dim M+1} ||\nabla^{\otimes r}\sigma||_{\infty;K}.$$

证明. 根据构造，$\rho(\sigma) = \sum_\mu \mathrm{Op}(\psi_\mu p_\mu)\cdot\phi_\mu$，其中 ψ_μ 和 ϕ_μ 的支集位于某个振幅数据的定义域中，且 $\psi_\mu\phi_\mu = \phi_\mu$。利用引理B.0.19

$$\begin{aligned}
||P||_{s,s-k} &\le \sum_\mu ||\mathrm{Op}(\psi_\mu p_\mu)\phi_\mu||_{s,s-k} \\
&\le \sum_\mu C(\phi_\mu)||\mathrm{Op}(\psi_\mu p_\mu)||_{s,s-k;U_\mu} \\
&\le \sum_\mu C(U_\mu) \sum_{r\le |s-k|+n+1} ||\psi_\mu p_\mu||_{r,0;U_\mu}.
\end{aligned}$$

我们在构造 ρ 时所做的计算表明，在这个特殊情形下，我们不沿 ξ 方向（纤维方向）求导，因此

$$||P||_{s,s-k} \le \sum_\mu \tilde{C}(U_\mu) \sum_{|\alpha|\le |s-k|+n+1} ||\partial_x^\alpha s_\mu||_{\infty,U_\mu}.$$

由于 U_μ 是一个坐标图定义域，在该定义域上坐标图映射可延拓到一个稍大的开子集，且 U_μ 在其中相对紧，因此 $\mathrm{Hom}(E,\ F)$ 上的所有联络限制到 U_μ 后，都会给出等价的 $C^{|s-k|+\dim M+1}$-范数。因此，通过增大常数，我们得出

$$||P||_{s,s-k} \le \sum_\mu \tilde{C}(U_\mu) \sum_{r\le |s-k|+n+1} ||\nabla^{\otimes r} s_\mu||_{\infty;U_\mu} \le \tilde{C} \sum_{r\le |s-k|+n+1} ||\nabla^{\otimes r}\sigma||_{\infty;K}.$$ □

我们主要使用 Atiyah-Singer 闭包而非 Sobolev闭包的原因在于，Atiyah-Singer 闭包中的算子具有许多（实际）伪微分算子的性质。

命题 B.0.27。

1. 每个 $P \in \overline{\Psi DO}^k(E, F)$ 都诱导一个连续映射 $\Gamma_c(E) \to \Gamma(F)$。*2.* 空间 $\Psi DO^k(E, F)$ 是局部空间，这意味着 $P \in \Psi DO^k(E, F)$ 当且仅当 $P|_U \in \Psi DO^k(E|_U, F|_U)$，其中 $P|_U$ 表示将 P 限制到 $\Gamma_c(U, E|_U) \to \Gamma(U, F)$。

证明。 关于第一条陈述，参见 [AS68，第512], ；关于第二条陈述，参见 [AS68，第513]。 □

与实际的伪微分算子不同，最重要的性质是， $\Psi\mathrm{DO}^k(E, F)$ 在外张量积下稳定。

定理 B.0.28 ([AS68，定理 5.3 和定理 5.4])。 设 E， F 是 M 上的实向量丛，且 G 是 N 上的实向量丛。那么对所有 $k > 0$ ，都存在一个连续映射

$$- \boxtimes \mathrm{id} \colon \overline{\Psi\mathrm{DO}}^k(M; E, F) \to \overline{\Psi\mathrm{DO}}^k(M \times N; E \boxtimes G, F \boxtimes G)$$

定义为将 P 送到以下对象的连续线性延拓

$$u \otimes v \mapsto P(u) \otimes v,$$

对所有 $u \in \Gamma_c(M, E)$ 、 $v \in \Gamma_c(N, G)$ 均成立。此外，

$$\mathrm{symb}_k(P \boxtimes \mathrm{id})(m, n; \xi, \eta) = \mathrm{symb}_k(P)(m, \xi) \otimes \mathrm{id}$$

只要采用恰当的光滑性概念，这个定理的证明便可推广到光滑族。

定理 B.0.29. 设 $P \colon \mathbb{R}^n \to (\Psi\mathrm{DO}^k(E, F), \mathrm{Ampl})$ 是一个光滑族，且$k > 0$。那么，存在唯一算子 $P \boxtimes \mathrm{id} \in \Psi\mathrm{DO}^k(E \boxtimes G, F \boxtimes G)$ 满足

$$(P \boxtimes \mathrm{id})(u \otimes v)(m, t) = P_t(u)(m) \otimes v(t)$$

并且这一赋值给出一个连续映射

$$- \boxtimes \mathrm{id} \colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \Psi\mathrm{DO}^k(M; E, F)) \to \overline{\Psi\mathrm{DO}}^k(M \times \mathbb{R}^n; E \boxtimes G, F \boxtimes G).$$

文献 [AS68] 中定理 5.4 的证明可以直接推广，基本无需修改。之所以必须采用振幅 Fréchet 结构，是因为我们还必须确保对于关于参数 $t \in \mathbb{R}^n$ 的微分，振幅估计同样成立。如果选择 Atiyah-Singer 闭包所诱导的拓扑，那么我们只能得出 $P \boxtimes \mathrm{id}$ 属于 $Op^k(M \times \mathbb{R}^n, E \boxtimes G, F \boxtimes G)$。采用这种拓扑时， P 只不过是一个特殊的光滑 Op^k-值映射。

遗憾的是，这些定理的证明在 $k = 0$的情形下无法成立。幸运的是，对于本文而言，以下较弱的陈述已经足够，它是 [AS68定理 53], 的族版本。同样，我们不证明此定理，因为其证明本质上与 [AS68]中的证明一致。

定理 B.0.30。令 $P\colon \mathbb{R}^n \to Op^k(M;\, E, F)$ 为一个算子的光滑映射，且$k \geq 0$。设 $G \to \mathbb{R}^n$ 是 $\mathbb{R}^n$上的一个丛。那么存在唯一算子

$$P\tilde{\boxtimes}\mathrm{id} \in Op^k(M \times \mathbb{R}^n; E \boxtimes G, F \boxtimes G)$$

满足

$$(P\tilde{\boxtimes}\mathrm{id})(u \otimes v)(m,t) = P_t(m) \otimes v(t),$$

而这一赋值定义了一个连续映射

$$-\tilde{\boxtimes}\mathrm{id}\colon \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, Op^k(M;E,F)) \to Op^k(M \times \mathbb{R}^n; E \boxtimes G, F \boxtimes G).$$

附录 C

黎曼几何中的公式

我们证明了微分几何和几何分析中的一些公式，这些公式是正文所需的，但可能会打断阅读流畅性。

C.1 等值集叶状结构的标量曲率

若 $(M,\ g)$ 是一个维数为 d 且 $\mathfrak{d}\colon\ M \to \mathbb{R}$ 是一个没有临界值的函数，那么微分拓扑中的一个标准结果（参见 [Hir94，第 153 页及以下]，）指出，（平移后的）梯度流给出了一个同构

$$\begin{array}{ccc} \Phi\colon\ \mathfrak{d}^{-1}(\{a\}) \times [a,b] & \longrightarrow & \mathfrak{d}^{-1}([a,b]) \\ & {\scriptstyle \mathrm{pr}_2} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathfrak{d}} & \\ & [a,b] & \end{array}$$

将 $\mathfrak{d}^{-1}(\{a\})$ 简写为 H。设 $v = [\gamma] \in T_m H$ 是由曲线 $\gamma\colon (-\varepsilon,\ \varepsilon) \to H$ 表示的一个切向量。计算

$$\begin{aligned} (\Phi^* g)_{(m,t_0)}(\partial_t, v) &= g\left(D_{(m,t_0)}\Phi(\partial_t), D_{(m,t_0)}\phi(v)\right) = g\left((\partial_t \Phi)_{(m,t_0)}, D_{(m,t_0)}\phi(v)\right) \\ &= g(||\mathrm{grad}(\mathfrak{d})||_g^{-1/2}\mathrm{grad}(\mathfrak{d}), [\Phi_{t_0} \circ \gamma]) \\ &= ||\mathrm{grad}(\mathfrak{d})||_g^{-1/2} \cdot \mathrm{d}\,\mathfrak{d}([\Phi_{t_0} \circ \gamma]) \\ &= ||\mathrm{grad}(\mathfrak{d})||_g^{-1/2} \cdot [s \mapsto t_0] = 0 \end{aligned}$$

得出分解

$$\begin{aligned} (\Phi^* g)_{(m,t_0)} &= \left((\Phi_{t_0})^* g\right)_m + ||\mathrm{grad}(\mathfrak{d})||_{g_{m,t_0}}^{-2} \mathrm{d}t^2 \\ &=: h(t_0)_m + f^2(m,t_0)\mathrm{d}t^2, \end{aligned}$$

其中 $h\colon\ [a,b] \to \mathsf{Riem}(H)$ 是一条黎曼度量曲线。

此例引出了以下设定。给定一条黎曼度量的光滑曲线 $h\colon (a,b) \to \mathsf{Riem}(M)$，以及一个光滑函数 $f\colon\ M \times (a,b) \to \mathbb{R}_{>0}$。这些数据通过下式在 $M \times (a,b)$ 上定义一个黎曼度量

$$g_{m,t} \coloneqq h(t)_m + f(m,t)^2 \mathrm{d}t^2.$$

我们关注 g 与 h的曲率之间的关系。以下命题是 [BGM05命题 41]的推广。该处给出的证明可以直接推广到我们的设定中。只有在推导下文的方程（C.4）时需要格外小心，因为文中所述的黎卡提方程在我们的设定中并不成立，必须加以替换。尽管如此，我们仍列出所有计算，以方便读者。我们也沿用其证明中的记号，将 $\langle -,- \rangle$ 记作 g，并将 h 的一阶和二阶导数分别记为 $\dot{h}$ 和 $\ddot{h}$。它们满足关系

$$\dot{h}(t_0)(v,w) = \frac{d}{dt}\Big(h(t)(v,w)\Big)\Big|_{t=t_0},$$
$$\ddot{h}(t_0)(v,w) = \frac{d^2}{dt^2}\Big(h(t)(v,w)\Big)\Big|_{t=t_0}$$

对所有切向量 $v,\ w \in TM_{t_0} = T(M \times \{t_0\}) \subseteq T(M \times (a,\ b))$.

我们不会像以往那样，暗中将切向量视为局部可积向量场，而是使用与时间无关且相切于水平集的向量场。由于典范分解 $T_{m,t}M \times (a,b) = T_mM \oplus T_t(a,b)$，定义在 $T(M \times (a,b))$ 上的每个向量场 X 都可以写成 $X(m,t) = [X(m,t)\ \lambda(m,t)]$，其中 $X(m,t)$ 的取值属于 TM_m，而 $\lambda(m,t)$ 的取值属于 $\mathbb{R} = T_t(a,b)$。定义在 $T(M \times (a,b))$ 上的向量场 X 与时间无关，当且仅当 X 和 λ 与 t 无关。若对于所有 $m \in M$ 和 $t \in (a,b)$，都有 $\lambda(m,t) = 0$，则该向量场相切于水平集。

命题 C.1.1. 设 $h\colon (a,b) \to \mathrm{Riem}(M)$ 是一条黎曼度量的光滑曲线，且 $f\colon M \times (a,b) \to \mathbb{R}_{>0}$ 是一个光滑函数。若 g 是 $M \times (a,b)$ 上的黎曼度量，由 $g_{(x,t)} = h(t)_x + f^2(x,t)\mathrm{d}t^2$给出；若 X, Y, U, V是与时间无关且与水平集相切的向量场，而 $\nu = f^{-1}\partial_t$ 是单位法向量场，则有以下恒等式：

$$\langle W(X), Y\rangle = -\frac{1}{2}f^{-1}\dot{h}(X,Y), \qquad where\ W(X) \coloneqq -\nabla_X \nu \tag{C.1}$$

$$\langle R(U,V)X,Y\rangle = \langle R^{M_t}(U,V)X,Y\rangle + \frac{1}{4}f^{-2}\big[\dot{h}(U,X)\dot{h}(V,Y) - \dot{h}(U,Y)\dot{h}(V,X)\big] \tag{C.2}$$

$$\begin{aligned}\langle R(X,Y)U,\nu\rangle = &-\frac{1}{2}f^{-1}\big[\langle(\nabla^{M_t}_X\dot{h})(Y),U\rangle] - \langle(\nabla^{M_t}_Y\dot{h})(X),U\rangle\big] \\ &+ \frac{1}{2}f^{-2}\big[X(f)\dot{h}(Y,U) - Y(f)\dot{h}(X,U)\big]\end{aligned} \tag{C.3}$$

$$\begin{aligned}\langle R(X,\nu)\nu,Y\rangle = &\frac{1}{2}f^{-2}\big[f^{-1}\dot{f}\dot{h}(X,Y) - \ddot{h}(X,Y) + \frac{1}{2}\dot{h}(\dot{h}^{\mathrm{op}}(X),Y)\big] \\ &+ f^{-2}X(f)Y(f) - f^{-1}\mathrm{Hess}_{M_t}(f)(X,Y)\end{aligned} \tag{C.4}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{scal}(g) = \mathrm{scal}(h) &+ f^{-2}\left(\frac{3}{4}\mathrm{tr}((\dot{h}^{\mathrm{op}})^2) - \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\dot{h})^2 - \mathrm{tr}(\ddot{h}) + f^{-1}\dot{f}\mathrm{tr}(\dot{h})\right) \\ &- 4f^{-2}|\mathrm{d}f|^2_{M_t} + 2f^{-1}\Delta_{M_t}(f).\end{aligned} \tag{C.5}$$

这里， $b^{\mathrm{op}} = b^{op,h}$ 是满足 $b(v,w) = h(b^{\mathrm{op}}(v)\ w)$的唯一端*omorphism*，其中 b 是任意双线性形式， $|\mathrm{d}f|_{M_t}$ 是 $f|_{M_t}$关于 h_t的微分的范数，而 Δ_{M_t} 是 M_t 关于 h_t的拉普拉斯-贝尔特拉米算子。

证明。若 X 与水平集相切，则 $\langle X,\nu\rangle = 0$。若 X 还与时间无关，则

$$[X,\nu] = [X, f^{-1}\partial_t] = X(f^{-1})\partial_t + f^{-1}[X,\partial_t] = -f^{-2}X(f)\partial_t = -f^{-1}X(f)\nu. \quad \text{(C.6)}$$

From

$$\begin{aligned} 0 = \nu\langle X,\nu\rangle &= \langle \nabla_\nu X,\nu\rangle + \langle X,\nabla_\nu\nu\rangle \\ &= \langle W(X),\nu\rangle - \langle [X,\nu],\nu\rangle + \langle X,\nabla_\nu\nu\rangle \\ &= -\langle [X,\nu],\nu\rangle + \langle X,\nabla_\nu\nu\rangle \\ &= -f^{-1}\cdot X(f) + \langle X,\nabla_\nu\nu\rangle \end{aligned}$$

并且 $0 = \nu 1 = \nu\langle\nu,\nu\rangle = 2\langle\nabla_\nu\nu,\nu\rangle$ 我们得到

$$\nabla_\nu\nu = -f^{-1}\mathrm{grad}(f_t), \quad \text{(C.7)}$$

其中 $f_t := f(-t)$。特别地，向量场 $\nabla_\nu\nu$总是与水平集相切。

由于魏因加滕算子 W 是自伴的，式（C.1）由此得 m

$$\begin{aligned} \langle W(X),Y\rangle = \langle -\nabla_X\nu, Y\rangle &= -\langle \nabla_\nu X, Y\rangle \\ &= -\nu\left(\langle X,Y\rangle + \langle X,\nabla_\nu Y\right\rangle \\ &= -f^{-1}\dot{h}(X,Y) - \langle X, W(Y)\rangle. \end{aligned}$$

将方程（C.2）代入高斯方程，即可得到方程（C.1），参见 [Pet06，第44]

$$\begin{aligned} \langle R(U,V)X,Y\rangle = \langle R^{M_t}(U,V)X,Y\rangle + \langle W(U),X\rangle\langle W(V),Y\rangle \\ - \langle W(U),Y\rangle\langle W(V),X\rangle. \end{aligned}$$

将方程（C.3）代入科达齐-迈纳尔迪方程，即可推导出方程（C.1 [Pet06，第44][2]

$$\langle R(X,Y)U,\nu\rangle = \left\langle (\nabla^{M_t}_X W)(Y), U\right\rangle - \left\langle (\nabla^{M_t}_Y W)(X), U\right\rangle$$

并应用乘积公式。

[1]海森矩阵 Hess^{M_t} 的迹，关于 h_t。[2]我们对魏因加滕算子采用相反的符号约定

为了证明方程（C.4），我们需要将黎卡提方程推广到我们的设定中。以下计算见 [Pet06，第44] 页，采用相反的符号约定，说明了

$$\begin{aligned}(\nabla_\nu W)(X) - W^2(X) &= \nabla_\nu(W(X)) - W(\nabla_\nu X) - W(W(X)) \\ &= -\nabla_\nu(\nabla_X \nu) + \nabla_{\nabla_\nu X}\nu - \nabla_{\nabla_X \nu}\nu \\ &= -\nabla_\nu(\nabla_X \nu) - \nabla_{[X,\nu]}\nu \\ &= R(X,\nu)\nu - \nabla_X \nabla_\nu \nu.\end{aligned}$$

结合方程（C.7），我们得到广义黎卡提方程

$$R(X,\nu)\nu = (\nabla_\nu W)(X) - W^2(X) - f^{-2}X(f)\cdot \mathrm{grad}(f_t) + f^{-1}\nabla_X \mathrm{grad}(f_t) \quad \text{(C.8)}$$

由广义黎卡提方程出发，我们分两步推导方程（C.4）。首先考虑涉及魏因加滕映射的各项。由方程（C.6）和方程（C.7）可得

$$\langle W(X), [\nu, Y]\rangle = 0 \qquad \text{and} \qquad \langle W([\nu, X]), Y\rangle = 0$$

因为魏因加滕算子在 TM_t 上的限制是一个端omorphism。这意味着

$$\begin{aligned}&\langle(\nabla_\nu W)(X), Y\rangle - \langle W^2(X), Y\rangle \\ &= \nu\langle W(X), Y\rangle - \langle W(\nabla_\nu X), Y\rangle - \langle W(X), \nabla_\nu Y\rangle - \langle W^2(X), Y\rangle \\ &= \nu\langle W(X), Y\rangle - \langle W(X), \nabla_\nu Y\rangle - \langle W(\nabla_X \nu + [\nu, X]), Y\rangle \\ &\quad - \langle W^2(X), Y\rangle \\ &= \nu\langle W(X), Y\rangle + \langle W^2(X), Y\rangle \\ &= f^{-1}\partial_t\big[\frac{-1}{2} f^{-1}\dot{h}(X,Y)\big] - \frac{1}{2} f^{-1}\dot{h}(W(X), Y) \\ &= \frac{1}{2} f^{-2}\Big[f^{-1}\dot{f}\dot{h}(X,Y) - \ddot{h}(X,Y) + \frac{1}{2}\dot{h}(\dot{h}^{\mathrm{op}}(X), Y)\Big]\end{aligned}$$

对于（C.8）中的另外两项，我们利用以下事实：水平集上诱导度量的列维-奇维塔联络与环境流形的列维-奇维塔联络的相切部分一致，由此可得 $\mathrm{Hess}_{M_t}(X, Y) = \langle \nabla_X \mathrm{grad}(f_t)\ Y\rangle$。因此，（C.8）中剩余的一项可写为

$$\langle f^{-2}X(f)\mathrm{grad}(f_t) - f^{-1}\nabla_X \mathrm{grad}(f_t), Y\rangle = f^{-2}X(f)Y(f) - f^{-1}\mathrm{Hess}_{M_t}(f)(X,Y).$$

综合这些结果，广义黎卡提方程给出方程（C.4）。

将前面的结果代入公式，即可得到标量曲率方程。

$$\mathrm{scal}(g) = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{Ric}(e_i, e_i) + \mathrm{Ric}(\nu,\nu) = \sum_{i,j=1}^{d} \langle R(e_j, e_i)e_i, e_j\rangle + 2\sum_{j=1}^{d}\langle R(e_j,\nu)\nu, e_j\rangle.$$

事实上，将方程（C.2）代入第一项可得

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{d}\langle R(e_j,e_i)e_i,e_j\rangle &= \sum_{i,j=1}^{d}\langle R^{M_t}(e_j,e_i)e_i,e_j\rangle + \frac{1}{4}f^{-2}\Big(\dot h(e_j,e_i)\dot h(e_i,e_j)\\ &\qquad - \dot h(e_j,e_j)\dot h(e_i,e_i)\Big)\\ &= \mathrm{scal}(h) + \frac{1}{4}f^{-2}(\mathrm{tr}((\dot h^{\mathrm{op}})^2) - \mathrm{tr}(\dot h)^2),\end{aligned}$$

将方程（C.4）代入第二个加项，得到

$$\begin{aligned}2\sum_{j=1}^{d}\langle R(e_j,\nu)\nu,e_j\rangle &= \sum_{j=1}^{d} f^{-2}\left(f^{-1}\dot f\dot h(e_j,e_j) - \ddot h(e_j,e_j) + \frac{1}{2}\dot h(\dot h^{\mathrm{op}}(e_j),e_j)\right)\\ &\quad + 2f^{-2}e_j(f)e_j(f) - 2f^{-1}\mathrm{Hess}_{M_t}(f_t)(e_j,e_j)\\ &= f^{-2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}((\dot h^{\mathrm{op}})^2) - \mathrm{tr}(\ddot h) + f^{-1}\dot f\mathrm{tr}(\dot h)\right)\\ &\quad + 2f^{-2}|\mathrm{d}f|^2_{M_t} - 2f^{-1}\Delta_{M_t}(f).\end{aligned}$$

将它们相加得到方程（C.5），从而证明了该命题。 □

比精确公式更重要的是标量曲率在缩放下的变化规律。

定义 C.1.2。设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集，且 X、Y 是集合。对于每个映射$f\colon\ X\times U\to Y$，我们用 ${}_Rf\colon\ X\times R\cdot U\to Y$表示映射

$${}_Rf(x,t) \coloneqq f(x,R^{-1}\cdot t).$$

推论 C.1.3。设 h和 f 与前一个命题中的相同，但进一步假设它们的2-阶喷射一致有界。那么

$$\mathrm{scal}(R^2{}_Rh + {}_Rf^2\mathrm{d}t^2) \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

此外，如果 f 仅依赖于 $t\in$ （a,b），那么

$$\mathrm{scal}({}_Rh + {}_Rf^2\mathrm{d}t^2) - {}_R\mathrm{scal}(h) \xrightarrow{R\to\infty} 0.$$

特别地，两个同伦的正数量曲率度量是协调的。

证明。我们首先回顾黎曼几何中各种对象的重标度行为。以下，设 g 是 M 上任意一个黎曼度量。

对于每个光滑函数 $f\colon\ M\to\mathbb{R}$，其梯度满足

$$\mathrm{grad}_{R^2g}(f) = R^{-2}\mathrm{grad}_g(f),$$

这意味着

$$|\mathrm{d}f|^2_{R^2g} = R^2g(\mathrm{grad}_{R^2g}(f),\mathrm{grad}_{R^2g}(f)) = R^{-2}g(\mathrm{grad}_g(f),\mathrm{grad}_g(f)) = R^{-2}|\mathrm{d}f|^2_g.$$

如果 $(e_i)_i$ 是 g 的局部正交标架，那么 $(\bar{e}_i = R^{-1}e_i)_i$ 就是 $R^2 g$ 的局部正交标架。对于每个双线性形式 b，这给出

$$\mathrm{tr}_{R^2 g}(b) = \sum_{i=1}^{n} b(\bar{e}_i, \bar{e}_i) = R^{-2} \sum_{i=1}^{n} b(e_i, e_i) = R^{-2}\mathrm{tr}_g(b).$$

由于关系 $b^{op,\ R^2 g} = R^{-2} b^{op,\ g}$，这个结果也适用于 $\mathrm{tr}(b^{\mathrm{op}})$。

度量 g 和 $R^2 g$ 具有相同的列维-奇维塔联络 ∇，因为 ∇ 是相对于这两个度量的度量联络，而且无挠是与度量无关的条件。这意味着

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}_{R^2 g}(f)(\bar{e}_i, \bar{e}_i) &= R^2 g(\nabla_{\bar{e}_i} \mathrm{grad}_{R^2 g}(f), \bar{e}_i) \\
&= g(\nabla_{e_i} \mathrm{grad}_{R^2 g}(f), e_i) \\
&= R^{-2} g(\nabla_{e_i} \mathrm{grad}_g(f), e_i) = R^{-2}\mathrm{Hess}_g(f)(e_i, e_i).
\end{aligned}$$

特别是，

$$\Delta_{R^2 g}(f) = R^{-2}\Delta_g(f).$$

最后，我们注意到 $\partial_t(_R h) = R^{-1} \cdot_R (\partial_t h)$，并回忆起 $\mathrm{scal}(R^2 h) = R^{-2}\mathrm{scal}(h)$.

根据这些信息，我们推导出

$$\mathrm{scal}(R^2{}_R h + {}_R f^2 \mathrm{d}t^2) = R^{-2} \cdot_R \mathrm{scal}(h + f^2 \mathrm{d}t^2).$$

关于二阶喷射的假设意味着 $\mathrm{scal}(h + f^2 \mathrm{d}t^2)$ 一致有界，因此第一个结论成立。

根据重标度行为和前述引理，第二个结论成立，因为 f 的微分“在 M 方向上消失”：

$$\begin{aligned}
&\mathrm{scal}(_R h + {}_R f^2 \mathrm{d}t^2) - {}_R\mathrm{scal}(h) \\
&\qquad = R^{-2} \cdot_R \left(f^{-2} \left(\frac{3}{4}\mathrm{tr}((\dot{h}^{\mathrm{op}})^2) - \frac{1}{4}\mathrm{tr}(\dot{h})^2 - \mathrm{tr}(\ddot{h}) + f^{-1}\dot{f}\mathrm{tr}(\dot{h}) \right) \right).
\end{aligned}$$

由于 f 和 h 的二阶喷流一致有界，右端趋于零。

最后一个陈述是将第二个陈述应用于特殊情形$f = 1$所得。

□

符号表

$g +_{j,R} h$ 第 j个坐标方向上的几何加法，第 56 页$P +_{j,R} Q$ 第 j个坐标方向上的算子加法，第 156 页（$\partial_k h$）^{op} $\partial_k h$ 的算子版本，即 $h_{t\sharp} \circ \partial_k h$，第 118 页$\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}_n(M)$ 分块狄拉克算子的立方集合，第 107 页$\boxtimes$ 外张量积，第 70 页χ^α 适用于块形式的单位分解，第 88 页$Cl_{p,q}$ $\mathbb{R}^p$的克利福德代数^q，第 63 页 c $Cl(TM, g)$-乘法或 $\mathfrak{S}_g$上的左模作用，第 66 页 Cycl(a, b) 自旋丛上 cycl(a, b) 的诱导映射，第 107 页 cycl(a, b) a 与 b之间元素的循环置换，第 107 页$\not{\mathcal{D}}_g$ 黎曼度量 g的狄拉克算子，第 66 页/D 欧几里得度量的狄拉克算子，第 91 页 e/o 自旋丛上的偶/奇分次，第 66 页$\mathcal{G}_{g,g_0}$ 自旋丛之间的规范映射，第 75 页$\mathcal{G}_g$ $\mathcal{G}_{g,g_0}$ 但基点 g_0 固定，第 75 页$\widetilde{\Psi\mathrm{Dir}}^{\times}_{\bullet}(M)$ 可逆分块狄拉克算子的立方集合，第 110 页 r Cl_d,0 在 $\mathfrak{S}_g$上的右作用，第 66 页 Fred$^{d,0}(H)$ Cl_d,0-Fredholm 算子，第 79 页 Gram$_g(b)$ 关于 g的 b 的格拉姆自同态，第 71 页 Pin$^-$ Pin 群，第 64 页 Pos(M) M上的对称正定双线性形式丛，p

$\nabla^{\mathfrak{S}_g}$ 旋量联络，第 66 页Φ_{g,g_0} 克利福德代数丛之间的预规范映射，第 74 页 Φ_g Φ_{g,g_0} 但省略基点 g_0，第 74 页$p\mathcal{G}_{g,g_0}$ 旋量丛之间的预规范映射，第 74 页 $p\mathcal{G}_g$ $p\mathcal{G}_{g,g_0}$但省略基点 g_0，第 74 页$\Psi\mathrm{DO}^k(E,F)$ 向量丛 E 和 F 之间的（主经典）k 阶伪微分算子空间，第 228 页$\Psi\mathrm{Dir}(M)$ M上的伪狄拉克算子集合，第 75 页$\Psi\mathrm{Dir}(M)_{\mathfrak{g}}$ $\mathfrak{S}_g$上的伪狄拉克算子，第 76 页$\Psi\mathrm{DO}_s^k(E,F)$ Atiyah-Singer 意义下的 k 阶伪微分算子空间，第 232 页 Sh_v 沿 v方向作用于截面的平移算子，第 147 页 $\mathrm{Sh}_{j,R}$ 平移算子：由微分同胚 $x \mapsto x + Re_j$ 推前，第 53 页 $\mathrm{SO}(M,g)$ 定向正交标架的主丛，第 64 页 $\mathrm{Spin}(d)$ 旋量群，第 64 页$\mathfrak{S}_g$ 度量 g 的旋量丛，第 66 页 $\mathrm{susp}(P)$ 块映射 P 的（算子）悬挂：$\mathbb{R}^n \to \Psi\mathrm{Dir}(M)$，第 91 页 $\mathrm{Symb}^k(E,F)$ 符号空间，第 228 页 $\mathrm{symb}_1(P)$ 一阶算子的主符号，第 75 页 $\mathrm{symb}_k(P)$ P的 k 阶主符号，第 228 页τ_{g,g_0} 单个向量空间上的预规范映射，第 72 页 vol_g 由 g 在 M 上诱导的体积形式，第 67 页$Cl(TM,g)$ TM的克利福德丛，有时仅记作 $\overline{Cl}(M,g)$，第 65 页$g_R^{\swarrow}$ 由 g 以角速度 $1/R$ 进行“角旋转”得到的度量，第 53 页 $H^s(E)$ 丛 E 的索伯列夫 s 空间，第 218 页$H^s_{loc}(E)$ 局部索伯列夫 s 截面空间，第 219 页 $H^s_K(E)$ 支集包含于 K 的索伯列夫截面，第 218 页 l 通过左乘作用于自身的 Cl_p 的表示，$_q$，第 63 页

$L^2(E)$ E的平方可积截面希尔伯特空间，第 217 页Op^r r阶算子空间，第 222 页$P(\varepsilon)$ 块算子在角点 ε 处的因子，第 85 页P^{ex} P的张量扩张，第 91 页$P_1 \cup P_2$ 两个充分局部算子的凸组合，第 104 页$P_R^{\swarrow}$ 由 P 以角速度 $1/R$ 进行“角旋转”得到的算子，第 150 页$\backsim\mathcal{R}_\bullet(M)$ M上的块度量立方集合，第 36 页$\backsim\mathcal{R}_\bullet^+(M)$ M上的正标量曲率块度量立方集合，第 36 页$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 标准欧几里得度量，第 34 页$\boldsymbol{\alpha}$ $\mathbb{Z}_3^n = \{0, \pm 1\}^n$的元素，第 39 页$\boldsymbol{\varepsilon}$ 映射 $\mathrm{dom}\ \boldsymbol{\varepsilon} \subseteq \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$，第 34 页 $\hat{}\boldsymbol{\alpha}$ $\boldsymbol{\alpha}$ 限制在其支集上的限制，第 39 页 $\mathrm{Cub}_n^{\rho}{}_{,i,\varepsilon}$ 朝向 (i,ε) 开放的无限半立方体，第 39 页$\restriction$ 到余维 > 0 子流形上的限制，第 34 页 $\mathrm{Riem}(M)$ 黎曼度量空间，第 34 页 $\mathrm{Riem}^+(M)$ 正标量曲率度量空间，第 34 页$\mathcal{R}_\bullet^+(M)$ 到 $\mathrm{Riem}^+(M)$ 的光滑块映射立方集合，第 34 页$\mathcal{R}_\bullet(M)$ 到 $\mathrm{Riem}(M)$ 的光滑块映射立方集合，第 34 页 $\mathrm{susp}_n(g)$ 块映射 $\mathbb{R}^n \to \mathrm{Riem}^{(+)}(M)$ 的悬挂，第 38 页$U_\rho(\varepsilon)$ 由 ρ 和 ε 确定的 $M \times \mathbb{R}^n$ 的开子集，第 34 页$V_\rho(\boldsymbol{\alpha})$ $\mathbb{R}^n$ 的开子集，第 39 页$\sqcap^n_{(i,\varepsilon)}$ 朝向 (i,ε) 开放的立方 n-角，第 14 页δ_i^ε 将 ε 纳入第 i 个条目的单射 $I^{n-1} \hookrightarrow I^n$，第 12 页$p_i$ 将第 i 个分量投影出去的线性映射 $I^n \to I^{n-1}$，第 12 页σ_i 立方集合的退化映射，第 12 页∂_i^ε 立方集合的面映射，第 12 页

$\mathrm{hofib}_\bullet(f_\bullet)$ 立方映射 $f_\bullet$ 的同伦纤维，见第 32 页 $\Omega^n_{k_0} K_\bullet$ $K_\bullet$ 中 n 重环路的集合，见第 19 页$\partial\square[n]_\bullet$ 立方球面，见第 14 页$\pi_j(K_\bullet)$ Kan 集 $K_\bullet$ 的（组合）同伦群，见第 19 页 $\square[n]_\bullet$ （立方） n 维立方体，见第 13 页I 单位区间 $[-1,1]$，见第 12 页$S_\bullet(X)$ 拓扑空间 X 的奇异集，见第 13 页$X \otimes Y$ 两个立方集合的约化积，见第 15 页

参考文献

[Ant00] Rosa Antolini, 《立方结构、同伦论》, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 178 (2000), 317–324。MR1849392[AS68] M. F. Atiyah 和 I. M. Singer, 《椭圆算子的指标 I》, Ann. of Math. (2) 87 (1968), 484–530。MR236950[AS69] , 《斜自伴 Fredholm 算子的指标理论》, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 37 (1969), 5–26。MR285033[AS71] , 《椭圆算子的指标 IV》, Ann. of Math. (2) 93 (1971), 119–138。MR279833[Bau09] Helga Baum, 《丛规范场论：纤维丛微分几何导论》, 柏林：施普林格, 2009（德文）。[BBB13] David D. Bleecker 和 Bernhelm Booß Bavnbek, 《指标理论——及其在数学和物理学中的应用》, International Press, 马萨诸塞州萨默维尔, 2013。MR3113540[BBW93] Bernhelm Booß Bavnbek 和 Krzysztof P. Wojciechowski, 《狄拉克算子的椭圆边值问题》, Mathematics: Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., 马萨诸塞州波士顿, 1993。MR1233386[BERW17] Boris Botvinnik、Johannes Ebert 和 Oscar Randal-Williams, 《无限循环空间与正标量曲率》, Invent. Math. 209 (2017), no. 3, 749–835。MR3681394[BGM05] Christian Bär、Paul Gauduchon 和 Andrei Moroianu, 《半黎曼几何与自旋几何中的广义圆柱》, Math. Z. 249 (2005), no. 3, 545–580。MR2121740[BJ83] Saad Baaj 和 Pierre Julg, 《Kasparov 双变量理论与希尔伯特 C^*-模上的无界算子》, 《巴黎科学院报告》 Sér. I Math. 296 (1983), no. 21, 875–878。MR715325[BK19] Richard H Bamler 和 Bruce Kleiner, 《里奇流与度量空间的可缩性》, arXiv 预印本 arXiv:1909.08710 (2019)。[Bla98] Bruce Blackadar, 《算子代数 K 理论》, 第二版, 数学科学研究所出版物, 第 5 卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 1998。MR1656031[BM12] Alexander Berglund 和 Ib Madsen, 《微分同胚群的同调稳定性》, arXiv 预印本 arXiv:1203.4161 (2012)。[Boa99] J. Michael Boardman, 《条件收敛谱序列》 239 (1999), 49–84。MR1718076[BS18] Theo Bühler 和 Dietmar A. Salamon, 《泛函分析》, 数学研究生丛书, 第 191 卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2018。MR3823238[Bug19] Lukas Werner Buggisch, 《扭曲狄拉克算子族的谱流定理》, 博士论文, 明斯特威斯特法伦威廉大学（德国）, 2019。

[Bun09]Ulrich Bunke，指标理论、eta形式与Deligne上同调，第198卷，2009年。MR2191484[Bun95] ,一个 K理论的相对指标定理与Callias型Dirac算子，《数学年刊》303（1995），第2期，241–279。MR1348799[Car88] Rodney Carr，正标量曲率流形的构造，《美国数学会汇刊》307（1988），第1期，63–74。MR936805[CELY17]Joachim Cuntz、Siegfried Echterhoff、Xin Li和Guoliang Yu，群 C^*代数与半群 C^*代数的 K理论，Oberwolfach研讨会，第47卷，Birkhäuser/Springer，沙姆，2017年。MR3618901[Cis02] Denis-Charles Cisinski，《将预层作为同伦类型的模型》，巴黎第七大学博士论文，2002年。[CMR07] Joachim Cuntz、Ralf Meyer和Jonathan M. Rosenberg，拓扑与双变K理论，Oberwolfach研讨会，第36卷，Birkhäuser出版社，巴塞尔，2007年。MR2340673[Cur71] Edward B. Curtis，单纯同伦论，《数学进展》6（1971），107–209（1971）。MR279808[DFN90] BA Dubrovin、AT Fomenko和SP Novikov，《现代几何——方法与应用》第三部分：同调论导论，数学研究生教材，第124卷，施普林格，1990年。[DI04]Daniel Dugger和Daniel C. Isaksen，拓扑超覆盖与 $\mathbb{A}^1$实现，《数学杂志》246（2004），第4期，667–689。MR2045835[DK01] James F. Davis和Paul Kirk，代数拓扑讲义，数学研究生研究丛书，第35卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2001年。MR1841974[Dol63] Albrecht Dold，纤维化理论中的单位分解，《数学年刊》（第2辑）78（1963），223–255。MR155330[Ebe16] Johannes Ebert，非紧流形族上Dirac算子的椭圆正则性，arXiv预印本arXiv:1608.01699（2016）。[Ebe17] ，指标差的两种定义，《美国数学会汇刊》369（2017），第10期，7469–7507。MR3683115[EH21] Jost-Hinrich Eschenburg和Bernhard Hanke，Bott–Thom同构、Hopf丛与Morse理论，《圣保罗数学科学杂志》15（2021），第1期，127–174。MR4258892[FH78] F. T. Farrell和W. C. Hsiang，关于圆盘、球面及非球面流形的微分同胚群的有理同伦群，《代数与几何拓扑》（纯数学专题讨论会论文集，斯坦福大学，斯坦福，加利福尼亚州，1976），第1部分，1978年，第325–337页。MR520509[Fre21]Georg Frenck，块丛中的κ类的球性与正曲率（2021）。[Glö19] Jonathan Glöckle，广义相对论中的初值空间，硕士论文（未发表）（2019）。[GL80] Mikhael Gromov和H. Blaine Lawson Jr.，单连通正标量曲率流形的分类，《数学年刊》（第2辑）111（1980），第3期，423–434。MR577131[GL83] ,完备黎曼流形上的正标量曲率与Dirac算子，《高等科学研究所数学出版物》58（1983），83–196（1984）。MR720933[Goh60] I. C. Gohberg，关于多维奇异积分方程理论，《苏联数学文献》1（1960），960–963。MR0124704

[Gra73] Alfred Gray，黎曼流形中小测地球的体积，《密歇根数学杂志》20（1973），329–344（1974）。MR339002[Gre78] R. E. Greene，非紧流形上的有界曲率完备度量，《巴塞尔数学档案》31（1978/79），第1期，89–95。MR510080[Gru09] Gerd Grubb，广义函数与算子，数学研究生教材，第252卷，施普林格，纽约，2009年。MR2453959[Hat02]Allen Hatcher，代数拓扑，剑桥大学出版社，剑桥，2002年。MR1867354[Hat78] A. E. Hatcher，同痕空间、高阶简单同伦论及其应用，《代数与几何拓扑》（纯数学专题讨论会论文集，斯坦福大学，斯坦福，加利福尼亚州，1976），第1部分，1978年，第3–21页。MR520490[Hij86] Oussama Hijazi，Dirac算子最小特征值的共形下界与Killing旋量，《数学物理通讯》104（1986），第1期，151–162。MR834486[Hir94]Morris W. Hirsch，微分拓扑，数学研究生教材，第33卷，施普林格出版社，纽约，1994年。1976年原版的修订重印本。MR1336822[Hit74] Nigel Hitchin，调和旋量，《数学进展》14（1974），1–55。MR358873[HR00] Nigel Higson和John Roe，解析 K同调，牛津数学专著，牛津大学出版社，牛津，2000年。牛津科学出版物。MR1817560[HSS14] Bernhard Hanke、Thomas Schick和Wolfgang Steimle，正标量曲率度量空间，《高等科学研究所数学出版物》120（2014），335–367。MR3270591[Jar02] J. F. Jardine，立方同伦论：入门，预印本（2002），39。[Jar06] , 范畴同伦论，《同调、同伦及其应用》8（2006），第1期，71–144。MR2205215[Kan55] Daniel M Kan，抽象同伦 I，《美国国家科学院院刊》41（1955），第12期，1092。[Kas80] G. G. Kasparov，算子 K函子与 C^*代数的延拓，《苏联科学院通报数学辑》44（1980），第3期，571–636，719。MR582160[Kat66] Tosio Kato，线性算子微扰理论，数学科学基础丛书，第132卷，施普林格出版社纽约公司，纽约，1966年。MR0203473[KM97] Andreas Kriegl和Peter W. Michor，全局分析的便捷框架，数学调查与专著，第53卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997年。MR1471480[Kön04] Konrad Königsberger，分析学2，第5版，施普林格出版社，2004年。[Kuc97] Dan Kucerovsky，无界模的 KK积， K理论11（1997），第1期，17–34。MR1435704[Lee13] John M. Lee，光滑流形导论，第2版，数学研究生教材，第218卷，施普林格，纽约，2013年。MR2954043[Lic63] André Lichnerowicz，调和旋量，《巴黎科学院报告》257（1963），7–9。MR156292[LM20] Wolfgang Lück和Tibor Macko，外科理论：基础，进行中的图书项目，2020年。

[LM89] H. Blaine Lawson Jr. 和 Marie-Louise Michelsohn，《自旋几何》，普林斯顿数学丛书，第 38 卷，普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1989 年。MR1031992[May92] J. Peter May，《代数拓扑中的单纯对象》，芝加哥数学讲座丛书，芝加哥大学出版社，伊利诺伊州芝加哥，1992 年。1967 年原版重印。MR1206474[Mil57] John Milnor，《半单纯复形的几何实现》，《数学年刊》（第 2 辑）65（1957），357–362。MR84138[Mur90] Gerard J. Murphy，《代数与算子理论》，学术出版社，马萨诸塞州波士顿，1990 年。MR1074574[Pal65] Richard S. Palais，《Atiyah-Singer 指数定理研讨会》（1965），x。由 M. F. Atiyah 、 A. Borel 、 E. E. Floyd 、 R. T. Seeley 、 W. Shih 和 R. Solovay 撰写。MR0198494[Pal66] ，《无限维流形的同伦论》，《拓扑学》5（1966），1–16。MR189028[Pet06]Peter Petersen，《黎曼几何》，第二版，数学研究生教材，第 171 卷，施普林格出版社，纽约，2006 年。MR2243772[Ros06] Jonathan Rosenberg，《正标量曲率流形：进展报告》，《微分几何综述》11（2006），第 1 期，259–294（英文）。[RS01] Jonathan Rosenberg 和 Stephan Stolz，《正标量曲率度量及其与手术的联系》149（2001），353–386。MR1818778[Rub01] Daniel Ruberman，《正标量曲率、微分同胚与 Seiberg-Witten 不变量》，《几何与拓扑》5（2001），895–924。MR1874146[Rut97] John W. Rutter，《同伦自等价空间》，数学讲义丛书，第 1662 卷，施普林格出版社，柏林，1997 年。综述。MR1474967[Sch98] Thomas Schick，《一个反例：关于（不稳定）Gromov-Lawson-Rosenberg 猜想》，《拓扑学》37（1998），第 6 期，1165–1168。MR1632971[See65] R. T. Seeley，《向量丛上的积分-微分算子》，《美国数学会汇刊》117（1965），167–204。MR173174[Sto92] Stephan Stolz，《正标量曲率的单连通流形》，《数学年刊》（第 2 辑）136（1992），第 3 期，511–540。MR1189863[Sto98] ，《正标量曲率度量的共边类》，预印本（1998）。[SZ94] Ralph Stöcker 和 Heiner Zieschang，《代数拓扑：入门》，第 2 版，施普林格出版社，1994 年。[tD08] Tammo tom Dieck，《代数拓扑》，EMS 数学教科书丛书，欧洲数学会，苏黎世，2008 年。MR2456045[Wei94]Charles A. Weibel，《同调代数导论》，剑桥高等数学研究丛书，第 38 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1994 年。MR1269324[Wel08] Raymond O. Wells Jr.，《复流形上的微分分析》，第三版，数学研究生教材，第 65 卷，施普林格出版社，纽约，2008 年。附有 Oscar Garcia-Prada 撰写的新附录。MR2359489[Wer07] Dirk Werner，《泛函分析》，第 6 次修订版，施普林格教材，柏林：施普林格出版社，2007 年（德文）。