arXiv:2303.07845v1 [math.AC] 14 Mar 2023

具有对称性的新行列式张量公式

朱正勋、TAEHYEONG KIM 和 YEONGRAK KIM

Abstract. 本文给出了矩阵行列式张量的一个新公式det_n，适用于 $n \times n$ 矩阵。在 [9] , Kim、Ju 和 Kim 找到了一个新的4×4 行列式张量公式 det_4，该公式适用于基域的特征不为 2 的情形。考虑到该公式中的一些对称性，我们找到了一个新公式，使得

$$\mathrm{Crank}(det_n) \leq \mathrm{rank}(det_n) \leq \frac{n!}{2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}}$$

当基域的特征不为 2 时。

1. Introduction

设 $\mathbb{K}$ 是一个域， V是一个维数为 n 的 $\mathbb{K}$-向量空间， $\{e_1, ..., e_n\}$ 是对偶向量空间 V^* 的一组基。行列式张量 $n \times n$ $det_n \in (V^*)^{\otimes n}$定义为

$$det_n = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)\ e_{\sigma(1)} \otimes e_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma(n)}, \tag{1.1}$$

其中， S_n 是由 n 个字母组成的对称群， $sgn(\sigma)$表示置换 $\sigma \in S_n$的符号，如 [3, 6, 10] 所示。或者， $n \times n$矩阵 A 的行列式可定义为关于 A各项的 d 次齐次多项式

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}.$$

将 $n \times n$矩阵空间视为由 n个行（列）向量组成的 V空间，行列式便可视为关于矩阵各列的 n线性函数。因此，我们可以像式 det_n （1.1）中那样，将行列式表示为一个张量。

上述论证将行列式函数视为一个 n阶张量，接下来我们考察它的张量秩。粗略地说，张量秩是将给定张量表示为若干可分解张量之和所需的最少可分解张量个数。张量秩衡量给定张量的复杂度，或者说，多重线性映射的复杂度。行列式张量的张量秩是多少？矩阵乘法张量或永久张量的张量秩又是多少？许多研究成果都探讨了这些问题，例如 [2, 4]。

将行列式视为张量，主要有两种观点：一种是将其视为定义在 $(\mathbb{K}^n)^{\otimes n}$ 上的张量，等价地说，是一个 n线性交错函数；另一种是将其视为一个

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：14N07, 15A15。*Key words and phrases.* 张量秩，行列式。

次数为 n 、含有 n^2 个变量的齐次多项式，它是由独立变量 x_1,1, $\cdots, x_n$,n 构成的 $n \times n$ 阶矩阵 $(x_{i,j})$ 的行列式。对于第一种约定，标准的度量是张量秩（记作 $rank$）；对于第二种约定，则使用 Waring 秩和 Chow 秩（分别记作 $Wrank$ 和$Crank$）。本文不会详细讨论行列式的 Waring 秩；关于行列式 Waring 秩研究的最新进展，可参见 [8] 。无论如何，这些秩概念都蕴含了关于给定张量的代数几何意义的大量信息，并与几何复杂性理论的发展密切相关，例如边界秩和经典代数簇的割线空间等概念，参见[1,11]。对于二阶张量 $\mathcal{T} \in V_1 \otimes V_2$， $\mathcal{T}$ 的张量秩与相应矩阵的秩相同，而后者已得到充分理解。与矩阵的秩不同， $d \geq 3$ 阶张量的张量秩仍然令人费解，而且在许多情况下，很难为给定张量的秩找到良好的上界和下界。对于 $n \geq 4$， $\det_n$ 的确切张量秩和 Waring 秩仍鲜为人知。

下面简要回顾关于行列式$_n$的秩的既有研究。在 [3], ，Derksen 通过给出一个显式公式证明，当 char($\mathbb{K}$) $\neq 2$ 时，rank(det$_3$) ≤ 5

$$\begin{aligned}\det_3 = \frac{1}{2}((e_3+e_2)\otimes(e_1-e_2)\otimes(e_1+e_2)\\ +(e_1+e_2)\otimes(e_2-e_3)\otimes(e_2+e_3)\\ +2e_2\otimes(e_3-e_1)\otimes(e_3+e_1)\\ +(e_3-e_2)\otimes(e_2+e_1)\otimes(e_2-e_1)\\ +(e_1-e_2)\otimes(e_3+e_2)\otimes(e_3-e_2))\end{aligned} \tag{1.2}$$

该公式由 5 个可分解张量组成。利用这个公式和广义拉普拉斯展开，Derksen 还证明了当 char($\mathbb{K}$) $\neq 2$ 时，rank(det$_n$) $\leq (5/6)^{\lfloor n/3 \rfloor} \cdot n!$ 此外，Derksen 利用扁平化证明了 rank(det$_n$) $\geq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 。在 [4]，当 char($\mathbb{K}$) $\neq 2$ 时，Derksen 和 Makam 证明了 rank(det$_3$) $= 5$ ： 他们证明 det$_3$，的边界秩（记作 brank）为 5，而边界秩小于或等于张量秩。在 [10], ， Krishna 和 Makam 给出了一个不使用系数 1 2 的新行列式$_3$公式，因此对于任意域 $\mathbb{K}$，rank(det$_n$) $\leq (5/6)^{\lfloor n/3 \rfloor} \cdot n!$ 成立。他们利用 Koszul 扁平化证明，对于任意域 $\mathbb{K}$，rank(det$_3$) $= 5$ ，并且在任意 $\mathbb{K}$上， $17 \leq$ brank(det$_5$) $\leq$ rank(det$_5$)，而 $62 \leq$ brank(det$_7$) $\leq$rank(det$_7$)。对于 det_4的情形， [5] 中的一个结果以及众所周知的不等式 Wrank(det_n) $\leq 2^{n-1}\cdot$rank(det_n) 表明，rank(det_4) $7 \leq$ 在代数闭域上成立。最近，Houston、Goucher 和 Johnston 运用组合学[6]，报告了任意 $\mathbb{K}$ 下行列式$_n$秩上界的一项重大改进，将其界定为第 n个贝尔数。具体而言，他们给出了一个由 15 项组成的行列式$_4$ 显式公式，使得 rank(det$_4$) ≤ 15。他们的公式也适用于正特征域；特别是，当 char($\mathbb{K}$) $= 2$ 时，他们的公式仅由 12 项组成。他们还给出了计算机辅助证明，证明当 char($\mathbb{K}$) $= 2$ 时，rank(det$_4$) $= 12$ 。

论文作者受到 Derksen 公式（1.2）的启发，并通过最小绝对收缩 4×4 得到了行列式张量的新公式

和选择算子（LASSO） [9]:

$$
\begin{aligned}
\det_4 = \frac{1}{2}((e_1-e_2)\otimes(e_3-e_4)\otimes(e_3+e_4)\otimes(e_1+e_2) \\
-(e_1-e_3)\otimes(e_2-e_4)\otimes(e_2+e_4)\otimes(e_1+e_3) \\
+(e_1-e_4)\otimes(e_2-e_3)\otimes(e_2+e_3)\otimes(e_1+e_4) \\
+(e_2-e_3)\otimes(e_1-e_4)\otimes(e_1+e_4)\otimes(e_2+e_3) \\
-(e_2-e_4)\otimes(e_1-e_3)\otimes(e_1+e_3)\otimes(e_2+e_4) \\
+(e_3-e_4)\otimes(e_1-e_2)\otimes(e_1+e_2)\otimes(e_3+e_4) \\
+(e_1+e_2)\otimes(e_3+e_4)\otimes(e_3-e_4)\otimes(e_1-e_2) \\
-(e_1+e_3)\otimes(e_2+e_4)\otimes(e_2-e_4)\otimes(e_1-e_3) \\
+(e_1+e_4)\otimes(e_2+e_3)\otimes(e_2-e_3)\otimes(e_1-e_4) \\
+(e_2+e_3)\otimes(e_1+e_4)\otimes(e_1-e_4)\otimes(e_2-e_3) \\
-(e_2+e_4)\otimes(e_1+e_3)\otimes(e_1-e_3)\otimes(e_2-e_4) \\
+(e_3+e_4)\otimes(e_1+e_2)\otimes(e_1-e_2)\otimes(e_3-e_4)).
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

当 char($\mathbb{K}$) $\neq$ 2时，该式成立。这里，12 个求和项具有多种对称性，因此将此公式以类似方式推广到更大的矩阵上颇有希望。事实上，我们将方阵的公式 (1.3) 推广到了偶数阶 $n = 2k$ 如下。

定理 1.1. 设 $n = 2k$，其中 k 为某个正整数，并记 $[n] = \{1, 2, ..., n\}$。令 I_{2k} 为指标集

$I_{2k} = \{(i_1, j_1, \cdots, i_k, j_k) \in \mathbb{Z}^{2k} \mid i_1, j_1, \cdots, i_k, j_k \in [2k]$ 两两不同，并且对每个 $1 \leq p \leq k\}$，都有 $i_p < j_p$，

并令

$$
S_{a_1,a_2,\cdots,a_{2k}} = sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2k \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{2k} \end{pmatrix}.
$$

Then

(1.4)

$$
\begin{aligned}
det_n = \frac{1}{2}\sum_{I_{2k}} S_{i_1,j_1,\cdots,i_k,j_k}(e_{i_1}-e_{j_1})\otimes(e_{i_2}-e_{j_2})\otimes\cdots\otimes(e_{i_k}-e_{j_k})\otimes(e_{i_k}+e_{j_k})\otimes\cdots\otimes(e_{i_2}+e_{j_2})\otimes(e_{i_1}+e_{j_1}) \\
+\frac{1}{2}\sum_{I_{2k}}(-1)^k S_{i_1,j_1,\cdots,i_k,j_k}(e_{i_1}+e_{j_1})\otimes(e_{i_2}+e_{j_2})\otimes\cdots\otimes(e_{i_k}+e_{j_k})\otimes(e_{i_k}-e_{j_k})\otimes\cdots\otimes(e_{i_2}-e_{j_2})\otimes(e_{i_1}-e_{j_1}).
\end{aligned}
$$

注意，置换 $S_{a_1,\ \cdots,\ a_{2k}}$ 的符号与相应置换矩阵的行列式一致。因此，我们得到

$$
\mathrm{Crank}(det_n) \leq \mathrm{rank}(det_n) \leq \frac{n!}{2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}}
$$

这大幅改进了 Derksen 的上界。

本文结构如下。在第 2 节中，我们回顾基本概念，尤其是张量秩的三个概念，即张量秩、War- ing 秩和 Chow 秩。在第 3 节中，我们分析公式（1.3）中各求和项的对称性和符号约定，并推导出一个新公式——定理1.1。利用这个新公式，我们得出 det$_n$ 的张量秩上界，并将其与近期研究结果进行比较。

ACKNOWLEDGEMENT

J.-H. J. 和 Y. K. 获得韩国国家研究基金会 [NRF-2022R1C1C1010052]基础科学计划的资助。J.-H. J. 参加了在华沙（波兰）举办的 AGATES 入门课程，并感谢组织者在课程期间提供了良好的研究环境。作者感谢 Hyun-Min Kim 提供的宝贵建议、鼓励和有益讨论。

2. PRELIMINARIES

我们简要回顾张量秩的各种概念。我们遵循[3, 6, 10], 中行列式张量的定义，并主要遵循 [1, 11]中的定义和约定。

记号 2.1. 本文中，我们使用以下记号：

- $\mathbb{K}$ ： 特征为 $\neq 2$ 的域；
- V, V_i, W ： 有限维 $\mathbb{K}$ 向量空间；
- V^* ： V 的对偶向量空间；
- $[d] = \{1, 2, \cdots, d\}$ 其中 d 是一个正整数。

定义 2.1（多重线性映射与张量）。若映射 φ ： $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_d \to W$ 对每个向量空间 V_i （ $i \in [d]$）都分别是线性的，则称其为多重线性映射。这类多重线性映射构成的空间与 $V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_d^* \otimes W$ 相同。元素 $\mathcal{T} \in V_1^* \otimes V_2^* \otimes \cdots \otimes V_d^* \otimes W$ 称为张量，而该张量积中出现的向量空间个数称为 $\mathcal{T}$ 的阶。

定义 2.2（行列式张量）。设 V 是一个维数为 n 的 $\mathbb{K}$ 向量空间。笛卡尔 n 积 $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ copies}}$ 与 $n \times n$ 方阵空间相同

矩阵 $Mat_n(\mathbb{K})$，其元素属于 $\mathbb{K}$。我们将 det 视为一个 n-线性函数，其定义域为$V \times \cdots \times V$、$\underbrace{\qquad}_{n \text{ copies}}$ 到 $\mathbb{K}$。与 $\mathbb{K}$ 作张量积不会改变该张量积，因此我们可以将其视为 $\underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{n \text{ copies}}$ 中的 n 阶张量（而非 $n+1$ 阶张量）。事实上，

$$\det_n = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) e_{\sigma(1)} \otimes e_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma(n)}$$

其中 $\{e_1, ..., e_n\}$ 是 V^* 的一组基。例如，(1.1) 给出 $det_2 = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$。我们有

$$det_2 \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \right) = e_1 \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{bmatrix} \right) e_2 \left(\begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{bmatrix} \right) - e_2 \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{bmatrix} \right) e_1 \left(\begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{bmatrix} \right) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

这与通常的约定一致。

由于 $\dim V$ 是有限的，对偶向量空间 V^* 与 V（非典范地）同构，因此，当我们只关注张量秩等类似概念时，实际上无需区分向量空间及其对偶空间。

定义 2.3（张量秩）。设 V_1、V_2、...、V_d 是 $\mathbb{K}$-向量空间，且令 $\mathcal{T} \in V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_d$ 为一个 d 阶张量。则

$$r = \min \left\{ k \;\middle|\; \mathcal{T} = \sum_{i=1}^{k} v_{i,1} \otimes v_{i,2} \otimes \cdots \otimes v_{i,d} \text{ where } v_{i,j} \in V_j \text{ for each } j \in [d] \right\}$$

称为 $\mathcal{T}$ 的（张量）秩，记作 rank($\mathcal{T}$)。秩为 ≤ 1 的张量称为可分解的。

显然，秩在基变换下保持不变，因此我们不必考虑基的选择。正如上文所述，$\det_n$ 也可以看作是关于 n^2 个变量的 n 次齐次多项式。衡量齐次多项式复杂度的常用秩概念有两种，即对称张量的 Waring 秩和 Chow 秩。

定义 2.4（对称张量）。设 V为一个向量空间，且 $\mathcal{T} \in V^{\otimes d}$。若对每个置换 $\sigma \in S_d$都有$\mathcal{T} \circ \sigma = \mathcal{T}$，则称 $\mathcal{T}$为对称张量。

对称张量通常表示为齐次多项式（见 [1,11]）。例如，对称张量 $x\otimes y\otimes z+x\otimes z\otimes y+y\otimes x\otimes z+y\otimes z\otimes x+z\otimes x\otimes y+z\otimes y\otimes x$ 在 char($\mathbb{K}$) $= 0$或 > 3 时，可表示为齐次多项式 $6xyz$。这一观察启发我们以下述方式将行列式张量形式化地描述为齐次多项式，尽管行列式张量并非对称张量：除非 char($\mathbb{K}$) $= 2$，否则 $\det_2 = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1 \neq e_2 \otimes e_1 - e_1 \otimes e_2$。相反，我们还考虑每个分量的指标，从而将 $\det_n$ 识别为关于 n^2个独立变量的 n 次齐次多项式。例如，考虑不定元矩阵（通用矩阵），$\det_3$ 可视为齐次多项式$x_{1,1}x_{2,2}x_{3,3} - x_{1,1}x_{2,3}x_{3,2} - x_{1,2}x_{2,1}x_{3,3} + x_{1,2}x_{2,3}x_{3,1} + x_{1,3}x_{2,1}x_{3,2} - x_{1,3}x_{2,2}x_{3,1}$

$$\begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix}.$$

对于这些对称张量（等价地，对于齐次多项式），Waring 秩和 Chow 秩都常被用来衡量其复-杂度。令 $Sym(V) \simeq \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ 表示以 $\mathbb{K}$ 为系数、变量为 x_1, ..., x_n 的多项式环，并令 $Sym^d(V) \simeq \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_d$ 表示次数为 d 的齐次多项式子空间。

定义 2.5（Waring 秩）。对于 $0 \neq f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_d$，数

$$r = \min\left\{ k \;\middle|\; f = \sum_{i=1}^{k} c_i (l_i)^d, \quad where \;\; l_i \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_1, \; c_i \in \mathbb{K} \; for \; each \; i \in [k] \right\}$$

称为 f 的 Waring 秩（或对称秩），记作 Wrank(f)。

定义 2.6（Chow 秩）。对于 $0 \neq f \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_d$，数

$$r = \min\left\{ k \;\middle|\; f = \sum_{i=1}^{k} l_{i,1} l_{i,2} \cdots l_{i,d} \quad where \;\; l_{i,j} \in \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]_1 \; for \; each \; i \in [k] \; and \; j \in [d] \right\}$$

称为 f 的 Chow 秩（或乘积秩），记作 Crank(f)。

注意，上述过程可以推广到任意张量 $\mathcal{T} \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$ 它不必是对称的。事实上，我们可以将 $\mathcal{T}$关联为一个次数为 d、定义在 $\dim(V_1) \cdots \dim(V_d)$ 个变量上的齐次多项式（仍用 $\mathcal{T}$ 表示这个齐次多项式），并考察其 Waring 秩或 Chow 秩。关于 $\mathcal{T}$（作为一个 d 阶张量）的张量秩与 $\mathcal{T}$（作为一个次数为

d）之间的关系，在 char($\mathbb{K}$) $= 0$ 或 char($\mathbb{K}$) $> d$ 的情形下已有充分研究，详见 [6, 7] 以了解更多细节。

$$\operatorname{Crank}(\mathcal{T}) \leq \operatorname{rank}(\mathcal{T}) \tag{2.1}$$

and

$$\operatorname{Wrank}(\mathcal{T}) \leq 2^{d-1} \cdot \operatorname{rank}(\mathcal{T}) \tag{2.2}$$

我们对这些不等式作一些简要说明。若给定的张量 $\mathcal{T} \in V_1 \otimes \cdots \otimes V_d$可分解为

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^{r} v_{i,1} \otimes v_{i,2} \otimes \cdots \otimes v_{i,d} \tag{2.3}$$

可分解张量之和，则相应的齐次多项式 $\mathcal{T}$也具有如下形式的分解

$$\mathcal{T} = \sum_{i=1}^{r} l_{i,1} l_{i,2} \cdots l_{i,d}, \tag{2.4}$$

其中每个线性形式 $l_{i,\ j}$ 均由向量 $v_{i,\ j}$ 导出，是 V_j的一组基的线性组合。更准确地说，若向量$v_{i,\ j}$ 可写为 $v_{i,\ j} = \sum_{k=1}^{m_j} a_{i,\ k} e_{j,\ k}$，其中 $m_j =$维 V_j 且 $\{e_{j,1}, \cdots, e_{j,m_j}\}$是 V_j的一组基，那么我们用线性多项式 $l_{i,\ j} = \sum_{k=1}^{m_j} a_{i,\ k} x_{j,\ k}$ 代替 $v_{i,\ j}$。特别地，当 $0 <$char($\mathbb{K}$) $\leq d$时，第一个不等式 (2.1) 仍然成立。不等式 (2.2) 可由与上述类似的论证以及关于单项式的 Waring 秩的一个结果推出 [12]。

3. Generalizing the formula using symmetries

我们的主要定理深受公式 (1.3) 上多种对称性的启发。在继续之前，值得先分析这些对称性和公式。首先，我们暂且不考虑系数 $\pm\frac{1}{2}$，而是专注于构成各个求和项的指标。公式中的每一项都由 4 个向量的张量积构成，因此我们记作

$$t_1 \otimes t_2 \otimes t_3 \otimes t_4.$$

设 a, b, c, d为满足以下条件的指标

$$a, b, c, d \in [4] \text{ are pairwise distinct, } a < b \text{ and } c < d.$$

我们可以很容易地观察到分量指标具有以下规律。

(i) 如果第一个分量的形式为 $t_1 = e_a - e_b$，那么第二个分量的形式为 $t_2 = e_c - e_d$。另一方面，如果第一个分量的形式为 $t_1 = e_a + e_b$，那么第二个分量的形式为 $t_2 = e_c + e_d$。(ii) 如果前两个分量分别为 $t_1 = e_a - e_b$ 和 $t_2 = e_c - e_d$（分别为 $t_1 = e_a + e_b$和 $t_2 = e_c + e_d$），那么后两个分量分别为 $t_3 = e_c + e_d$ 和 $t_4 = e_a + e_b$（分别为 $t_3 = e_c - e_d$ 和 $t_4 = e_a - e_b$）。因此，每一项的形式为

$$(e_a - e_b) \otimes (e_c - e_d) \otimes (e_c + e_d) \otimes (e_a + e_b) \tag{3.1}$$

or

$$(e_a + e_b) \otimes (e_c + e_d) \otimes (e_c - e_d) \otimes (e_a - e_b). \tag{3.2}$$

(iii) 如果该项

$$(e_a - e_b) \otimes (e_c - e_d) \otimes (e_c + e_d) \otimes (e_a + e_b)$$

出现在公式中，那么该项

$$(e_a + e_b) \otimes (e_c + e_d) \otimes (e_c - e_d) \otimes (e_a - e_b)$$

也会出现在公式中，反之亦然。

容易验证，公式（1.3）由所有满足上述条件的可能项（3.1）和（3.2）组成。

让我们分析符号是如何确定的。我们来验证，形如（3.1）的每一项，其符号由置换的符号决定

$$sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

例如，第二项

$$-\frac{1}{2}(e_1 - e_3) \otimes (e_2 - e_4) \otimes (e_2 + e_4) \otimes (e_1 + e_3)$$

在公式（1.3）中带负号（=系数 $-\frac{1}{2}$），而置换 $sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = -1$ 的符号为负。这个规则十分自然，因为

$$sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix} = sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & d & b \end{pmatrix},$$

右侧恰好是原公式（ $e_a \otimes e_c \otimes e_d \otimes e_b$ 中该项的系数（1.1）。

接下来，让我们考虑形如（3.2）的项的符号。回想一下，我们取了

$$\frac{1}{2}\, sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & d & b \end{pmatrix}\, e_a \otimes e_c \otimes e_d \otimes e_b \tag{3.3}$$

自形如（3.1）的一项，因此，为了使它与 $\det_4$, 相容，我们需要一个与（3.3）相同的额外项，而根据规则（iii），它只能来自形如（3.2）的对应项。因此，在（1.4）的各项中，唯一可能含有（3.3）的候选项是

$$\pm\, \frac{1}{2}(e_a + e_b) \otimes (e_c + e_d) \otimes (e_c - e_d) \otimes (e_a - e_b),$$

且符号必须为

$$(-1)^2 \cdot sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & c & d & b \end{pmatrix} = (-1)^2 \cdot sgn \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

我们需要乘以一个幂（-1）^{2},，因为 e_d 和 e_b 在后半部分分量中出现时带负号。为了证明我们不需要的项确实消失，也必须采用这一符号约定。例如，我们展开（1.3）

$$-\frac{1}{2}(e_1 - e_3) \otimes (e_2 - e_4) \otimes (e_2 + e_4) \otimes (e_1 + e_3), \tag{3.4}$$

我们看到其中有一项不合适

$$-\frac{1}{2} e_1 \otimes e_2 \otimes e_4 \otimes e_1 \tag{3.5}$$

它对行列式张量 $\det_4$ 没有贡献。这一项与对应项相互抵消（再次由规则（iii）得出）

$$-\frac{1}{2}(e_1+e_3)\otimes(e_2+e_4)\otimes(e_2-e_4)\otimes(e_1-e_3),$$

其展开包含这一项

$$\frac{1}{2}e_1\otimes e_2\otimes e_4\otimes e_1 \tag{3.6}$$

从而 (3.5)+(3.6)= 0。

还有其他无法通过此过程消去的坏项。例如，可分解张量 (3.4) 也会产生一个坏项

$$-\frac{1}{2}e_1\otimes e_2\otimes e_2\otimes e_1 \tag{3.7}$$

这是我们不希望出现的。要消去它，我们需要寻找一个求和项，其中 e_3 和 e_4 的位置互换，特别是 (1.3) 的第三项

$$\frac{1}{2}(e_1-e_4)\otimes(e_2-e_3)\otimes(e_2+e_3)\otimes(e_1+e_4)$$

包含该项

$$\frac{1}{2}e_1\otimes e_2\otimes e_2\otimes e_1 \tag{3.8}$$

因此 (3.7)+(3.8)= 0。

上述符号约定在我们将此公式推广为 $\det_4$的一般公式 $\det_n$时十分重要。例如，考虑 $n=6$ 的情形，并期望得到一个满足上述规则的公式。我们取指标集 I_6 为

$I_6=\{(i_1,\ j_1,\ i_2,\ j_2,\ i_3,\ j_3)\in\mathbb{Z}^6 \mid i_1,\ j_1,\ i_2,\ j_2,\ i_3,\ j_3\in[6]$ 两两不同，并且对每个 $1\le p\le 3\}$.
都有 $i_p<j_p$。令

$$S_{i_1,j_1,i_2,j_2,i_3,j_3}=sgn\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\ i_1&j_1&i_2&j_2&i_3&j_3\end{pmatrix}.$$

我们的观察得出了一个公式

(3.9)

$$\frac{1}{2}\sum_{I_6}S_{i_1,j_1,i_2,j_2,i_3,j_3}(e_{i_1}-e_{j_1})\otimes(e_{i_2}-e_{j_2})\otimes(e_{i_3}-e_{j_3})\otimes(e_{i_3}+e_{j_3})\otimes(e_{i_2}+e_{j_2})\otimes(e_{i_1}+e_{j_1})$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{I_6}(-1)^3S_{i_1,j_1,i_2,j_2,i_3,j_3}(e_{i_1}+e_{j_1})\otimes(e_{i_2}+e_{j_2})\otimes(e_{i_3}+e_{j_3})\otimes(e_{i_3}-e_{j_3})\otimes(e_{i_2}-e_{j_2})\otimes(e_{i_1}-e_{j_1})$$

由 180 个可分解张量组成，与 det_6相同。注意到 (3.9) 的第二行中，我们需要将 $(-1)^3=(-1)^{6/2}$ 乘到每一项上。我们简要看看为什么符号 $(-1)^3$ 是必要的。固定 $(i_1,\ j_1,\ i_2,\ j_2,\ i_3,\ j_3)\in I_6$，我们取由这个（多重）指标确定的下列项

$$\frac{1}{2}S_{i_1,j_1,i_2,j_2,i_3,j_3}(e_{i_1}-e_{j_1})\otimes(e_{i_2}-e_{j_2})\otimes(e_{i_3}-e_{j_3})\otimes(e_{i_3}+e_{j_3})\otimes(e_{i_2}+e_{j_2})\otimes(e_{i_1}+e_{j_1})$$

由（3.9）得到。我们展开这一项，并聚焦于求和项

$$\frac{1}{2}S_{i_1,j_1,i_2,j_2,i_3,j_3}e_{i_1}\otimes(-e_{j_2})\otimes e_{i_3}\otimes e_{j_3}\otimes e_{i_2}\otimes e_{j_1} \tag{3.10}$$

它将对 $\det_6$ 作出贡献。包含这一求和项的唯一候选项是

$$\frac{1}{2}(-1)^3 S_{i_1,j_1,i_2,j_2,i_3,j_3}(e_{i_1}+e_{j_1})\otimes(e_{i_2}+e_{j_2})\otimes(e_{i_3}+e_{j_3})\otimes(e_{i_3}-e_{j_3})\otimes(e_{i_2}-e_{j_2})\otimes(e_{i_1}-e_{j_1})$$

出现在（3.9）的第二行。我们提取求和项

$$\frac{1}{2}S_{i_1,j_1,i_2,j_2,i_3,j_3}(-1)^3 e_{i_1}\otimes e_{j_2}\otimes e_{i_3}\otimes(-e_{j_3})\otimes e_{i_2}\otimes(-e_{j_1}) \tag{3.11}$$

它与（3.10）中的求和项相同。容易验证，在（-1）^{3} （3.11）处的符号会将分量 e_{j_2}、$-e_{j_3}$和 $-e_{j_1}$分别变为 $-e_{j_2}$、e_{j_3}和 e_{j_1}。因此，我们有

$$(3.10)+(3.11) = -S_{i_1,j_1,i_2,j_2,i_3,j_3}e_{i_1}\otimes e_{j_2}\otimes e_{i_3}\otimes e_{j_3}\otimes e_{i_2}\otimes e_{j_1} = S_{i_1,j_2,i_3,j_3,i_2,j_1}e_{i_1}\otimes e_{j_2}\otimes e_{i_3}\otimes e_{j_3}\otimes e_{i_2}\otimes e_{j_1}$$

它与莱布尼茨公式（1.1）中的求和项相容。（-1）^{k}（1.4）第二行中的符号有助于减少项数，并确保不贡献于行列式的坏项有一定数量为零$_n$。受这些对称性和符号约定的启发，我们将（1.3）、（3.9）推广，得到任意 $2k\times 2k$ 行列式张量 det_{2k} 的公式，对每个 $k>0$ 均如定理1.1所述。

定理 *1.1* 的证明。 我们将直接根据定义进行证明。为此，只需证明以下两个条件：展开我们的公式（1.4）后，

(i) 对（1.1）有贡献的每一项均以系数 1 和正确的符号保留下来；(ii) 不属于（1.1）的每一项都消失。

由此可见，我们的公式（1.4）与通过莱布尼茨公式（1.1）定义的行列式$_n$

(i) 考虑任意一项

$$S_{a_1,a_2,\ldots,a_{2k}}e_{a_1}\otimes e_{a_2}\otimes\cdots\otimes e_{a_{2k-1}}\otimes e_{a_{2k}} \tag{3.12}$$

出现在（1.1）中。在公式（1.4）的各项中，只有两项

$$\frac{1}{2}S_{a_1,a_{2k},a_2,a_{2k-1},\ldots,a_k,a_{k+1}}(e_{a_1}-e_{a_{2k}})\otimes\cdots\otimes(e_{a_k}-e_{a_{k+1}})\otimes(e_{a_k}+e_{a_{k+1}})\otimes\cdots\otimes(e_{a_1}+e_{a_{2k}}) \tag{3.13}$$

and

$$\frac{1}{2}S_{a_1,a_{2k},a_2,a_{2k-1},\ldots,a_k,a_{k+1}}(-1)^k(e_{a_1}+e_{a_{2k}})\otimes\cdots\otimes(e_{a_k}+e_{a_{k+1}})\otimes(e_{a_k}-e_{a_{k+1}})\otimes\cdots\otimes(e_{a_1}-e_{a_{2k}}) \tag{3.14}$$

包含项 (3.12)。注意，上述表达式似乎只有在 $a_1<a_{2k}$、$a_2<a_{2k-1}$ 等情况下才有意义；然而，若不满足这一条件，即 $a_i>a_{2k+1-i}$，我们就交换它们的位置，并将分量 $e_{a_i}-e_{a_{2k+1-i}}$ 重写为 $-(e_{a_{2k+1-i}}-e_{a_i})$，以使指标 $(a_1,a_2,\cdots,a_{2k})\in I_{2k}$。这是合理的，因为 $S_{a_1,\cdots,a_{2k+1-i},\cdots,a_i,\cdots,a_{2k}}=-S_{a_1,\cdots,a_i,\cdots,a_{2k+1-i},\cdots,a_{2k}}$，进行这次换位会改变符号。特别是，我们总能使 (3.13) 和 (3.14) 都作为求和项出现在 (1.4) 中。容易验证，(3.13) 和 (3.14) 都给出该求和项

$$\frac{1}{2}S_{a_1,a_2,\ldots,a_{2k}}e_{a_1}\otimes e_{a_2}\otimes\cdots\otimes e_{a_{2k-1}}\otimes e_{a_{2k}}.$$

展开它们时。它们的和恰好就是我们想要的项，而 (1.4) 中没有其他项能对这一求和项作出贡献。

(ii) 对于每个指标 $(i_1, j_1, i_2, j_2 \ldots, i_k, j_k) \in I_{2k}$，我们将两个项 (3.15) $\frac{1}{2} S_{i_1,\ j_1,\ \ldots\ldots i_k,\ j_k}$

$(e_{i_1} - e_{j_1}) \otimes (e_{i_2} - e_{j_2}) \otimes \cdots \otimes (e_{i_k} - e_{j_k}) \otimes (e_{i_k} + e_{j_k}) \otimes \cdots \otimes (e_{i_2} + e_{j_2}) \otimes (e_{i_1} + e_{j_1})$ 配对。

and

(3.16)

$$\frac{1}{2}(-1)^k S_{i_1,j_1,\ldots,i_k,j_k} (e_{i_1} + e_{j_1}) \otimes (e_{i_2} + e_{j_2}) \otimes \cdots \otimes (e_{i_k} + e_{j_k}) \otimes (e_{i_k} - e_{j_k}) \otimes \cdots \otimes (e_{i_2} - e_{j_2}) \otimes (e_{i_1} - e_{j_1}).$$

对于固定的指标 $(i_1,\ j_1,\ i_2,\ j_2 \ldots,\ i_k,\ j_k) \in I_{2k}$，存在许多坏项，它们在展开 $\det_n$ 时不会出现在3.15中。例如，项 $\frac{1}{2} S_{i_1,\ j_1,\ i_2,\ j_2,\ i_3,\ j_3} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes e_{i_3} \otimes e_{j_3} \otimes e_{j_2} \otimes e_{i_1}$ 不在公式 (1.1中，因为首末分量都与 e_{i_1} 相同。事实上，我们看到，“坏加项”至少有一对相同的分量。我们需要弄清楚哪个项可能产生这样的坏加项，以及由展开另一个项而产生的哪个项可能消去这样的坏加项。根据我们构造 (1.4的方式可知，坏项不可能包含三个或更多个相同分量组成的组——只可能出现若干对相同分量。

情形 1）假设重复分量的成对数为奇数。令 T_1 为形式（3.15）展开中的一个求和项，并令 p 表示 T_1中重复分量的成对数。我们将证明 $-T_1$ 由（3.16）的展开产生，并消去 T_1。如果 T_1 中有一个分量被使用两次，那么对于某个 $t \in [k]$，它将出现在第 t项和第（$2k+1-t$）项分量处。 $t \in [k]$中仅使用一次的分量数为 $2k - 2p$（可能为 0）。因此，展开（3.16）时，我们看到其中有一个如下形式的求和项：

$$(-1)^k (-1)^{k-p} T_1 = (-1)^{2k-p} T_1 = -T_1.$$

因为 p 是奇数。可能还存在另一个指标（i_1'，j_1'，$\cdots$，i_k'，j_k'），$\in I_{2k}$ 它会在（3.15）的展开中产生相同的坏求和项 T_1，对应于这个新指标；然而，即使如此，它也会被对应于同一指标的（3.16）形式的项消去。

情况 2）假设重复分量的配对数为偶数。

：设 T_2 是（3.15）中的这样一个求和项，并设 q 表示 T_2中重复分量的配对数。要消去这个 T_2，我们需要一个不同于（3.16）的项，因为（3.16）中对应于相同指标的展开也包含 T_2，而非 $-T_2$。

令 J 为在 T_2 处未被使用的 e_j 的分量集合。显然，$|J| = q > 0$ 为正偶数，因此我们可以选取两个元素 $e_r \neq e_l \in J$。由 (3.15) 确定的、与给定指标对应的原始项不能以 $(e_r - e_l)$ 为分量，即它不能写成 $\frac{1}{2} C \otimes (e_r - e_l) \otimes C'$ 的形式，其中 C 和 C' 为任意张量。于是，指标 r、l 确定了指标 z、$w \in [2k]$，使得 $\mathcal{T}$ 同时以 $e_r - e_z$ 和 $e_l - e_w$ 为其分量（如果

需要，则交换 、 和/或 、 ），其中 r、 l、 z、 w 两两不同。事实上，

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} S_{\dots,r,z,\dots,l,w,\dots} C_1 \otimes (e_r - e_z) \otimes C_2 \otimes (e_l - e_w) \otimes C_3$$

对于某些张量 C_1， C_2 以及 C_3。显然， e_z 和 e_w 是 T_2中的重复分量。我们取（1.4）中的另一项，即:

$$\frac{1}{2} S_{\dots,l,z,\dots,r,w,\dots} C_1 \otimes (e_l - e_z) \otimes C_2 \otimes (e_r - e_w) \otimes C_3. \tag{3.17}$$

展开（3.17）后，我们得到 $-T_2$ 因为符号

$$S_{\dots,l,z\dots,r,w,\dots} = -S_{\dots,r,z,\dots,l,w,\dots}$$

发生了变化。特别地，我们得到一项，它由另一个指标确定，并涉及 $-T_2$，它消去了 T_2 源自 $\mathcal{T}$。同样，另一项也消去了一个坏项 T_2，该坏项源自 $\mathcal{T}'$，形式为（3.16）。

例如，在 det_6的情形下，一个求和项

$$T_2 := \frac{1}{2} S_{1,6,2,5,3,4}\ e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2 \otimes e_1 \tag{3.18}$$

出现在项的展开式中

$$\frac{1}{2} S_{1,6,2,5,3,4} (e_1 - e_6) \otimes (e_2 - e_5) \otimes (e_3 - e_4) \otimes (e_3 + e_4) \otimes (e_2 + e_5) \otimes (e_1 + e_6). \tag{3.19}$$

Here, exactly two components e_1 and e_2 are used twice in T_2. The set of components which are not used in T_2 is $J := \{e_5, e_6\}$. We take the following term from (1.4)

$$\frac{1}{2} S_{1,5,2,6,3,4} (e_1 - e_5) \otimes (e_2 - e_6) \otimes (e_3 - e_4) \otimes (e_3 + e_4) \otimes (e_2 + e_6) \otimes (e_1 + e_5) \tag{3.20}$$

so that the indices 5 and 6 are interchanged. We have the summand $-T_2$ in the expansion of (3.20)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} S_{1,5,2,6,3,4}\ e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2 \otimes e_1 \\ &= -\frac{1}{2} S_{1,6,2,5,3,4}\ e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_2 \otimes e_1 \\ &= -T_2, \end{aligned} \tag{3.21}$$

正如所需。

□

推论 3.1。

$$\mathrm{Crank}(det_n) \le \mathrm{rank}(det_n) \le \frac{n!}{2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}} \quad if \quad char(\mathbb{K}) \neq 2$$

证明。 当 n 为偶数时，它来自公式（1.4），该公式是以下各项之和

$$2 \times \binom{n}{2} \times \binom{n-2}{2} \times \cdots \times \binom{2}{2} = \frac{n!}{2^{(n-2)/2}} = \frac{n!}{2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}}$$

可分解张量。

当 n 为奇数时，注意 det_{n-1} 是以下各项之和:

$$\frac{(n-1)!}{2^{(n-3)/2}}$$

可分解张量。借助拉普拉斯展开公式，我们可以将 det_n 表示为以下各项之和：

$$\frac{(n-1)!}{2^{(n-3)/2}} \times n = \frac{n!}{2^{(n-3)/2}} = \frac{n!}{2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}}$$

以及可分解张量。 □

最近，Houston、Goucher 和 Johnston 报道了行列式的另一个显式公式$_n$ [6] 这意味着

$$\operatorname{rank}(det_n) \leq B_n$$

其中 B_n 是第 n 个贝尔数。我们比较这一结果与我们的公式：令$C_n =$ $^{n}!$ $\overline{2^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}}$ 为我们找到的一个上界

n	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
B_n	2	5	15	52	203	877	4140	$\cdots$
C_n	2	6	**12**	60	**180**	1260	5040	$\cdots$

TABLE 1. 当 $n = 4$、6 时，我们有 $C_n \leq B_n$。

我们观察到， $C_n \leq B_n$ 仅当 $n = 4$，不过，对于 6，我们预期我们的公式（1.4）还有改进空间，因为其中包含许多对称性。例如，我们的公式为 Wrank(行列式$_4$) ≤96 提供了一种替代证明（另见 [8]），因此它或许能带来更好的上界。我们还预期，这个简洁的公式能有效地计算各种环上的矩阵的行列式，以及外代数上的映射。

REFERENCES

[1] Alessandra Bernardi、Enrico Carlini、Maria Virginia Catalisano、Alessandro Gimigliano 和 Alessandro Oneto。《割线簇与张量分解指南》。 *Mathematics* 6 12 314, 2018 , ( ): 。[2] Austin Conner、Alicia Harper 和 Joseph M Landsberg。矩阵乘法与 3×3 行列式的新下界。 *arXiv preprint arXiv:1911.07981*, 2019。[3] Harm Derksen。张量的核范数与奇异值分解。 *Foundations of Computational Mathematics* 16 3 779 811, 2016 , ( ): – 。

[4] Harm Derksen 和 Visu Makam。任意特征下边界秩至少为 $2d-2$ 的显式张量。 $k^d \otimes k^d \otimes k^d$ *Linear and Multilinear Algebra*, 67(10):2104–2116, 2019。[5] Harm Derksen 和 Zach Teitler。不变量形式秩的下界。 *Journal of Pure and Applied Algebra* 219 12 5429 5441, 2015 , ( ): – 。

[6] Robin Houston、Adam P Goucher 和 Nathaniel Johnston。行列式的新公式及其张量秩与 Waring 秩的界。 *arXiv preprint arXiv:2301.06586*, 2023。[7] Nathan Ilten 和 Zach Teitler。 3× 3行列式与积和式的乘积秩。*Canadian Mathematical Bulletin*, 59(2):311–319, 2016。[8] Garritt Johns 和 Zach Teitler。行列式 Waring 秩的改进上界。 *Journal of Commutative Algebra*, 14:415–425, 2022。[9] TAEHYEONG KIM、朱正勋和 YEONGRAK KIM。矩阵行列式的新公式。4×4 *preprint*, 2023。[10] Siddharth Krishna 和 Visu Makam。 3×3 积和式与行列式的张量秩。*Electronic Journal of Linear Algebra*, 37:425–433, 2021。[11] Joseph M Landsberg。《张量：几何与应用》。 *Representation theory* 381 402 3, , ( ): 。2012

[12] Kristian Ranestad 和 Frank-Olaf Schreyer。对称形式的秩。 *Journal of Algebra* 346 1 340 342, 2011 , ( ): – 。

Email address: jjh793012@naver.com
Email address: th_kim@pusan.ac.kr
Email address:
yeongrak.kim@pusan.ac.kr

Department of Mathematics, Pusan National University, 2 Busandaehak-ro 63beon-gil, Geumjeung-gu, 46241 Busan, Republic of Korea