arXiv:2303.07856v2 [cond-mat.quant-gas] 7 Jun 2023

开放环境中的经典相空间晶体

Ali Emami Kopaei[2,3], Krzysztof Sacha[3,4], 和 Lingzhen Guo[1,5*]

[1] *Center for Joint Quantum Studies and Department of Physics, School of Science Tianjin University Tianjin 300072 China* ,,,,,
[2] *Szkoła Doktorska Nauk Ścisłych i Przyrodniczych Wydział Fizyki Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński, ulica Profesora Stanisława Łojasiewicza 11, PL-30-348 Kraków, Poland*[3] *Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej,Uniwersytet Jagielloński, ulica Profesora Stanisława Łojasiewicza 11, PL-30-348 Kraków, Poland*[4] *Centrum Marka Kaca, Uniwersytet Jagielloński,ulica Profesora Stanisława Łojasiewicza 11, PL-30-348 Kraków, Poland*
[5] *Max Planck Institute for the Science of Light, Staudtstrasse 2, 91058 Erlangen, Germany*(日期: 2023年6月8日)

最近，人们发现封闭动力系统的相空间中可以存在晶态多体态。相空间晶体可以是反常陈绝缘体，在不破坏物理时间反演对称性的情况下支持手性拓扑输运 [L. Guo等人，《物理评论 B》105, 094301 (2022)]。在这项工作中，我们进一步研究了具有热噪声的开放耗散环境所产生的影响，并确定了现实情境下经典相空间晶体的存在条件。通过定义晶体序参量，我们绘制了耗散率、相互作用和温度构成的参数空间中的相图。本研究为在实验中实现相空间晶体并探索反常手性输运铺平了道路。

I. 引言

平衡态物理系统由标准热力学和统计力学描述。对于近平衡系统，线性响应理论[1] 通过在局部定义典型热力学量而适用，例如昂萨格互易关系[2] 和最小熵产生原理[3]。然而，远离平衡的物理系统可能表现出截然不同的行为。非平衡涨落在平衡稳定点附近可能被放大，从而产生所谓的耗散结构[4]，、自组织现象[5] 和混沌结构，例如同步[6]，、分岔[7]，、洛伦兹吸引子[8]，、激光器、布鲁塞拉ator[9]，、瑞利–贝 ́纳德对流[10] 以及别洛乌索夫–扎博廷斯基反应[11]。数十年来，人们一直在经典动力系统中深入研究这些引人入胜的远离平衡现象，近来还将研究拓展到量子系统，例如量子同步[12–15] 和周期倍增[16–18]。

上述新颖的远离平衡态源于驱动（泵浦能量）与阻尼（耗散能量）之间的平衡，即通过与开放环境交换能量和信息而形成。相比之下，一般孤立驱动多体系统的最终状态是平凡的无限温度态[19–21]，这是由于驱动场导致的加热。在封闭量子系统中，一个例外是*Floquet*/离散时间晶体[22–25]，其中驱动场的离散时间平移对称性（DTTS）发生自发破缺，并且在热力学极限下，无序[26–28]或有效非线性阻止了无限加热过程[29–33]。对于没有无序的洁净系统，也可能存在一种预热化态，其寿命呈指数级增长，前提是驱动频率远高于局域能量尺度[34–36]，从而形成所谓的预热化时间晶体。将Floquet多体系统耦合到冷浴[37,38],后，预热化时间晶体可以拥有无限寿命，并被称为耗散时间晶体[39,40]。尽管大多数研究聚焦于DTTS的自发破缺以及时间晶体的保护机制，但目前也出现了研究两个或更多时间晶体相互作用的趋势[41]，，即一个新兴的研究领域，被称为时间晶体中的凝聚态物理[22, 25, 42–50]。

高度激发系统中的另一种有序态，是所谓的相空间晶体[51,52]，，它与时间晶体密切相关，但又有所不同。根据是否包含相互作用，相空间晶体可分为单粒子相空间晶体和多体相空间晶体[42,51]。对于单粒子量子系统，相空间晶态指的是哈密顿量的本征态[53]，或开放量子系统中李维尔算符的本征算符[54]，它们在相空间中具有离散旋转或平移对称性。多体系统中的相空间晶体则定义为相空间中的类固体晶态[51,55,56]。在 Guo等人[56], 的研究中，作者考察了具有蜂窝晶格结构的多体相空间晶体的集体振动模，并发现其振动能带结构可以呈现非平庸的拓扑物理。由于辛相空间动力学，任意两个原子的振动都通过带有内禀复相位的配对相互作用相耦合，而这些复相位无法通过任何局域规范变换消除，因此形成了具有非平庸陈数和相空间手性边缘态的振动能带结构。与实空间中所有手性输运情形不同，在那些情形中，对称性的破缺是.....的先决条件

时间反演对称性是先决条件，而相空间声子的手性输运则可以在不破坏物理时间反演对称性的情况下出现；在相空间中，物理时间反演对称性表现为全局反幺正变换。

在这项工作中，我们继续研究存在耗散和热噪声的开放环境中相空间晶体的经典动力学。我们将静止参考系中的运动方程（EOM）化简为旋转参考系中采用旋波近似（RWA）的运动方程，并通过数值模拟验证这一近似。基于对动力系统的线性分析，我们发现，当相互作用、耗散和温度低于某些临界值时，相空间晶体能够存在。我们为相空间晶体态定义了一个序参量，并绘制了相图。理论预言的相空间晶体尚未在实验中观测到。本研究为在真实条件下的超冷原子实验中实现相空间晶体铺平了道路。

本文结构如下。第二节介绍开放环境中的模型系统和运动方程。第三节推导包含耗散和热噪声的旋波近似运动方程。第四节研究相空间晶体的动力学，并确定相空间中晶态的存在条件。我们首先基于动力学的线性分析，给出耗散、温度和相互作用的临界值的解析结果。随后，我们定义晶体序参量，并基于旋波近似运动方程的数值模拟绘制相图。第五节估算在真实冷原子实验中实现经典相空间晶体所需的参数。第六节总结本文的研究结果。

II. 模型系统

我们考虑一个经典系统，其中许多粒子被限制在一维（1D）谐势阱中，并受到额外的周期性驱动晶格势 $V_d(x,\ t)$作用，其驱动频率为 ω_d，如图 1(a) 所示。在实验中，这种模型系统可以通过光学晶格中的冷原子实现[59]，如图 1(b) 所示。在低温下，中性冷原子之间的相互作用由 s-波散射过程主导，可用有效的双体接触势[57]建模。该系统中 N 个原子的总经典哈密顿量为

$$\begin{aligned} H(t) &= \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}(x_i^2+p_i^2)+V_d(x_i,t)\right]+\sum_{i<j}^{N}\beta\delta(x_i-x_j) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{N}H_s(x_i,p_i)+\sum_{i<j}^{N}V(x_i,x_j), \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$H_s(x_i,\ p_i)$ 表示包含谐振阱和驱动势的单原子哈密顿量，而 $V(x_i,\ x_j)$ 表示两个

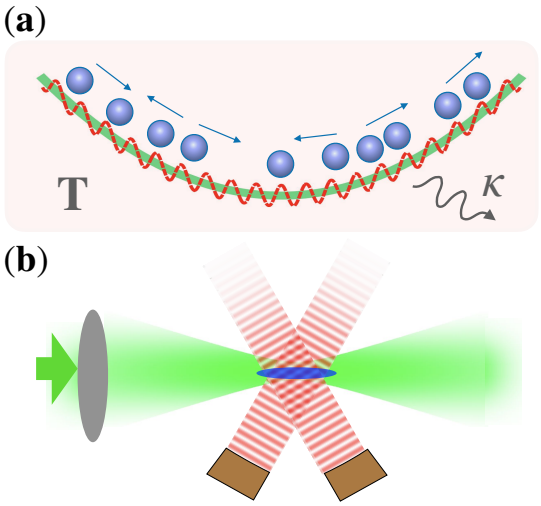

图 1. **模型系统。(a)** 模型示意图：许多粒子（蓝色球体）在谐振阱（绿色曲线）中运动，并受到额外晶格势 $V_d(x,\ t)$的周期性驱动。红色虚线表示某一固定时刻的总势能。整个系统处于温度为 T、耗散率为 κ的热浴中。**(b)** 冷原子实验装置对模型的实现：一团冷原子（蓝色）被限制在由单束高斯激光束[57]（绿色）的强度分布形成的一维谐振阱中；驱动晶格势由两束激光器（红色）相交形成，其强度和相位[58]可调。

原子之间的实空间相互作用。这里，通过将时间、位置和动量的单位分别选为 ω_0^{-1}（ω_0 为谐振阱频率）、l_0（驱动晶格势的特征长度）和 $p_0 = m\omega_0 l_0/2\pi$（m 为粒子的质量），所有变量均已缩放为无量纲量。能量（哈密顿量）的单位设为$\epsilon_0 = m\omega_0^2\ (l_0/2\pi)^{\ 2}$。

在耗散率为 κ（按 ω_0 缩放）、温度为 T（按 ϵ_0/k_B 缩放，且 k_B 为玻尔兹曼常数）的开放环境中，经典运动方程为

$$\frac{dx_i}{dt}=p_i,\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial}{\partial x_i}H(t)-\kappa p_i+\sqrt{2\kappa T}n_i(t). \tag{2}$$

这里，根据涨落耗散关系引入热噪声项 $\sqrt{2\kappa T}n_i\ (t)$，其中 $n_i\ (t)$ 是满足下式的白噪声

$$\overline{n_i(t)}=0,\quad \overline{n_i(t)n_j(t')}=\delta_{ij}\delta(t-t'). \tag{3}$$

现在，我们将维纳过程定义为白噪声的积分，即 $w_i\ (t) \equiv \int_0^t n_i\ (\tau)\ d\tau$. 利用白噪声的性质公式（3），可以证明

$$\overline{w_i(t)}=0,\quad \overline{w_i(t)w_i(t')}=\delta_{ij}\min(t,t').$$

进一步定义 $dw_i(t) \equiv w_i(t+dt) - w_i(t)$ 后，我们得到

$$\overline{dw_i(t)}=0,\quad \overline{dw_i^2(t)}=\overline{[w_i(t+dt)-w_i(t)]^2}=dt.$$

因此，我们可以将公式（2）给出的运动方程写成如下随机微分方程过程

$$\begin{cases} dx_i(t) = p_i(t)dt, \\ dp_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}dt - \kappa p_i(t)dt + \sqrt{2\kappa T}dw_i(t). \end{cases} \tag{4}$$

III. 旋转参考系

A. 旋波近似下的哈密顿量

我们使用第二类生成函数，转到频率为 Ω/n 的旋转参考系

$$G_2(t) = \sum_i \frac{x_i P_i}{\cos(\Omega t/n)} - \frac{1}{2}x_i^2 \tan\left(\frac{\Omega}{n}t\right) - \frac{1}{2}P_i^2 \tan\left(\frac{\Omega}{n}t\right).$$

这里，我们将驱动频率与谐振频率之比定义为 $\Omega = \omega_d/\omega_0$，并假设近共振条件 $\Omega \sim n$，其中 $n \in \mathbb{Z}^+$。注意，如果 $\Omega \neq n$，我们可以在驱动频率与谐振频率之间引入一些失谐 $\delta\omega = 1 - \Omega/n$，这将在相空间中产生抛物线束缚势，有时这对于稳定相空间晶体[56]很重要。坐标的正则变换为 $p_i = \partial G_2/\partial x_i$, $X_i = \partial G_2/\partial P_i$，即，

$$\begin{cases} x_i(t) = P_i \sin\left(\Omega t/n\right) + X_i \cos\left(\Omega t/n\right), \\ p_i(t) = P_i \cos\left(\Omega t/n\right) - X_i \sin\left(\Omega t/n\right). \end{cases} \tag{5}$$

旋转参考系中式（1）所示哈密顿量的正则变换为

$$H_{RF}(t) = H(t) + \partial G_2(t)/\partial t. \tag{6}$$

由于驱动场以及原子间的相互作用，振荡的正交分量（X_i, P_i）（振幅和相位）缓慢变化。将变换方程（5）代入 $H_{RF}(t)$ 并忽略所有随时间变化的（快速振荡）项后，我们得到旋波近似（RWA）下的有效静态哈密顿量

$$\mathcal{H} = \sum_i \mathcal{H}_s(X_i, P_i) + \sum_{i<j} U(R_{ij}). \tag{7}$$

我们预计，当驱动场$V_d(x_i,\ t)$和原子间的接触相互作用强度 β 相对于谐振阱频率较弱时，旋波近似成立；我们将在第 IIIC 节通过数值模拟证明这一点。这里，$\mathcal{H}_s(X_i,\ P_i)$ 表示单原子哈密顿量 $H_s(x_i,\ p_i)$ 的旋波近似部分，参见式（1）。

对于实空间中的短程相互作用，有效的旋波近似相互作用会成为相空间中原子间距离的函数[25,60]

$$R_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (P_i - P_j)^2}. \tag{8}$$

这是因为，位于相空间不同位置的原子仍会沿着各自的实验室参考系轨迹发生碰撞。因此，对哈密顿量进行时间平均时，实验室参考系中的短程相互作用会在旋转参考系中产生有效的长程相互作用[29,43,51,55,60,61]。对于实验室参考系中的冷原子接触相互作用，有效相互作用会变成长程库仑型相互作用[51,55,60]

$$U(R_{ij}) = \frac{\beta}{\pi}\frac{1}{R_{ij}}. \tag{9}$$

B. 旋波近似下的运动方程

对于无耗散的封闭系统，旋转参考系中旋波近似下的正则运动方程为

$$\frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i}, \qquad \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_i}. \tag{10}$$

为得到开放环境中包含耗散和热噪声的旋波近似下的运动方程，我们对式（5）作如下变换

$$\begin{cases} \frac{dX_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt}\cos\left(\frac{\Omega}{n}t\right) - \frac{dp_i}{dt}\sin\left(\frac{\Omega}{n}t\right) - \frac{\Omega}{n}P_i \\ \frac{dP_i}{dt} = \frac{dx_i}{dt}\sin\left(\frac{\Omega}{n}t\right) + \frac{dp_i}{dt}\cos\left(\frac{\Omega}{n}t\right) + \frac{\Omega}{n}X_i. \end{cases} \tag{11}$$

将式（2）代入式（11），即可得到旋转参考系中包含耗散和噪声的运动方程

$$\begin{cases} \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial H_{RF}}{\partial P_i} + \kappa p_i \sin\left(\frac{\Omega}{n}t\right) - \sqrt{\kappa T}n_i^X(t) \\ \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial H_{RF}}{\partial X_i} - \kappa p_i \cos\left(\frac{\Omega}{n}t\right) + \sqrt{\kappa T}n_i^P(t). \end{cases} \tag{12}$$

这里，我们将噪声的两个正交分量定义为

$$n_i^X(t) \equiv \sqrt{2}n_i(t)\sin\left(\frac{\Omega}{n}t\right), \quad n_i^P(t) \equiv \sqrt{2}n_i(t)\cos\left(\frac{\Omega}{n}t\right).$$

显然，我们有 $n_i^X(t)$ $\overline{= 0}$ 和 $n_i^P(t)$ $\overline{= 0}$。根据公式（3），两个噪声分量的时间关联如下

$$\overline{n_i^X(t)n_j^P(t')} = \delta_{ij}\delta(t-t')\sin\left(2\frac{\Omega}{n}t\right) \tag{13}$$

$$\overline{n_i^X(t)n_j^X(t')} = \delta_{ij}\delta(t-t')\left[1 - \cos\left(2\frac{\Omega}{n}t\right)\right] \tag{14}$$

$$\overline{n_i^P(t)n_j^P(t')} = \delta_{ij}\delta(t-t')\left[1 + \cos\left(2\frac{\Omega}{n}t\right)\right]. \tag{15}$$

因此，在旋波近似下（仅保留相关函数中的时间无关项），我们可以将 $n_i^X(t)$和 $n_i^P(t)$视为相互独立的标准白噪声。

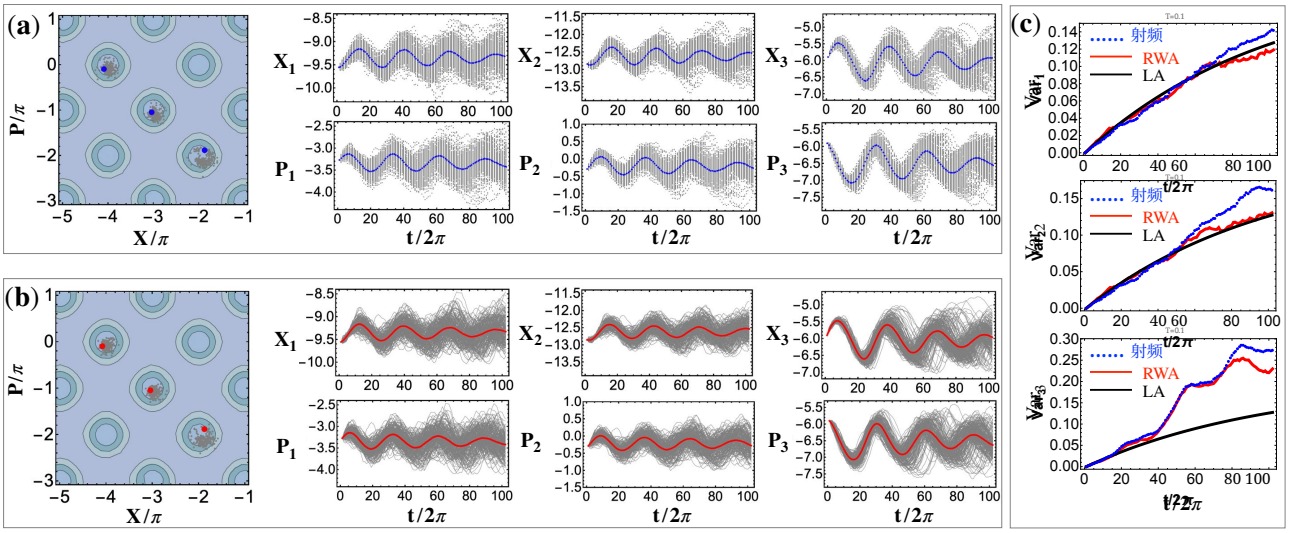

图2. **在存在耗散和热噪声的情况下对旋波近似的论证。（a）**通过求解精确运动方程 (4)，并每隔一个谐振子势周期绘制一次相空间变量，得到实验室参考系中 $N=3$ 个相互作用粒子的频闪动力学。最左侧面板中的三个蓝点表示三个粒子的初始条件。其余面板显示了针对 200 种不同噪声实现方式得到的每个粒子的 200 条轨迹（灰点），以及平均动力学（蓝点）。**（b）**通过求解方程 (17)，在旋波近似下得到旋转参考系中三个相互作用粒子的动力学。最左侧面板中的三个红点表示三个粒子的初始条件。其余面板显示了针对 200 种不同噪声实现方式得到的每个粒子的 200 条轨迹（灰色轨迹），以及平均动力学（红色曲线）。**（c）**根据精确运动方程（蓝点）、旋波近似（红色曲线）和线性分析（局域近似）（黑色曲线）得到的各粒子相空间方差随时间的演化，参见方程 (21) 和 (40)。所有图中，驱动强度设为 $\Lambda=-0.01$，耗散率设为 $\kappa/\kappa_c=0.5$，相互作用设为 $\beta/\beta_c=0.5$，洛伦兹参数为 $\epsilon=0.5$，参见方程 (20)，温度设为 $T=0.1$。

我们将式（5）代入运动方程（12），并按照旋波近似的思路仅保留静态项。最终，我们得到包含耗散和噪声的旋波近似运动方程

$$\begin{cases} \frac{dX_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_i} - \frac{1}{2}\kappa X_i - \sqrt{\kappa T} n_i^X(t) \\ \frac{dP_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_i} - \frac{1}{2}\kappa P_i + \sqrt{\kappa T} n_i^P(t). \end{cases} \tag{16}$$

与式（4）中一样，我们为两个正交分量引入两个相互独立的维纳过程 $w_i^X(t)=\int_0^t n_i^X(\tau)d\tau$ 和 $w_i^P(t)=\int_0^t n_i^P(\tau)d\tau$，并将旋波近似下的运动方程（16）写成随机微分方程的形式

$$\begin{cases} dX_i(t) = \left(\frac{\partial \eta}{\partial P_i} - \frac{1}{2}\kappa X_i\right)dt - \sqrt{\kappa T} dw_i^X(t), \\ dP_i(t) = \left(-\frac{\partial \eta}{\partial X_i} - \frac{1}{2}\kappa P_i\right)dt + \sqrt{\kappa T} dw_i^P(t). \end{cases} \tag{17}$$

C. 论证

为了论证含耗散和热噪声时采用旋波近似的合理性，我们考虑如下具有正方形相空间晶格的经典多体哈密顿量，其描述为

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \Lambda(\cos X_i + \cos P_i)^2 + \sum_{i<j}^{N} U(R_{ij}). \tag{18}$$

单粒子哈密顿量在相空间中的方形晶格可通过一系列频闪晶格的踢击序列生成（详见附录）

$$V_d(x,t) = \Lambda \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{q} K_q \cos(k_q x)\delta\left(\frac{t}{2\pi} - \theta_q - n\right). \tag{19}$$

这里，在每个谐波时间周期内有六次踢击，踢击参数为 $k_q=[\sqrt{2},2,-\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2},2]$、$\theta_q=[1/8,2/8,3/8,5/8,7/8,1]$ 和 $K_q=0.5\Lambda$。事实上，通过适当选择踢击参数 [51,56]，可以合成相空间中的任意晶格结构。

前人已研究了无耗散时旋波近似运动方程的有效性 [55,60]。在此，我们通过比较方程（17）的预测与精确运动方程（2）的数值解，论证有限耗散率和有限温度下旋波近似运动方程的有效性。在数值模拟中，我们选择洛伦兹函数来描述接触相互作用势，即 $V(x_i,\ x_j)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\beta}{\pi}\frac{\epsilon}{(x_i-x_j)^2+\epsilon^2}$。相应的相空间相互作用势为 [55,60]

$$U(R_{ij}) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\beta}{\pi}\frac{1}{\sqrt{R_{ij}^2+\epsilon^2}}. \tag{20}$$

在图2(a)-(b)中，我们比较了在旋波近似下得到的 $N=3$ 个相互作用粒子的动力学与通过求解方程(4)得到的精确结果。我们展示了对应于噪声200种实现方式的200条轨迹

这些粒子具有相同的初始条件，同时还给出了平均相空间变量（$X_i(t)$ $P(t)_i$）。显然，随着时间的演化，这200个样本逐渐分散。在图 2(c)中，我们绘制了相空间中三个粒子的方差，其定义为（另见方程(39)-(40)）

$$\mathrm{Var}_i(t) \equiv \overline{(X_i - \overline{X}(t)_i)^2} + \overline{(P_i - \overline{P}(t)_i)^2}. \tag{21}$$

数值结果表明，旋波近似方法与精确动力学结果吻合良好。事实上，当 $(X_i,\ P_i)$ 的动力学远慢于谐振子势的周期时，旋波近似是成立的。

IV. 相空间晶体的存在性

本节基于多体动力学，在存在耗散和热噪声的情况下，并在旋波近似下（式 (16)），分析相空间晶体的动力学。我们的目标是确定相空间晶体存在的条件。根据式 (8)，两个原子之间的旋波近似相互作用势 $U(R_{ij})$ 取决于它们在相空间中的相对距离。因此，将力的概念从构型空间推广到相空间是很自然的。定义相空间中的位置矢量 $\mathbf{Z}_i \equiv (X_i,\ P_i)^T$，以及垂直于相空间平面的单位方向矢量 $\hat{\mathbf{n}} \equiv \hat{\mathbf{n}}_X \times \hat{\mathbf{n}}_P$，其中 $\hat{\mathbf{n}}_X$ 和 $\hat{\mathbf{n}}_P$ 分别是位置方向和动量方向上的单位矢量，我们可以将运动方程 (16) 改写为以下紧凑形式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Z}_i = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{F}_i, \tag{22}$$

其中，相空间力定义为

$$\mathbf{F}_i \equiv -\nabla_i \mathcal{H} + \frac{1}{2}\kappa \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{Z}_i + \sqrt{\kappa T}\mathbf{n}_i(t). \tag{23}$$

这里，我们定义了热噪声向量

$$\mathbf{n}_i(t) \equiv \left(n_i^X(t), n_i^P(t)\right)^T.$$

基于对方程（22）和（23）的线性分析，我们将估算相空间晶体存在所需相关参数（耗散率、温度和相互作用强度）的临界值，并通过数值模拟加以验证。

A. 耗散效应

对于没有相互作用的粒子组成的封闭系统，不动点$\mathbf{Z}_i^0$是由条件 $\nabla_i \mathcal{H}|_{\mathbf{z}_i=\mathbf{z}_i^0} = 0.$ 确定的极值点。我们有$\mathbf{Z}_i^0 = (n\pi,\ m\pi)^T$，其中 $n,\ m \in \mathbb{Z}$ 具有相同的奇偶性。有限的耗散率、温度以及相互作用的存在都会使不动点发生偏移，从而影响相空间晶体的存在性。我们首先考虑

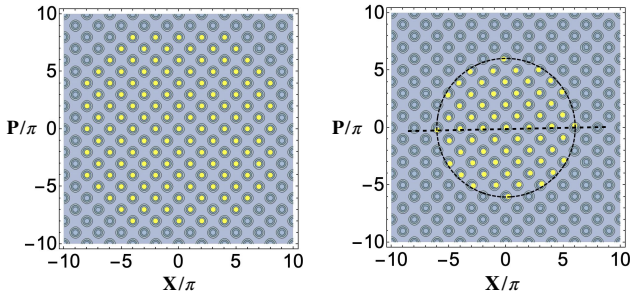

图3. **耗散对相空间晶体形成的影响**。（左）： $N = 129$ 个原子的初始条件（黄色圆点）。（右）：耗散率为 $\kappa = 1.5\kappa_c$ 时原子的最终构型。虚线圆和虚线分别表示由方程（30）预测的晶体半径和由方程（28）给出的旋转角。驱动强度参数: $\Lambda = -0.01$。

零温下（$T = 0$）的耗散单独作用，且不存在相互作用（$\beta = 0$）的情形。在这种情况下，相空间中的不动点由条件$\mathbf{F}_i = 0$给出。由式（23）可得

$$\nabla_i \mathcal{H}\big|_{\mathbf{Z}_i=\tilde{\mathbf{Z}}_i^0} = \frac{1}{2}\kappa\left(\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{Z}}_i^0\right), \tag{24}$$

其中，$\tilde{\mathbf{Z}}_i^0$ 是经耗散作用偏移后的不动点位置。我们围绕原始不动点$\mathbf{Z}_i^0$ 将方程（24）线性化如下

$$\mathbf{J}(\tilde{\mathbf{Z}}_i^0 - \mathbf{Z}_i^0) = \frac{1}{2}\kappa\mathbf{A}(\tilde{\mathbf{Z}}_i^0 - \mathbf{Z}_i^0) + \frac{1}{2}\kappa\mathbf{A}\mathbf{Z}_i^0, \tag{25}$$

其中，雅可比矩阵$\mathbf{J}$ 和非对称张量$\mathbf{A}$由下式给出

$$\mathbf{J} \equiv \mathbf{J}_{\nabla_i\mathcal{H}|\mathbf{Z}_i=\mathbf{Z}_i^0} \equiv \left.\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial X_i \partial X_i} & \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial X_i \partial P_i} \\ \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial P_i \partial X_i} & \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial P_i \partial P_i} \end{pmatrix}\right|_{\mathbf{Z}_i=\mathbf{Z}_i^0}, \tag{26}$$

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{27}$$

求解式 (25)，可显式得到偏移后的不动点

$$\tilde{\mathbf{Z}}_i^0 - \mathbf{Z}_i^0 = -\frac{2\Lambda\kappa}{16\Lambda^2 + \kappa^2/4}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{Z}_i^0 - \frac{\kappa^2/4}{16\Lambda^2 + \kappa^2/4}\mathbf{Z}_i^0. \tag{28}$$

式 (28) 右侧的第一项使整个晶格发生旋转，而第二项则使整个晶格沿径向收缩。

如果不动点的位移足够大，可以设想原子会逃离晶格势，相空间晶体开始“熔化”。由于不动点的位移与其到原点的距离成正比（参见公式（28）），晶体将从边缘开始熔化。为了计算边缘原子开始

熔化时的临界耗散率，我们估算受耗散限制的最终晶格尺寸。根据公式（24），可得以下条件

$$\begin{aligned}&\Big|\frac{1}{2}\kappa\big(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{Z_i}\big)\Big| = |\nabla_i\mathcal{H}|\\ =\ & 2\Big|\Lambda(\cos X_i+\cos P_i)\Big|\sqrt{\sin^2 X_i+\sin^2 P_i}\\ \leqslant\ & 2\sqrt{2}\big|\Lambda\big|. \end{aligned}\tag{29}$$

上述方程给出了晶格尺寸条件的上限，即当$|\mathbf{Z_i}| \leq R_c$ 时，不动点的解存在，其中 $R_c \backsimeq 4\sqrt{2}\Lambda/\kappa$。考虑到 $|\nabla_i\mathcal{H}|$ 的角度依赖性，我们通过数值模拟对稳定区域半径进行了更准确的经验估算，

$$R_c \sim \frac{4\Lambda}{\kappa}.\tag{30}$$

相空间晶体存在时稳定区域的面积约为

$$S = \pi R_c^2 = \pi(4\Lambda/\kappa)^2.$$

稳定区域内不动点的总数约为

$$\sigma_a S = \frac{8}{\pi}\Big(\frac{\Lambda}{\kappa}\Big)^2,$$

其中，$\sigma_a = 2/(2\pi)^2$ 表示原子密度，例如每个不动点对应一个原子，即每个晶胞对应两个原子。若假设每个不动点上占据一个原子，则原子总数 $N = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\Lambda}{\kappa}\right)^2$. 存在上限。给定原子数后，临界耗散率为

$$\kappa_c = \frac{4|\Lambda|}{\sqrt{2\pi N}}.\tag{31}$$

图3展示了原子的初始态（左）以及耗散导致的最终态（右）。黑色虚线圆表示由式（30）预测的晶体半径。虚线表示根据我们的预测得到的最终晶格旋转角，参见式（28）。请注意，两幅图中的原子数相同。由于此处未考虑相互作用，最终晶体态中的同一晶格点可能有多个原子占据。

B. 温度效应

接下来，我们研究由有限温度 $T > 0$ 和耗散率 $\kappa > 0$决定的热噪声的影响，参见公式 (23)。我们在点 $\mathbf{Z}_i^0$ 附近对运动方程 (22) 进行线性近似

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{Z}_i-\mathbf{Z}_i^0) \ =\ & -\big(\mathbf{AJ}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\kappa\mathbf{I}\big)(\mathbf{Z}_i-\mathbf{Z}_i^0)\\ & -\frac{1}{2}\kappa\mathbf{Z}_i^0+\sqrt{\kappa T}\mathbf{A}n_i(t).\end{aligned}\tag{32}$$

现在定义以下辅助向量

$$\mathbf{u}_i \equiv \mathbf{A}(\mathbf{Z}_i-\tilde{\mathbf{Z}}_i^0),\tag{33}$$

其中，$\tilde{\mathbf{Z}}_i^0$ 是耗散导致的平移后平衡点，但对应于 $T = 0$，参见式（25）或（28）。向量$\mathbf{u}_i$ 垂直于描述平移$\mathbf{Z}_i - \tilde{\mathbf{Z}}_i^0$的位移向量。我们将随机微分方程（32）简化如下

$$d\mathbf{u}_i(t) = -\mathbf{B}\mathbf{u}_i(t)dt - \sqrt{\kappa T}d\mathbf{w}_i(t),\tag{34}$$

with

$$\mathbf{B} \equiv \big(\mathbf{JA}+\frac{1}{2}\kappa\mathbf{I}\big),\quad d\mathbf{w}_i(t) = \mathbf{n}_i(t)dt.\tag{35}$$

该随机微分方程描述了一个多维 Ornstein-Uhlenbeck 过程。其形式解为

$$\mathbf{u}_i(t) = e^{-\mathbf{B}t}\mathbf{u}_i(0) - \sqrt{\kappa T}\int_0^t e^{-\mathbf{B}(t-s)}d\mathbf{w}_i(s).\tag{36}$$

随机过程$\mathbf{u}_i(t)$的均值为

$$\mathrm{E}[\mathbf{u}_i(t)] = e^{-\mathbf{B}t}\mathbf{u}_i(0) = \mathbf{P}\mathbf{E}(t)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{u}_i(0)\tag{37}$$

with

$$\mathbf{E}(t) \equiv \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1 t} & 0\\ 0 & e^{-\lambda_2 t}\end{pmatrix}.\tag{38}$$

这里，$\mathbf{P}$ 是对角化矩阵$\mathbf{B}$的矩阵，即$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P} = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2)$。

对于开放耗散环境，特征值 λ_1和 λ_2 应为正值，使得在长时间极限下 $\mathrm{E}[\mathbf{u}_i(t)] \to 0$。我们进一步计算$\mathbf{u}_i(t)$的方差如下

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_i \ =\ & \mathrm{E}\big[\big(\mathbf{u}_i(t)-\overline{\mathbf{u}_i(t)}\big)^T\big(\mathbf{u}_i(t)-\overline{\mathbf{u}_i(t)}\big)\big]\\ =\ & \kappa T\int_0^t\int_0^t \mathrm{E}\big[d\mathbf{w}_i^T(s')e^{-\mathbf{B}^T(t-s')}e^{-\mathbf{B}(t-s)}d\mathbf{w}_i(s)\big]\\ =\ & \kappa T\int_0^t ds\mathrm{E}\big[\mathbf{n}_i^T(s)e^{-\mathbf{B}^T(t-s)}e^{-\mathbf{B}(t-s)}\mathbf{n}_i(s)\big].\end{aligned}\tag{39}$$

这里，我们使用了白噪声的性质公式（3）。与公式（35）给出的$\mathbf{B}$的定义相似，不难证明以下结论：如果矩阵$\mathbf{J}$ 是对角矩阵，则有以下恒等式：$\mathbf{JA} = \mathbf{AJ}$，$[\mathbf{B},\ \mathbf{B}^T] = 0$. 雅可比矩阵公式（26）确实是对角矩阵，$\mathbf{J} = \mathrm{diag}(-4\Lambda,\ -4\Lambda)$, 因此在我们的情形下，$[\mathbf{B},\ \mathbf{B}^T] = 0$成立。因此，根据 Baker-Campbell-Hausdorff 公式，我们有

$$e^{-\mathbf{B}^T(t-s)}e^{-\mathbf{B}(t-s)} = e^{-(\mathbf{B}^T+\mathbf{B})(t-s)} = e^{-\kappa(t-s)}\mathbf{I}.$$

因此，式（39）给出的随机过程$\mathbf{u}_i(t)$的方差可显式计算如下

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_i \ =\ & \mathrm{E}\big[\big(\mathbf{u}_i(t)-\overline{\mathbf{u}_i(t)}\big)^T\big(\mathbf{u}_i(t)-\overline{\mathbf{u}_i(t)}\big)\big]\\ =\ & 2\kappa T\int_0^t ds e^{-\kappa(t-s)}\\ =\ & 2T(1-e^{-\kappa t}).\end{aligned}\tag{40}$$

在图 2(c) 中，我们将方差（40）与精确数值模拟以及采用旋波近似方法得到的结果进行了比较。我们的分析基于稳定点附近的线性展开，在短时动力学中效果良好。随着粒子逐渐远离稳定点，偏差也逐渐增大，

结合式（33），在长时间极限下有 $t \to \infty$, $|\mathbf{Z}_i - \tilde{\mathbf{Z}}_i^0|^2 = 2T$. 因此，长时间分布是宽度为 $\sigma = \sqrt{2T}$ 的正态分布。为了保持相空间晶体稳定，我们需要色散宽度远小于晶胞的特征长度（这里取 $\pi/2$）

$$\sigma = \sqrt{2T} \ll \pi/2 \quad \Rightarrow \quad T \ll \pi^2/8. \tag{41}$$

事实上，将能量均分定理应用于实验室参考系中的系统，可以直接得到上述关系。考虑一个粒子被困在谐势阱底部，并受到温度为 T 的浴作用，其热基态的宽度为 $\frac{1}{2}X_i^2 + \frac{1}{2}P_i^2 = T$。注意，这里我们令玻尔兹曼常数 $k_B = 1$。实际上，对于任意不动点，在温度足够低、只有慢运动发生热化的范围内，有

$$\overline{\frac{1}{2}(X_i - \overline{X}_i^0)^2} + \overline{\frac{1}{2}(P_i - \overline{P}_i^0)^2} = T,$$

因此 $\overline{|\mathbf{Z}_i - \mathbf{Z}_i^0|^2} = 2T$，其中 $\mathbf{Z}_i^0$ 是谐振子的平均相空间位置。式（41）的条件仅意味着，相空间晶格常数（驱动晶格的特征长度）必须远大于热态的宽度。

C. 相互作用效应

现在我们研究相互作用对相空间晶体存在性的影响。为方便起见，我们将总哈密顿量分解为两部分之和

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_i \Lambda(\cos X_i + \cos P_i)^2 + \sum_{i<j} U(R_{ij}) \\ &\equiv \mathcal{T} + \Phi. \end{aligned} \tag{42}$$

这里，我们引入了 $\mathcal{T} \equiv \sum_i \Lambda(\cos X_i + \cos P_i)^2$，表示所有单粒子正方晶格哈密顿量的总和；并引入了 $\Phi \equiv \sum_{i<j} U(R_{ij})$，表示相互作用势的总和。在存在耗散但处于零温 $T = 0$ 的情况下，不动点由条件 $\mathbf{F}_i = 0$ 给出，参见式（23），

$$\nabla_i \mathcal{T}\big|_{\mathbf{Z}_i = \tilde{\mathbf{z}}_i^0} = -\nabla_i \Phi\big|_{\mathbf{Z}_i = \tilde{\mathbf{z}}_i^0} + \frac{1}{2}\kappa(\hat{\mathbf{n}} \times \tilde{\mathbf{Z}}_i^0), \tag{43}$$

其中 $\tilde{\mathbf{Z}}_i^0$ 是待计算的偏移后的不动点。将上述条件在原始不动点附近线性化

点 $\mathbf{Z}_i^0$ 满足 $\nabla_i \mathcal{T}|_{\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_i^0} = 0$，我们得到

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathcal{T}}(\tilde{\mathbf{Z}}_i^0 - \mathbf{Z}_i^0) &= -\nabla_i \Phi(\mathbf{Z}_i^0) - \mathbf{J}_\Phi(\tilde{\mathbf{Z}}_i^0 - \mathbf{Z}_i^0) \\ &\quad + \frac{1}{2}\kappa \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{Z}}_i^0 - \mathbf{Z}_i^0) + \frac{1}{2}\kappa \mathbf{A}\mathbf{Z}_i^0, \end{aligned} \tag{44}$$

其中 $\mathbf{J}_{\mathcal{T}}$ 和 $\mathbf{J}_\Phi$ 是定义如下的雅可比张量

$$\mathbf{J}_{\mathcal{T}} \equiv \mathbf{J}_{\nabla_i \mathcal{T}}|_{\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_i^0} \equiv \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial X_i \partial X_i} & \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial X_i \partial P_i} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial P_i \partial X_i} & \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial P_i \partial P_i} \end{array} \right)\Bigg|_{\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_i^0}, \tag{45}$$

$$\mathbf{J}_\Phi \equiv \mathbf{J}_{\nabla_i \Phi}|_{\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_i^0} \equiv \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_i \partial X_i} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X_i \partial P_i} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_i \partial X_i} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_i \partial P_i} \end{array} \right)\Bigg|_{\mathbf{Z}_i = \mathbf{Z}_i^0}. \tag{46}$$

因此，我们得到偏移后的平衡点

$$\tilde{\mathbf{Z}}_i^0 - \mathbf{Z}_i^0 = \big(\mathbf{J}_{\mathcal{T}} + \mathbf{J}_\Phi - \frac{1}{2}\kappa \mathbf{A}\big)^{-1}\big[\frac{1}{2}\kappa \mathbf{A}\mathbf{Z}_i^0 - \nabla_i \Phi(\mathbf{Z}_i^0)\big]. \tag{47}$$

张量 $\mathbf{J}_{\mathcal{T}}$ 的计算很简单，参见式（26）。难点在于计算 $\mathbf{J}_\Phi$ 和 $\nabla_i \Phi(\mathbf{Z}_i^0)$。下面，我们给出一种近似方法来进行解析计算。

对于库仑型相空间相互作用势 $U(R_{ij}) = \pi^{-1}\beta/R_{ij}$，参见式（9），参数 β 起有效电荷的作用。我们假设 N 个原子最初均匀分布在半径为 R、密度为 $\rho \equiv N/(\pi R^2)$ 的圆盘形区域内。我们将点电荷展宽为电荷密度为 $\beta\rho$ 的均匀电荷分布。于是，圆盘边缘处的相互作用势为

$$\begin{aligned} \Phi(R) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} r dr \frac{\beta\rho}{\pi r} \\ &= \frac{1}{\pi}\beta\rho \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} dr \\ &= \frac{4}{\pi}\beta\rho R. \end{aligned} \tag{48}$$

因此，边缘处相互作用势的梯度为

$$\nabla_i \Phi(R) = \frac{4}{\pi}\beta\rho \hat{\mathbf{n}}_\mathbf{i}^\mathbf{0} \quad \text{and} \quad \mathbf{J}_\Phi = 0, \tag{49}$$

其中，$\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{i}^\mathbf{0}$ 是从圆盘中心指向第 i 个原子的初始平衡位置的单位方向，即 $\mathbf{Z}_i^0 = Z_i^0 \hat{\mathbf{n}}_i^0$。注意，式（49）给出的相空间力仅适用于边缘处的原子，且与半径 R 无关。

利用公式 (26)–(28) 和 (47)，可得偏移固定点的解析表达式如下

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Z}}_i^0 - \mathbf{Z}_i^0 &= -\frac{\kappa(4\Lambda)Z_i^0/2 + 2\kappa\pi^{-1}\beta\rho}{(4\Lambda)^2 + \kappa^2/4}\hat{\mathbf{n}} \times \hat{\mathbf{n}}_i^0 \\ &\quad - \frac{\kappa^2 Z_i^0/4 - 4(4\Lambda)\pi^{-1}\beta\rho}{(4\Lambda)^2 + \kappa^2/4}\hat{\mathbf{n}}_i^0. \end{aligned} \tag{50}$$

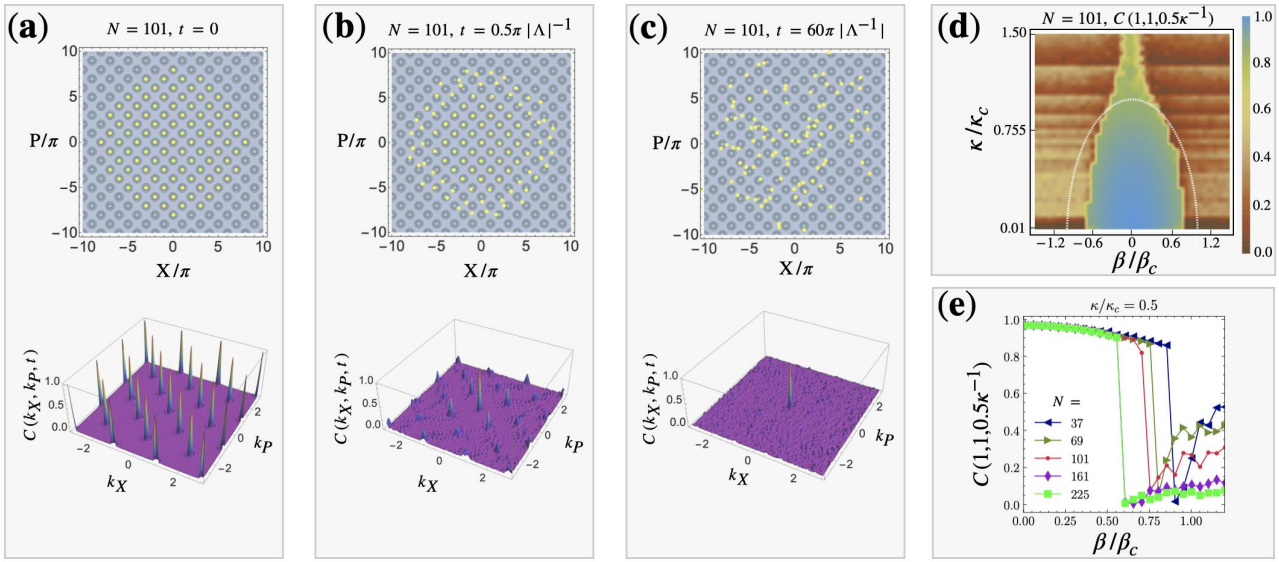

图 4. **晶体序参量与相图。(a)-(c):** 在时刻 $t=0$ (a)、 $t=0.5\pi|\Lambda^{-1}|$ (b) 和 $t=60\pi|\Lambda^{-1}|$ (c)，当 $\Lambda=-0.01$、相互作用强度为 $\beta=1.5\beta_c$、耗散率为 $\kappa=0$ 且温度为 $T=0$时， $N=101$ 个原子在相空间中的构型（上图），以及相空间中 (k_X,k_P) 平面上的晶体序参量 $C(k_X,k_P,t)$（下图）。**(d):** 相图，即晶体序参量 $C(k_X=1,k_P=1,t=\frac{1}{2\kappa})$ 随缩放后的相互作用强度 β/β_c 和缩放后的耗散率 κ/κ_c 的变化。原子数为 $N=101$，温度为零（$T=0$）。黄色曲线对应解析预测 (56)。(e) 晶体序参量 $C(1,1,\frac{1}{2\kappa})$ 随相互作用强度的变化，不同原子数 $N=37$、69、101、161、225 对应不同曲线。耗散率为 $\kappa=0.5\kappa_c$。注意， $N=161$ 和 225 对应的曲线几乎重合。

与公式 (28) 相比，相互作用基本上是对耗散效应的修正。新的平衡位置为

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{Z}}_i^0 &= -\frac{\kappa(4\Lambda)Z_i^0/2+2\kappa\pi^{-1}\beta\rho}{(4\Lambda)^2+\kappa^2/4}\hat{\mathbf{n}}\times\hat{\mathbf{n}}_i^0 \\ &\quad+\frac{(4\Lambda)^2Z_i^0+4(4\Lambda)\pi^{-1}\beta\rho}{(4\Lambda)^2+\kappa^2/4}\hat{\mathbf{n}}_i^0. \end{aligned}\tag{51}$$

根据式 (29)，我们得到具有相互作用的相空间晶体的存在条件

$$\begin{aligned}&\Big|-4\pi^{-1}\beta\rho\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{i}^\mathbf{0}+\frac{1}{2}\kappa\big(\hat{\mathbf{n}}\times\tilde{\mathbf{Z}}_i^0\big)\Big|=|\nabla_i\mathcal{T}| \\ &=2\Big|\Lambda(\cos X_i+\cos P_i)\Big|\sqrt{\sin^2X_i+\sin^2P_i} \\ &\leqslant 2\sqrt{2}|\Lambda|. \end{aligned}\tag{52}$$

与式 (29) 一样，将上限修改为 $2|\Lambda|$，并将式 (51) 代入式 (52)，我们得到稳定相空间晶体态的存在条件

$$\Big(\frac{4\beta\rho}{\pi}\Big)^2+\Big(\frac{\kappa}{2}\Big)^2\left[\frac{(4\Lambda)^2Z_i^0+4(4\Lambda)\frac{\beta\rho}{\pi}}{(4\Lambda)^2+\left(\frac{\kappa}{2}\right)^2}\right]^2\leqslant(2\Lambda)^2. \tag{53}$$

引入临界相互作用强度和临界耗散率如下

$$\beta_c\equiv\frac{\pi|\Lambda|}{2\sigma_a}=\pi^3|\Lambda|,\quad \kappa_c\equiv\frac{4|\Lambda|}{Z_i^0}=\frac{4|\Lambda|}{\sqrt{2\pi N}}, \tag{54}$$

其中，我们假设每个不动点上存在一个原子，即 $\rho=\sigma_a=2/(2\pi)^2$ 和 $\pi(Z_i^0)^2\sigma_a=N$，存在条件 (53) 变为

$$\Big(\frac{\beta}{\beta_c}\Big)^2+\Big(\frac{\kappa}{\kappa_c}\Big)^2\left[\frac{1+\frac{\beta}{\beta_c}\frac{1}{2Z_i^0}}{1+\left(\frac{\kappa}{\kappa_c}\right)^2\left(\frac{1}{2Z_i^0}\right)^2}\right]^2\leqslant 1. \tag{55}$$

对于较大的晶格 $|Z_i^0|\gg 1$，我们得到一个简单的条件

$$\Big(\frac{\beta}{\beta_c}\Big)^2+\Big(\frac{\kappa}{\kappa_c}\Big)^2\lesssim 1. \tag{56}$$

尽管这一相空间晶体的存在条件是基于动力系统的线性分析及其他近似推导得出的，但正如下文的数值模拟所示，它对相变给出了非常准确的估计。当条件 (56) 不再成立时，边缘处的原子会首先脱离其稳定点，整个晶体开始从边缘熔化，参见图 4(b)。

D. 相图

为确定相空间晶体是否存在，我们将晶体序参量定义如下

$$C(k_X,k_P,t)\equiv\left|\frac{1}{N}\sum_j e^{ik_XX_j(t)+ik_PP_j(t)}\right|^2. \tag{57}$$

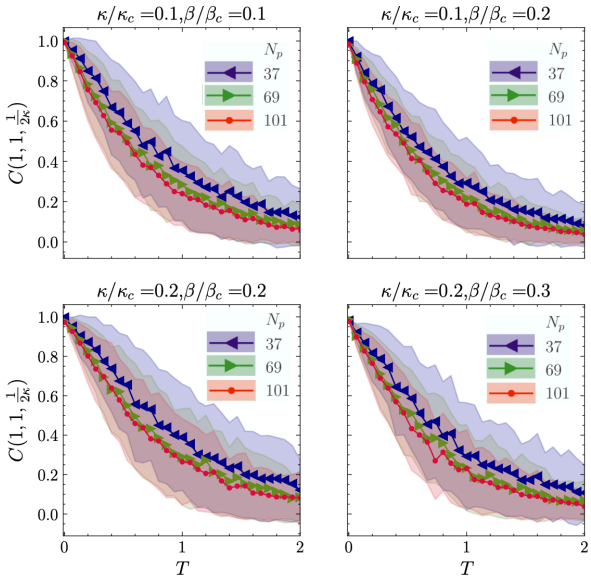

图5. **不同原子数下，晶体序参量随温度的变化**，耗散率和相互作用强度固定。相连的数据点表示经过 $N_{iter}=200$ 条轨迹平均得到的晶体序参量 $C(1,1,\frac{1}{2\kappa})$，彩色阴影表示标准差 σ_C。对 $N_{iter}=200$条轨迹的均值计算得到的标准误差为 $\sigma_C/\sqrt{N_{iter}}$。

在图 4 中，我们绘制了不同系统参数下的晶体序参量。

我们首先说明在没有耗散（$\kappa=0$）但相互作用强度大于临界值时，晶体会发生什么。在图 4(a) 中，我们从这样一个初始态出发： $N=101$ 个原子占据有限圆盘形区域内的晶格点。图 4(a) 还展示了相应的晶体序参量关于k_X 和 k_P 的函数关系。对于这种完美的晶体态，序参量图包含规则排列的峰，这些峰在（k_X， k_P）相空间中周期性分布；也就是说，峰的位置出现在（n， m）点上，其中 n， $m\in\mathbb{Z}$ 具有相同的奇偶性。在图 4(b) 中，我们绘制了时刻 $t=0.5\pi|\Lambda^{-1}|$ 、 $\Lambda=-0.01$条件下，$N=101$ 个原子在相空间中的构型，以及（k_X， k_P）空间中的晶体序参量。显然，对于我们在此考虑的相互作用强度 $\beta/\beta_c=1.5$ 和耗散率 $\kappa=0$ ，晶体开始从边缘熔化，正如上文预测的那样，参见式 (56) 及其相关讨论。图 4(b) 下方面板中的相应晶体序参量图显示，除中心处的平凡峰（$k_X=0$， $k_P=0$）外，所有峰都逐渐消失。在图 4(c) 中，我们绘制了时刻 $t=60\pi|\Lambda^{-1}|$ 、$\Lambda=-0.01$条件下原子在相空间中的构型以及晶体序参量。所有原子都脱离各自的平衡点，并扩散到整个相空间，形成相空间中的类气体态。由于所有原子在相空间中随机分布，晶体序参量图中的所有非平凡峰都在消失。

现在，我们考虑存在耗散但温度为零的情况。我们选取点($k_X=1,k_P=1$)处晶体序参量的峰值来描绘相图。由于耗散有限，原子需要一定时间才能弛豫到最终态。特征弛豫时间尺度约为 $1/(2\kappa)$。在图4(d)中，我们绘制了 $N=101$ 个原子的晶体序参量 $C(1,1,\frac{1}{2\kappa})$随缩放后的相互作用强度 β/β_c 和缩放后的耗散率 κ/κ_c的变化。从图中可以清楚地看到，在由耗散和相互作用构成的参数空间中，存在一个序参量不为零的区域。在图4(e)中，我们绘制了耗散率为 $\kappa=0.5\kappa_c$ 时，五种不同原子数下晶体序参量随相互作用强度的变化，即 $N=37$, 69,101,161,225。序参量的突然跃变表明发生了不连续相变。随着原子数增加且密度保持均匀（趋近于类似平衡态热力学极限的情形），相变点趋近于一个不动点，该点接近于（实际上略低于）我们基于线性分析预测的值 β_c ；参见 $N=161$ 和$N=225$对应的相变曲线。

为了展示热噪声对相空间晶体形成的影响，我们在图5中绘出了不同耗散率和相互作用强度下，晶体序参量 $C(1,1,\frac{1}{2\kappa})$ 随温度的变化曲线。图中展示了通过模拟 200 种不同噪声实现得到的晶体序参量平均值（相连的点）和标准差（彩色阴影）。在低温下（$T\ll 1$），序参量接近 1，表明相空间中存在晶体态。相反，在足够高的温度下，序参量非常接近 0，表明相空间中的晶体态已完全消失。在每幅图中，我们针对三种不同的系统大小（原子数）计算了晶体序参量。随着原子数增加，曲线趋近于对应热力学极限的固定曲线。对于每组参数，零温（$T=0$）下的标准差为零；随后随着温度升高，标准差开始增大。但当温度足够高时，标准差又会降至零。这是因为相空间晶体态不复存在，并且在我们模拟的所有噪声实现中，晶体序参量都消失了。

V. 实验参数

现在，我们讨论在真实的冷原子实验中，能否满足实现经典相空间晶体的条件。我们首先考察旋波近似条件：在我们的单位制下，驱动强度 Λ、耗散率 κ 和相互作用强度 β 应远小于 1[55,60]。恢复参数的单位后，

我们得到旋波近似条件

$$|\Lambda|,\ \frac{\beta}{l_0} \ll \epsilon_0 = m\omega_0^2\Big(\frac{l_0}{2\pi}\Big)^2, \quad \kappa \ll \omega_0. \tag{58}$$

在冷原子实验中[59],，通过传播高斯激光束形成具有较强横向囚禁频率的准一维谐振势。由此产生的横向囚禁频率 ω_{tr} 和轴向囚禁频率 ω_0 分别为 $\omega_{tr} = \frac{2E_r}{\hbar}\sqrt{\frac{V_0}{E_r}}$、$\omega_0 = \lambda_L\omega_{tr}/\pi w_0$，其中 w_0 为高斯光束腰斑，λ_L（$k_L = 2\pi/\lambda_L$）为激光波长（波数），V_0 为激光强度，$E_r = \hbar^2k_L^2/2m$ 为一个原子的反冲能量。

对于存在波长为$\lambda_L = 823\,\mathrm{nm}$、光束腰斑为 $w_0 = 160\mu\mathrm{m}$、强度为$V_0 = 27E_r$的高斯激光时的冷原子 ^{87}Rb （$m = 1.42\times10^{-25}\mathrm{kg}$），横向和轴向囚禁频率分别为 $\omega_{tr}/2\pi = 36\mathrm{kHz}$ 和 $\omega_0/2\pi = 59\mathrm{Hz}$。将驱动势晶格的特征长度（由另外两束激光产生，见图 1）设为轴向囚禁长度 $l_0 = 50\sqrt{\hbar/m\omega_0}$ =71 μm 的五十倍，可得驱动强度满足以下旋波近似条件

$$|\Lambda| \ll \epsilon_0 = 1.08E_r \tag{59}$$

反冲能为 $E_r = 2.29\times10^{-30}\mathrm{J}$。因此，我们可以调节产生驱动晶格势的激光强度，使其满足旋波近似。

在准一维阱中，有效接触相互作用为[57] $V_{1D}(x) \approx 2\hbar\omega_{tr}a_0\delta(x)$，其中 a_0 是三维s-波散射长度。因此，根据式（58），我们得到相互作用强度满足旋波近似的条件

$$\frac{\beta}{l_0} = \frac{2\hbar\omega_{tr}a_0}{l_0} \ll \epsilon_0. \tag{60}$$

对于 ^{87}Rb个原子，取三维散射长度为 $a_0 = 5.3\mathrm{nm}$，可得满足旋波近似的相互作用强度 $\beta \approx 0.00144\epsilon_0 l_0$。相互作用强度还可以通过横向囚禁频率 ω_{tr} 或费什巴赫共振[57]进一步调节。

接下来，我们估算图 4 中相图的临界参数。根据式（54），恢复单位后可得临界驱动强度和临界耗散率

$$\frac{\beta_c}{\epsilon_0 l_0} = \frac{\pi^3|\Lambda|}{\epsilon_0}, \quad \kappa_c = \frac{4|\Lambda|}{\sqrt{2\pi N}}\frac{\omega_0}{\epsilon_0} \tag{61}$$

利用驱动强度 $|\Lambda| = 0.01\epsilon_0$ 和原子数 $N = 225$，我们得到临界值 $\beta_c \approx 0.31\epsilon_0 l_0$和 $\kappa_c \approx 0.0038\omega_0$。单个原子的耗散率（阻尼系数） κ/ω_0 可通过调节激光相对于原子频率的失谐量来调控，并在共振时设为 $\kappa = 0$ [62]。最后，要获得稳定的相空间晶体，我们需要满足公式 (41) 中的温度条件

$$T \ll \frac{\pi^2}{8}\frac{\epsilon_0}{k_B} \approx 179\,\mathrm{nK}, \tag{62}$$

该条件对应于冷原子实验中常见的温度范围，即从纳开尔文到微开尔文范围[57]。

VI. 总结与讨论

多体相空间晶体是经典或量子多体动力学系统中的一种有序、高度激发态。以往关于相空间晶体的研究仅限于封闭系统。本文研究了热噪声存在时，开放耗散环境中经典多体相空间晶体的动力学。我们从存在耗散且温度非零时系统在实验室参考系中的精确运动方程出发。随后，我们推导并论证了在旋转参考系中基于旋转波近似得到的运动方程，该方程描述了谐振荡正交分量的慢动力学。我们对相空间晶体的稳定性进行了线性分析，发现强耗散、强相互作用和高温都可能破坏相空间中的晶体态。我们估算了相空间晶体被破坏时各参数的临界值。通过定义晶体序参量，我们绘制了耗散-相互作用参数平面中的相图，并给出了序参量随温度变化的关系。主要结论是，在冷原子实验中，某些参数范围内确实存在相空间晶体态。

为了制备这样的相空间晶体，可以根据我们的预测，首先将原子云的驱动、耗散和相互作用参数设定在临界值以下，同时保持相对较高的温度。在这种情况下，热噪声会激发原子，使其在相空间中扩散。随后，在冷却原子的过程中，有限的耗散将帮助原子弛豫到附近的稳定点，从而形成一些相空间晶体区块。由于本工作的主要目标是证明相空间晶体态的存在，我们将在未来的工作中详细研究如何制备相空间晶体。

在这项工作中，我们研究了单粒子哈密顿量的方形相空间晶体结构。将其扩展到其他晶格结构（如蜂窝晶格）是直接可行的。已有研究表明，蜂窝晶格的相空间晶体振动能带结构能够在不破坏时间反演对称性的情况下支持手性输运[56]。这类反常陈绝缘体尚未在实验中实现。我们仅研究了经典区域中的相空间晶体动力学。量子区域中的扩展研究与（分数量子）霍尔物理和一维任意子[63,64]，密切相关，将是我们未来的工作。

致谢

我们感谢 Vittorio Peano 和 Florian Marquardt 的有益讨论。波兰国家科学中心通过项目编号 2018/31/B/ST2/00349（A.E.K.）提供的支持谨此致谢。本研究还部分获得了波兰国家科学中心项目编号 2021/42/A/ST2/00017（K.S.）的资助。为实现开放获取，作者已将 CC-BY 公共版权许可应用于由本次投稿产生的任何作者接受稿（AAM）版本。本研究中的数值计算还部分得到了 PL-Grid 基础设施的支持。

附录 A：正方形相空间晶格

为展示如何生成式（18）中的单粒子正方形相空间晶格，我们从以下踢振谐振子的广义模型出发

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(x^2+p^2) \\ &\quad + \sum_{n\in\mathbb{Z}}\sum_{q} K_q \cos(k_q x-\phi_q)\delta(\frac{t}{\tau}-\theta_q-n), \end{aligned} \tag{A1}$$

其中， q 表示频闪晶格的踢击序列，其强度 K_q、波矢 k_q 和相位 ϕ_q 可调，并在不同时间点 $t=\tau\,(n+\theta_q)$ 施加，其中$n\in\mathbb{Z}$。为简化讨论，我们先考虑单个踢击序列，即

$$\begin{aligned} H_s &= \frac{1}{2}(x^2+p^2) \\ &\quad + \sum_{n\in\mathbb{Z}} K_q \cos(k_q x-\phi_q)\delta(\frac{t}{\tau}-\theta_q-n). \end{aligned} \tag{A2}$$

我们利用第二类生成函数，将上述哈密顿量变换到踢击频率为 $2\pi/\tau$ 的旋转参考系中

$$G_2(x,P,t)=\frac{xP}{\cos(2\pi t/\tau)}-\frac{x^2}{2}\tan\Big(\frac{2\pi}{\tau}t\Big)-\frac{P^2}{2}\tan\Big(\frac{2\pi}{\tau}t\Big),$$

从而得到相空间坐标的变换，

$$\begin{aligned} x &= P\sin(\frac{2\pi t}{\tau})+X\cos(\frac{2\pi t}{\tau}), \\ p &= P\cos(\frac{2\pi t}{\tau})-X\sin(\frac{2\pi t}{\tau}). \end{aligned} \tag{A3}$$

以及变换后的哈密顿量

$$\begin{aligned} H_s(X,P,t) &= \frac{1}{2}\delta\omega(X^2+P^2)+\sum_{n\in\mathbb{Z}} K_q\delta(\frac{t}{\tau}-\theta_q-n) \\ &\quad \cos(k_q[P\sin(\frac{2\pi t}{\tau})+X\cos(\frac{2\pi t}{\tau})]-\phi_q). \end{aligned} \tag{A4}$$

这里， $\delta\omega\equiv 1-2\pi/\tau$是踢振频率与谐振子频率之间的失谐。对于较弱的共振驱动（$|K_q|\ll 1$，$\tau=2\pi$），对哈密顿量进行快速谐振振荡平均，可简化单粒子动力学。正交分量的有效慢动力学由最低阶 Magnus 展开给出，即在一个踢振周期内对 $H_s(X,\ P,\ t)$ 求时间平均，

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s(X,P) &= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau H_s(X,P,t)dt \\ &= K_q\cos(k_q[P\sin(2\pi\theta_q)+X\cos(2\pi\theta_q)]-\phi_q). \end{aligned} \tag{A5}$$

将式 (A1) 中的所有踢击项纳入考虑后，我们得到相空间晶格哈密顿量的一般形式

$$\mathcal{H}_s=\sum_q K_q\cos(k_q[P\sin(2\pi\theta_q)+X\cos(2\pi\theta_q)]-\phi_q). \tag{A6}$$

原则上，可以通过多个频闪晶格合成相空间中的任意晶格哈密顿量。对于本文研究的正方晶格，我们可以将正方晶格分解为一系列余弦函数，从而得到所需的驱动参数，即

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_s(X,P) &= \Lambda(\cos X+\cos P)^2 \\ &= \Lambda[1+\frac{1}{2}\cos(2X)+\frac{1}{2}\cos(2P) \\ &\quad +\cos(X+P)+\cos(X-P)]. \end{aligned} \tag{A7}$$

我们将上式中的每一项分解如下

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cos(2X) &= \frac{1}{2}\cos(2[X\cos(2\pi)+P\sin(2\pi)]), \\ \frac{1}{2}\cos(2P) &= \frac{1}{2}\cos(2[X\cos(\frac{2\pi}{4})+P\sin(\frac{2\pi}{4})]), \end{aligned} \tag{A8}$$

and

$$\begin{aligned} \cos(X+P) &= \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}[X\cos(\frac{2\pi}{8})+P\sin(\frac{2\pi}{8})])+ \\ &\quad \frac{1}{2}\cos(-\sqrt{2}[X\cos(\frac{10\pi}{8})+P\sin(\frac{10\pi}{8})]), \\ \cos(X-P) &= \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}[X\cos(\frac{14\pi}{8})+P\sin(\frac{14\pi}{8})])+ \\ &\quad \frac{1}{2}\cos(-\sqrt{2}[X\cos(\frac{6\pi}{8})+P\sin(\frac{6\pi}{8})]). \end{aligned} \tag{A9}$$

通过将上述展开式与式 (A6) 进行比较，我们可以通过选择以下踢击参数来生成方形相空间哈密顿量：

$$\begin{aligned} k_q &= [\sqrt{2},2,-\sqrt{2},-\sqrt{2},\sqrt{2},2] \\ \theta_q &= [\frac{1}{8},\frac{2}{8},\frac{3}{8},\frac{5}{8},\frac{7}{8},1], \end{aligned} \tag{A10}$$

以及 $K_q=\Lambda/2$ 以及 $\phi_q=0$ 对于所有 q。

* lingzhen.guo@mpl.mpg.de[1] 久保亮五，《不可逆过程的统计力学理论：I. 一般理论及其在磁学和传导问题中的简单应用》，日本物理学会誌 12，570–586（1957）。[2] 拉斯·昂萨格，《不可逆过程中的互易关系：I》，《物理评论》37，405–426（1931）。[3]伊利亚·普里戈金，《开放系统的调节与不可逆转变》，比利时皇家科学院科学部通报 31，600 606 1945–（）。[4] 伊利亚·普里戈金，《时间、结构与涨落》，《科学》201，777–785（1978）。[5] H. Haken，《高级协同学：自组织系统与器件的不稳定性层级》（柏林、纽约：施普林格出版社，1983）。[6] 藏本由纪和 Ikuko Nishikawa，《大型动力系统的统计宏观动力学：振子群体发生相变的情形》，《统计物理学杂志》49，569–605（1987）。[7] 罗伯特·M·梅，《具有极其复杂动力学的简单数学模型》，《自然》261，459–467（1976）。[8] 爱德华·N·洛伦兹，《确定性非周期流》，《大气科学杂志》20，130–141（1963）。[9] G. Nicolis 和 I. Prigogine，《非平衡系统中的自组织：从耗散结构到通过涨落形成有序》（威利出版社，纽约，1977）。[10] A V Getling，《瑞利-贝纳德对流》（世界科学出版社，1998）。[11] J. L. Hudson 和 J. C. Mankin，《贝洛索夫-扎博廷斯基反应中的混沌》，《化学物理学杂志》74，6171–6177（1981）。[12] Tony E. Lee 和 H. R. Sadeghpour，《囚禁离子中量子范德波尔振子的量子同步》，《物理评论快报》111，234101（2013）。[13] Niels L¨orch、Simon E. Nigg、Andreas Nunnenkamp、Rakesh P. Tiwari 和 Christoph Bruder，《量子同步阻塞：能量量子化阻碍相同振子的同步》，《物理评论快报》118，243602 2017（）。[14]Talitha Weiss、Stefan Walter 和 Florian Marquardt，《同步中的量子相干相位振荡》，《物理评论 A》95，041802(R)（2017）。[15] Nissi Thomas 和 M. Senthilvelan，《二次耦合量子范德波尔振子的量子同步》，《物理评论 A》106，012422（2022）。[16]Ida-Maria Svensson、Andreas Bengtsson、Philip Krantz、Jonas Bylander、Vitaly Shumeiko 和 Per Delsing，《驱动超导谐振器中的周期三倍亚谐振荡》，《物理评论 B》96，174503（2017）。[17] Ida-Maria Svensson、Andreas Bengtsson、Jonas Bylander、Vitaly Shumeiko 和 Per Delsing，《参数驱动超导谐振器中的周期倍增》，《应用物理快报》113，022602（2018）。[18]Lisa Arndt 和 Fabian Hassler，《超越旋波近似的约瑟夫森参量下转换导致的周期三倍化》，《物理评论 B》106，014513（2022）。[19] Achilleas Lazarides、Arnab Das 和 Roderich Moessner，《受周期驱动的通用量子系统的平衡态》，《物理评论 E》90，012110（2014）。[20]Luca D'Alessio 和 Marcos Rigol，《孤立周期驱动相互作用晶格系统的长时间行为》，《物理评论 X》4, 041048 (2014). [21] Pedro Ponte、Anushya Chandran、Z. Papi´c 和 Dmitry A. Abanin，《周期驱动的遍历量子系统与多体局域化量子系统》，《物理学年鉴》353, 196–204 (2015). [22] Krzysztof Sacha 和 Jakub Zakrzewski，《时间晶体：综述》，《物理学进展报告》81, 016401 (2017). [23] Vedika Khemani、Roderich Moessner 和 S. L. Sondhi，《时间晶体简史》，(2019). [24] Dominic V. Else、Christopher Monroe、Chetan Nayak 和 Norman Y. Yao，《离散时间晶体》，《凝聚态物理年度评论》11, 467–499 (2020). [25] Lingzhen Guo 和 Pengfei Liang，《时间晶体中的凝聚态物理》，《新物理学杂志》22, 075003 2020( ).[26] Vedika Khemani、Achilleas Lazarides、Roderich Moessner 和 S. L. Sondhi，《驱动量子系统的相结构》，《物理评论快报》116, 250401 (2016). [27] Dominic V. Else、Bela Bauer 和 Chetan Nayak，《Floquet时间晶体》，《物理评论快报》117, 090402 (2016). [28] N. Y. Yao、A. C. Potter、I.-D. Potirniche 和 A. Vish- wanath，《离散时间晶体：刚性、临界性与实现方式》，《物理评论快报》118, 030401 (2017).[29] Krzysztof Sacha，《时间平移对称性自发破缺的建模》，《物理评论 A》91, 033617 (2015).[30]Angelo Russomanno、Fernando Iemini、Marcello Dal- monte 和 Rosario Fazio，《Lipkin-Meshkov-Glick模型中的Floquet时间晶体》，《物理评论 B》95, 214307 (2017).[31]Krzysztof Giergiel、Arkadiusz Kosior、Peter Hannaford 和 Krzysztof Sacha，《时间晶体：实验条件分析》，《物理评论 A》98, 013613 (2018).[32] Pawe-l Matus 和 Krzysztof Sacha，《分数时间晶体》，《物理评论 A》99, 033626 (2019).[33] Krzysztof Giergiel、Arkadiusz Kuro´s 和 Krzysztof Sacha，《离散时间准晶》，《物理评论 B》99, 220303(R) (2019). [34] Takashi Mori、Tomotaka Kuwahara 和 Keiji Saito，《周期驱动量子系统中能量吸收与一般弛豫的严格界限》，《物理评论快报》116, 120401 (2016).[35]Tomotaka Kuwahara、Takashi Mori 和 Keiji Saito，《Floquet-Magnus理论与周期驱动多体量子系统中的一般瞬态动力学》，《物理学年鉴》367, 96–124 (2016). [36] Dmitry A. Abanin、Wojciech De Roeck 和 Fran.cois Hu- veneers，《周期驱动多体系统中的指数级缓慢加热》，《物理评论快报》115, 256803 (2015). [37] Kihwan Kim、Myoung-Sun Heo、Ki-Hwan Lee、Kiyoub Jang、Heung-Ryoul Noh、Doochul Kim 和 Wonho Jhe，《非绝热驱动原子阱中的布居数自发对称性破缺：伊辛类相变》，《物理评论快报》96, 150601 (2006).[38] Myoung-Sun Heo、Yonghee Kim、Kihwan Kim、Geol Moon、Junhyun Lee、Heung-Ryoul Noh、M. I. Dykman 和 Wonho Jhe，《调制冷原子系统中的理想平均场相变》，《物理评论 E》82, 031134 (2010). [39] David J. Luitz、Roderich Moessner、S. L. Sondhi 和 Vedika Khemani，《无温度预热化》，《物理评论 X》10

“，021046 (2020). [40] Dominic V. Else、Bela Bauer 和 Chetan Nayak，《受时间平移对称性保护的物质预热相》，《物理评论 X》7, 011026 (2017). [41] S. Autti、P. J. Heikkinen、J. T. M¨akinen、G. E. Volovik、V. V. Zavjalov 和 V. B. Eltsov，《两个超流时间晶体之间的交流约瑟夫森效应》，《自然·材料》20, 171–17 (2021).[42] Peter Hannaford 和 Krzysztof Sacha，《大型离散时间晶体中的凝聚态物理》，《亚太物理学会联合会通报》32, 12 2022( ). [43] Krzysztof Giergiel、Artur Miroszewski 和 Krzysztof Sacha，《时间晶体平台：从时间中的准晶结构到具有奇异相互作用的系统》，《物理评论快报》120, 140401 (2018).[44] Krzysztof Giergiel、Tien Tran、Ali Zaheer、Arpana Singh、Andrei Sidorov、Krzysztof Sacha 和 Peter Hannaford，《利用超冷原子构造大型时间晶体》，《新物理学杂志》22, 085004 (2020).[45] Arkadiusz Kuro´s、Rick Mukherjee、Weronika Golletz、Fred- eric Sauvage、Krzysztof Giergiel、Florian Mintert 和 Krzysztof Sacha，《n倍周期离散时间晶体的相图与最优控制》，《新物理学杂志》22, 095001 (2020). [46] Krzysztof Giergiel、Arkadiusz Kuro´s、Arkadiusz Kosior 和 Krzysztof Sacha，《莫比乌斯带上不可分离的时间晶体几何结构》，《物理评论快报》127, 263003 (2021).[47] Pawe-l Matus、Krzysztof Giergiel 和 Krzysztof Sacha，《安德森复合体：安德森局域化导致的原子束缚态》，《物理评论 A》103, 023320 (2021). [48] Peter Hannaford 和 Krzysztof Sacha，《时间晶体十年：何去何从？》，《欧洲物理快报》139, 10001 (2022).[49]Weronika Golletz、Andrzej Czarnecki、Krzysztof Sacha 和 Arkadiusz Kuro´s，《超冷原子在振荡镜上反弹产生时间晶体现象的基础》，《新物理学杂志》24, 093002 (2022). [50] Ali Emami Kopaei、Xuedong Tian、Krzysztof Giergiel 和 Krzysztof Sacha，《经典轨道上里德伯电子的拓扑分子与拓扑局域化》，《物理评论 A》106, L031301 (2022).[51] Lingzhen Guo，《相空间晶体》，2053-2563 (IOP出版社，2021). [52] Krzysztof Sacha，《相空间晶体》，载于《时间晶体》（施普林格国际出版公司，查姆，2020），第237–249.[53]Lingzhen Guo、Michael Marthaler 和 Gerd Sch¨on，“相空间晶体：一种创建准能带结构的新方法”，《物理评论快报》**111**，205303（2013）。[54] Ben Lang 和 Andrew D Armour，“约瑟夫森结-腔电路中的多光子共振”，《新物理学杂志》**23**，033021（2021）。[55]Pengfei Liang、Michael Marthaler 和 Lingzhen Guo，“Floquet多体工程：相空间晶格中的拓扑与多体物理”，《新物理学杂志》**20**，023043（2018）。[56] Lingzhen Guo、Vittorio Peano 和 Florian Marquardt，“相空间晶体振动：保持时间反演对称性的手性边缘态”，《物理评论 B》**105**，094301（2022）。[57] Immanuel Bloch、Jean Dalibard 和 Wilhelm Zwerger，“超冷气体中的多体物理”，《现代物理评论》**80**，885–964（2008）。[58] Zoran Hadzibabic、Sabine Stock、Baptiste Battelier、Vincent Bretin 和 Jean Dalibard，“一列独立玻色-爱因斯坦凝聚体的干涉”，《物理评论快报》**93**，180403（2004）。[59] Henning Moritz、Thilo St¨oferle、Michael K¨ohl 和 Tilman Esslinger，“激发受限一维气体中的集体振荡”，《物理评论快报》**91**，250402（2003）。[60] Lingzhen Guo、Modan Liu 和 Michael Marthaler，“周期驱动的一维经典系统中由短程相互作用产生的有效长距离相互作用”，《物理评论 A》**93**，053616（2016）。[61] Krzysztof Sacha，“时间域中的安德森局域化和莫特绝缘相”，《科学报告》**5**，10787（2015）。[62] Harold J. Metcalf 和 Peter van der Straten，“中性原子的激光冷却与俘获”，载于《光学百科全书》（John Wiley & Sons, Ltd，2007）。[63] Allan D. C. Tosta、Ernesto F. Galv˜ao 和 Daniel J. Brod，“用于一维任意子的高斯光学网络”，《物理评论 A》**104**，022604（2021）。[64] Sebastian Greschner 和 Luis Santos，“一维光学晶格中的任意子哈伯德模型”，《物理评论快报》**115**，053002（2015）。