arXiv:2303.07866v2 [math.CA] 9 Dec 2024

# 奇异摄动常微分方程中的指数渐近分析与高阶斯托克斯现象 *

JOSH SHELTON†、SAMUEL CREW‡、和 PHILIPPE H. TRINH†

**摘要**。 高阶斯托克斯现象可出现在许多由奇异摄动支配的问题的渐近分析中。事实上，在过去二十年里，这一现象已在许多物理应用中出现，从声波和光波现象、重力—毛细波纹，到晶体生长和赤道开尔文波模型。它以普遍的方式出现在高阶常微分方程和偏微分方程的指数渐近分析中。本研究旨在凸显其重要性，并进一步发展研究高阶斯托克斯现象的实用方法，主要面向一般的不可积问题。我们将所提出的形式方法应用于一个二阶线性非齐次常微分方程，以此展示高阶斯托克斯现象最简单的例子。在这个模型问题中，可以显式推导博雷尔变换，从而深入了解超越所有阶结构。我们还回顾并研究了其他实例及其重要的物理联系，包括高阶常微分方程和特征值问题。

**关键词**。 斯托克斯现象、指数渐近分析、超越所有阶的分析

**1. 引言**。 在指数渐近分析领域之外，高阶斯托克斯现象 （HOSP）这一概念仍被认为相对晦涩。然而，正如本文将要说明的那样，它普遍且经常出现在发散渐近展开中。要对许多物理应用中出现的多维问题（例如偏微分方程）进行超越所有阶的分析，似乎有必要深入理解这一现象 [17, 9, 8]。本文着重通过一些相对简单的例子，介绍奇异摄动常微分方程中的高阶斯托克斯现象。例如，我们将展示这一现象也会出现在对看似无害的方程进行渐近分析时，

$$\epsilon^2 y'' + \epsilon(1+z)y' + zy = 1 \tag{1.1}$$

其中 $\epsilon \to 0$ 和 $y = y(z)$。我们将说明为何上述方程很可能是高阶斯托克斯现象最简单的例子，并介绍适用于研究它的技巧。最后，本文还将综述渐近分析中不同学科对这一现象的观点。

我们首先回顾常规斯托克斯现象。在奇异摄动常微分方程的应用中，解通常渐近展开为

$$y(z;\epsilon) \sim y_0(z) + \epsilon y_1(z) + \cdots + \epsilon^n y_n(z) + \cdots, \tag{1.2}$$

其中 $\epsilon \to 0$ 和 $z \in \mathbb{C}$，并将这样的展开称为基级数。晚项 $y_n$ 在 $n \to \infty$ 时发散，而这种发散与 $z \in \mathbb{C}$ 中斯托克斯线的存在相关。穿过这些线时，量级为 $O(\mathrm{e}^{-\chi(z)/\epsilon})$ 的指数小项会通过（常规）斯托克斯现象，在一个小边界层内被激发。如今，这些观点已广为人知（例如参见 Dingle [12] 和 Berry [6] 的综述），

*提交给编辑的日期为2023年3月1日。JS 和 SC 为共同第一作者。**经费支持：** PHT 获英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号 EP/V012479/1。JS 获英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号 EP/W522491/1。本研究获英国工程与自然科学研究委员会资助，项目编号 EP/R014604/1。

†巴斯大学数学科学系，英国 BA2 7AY（jas45@st- andrews.ac.uk,p.trinh@bath.ac.uk）。

‡伦敦帝国理工学院数学系，英国伦敦皇后门街180号，SW7 2AZ。（samuel.c.crew@gmail.com）

而且，在超越所有阶的渐近分析中，已有大量工具可用于研究这些效应，适用领域包括常微分方程、偏微分方程、差分方程、积分方程等。

通常，当 $n \to \infty$ 时， $y_n$ 的发散可用阶乘除以幂次增长来近似。然而，这通常只是关于 $n$ 的递减幂次渐近展开中的首项。若现在将 $1/n$ 视为微扰参数，那么值得探究 $y_n$ 在关于 $z$ 进行解析延拓时，是否本身也会呈现斯托克斯现象。事实上，这就是与高阶斯托克斯线（HOSL）相关的高阶斯托克斯现象。前文所述的标准斯托克斯现象与 $y_n$ 的发散有关；但由于这些近似在 $\mathbb{C}_z$ 中可能并非一致，因此常规斯托克斯线结构也随之改变。

对于关注指数小项预测的实际研究者而言，HOSP 可能会带来两项显著变化：

(i) 斯托克斯线可能会被截断，也可能出现新斯托克斯线；并且（ii）斯托克斯乘子可能取非典型值。本研究将探讨这两种后果。

**1.1. 既有文献与当前研究**。已有不少奠基性研究探讨了高阶斯托克斯现象，尽管研究背景未必与本文相同。人们通常将这一现象的起源归于Berk等人 [5]的工作。在题为“*WKB* 理论中的新斯托克斯线”的论文中，他们在一个积分方程（Pearcey积分）的背景下发现了斯托克斯线结构的变化。随后，精确WKBJ（Liouville-Green）领域对这类“新斯托克斯线”进行了广泛研究（参见Aoki [2] 及其中的参考文献）。Aoki等人 [3, 4]研究了更多具有精确积分解的WKBJ实例；Honda [15]的工作涉及一个奇异摄动的Painlev´e方程；此外，Shudo [30]在量子混沌中对Henon映射的分析也涉及高阶斯托克斯现象。关于历史综述，读者可参阅例如Aoki等人 [4], 、Honda等人 [16], 和Takei [31] 的综述及其中的参考文献。

我们注意到，21 世纪初出现了一项重要研究方向，其起点是 Howls 等人 [17], 、Chapman 和 Mortimer [9], 以及 Body 等人 [8], 的三项研究。这些研究刻画了偏微分方程的全阶分析与高阶斯托克斯现象之间的一些重要联系。这三项研究采用了多种不同方法来研究超越所有阶的渐近分析，并对相似问题提出了互为补充的观点。具体而言，Howls 等人 [17] 的研究再次分析了前文讨论的 Pearcey 积分，并确立了高阶斯托克斯现象与 Olde Daalhuis [23, 24]先前发展的超余项理论之间的联系。Olde Daalhuis 还在非齐次线性二阶常微分方程的背景下，给出了高阶斯托克斯现象的一个特别简单的例子 [25] 。

近年来，关于高阶斯托克斯现象在应用和理论研究中的一些成果令人振奋。例如，我们特别提及 Nemes[22] 的研究，他考察了伽马函数渐近表示中出现的非典型斯托克斯乘子。Lustri 等人 [20] 在三维水波问题中，以及 Shelton 等人 [28, 29] 在地球物理不稳定性问题中，发现了该现象的更多应用。最近，我们注意到 Olde Daalhuis [27] 关于某个 $\epsilon$ 展开中斯托克斯乘子平滑化的未发表研究，以及 King[18] 关于高阶斯托克斯现象在线性偏微分方程中出现情形的研究。

**1.2. 本文概要**。 我们首先在 §2 中考察最简例子

(1.1) 在 Borel 平面 $\mathbb{C}_w$ 上。我们求得了一个精确解，从而清楚揭示了 Borel 平面中的多个奇点与高阶斯托克斯现象之间的联系。随后，在 §3 中，我们从物理平面 $\mathbb{C}_z$ 上解的渐近分析角度考察同一例子。结果表明，后期项本身也可能出现一个新的发散级数（其形式为 a $1/n$ 展开），我们将其称为展开的更后期项 。对该发散级数的尾项应用 Borel 求和，便可揭示高阶斯托克斯现象：后期项中的新成分会随着误差函数依赖关系，在高阶斯托克斯线上平滑地切换出现。最后，在 §4 中，我们运用一般方法，在此前研究过的三个常微分方程中检测高阶斯托克斯线。这些问题此前是通过难以推广至任意非线性微分方程的方法研究的，例如对积分表示进行最速下降分析，或求解已知的递推关系。

**2. 模型问题**。现在我们引入一个新的模型例子。由于 Borel 平面中存在一个分支点和一个简单极点，其斯托克斯线结构包含了高阶斯托克斯现象最简单的实现形式。该例由以下奇异摄动二阶线性非齐次微分方程给出

$$\epsilon^2 y'' + \epsilon(1+z)y' + zy = 1, \tag{2.1a}$$

其中 $y(z,\epsilon)$ 是未知函数， $0 < \epsilon \ll 1$ 是一个小参数。我们将在整个 $z \in \mathbb{C}$ 范围内考察该例的斯托克斯线结构，并满足以下行为条件

$$y(z) \sim \frac{1}{z} \quad \text{as} \quad |z| \to \infty,\ \arg[z] = -2\pi/3. \tag{2.1b}$$

注意，当 $|z| \to \infty$ 时，方程 (2.1a) 的远场解形式为 $y \sim z^{-1} + \alpha z^{-1}\mathrm{e}^{-z^2/(2\epsilon)} + \beta\,\mathrm{e}^{-z/\epsilon}$。沿着条件 (2.1b) 指定的极限，远场解中的两个指数项均为指数占优，因此要求 $\alpha = 0$ 和 $\beta = 0$。因此，行为条件 (2.1b) 为我们的二阶常微分方程提供了两个约束。就斯托克斯线结构和渐近超越级数而言，这对应于下半平面 $\mathrm{Im}[z] < 0$ 中仅存在基底展开 (1.2)。

**2.1. Borel 平面 $\mathbb{C}_w$。** 博雷尔重求和将参数化超渐近级数（ $y(z,\epsilon)$ 关于 $\epsilon \to 0$ 的解的展开的所有代数阶和指数阶）编码为单个函数 $y_B(w,z)$，该函数在 $w$ 中全纯。为说明这一点，考虑形式基级数 (1.2)， $y(z,\epsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n y_n(z)$。关于$\epsilon$ 的博雷尔变换是 Borel 平面上的幂级数， $w \in \mathbb{C}_w$，定义为

$$y_B(w,z) := \sum_{n=0}^{\infty} w^n \frac{y_n(z)}{\Gamma(n+1)}. \tag{2.2}$$

在本文中，我们始终假设 $y_B$ 可无穷次解析延拓（参见 Mitschi 等人 [21]），但有限个点 $z \in \mathbb{C}_z$除外，并且沿从原点出发的任意射线延伸为一个至多呈指数增长的函数。在这些条件下，我们便可定义 $y_B$ 的逆博雷尔变换：

$$y(z;\epsilon) = \mathcal{B}^{-1}[y_B] := \frac{1}{\epsilon}\int_0^{\infty} y_B(w,z)\mathrm{e}^{-w/\epsilon}\,\mathrm{d}w, \tag{2.3}$$

由此将解表示为拉普拉斯变换的形式。请注意，我们上述定义可能与其他处理方式有所不同，例如 Dorigoni [13], 的处理，其差异在于 $1/\epsilon$缩放因子或指标的平移。在本文中，我们主要考虑 $\epsilon$ 为实数且为正的情形；在某些问题中， $\epsilon \in \mathbb{C}$ 的解析结构也可能很重要，而对此进行考察需要对式 (2.3) 中的积分路径作变形。

对博雷尔变换 $y_B$ 的分析，能让我们深入理解斯托克斯现象、高阶斯托克斯现象，以及本节后文将展示的许多计算。值得注意的是，对于模型问题 (2.1a)，可以显式求得博雷尔变换。为了求解 $y_B$，可将积分表示 (2.3) 代入 (2.1a)，从而得到关于 $y_B$ [13] 的所需方程。博雷尔变换由以下偏微分方程支配:

$$\frac{\partial^2 y_B}{\partial z^2} + (1+z)\frac{\partial^2 y_B}{\partial z \partial w} + z\frac{\partial^2 y_B}{\partial w^2} = 0, \tag{2.4}$$

其边界条件为 $y_B(0,\ z) = y_0(z)$ 和 $\partial_w y_B(0,\ z) = y_1(z)$。利用 $y_0 = 1/z$和 $y_1 = (1+z)/z^3$，可得方程 (2.4) 的精确解为

$$y_B(w,z) = \frac{1}{2(\chi_2 - w)}\left(1 + \frac{z-1}{\sqrt{2(\chi_1 - w)}}\right), \tag{2.5}$$

其中我们记 $\chi_1 = z^2/2$ 和 $\chi_2 = z - 1/2$。随后可以验证，将 (2.5) 展开为 $w \to 0$ ，通过定义 (2.2) 可还原渐近展开 (1.2) 的每一阶，即 $y_B = y_0(z)/\Gamma(1) + [y_1(z)/\Gamma(2)]w + [y_2(z)/\Gamma(3)]w^2 + \cdots$。(2.5) 值得注意的关键特征是 $w = \chi_2$ 处的极点和 $w = \chi_1$ 处的分支点。正是这两者导致了高阶斯托克斯现象，这也是我们构造最简例子 (2.1a) 的动机。这似乎是能够展现高阶斯托克斯现象且具有精确博雷尔解的最简单奇点配置。我们注意到，在实际研究微分方程的解时，尤其是非线性情形，通常无法找到博雷尔偏微分方程的这种闭式解。

**2.2. Borel 平面中的斯托克斯现象**。 我们首先说明如何在 Borel 平面中理解常规斯托克斯现象。考虑对小的实数 $\epsilon$，对积分 (2.3) 进行渐近求值。若 $y_B$ 的奇点不位于积分路径上，我们可以利用伽马函数的积分公式证明 $\mathcal{B}^{-1}[y_B] = y_0(z) + \epsilon y_1(z) + \cdots$。然而，如果 $y_B$ 在 $w = \chi_1(z)$ 处存在代数奇点，其中

$$y_B(w,z) \sim \frac{y_0^{(1)}(z)}{(\chi_1(z) - w)^{\alpha_1}} \quad \text{as } w \to \chi_1(z), \tag{2.6}$$

并且该奇点随着 $z$ 的变化穿过 (2.3) 的积分路径 $(0,\ \infty)$，那么 $\mathcal{B}^{-1}[y_B]$ 的渐近分析中会出现一个额外的贡献。这个贡献来自汉克尔围道积分，记作 $\mathcal{H}_\chi$,

$$\frac{1}{\epsilon}\int_{\mathcal{H}_\chi} \frac{y_0^{(1)}(z)}{\left(\chi_1(z) - w\right)^{\alpha_1}} \mathrm{e}^{-w/\epsilon}\, \mathrm{d}w \sim \sigma_1 y_0^{(1)}(z) \mathrm{e}^{-\chi_1(z)/\epsilon}, \tag{2.7}$$

其中，$\sigma_1 = -2\pi\mathrm{i}/[\Gamma(\alpha_1)\epsilon^{\alpha_1}]$ 是斯托克斯乘子。我们的模型问题中，$y_B$取自 (2.5)，且有 $\alpha_1 = 1/2$ 和 $y_0^{(1)}(z) = -1/[\sqrt{2}(z-1)]$。上述内容的更多细节可参见 Crew 和 Trinh [11]。

(2.7) 的贡献在物理$\mathbb{C}_z$ 平面上的斯托克斯线处生成，记为 B $>1$，其位置满足 Im$[\chi_1]=0$ 和 Re$[\chi_1]>0$。这条斯托克斯线始于满足 $\chi_1(z_1)=0$ 的点；我们的模型问题中有 $z_1=0$。Berry [6] 通过形式上的博雷尔重求和，推导出了这一转变的平滑解释；当 $\epsilon\to 0$ 时，该转变发生在宽度逐渐缩小的边界层内。它在 $y(z,\ \epsilon)$ 的超渐近级数中产生一个指数小的贡献。

一般而言，由于 $y_B$ 存在多个奇点，$y(z,\ \epsilon)$ 的超渐近级数中可能存在许多类似于 (2.7) 的贡献。这些奇点的位置编码了奇异量 $\chi_j(z)$，而奇点的阶数则编码了常数 $\alpha_j$。每个奇点都对应一条斯托克斯线，记为 B $>j$。当 $y_B$ 存在多个奇点时，可能出现高阶斯托克斯现象，此时这些斯托克斯线仅在 $\mathbb{C}_z$ 平面的某些区域内活跃。下一节 §2.3 将对此进行讨论。

**2.3. Borel 平面中的高阶斯托克斯现象**。现在我们参照模型例子 (2.1a)，从几何角度解释 Borel 平面中的高阶斯托克斯现象。

由 (2.5) 得到的博雷尔变换 $y_B$ 在 Borel 平面 $\mathbb{C}_w$ 中有两个奇点：$w=\chi_1(z)=z^2/2$ 处的一个分支点，以及 $w=\chi_2(z)=z-1/2$ 处的一个极点。在物理平面 $\mathbb{C}_z$ 中，B $>1$ 斯托克斯线从 $z=z_1=0$ 发出，其位置由 $\chi_1$ 为实数且为正确定，且此处 $\chi_1(z_1)=0$。类似地，B $>2$ 斯托克斯线从 $z=z_2=1/2$ 发出，其位置由 $\chi_2$ 为实数且为正确定，且此处 $\chi_2(z_2)=0$。注意，位置 $z_1=0$ 与 (1.2) 中 $y(z,\ \epsilon)$ 的基底展开中的一个奇点相关联，而 $z_2=1/2$ 则不是。

现在我们考察由 $w=\chi_2$ 处的极点产生的斯托克斯现象。注意，$w=\chi_1$ 处的分支点导致多值函数 $y_B$，该函数有两个黎曼片。然而，$w=\chi_2$ 处的极点只存在于其中一个黎曼片上。由精确的博雷尔解 (2.5)，可得

$$y_B(w,z)\sim\begin{cases}-\dfrac{1}{(w-\chi_2)}+\cdots\\[2ex]\dfrac{1}{2(z-1)^2}+\cdots\end{cases}\qquad\text{as } w\to\chi_2(z)\tag{2.8}$$

当分别沿对应的两个黎曼片趋近时，结果如此。因此，在计算 B $>2$ 斯托克斯线对应的逆博雷尔变换 (2.3) 时，结果取决于具有 (2.8) 中两种对应行为的解是否穿过从特定原点出发的积分路径 (0，$\infty$)。如果极点穿过积分路径，汉克尔路径产生相应的留数贡献，从而导致 B $>2$ 斯托克斯现象。反之，如果极点位于另一个黎曼片上，则不会发生斯托克斯现象，我们称 B $>2$ 斯托克斯线处于非活跃状态。

从特定原点 $w=0$ 发出的射线上，在 Borel 平面中可以看到 $w=\chi_2$ 处极点的临界轨迹条件是：两个奇点位于同一条半直线上：

$$\mathrm{Im}\left[\frac{\chi_2-\chi_1}{\chi_1}\right]=0\qquad\text{and}\qquad\mathrm{Re}\left[\frac{\chi_2-\chi_1}{\chi_1}\right]\geq 0.\tag{2.9}$$

我们将满足 (2.9) 的积分路径定义为高阶斯托克斯线。注意，这些线起始于 $\mathbb{C}_z$，其位置为 $z=z_*$，此处 $\chi_1(z_*)=\chi_2(z_*)$，也就是 B $>1$ 和 B $>2$ 斯托克斯线的交点。我们的模型例子满足 $z_*=1$。在 Borel

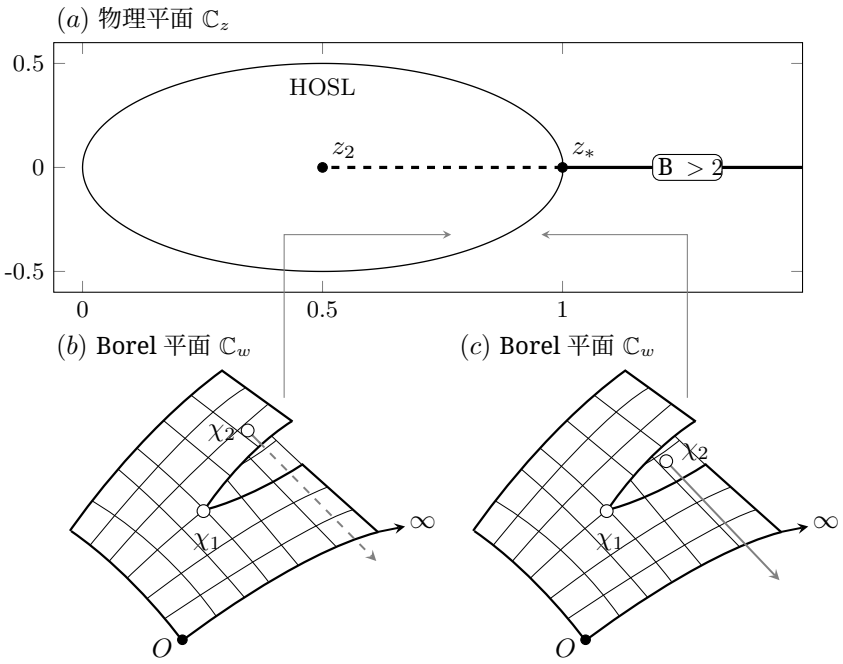



图 2.1: *In* (*a*) *we plot the geometrical colinearity condition* (2.9) *(HOSL) in* $\mathbb{C}_z$, *which divides the two Borel plane scenarios depicted in* (*b*) *and* (*c*). *In order for the Borel singularity at* $w = \chi_2$ *to induce the Stokes phenomenon by crossing the integration contour* (0, $\infty$) *of the inverse Borel transform* (2.3) *it must be present on the principle Riemann sheet when viewedfrom the origin, O. In (c), it remains on the principal sheet and results in a* $B > 2$ *Stokesline. However, in (b), it crosses the real-axis on a higher Riemann sheet and thus no* $B > 2$*Stokes phenomenon occurs.*

平面上，此处 $y_B$ 的两个奇点位于 $\mathbb{C}_w$ 中的同一位置（但在不同的黎曼曲面上）。

以上是从 Borel 平面视角对高阶斯托克斯现象的几何解释，并由此得到高阶 Stokes 线的条件 (2.9)。因此，只有在 $\mathbb{C}_z$ 平面的正确区域内，即 (2.9) 的一侧，B $> 2$ Stokes 线才会起作用。图 2.1 展示了斯托克斯线和高阶 Stokes 线。我们的解释与 Howls 等人 [17]以及 Chapman 和 Mortimer [9], 给出的解释相似且互为补充；他们也推导出了条件 (2.9)。

复苏的基本原理之一是， $y_B$的奇点结构编码在展开 $y(z,\epsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n y_n(z)$ 的晚项的 $n \to \infty$ 渐近分析中。这可由 Darboux 引理及其推广得出。在本文余下部分，我们将从这些晚项的大-$n$渐近分析的角度研究 $\mathbb{C}_z$ 中的高阶斯托克斯现象， $y_n$。此时，Borel 平面中从原点可见的 $\chi_2$ 表现为晚项展开中的斯托克斯现象（在 $1/n$中），并发生于共线轨迹 (2.9) 上。换言之，几何条件 (2.9) 将被证明等价于 $y_n$的晚项渐近分析中存在哪些发散分量。

**3.** $\mathbb{C}_z$ **平面中的渐近分析**。 本节将直接对 $\mathbb{C}_z$ 平面中的模型例子 (2.1a) 进行渐近研究。我们首先在 §3.2 推导基底展开的低阶项，由此发现仅在 $z = z_1$ 处存在一个奇点。§3.3 考察与该奇点相关的 $y_n$ 在 $n \to \infty$ 下的发散，其中包含

一个在额外位置 $z = 1$ 处奇异的振幅函数。在 §3.4 中，我们推导后期项发散的低阶分量（关于 $1/n$），并将其称为后后项发散。这揭示了一个额外的发散级数，它会在展开的后期项中引发高阶斯托克斯现象，从而产生预期的、具有 $\chi_2 = z - 1/2$ 的发散分量。§3.6 通过形式论证推导了这一分量的平滑行为。

**3.1. 超渐近级数与发散。**我们首先回顾指数渐近展开（超渐近级数）与渐近级数晚项之间的关系。一般而言，基底展开 (1.2) 仅表示 $y(z;\epsilon)$ 的形式参数化超渐近级数中众多可能贡献之一。完整的超渐近级数可写为

$$\begin{aligned} y(z;\epsilon) = &\left[y_0(z) + \epsilon y_1(z) + \cdots + \epsilon^n y_n(z) + \cdots\right] \\ &+ \sum_{i=1} \sigma_i(z;\epsilon)\left[y_0^{(i)}(z) + \epsilon y_1^{(i)}(z) + \cdots + \epsilon^n y_n^{(i)}(z) + \cdots\right] \mathrm{e}^{-\chi_i(z)/\epsilon}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

这里，函数 $\chi_i$ 称为奇异量，而 $\sigma_i$ 是斯托克斯乘子，它们会在穿过斯托克斯线时迅速改变取值，从而体现斯托克斯现象，其行为通常呈现为误差函数行为 [6]。我们将关注其中 $y_n^{(i)}$随 $n \to \infty$呈阶乘式发散的渐近级数。结构 (3.1) 常见于奇异摄动常微分方程 [12]的解中。

对于上述 (3.1) 中的一般情形，与该渐近展开相关的斯托克斯线是 $\mathbb{C}_z$ 中的曲线，其定义为

$$\begin{cases} \mathrm{B} > j: & \mathrm{Im}[\chi_j] = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{Re}[\chi_j] \geq 0, \\ i > j: & \mathrm{Im}[\chi_j - \chi_i] = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{Re}[\chi_j - \chi_i] \geq 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

记号 $\mathrm{B} > j$ 表示由基渐近展开诱导的斯托克斯线，而 $i > j$ 表示由式 (3.1) 中第 $i$ 个指数项诱导的斯托克斯线。这是 Howls等人 [17], 所采用的记号；沿着这些曲线，解中会开启与 $\mathrm{e}^{-\chi_{j(z)}/\epsilon}$ 成正比的项。这种行为由斯托克斯乘子 $\sigma_i$ 编码。

假设基级数的各项 $y_n(z)$ 是亚纯函数，并在 $z = z_1$ 处具有奇异行为。与此相关的首阶发散为

$$y_n(z) \sim y_0^{(1)}(z) \frac{\Gamma(n + \alpha_1)}{\chi_1(z)^{n+\alpha_1}} \qquad \text{as } n \to \infty, \tag{3.3}$$

其中 $\chi_1(z_1) = 0$，且通常 $\alpha_1$ 为常数。我们将式 (3.3) 称为后期项发散。注意，上述式 (3.3) 中的奇异量 $\chi_1$ 和振幅函数 $y_0^{(1)}$ 也出现在超渐近级数 (3.1) 的一项 $y_0^{(1)}\mathrm{e}^{-\chi_1/\epsilon}$ 中。后期项发散与指数次要项之间的这种联系，是指数渐近分析中的基本概念。

令人惊讶的是，通过考察 $y_n$ 的低阶分量（即 $n \to \infty$），可以找到基底展开的后期项 $y_n$与 $\mathrm{e}^{-\chi_i/\epsilon}$ 超渐近级数分量中的各个振幅 $y_p^{(i)}$之间的关系。具体而言，式（3.3）后期项的低阶修正项包含在

$$y_n(z) \sim \sum_{i=1} \left( \sum_{p=0}^{\infty} y_p^{(i)}(z) \frac{\Gamma(n - p + \alpha_i)}{\chi_i(z)^{n-p+\alpha_i}} \right) \qquad \text{as } n \to \infty. \tag{3.4}$$

上面的外层求和以 $i$ 为指标，涵盖了每个奇异量 $\chi_i$，它们各自对应一条 B $> j$ 斯托克斯线。以内层求和指标 $p$求和，则包含低阶修正项。后期项展开 $1/n$ 与超渐近级数 $\epsilon$ 之间的这种关系称为复苏；关于这一主题，读者可参阅 Aniceto等人 [1], 近期的综述及其中所列参考文献。Body等人 [8] 利用这种联系研究了物理平面中的高阶斯托克斯现象。值得注意的是，后期项发散的低阶修正此前已有研究计算过，例如 *King* 和 *Chapman* [19] ，但该研究考察的是关于 $n^{-1}$的幂级数，因此与超渐近级数（3.1）的联系并不明晰。

在接下来的几节中，我们将这些技巧应用于模型问题 (2.1a)。这里，正是上文 (3.4) 中 $y_p^{(j)}$ 在 $p \to \infty$ 时的发散，导致了此前在 §2.3 中借助 Borel 平面推导出的高阶斯托克斯现象。

**3.2. 渐近展开**。我们首先通过写出 $y(z,\ \epsilon) \sim \sum_{i=0} \mathrm{e}^{-\chi_i(z)/\epsilon} y^{(i)}(z,\ \epsilon)$，来求模型常微分方程 (2.1a) 的形式超渐近级数展开，其中 $\chi_i(z)$ 是奇异量函数，而 $y^{(i)}(z,\ \epsilon)$ 是相应的振幅函数，其展开已在 (3.1) 中给出。将这一渐近形式代入微分方程 (2.1a)，得到奇异量的三个可能解，如下所示：

$$\chi_0(z) = 0, \qquad \chi_1'(z) = z, \qquad \chi_2'(z) = 1. \tag{3.5}$$

其中第一个 $\chi_0$ 对应基底展开，它将是关于 $\epsilon$ 的标准幂级数。此外，三个振幅函数 $y^{(i)}(z,\ \epsilon)$ 各自的方程可写为

$$\epsilon^2 y^{(0)\prime\prime} + \epsilon(1+z) y^{(0)\prime} + z y^{(0)} = 1, \tag{3.6a}$$

$$\epsilon y^{(1)\prime\prime} + (1-z) y^{(1)\prime} - y^{(1)} = 0, \tag{3.6b}$$

$$\epsilon y^{(2)\prime\prime} + (z-1) y^{(2)\prime} = 0. \tag{3.6c}$$

我们首先通过令 $y^{(0)}(z,\ \epsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n y_n(z)$，将基底解展开为 $\epsilon \to 0$ 。将其代入方程 (3.6a)，可得解的展开的低阶项为

$$y^{(0)}(z,\epsilon) \sim \frac{1}{z} + \epsilon \frac{(1+z)}{z^3} + \epsilon^2 \frac{(2z^2+3z+3)}{z^5} + \cdots. \tag{3.7}$$

注意，在 $z = 0$ 处存在一个奇点，渐近级数 (3.7) 在其附近会重新排列。我们在附录 A 中对此区域进行内层分析，以确定 §3.3 中 $y_n$ 的 $n \to \infty$ 近似所含的未知常数。在基底方程 (3.6a) 中取 $O(\epsilon^n)$，得到方程

$$y_{n-2}'' + (1+z) y_{n-1}' + z y_n = 0, \tag{3.8}$$

该式对 $n \geq 2$ 成立。由于渐近展开的后续各阶由前一阶求导得到，解 $y_n$ 将在 $n \to \infty$ 时发散。下一节将研究这种发散。

**3.3. 后期项发散**。为刻画$y_n$的阶乘除以幂次型发散，我们考虑如下形式的后期项渐近假设

$$y_n(z) \sim \sum_{p=0}^{\infty} B_p(z) \frac{\Gamma(n-p+\alpha_1)}{\chi_1(z)^{n-p+\alpha_1}} \qquad \text{as } n \to \infty, \tag{3.9}$$

其中， $\chi_1$ 和 $B_p$ 分别是晚项奇性函数和振幅函数，而 $\alpha_1$ 是一个常数。在（3.9）中，除了 $p = 0$所描述的首阶发散外，我们还纳入了低阶分量。事实上，后期项发散还包含渐近假设（3.9）未能捕捉的其他分量。这些分量源于高阶斯托克斯现象：它们会在环绕高阶斯托克斯线的边界层内平滑地开启，而该边界层的宽度随 $n \to \infty$趋于零而逐渐缩小。本文的关键结果是，通过研究 $B_p$在 $p \to \infty$时的更后期项，可以推导出这一现象；相关分析见§3.6。

将阶乘比幂次渐近形式 (3.9) 代入 $O(\epsilon^n)$ 方程 (3.8)，在 $\Gamma(n-p+\alpha_1)/\chi_1^{n-p+\alpha_1}$的每一阶上得到以下方程

$$p = 0: \quad (\chi_1' - 1)(\chi_1' - z) = 0, \tag{3.10a}$$

$$p = 1: \quad (1 + z - 2\chi_1')B_0' - \chi_1'' B_0 = 0, \tag{3.10b}$$

$$p \geq 2: \quad B_{p-2}'' + (1 + z - 2\chi_1')B_{p-1}' - \chi_1'' B_{p-1} = 0. \tag{3.10c}$$

根据匹配条件 $\chi_1(0) = 0$，对 (3.10a) 中的 $\chi_1'(z)$ 积分可得两个解， $\chi_1' = z^2/2$ 和 $\chi_1' = z$。然而，只有第一个解所产生的振幅函数与附录 A.1 中的内解相匹配。因此，我们重点考察第一个晚项奇异量 $\chi_1 = z^2/2$，此时振幅方程 (3.10b) 可解。由此得到

$$\chi_1(z) = z^2/2 \qquad \text{and} \qquad B_0(z) = \frac{\Lambda_0}{1 - z}, \tag{3.11a,b}$$

其中 $\Lambda_0$ 是积分常数。本节的结果是一条 B $> 1$ 斯托克斯线。注意，解 (3.11b) 在 $z = 1$ 处是奇异的，而且方程 (3.10c) 中的 $B_1$ 需要对 $B_0$ 求导。因此， $B_1$ 在 $z = 1$ 处会表现出更强的奇异行为。这一模式会继续下去，并导致当 $p \to \infty$时， $B_p$ 出现阶乘除以幂次型发散；我们将其称为渐近展开的更后期项。

**3.4. 后后项发散**。现在我们确定 $B_p$ 在$p \to \infty$时的发散，这种发散是解 (3.11b) 在 $B_0$处的奇点 $z = 1$ 所导致的。随着渐近级数不断展开，这个奇点的阶数将不断增大。例如，方程 (3.10b) 可求解得到 $B_1$,

$$B_1(z) = -\frac{\Lambda_0}{(1 - z)^3} + \frac{\Lambda_1}{1 - z}, \tag{3.12}$$

这种不断增强的奇异行为会导致 $B_p$在 $p \to \infty$时出现阶乘除以幂次型发散。我们首先考虑阶乘比幂次渐近形式

$$B_p(z) \sim C_0(z)\frac{\Gamma(p + \beta)}{[\tilde{\chi}(z)]^{p+\beta}} \qquad \text{as } p \to \infty, \tag{3.13}$$

其中 $\tilde{\chi}$ 和 $C_0$ 分别是晚晚项奇性函数和振幅函数， $\beta$ 是一个常数。为了与附录 A.2 中 $y_n$ 在 $z = 1$ 附近的内解匹配，我们要求 $\tilde{\chi}(1) = 0$。将渐近形式 (3.13) 代入方程 (3.10c)，得到方程 $\tilde{\chi}' = 1 - z$和 $C_0' = 0$，对其积分可得

$$\tilde{\chi}(z) = -\frac{(z - 1)^2}{2} \qquad \text{and} \qquad C_0(z) = \tilde{\Lambda}. \tag{3.14}$$

˜这里， $\Lambda = \mathrm{i}/(2\pi)$ 是一个积分常数，通过在 $z = 1$ 处进行内匹配过程，由附录 A.2 中的方程（A.9）确定。

现在我们来解释如何由更后期项 (3.13) 产生高阶斯托克斯现象。由于 (3.13) 在 $p \to \infty$ 处发散，因此需要在 $p = P - 1$ 处对后期项展开 (3.9) 进行最优截断，此时相邻项的阶相同。该最优截断级数的余项随后会在高阶斯托克斯线两侧呈现斯托克斯现象；高阶斯托克斯线是满足丁格尔条件的积分路径

$$\operatorname{Im}\left[\frac{\tilde{\chi}}{\chi_1}\right] = 0 \qquad \text{and} \qquad \operatorname{Re}\left[\frac{\tilde{\chi}}{\chi_1}\right] \geq 0. \tag{3.15}$$

因此，几何条件 (2.9) 现在恰好体现为渐近级数中的一条斯托克斯线。跨越高阶斯托克斯线的这一转变是平滑的，并且在宽度为 $O(n^{-1/2})$ 的边界层上遵循误差函数关系。我们在 §3.6 中通过对余项进行博雷尔重求和来演示这一点；这与 Berry [6] 用来平滑常规斯托克斯现象的形式方法类似。

此外，跨越高阶斯托克斯线 (3.15) 而出现的项，是后期项发散中的另一个阶乘除以幂次项，其奇异量为 $\chi_1 + \tilde{\chi}$。这导致基级数的后期项发散发生修正：

$$y_n(z) \sim \tilde{\sigma}(z,n) C_0(z) \frac{\Gamma(n + \alpha_1 + \beta)}{(\chi_1 + \tilde{\chi})^{n+\alpha_1+\beta}} + \sum_{p=0}^{P-1} B_p(z) \frac{\Gamma(n - p + \alpha_1)}{\chi_1^{n-p+\alpha_1}}. \tag{3.16}$$

上述的 $\tilde{\sigma}$ 是高阶斯托克斯乘子，它会以稍后在方程 (3.27) 中说明的平滑方式，跨越高阶斯托克斯线 (3.15) 迅速变化。对于当前的例子，在图 2.1 中，高阶斯托克斯线左侧为 $\tilde{\sigma} = 0$，右侧为 $\tilde{\sigma} = 2\pi$ i。

因此，除了由 $\chi_1$ 发散引起的 B $> 1$ 斯托克斯现象外，还会有一个由

$$\chi_2 := \chi_1 + \tilde{\chi} = z - 1/2, \tag{3.17}$$

这种现象只会在 $\tilde{\sigma} \neq 0$ 的位置发生。按照 Berk等人 [5], 的定义，满足 $\operatorname{Im}[\chi_2] = 0$、$\operatorname{Re}[\chi_2] \geq 0$ 和 $\tilde{\sigma} \neq 0$ 的积分路径通常称为新斯托克斯线。由新斯托克斯线产生、存在于 $y(z,\ \epsilon)$ 的超渐近级数展开中的额外 $\mathrm{e}^{-\chi_2/\epsilon}$ 指数项，是避免常规斯托克斯线相交所导致矛盾的必要条件。

我们注意到，视具体问题而定，高阶斯托克斯乘子 $\tilde{\sigma}$ 也可能因高阶斯托克斯现象而在两个非零值之间变化，而非像上文所述，其中一个值为零。这对应于多个发散贡献，它们各自源自早期阶数的奇点，并通过高阶斯托克斯现象相互改变，而不是像式（3.16）那样出现新的后期项。

**3.5. 斯托克斯线结构**。综合来看，该问题的斯托克斯线为

$$\begin{cases} \mathrm{B} > 1: & \operatorname{Im}[\chi_1] = 0, \quad \operatorname{Re}[\chi_1] \geq 0, \\ \mathrm{B} > 2: & \operatorname{Im}[\chi_2] = 0, \quad \operatorname{Re}[\chi_2] \geq 0, \\ 1 > 2: & \operatorname{Im}[\chi_2 - \chi_1] = 0, \quad \operatorname{Re}[\chi_2 - \chi_1] \geq 0. \end{cases} \tag{3.18}$$

B $> 1$ 和 B $> 2$ 斯托克斯线由基底展开的晚期项发散产生。前者是具有奇异量$\chi_1 = z^2/2$ 的阶乘除以幂次型发散，见 (3.11a)。后者是具有 $\chi_2 = z - 1/2$ 的分量，见 (3.17)

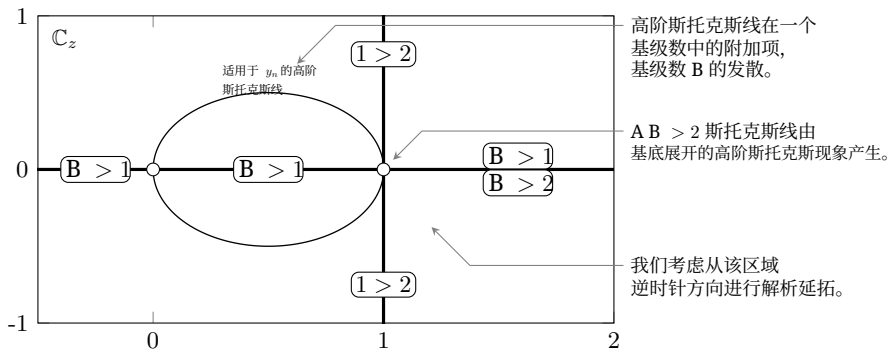



图 3 1 *The Stokes line structure for our model problem* 2 1 *is shown in* $z \in \mathbb{C}$. *HOSL* 。: *are shown with thin lines* (.a), *and regular Stokes lines with bold lines. Due to behavioural condition* 2 1 *only the base expansion* $\{B\}$ *is present in the lower-half plane. As we* (.b) *rotate anticlockwise about* $z = 1$ *crossing the* $B > 1$ *Stokes line* ($Re[z] < 1$, $Im[z] = 0$), , *yields* $\{B, 1\}$ *components to the asymptotic transseries in the upper-left quadrant. Crossing crossing* $B > 1$ *and* $B > 2$ ($Re[z] > 1$, $Im[z] = 0$) *returns the asymptotic transseries back to* $1 > 2$ ($Re[z] = 1$, $Im[z] > 0$) *results in* $\{B, 1, 2\}$ *present in the upper-right quadrant. Finally containing only* $\{B\}$ *in the lower-right quadrant.*

该分量会在高阶斯托克斯线两侧被激活。此外，考察 $O(\mathrm{e}^{-\chi_1/\epsilon})$ 超渐近级数方程 (3.6b) 可发现，$y^{(1)}(z,\ \epsilon)$ 还对应另一个发散级数。根据 §3.1 中讨论的超越级数对应关系，该发散级数的奇异量为 $\tilde{\chi} = \chi_2 - \chi_1$，因此在一条 $1 > 2$斯托克斯线两侧发生切换，产生一个 $O(\mathrm{e}^{-\chi_2/\epsilon})$ 项；我们已将其纳入 (3.18)。注意，只有当 (3.16) 中的高阶斯托克斯乘子 $\tilde{\sigma}(z,\ n)$ 非零时，B $> 2$ 斯托克斯线才会激活。这些斯托克斯线如图 3.1 所示。在此例中，通过高阶斯托克斯现象产生的新 B $> 2$ 斯托克斯线不可或缺，否则绕简单极点 $z = 1$ 旋转时会导致矛盾。

因此，我们得到了以下具有奇异量 $\chi_1 = z^2/2$ 和 $\chi_2 = z - 1/2$ 的超越级数结构，

$$y(z,\epsilon) \sim y_0(z) + \epsilon y_1(z) + \epsilon^2 y_2(z) + \cdots + \sigma_1(z,\epsilon) B_0(z) \mathrm{e}^{-\chi_1/\epsilon} + \sigma_2(z,\epsilon) C_0(z) \mathrm{e}^{-\chi_2/\epsilon}, \tag{3.19}$$

其中，各分量（分别记为 B、1 和 2）在复-$z$ 平面的不同扇区中的存在情况，已在图 3.1 的图注中说明。

**3.6. 高阶斯托克斯线平滑**。本节将说明，对后期项渐近假设 (3.9) 进行最优截断，会得到一个指数级小（关于 $n$）的余项，并呈现斯托克斯现象。该余项对应于后期项中一个额外的阶乘除以幂次项，其奇异量为 $\chi_1 + \tilde{\chi}$，如前文 (3.16) 所示。此外，我们将展示这种变化如何在高阶斯托克斯线 (3.15) 上平滑发生；该线位于 Im $[\tilde{\chi}/\chi_1] = 0$ and Re$[\tilde{\chi}/\chi_1] \geq 0$ 的位置。这一分析基本沿用了 Berry [6], 的方法：对发散展开的尾项重新求和，并通过考察所得积分揭示局限于高阶斯托克斯线附近的误差函数行为。

我们首先将后期项渐近假设 (3.9) 在 $p = P - 1$ 处截断，写作

$$y_n \sim \sum_{p=0}^{P-1} B_p(z) \frac{\Gamma(n-p+\alpha_1)}{\chi_1^{n-p+\alpha_1}} + \underbrace{\sum_{p=P}^{\infty} B_p(z) \frac{\Gamma(n-p+\alpha_1)}{\chi_1^{n-p+\alpha_1}}}_{R_P}, \tag{3.20}$$

并认为 $P$ 很大。注意，在后面的方程 (3.26) 中，我们通过指定 $P$ 为 $n$ 的函数来使 $R_P$ 最小化。代入 (3.13) 中 $B_p$ 的晚期项发散渐近形式以及伽马函数的积分定义（因为 $n - P + \alpha_1$ 也很大）时，我们还交换了求和与积分的次序。这样便得到一个几何级数，可以形式上重新求和，得到

$$\begin{aligned} R_P &= \frac{C_0}{\tilde{\chi}^{\beta} \chi_1^{n+\alpha_1}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w^{\beta-1} t^{n+\alpha_1-1} \mathrm{e}^{-w-t} \sum_{p=P}^{\infty} \left( \frac{\chi_1 w}{\tilde{\chi} t} \right)^p \mathrm{d}w \, \mathrm{d}t, \\ &= \frac{C_0}{\tilde{\chi}^{\beta+P} \chi_1^{n-P+\alpha_1}} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} w^{P+\beta-1} t^{n-P+\alpha_1-1} \mathrm{e}^{-w-t} \frac{1}{1 - \frac{\chi_1 w}{\tilde{\chi} t}} \, \mathrm{d}w \, \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.21}$$

上述过程中，主值积分源于对无穷几何级数重新求和时引入的 $\chi_1 w = \tilde{\chi} t$ 处的简单极点。接下来，我们将积分变量从 ($w$, $t$) 变换为 ($s$, $f$)，其中 $s = \chi_1 w / (\tilde{\chi} t)$ 且 $f = t + w$。这一代换使得两个积分可以分别计算，其中一个可识别为伽马函数的定义。进行这一代换并化简后，得到

$$\begin{aligned} R_P &= \frac{C_0}{\chi_1^{n+\alpha_1+\beta}} \int_0^{\infty} \frac{s^{P+\beta-1}}{\left(1 + \frac{s\tilde{\chi}}{\chi_1}\right)^{n+\alpha_1+\beta} (1-s)} \, \mathrm{d}s \int_0^{\infty} f^{n+\alpha_1+\beta-1} \mathrm{e}^{-f} \, \mathrm{d}f, \\ &= C_0 \frac{\Gamma(n+\alpha_1+\beta)}{\chi_1^{n+\alpha_1+\beta}} \int_0^{\infty} \frac{s^{P+\beta-1}}{\left(1 + \frac{s\tilde{\chi}}{\chi_1}\right)^{n+\alpha_1+\beta} (1-s)} \, \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{3.22}$$

本节的计算可以改写为 Olde Daalhuis [23, 24] 所用的超余项语言，其中积分 (3.21) 可视为二级超余项（见 Olde Daalhuis [26]的方程 (3.3)）。关于从这一视角对高阶斯托克斯平滑进行严格处理，读者可参阅 Nemes [22]近期的研究，以及 Olde Daalhuis [27]最近的会议报告。现在，我们将针对模型例子，正式推导 (3.22) 的平滑化过程。

首先，将 $x = s - 1$ 代入 (3.22)，这会使极点的位置从 $s = 1$ 移至 $x = 0$。由于被积函数在 $x = 0$处的主导部分位于新的积分范围 $-1 \le x < \infty$内，因此我们也可以将积分下限延伸至 $-\infty$，而不改变主导渐近行为。于是得到

$$\begin{aligned} R_P &= -C_0 \frac{\Gamma(n+\alpha_1+\beta)}{\chi_1^{n+\alpha_1+\beta}} \int_{-1}^{\infty} \frac{(1+x)^{P+\beta-1}}{x \left[1 + (1+x)\tilde{\chi}/\chi_1\right]^{n+\alpha_1+\beta}} \, \mathrm{d}x, \\ &\sim -C_0 \frac{\Gamma(n+\alpha_1+\beta)}{(\chi_1+\tilde{\chi})^{n+\alpha_1+\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{e}^{(P+\beta-1)\log(1+x) - (n+\alpha_1+\beta)\log\left[1 + \frac{x\tilde{\chi}}{\chi_1+\tilde{\chi}}\right]} \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.23}$$

现在，我们试图近似上文式 (3.23) 中的积分，既考察高阶斯托克斯线附近的情形，也考察极点 $x = 0$ 附近的情形。在写出

$$\chi_1 = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} \qquad \text{and} \qquad \tilde{\chi} = \tilde{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tilde{\vartheta}}, \tag{3.24}$$

˜高阶斯托克斯线（此处 $\tilde{\chi}/\chi_1$ 为实数且为正）位于 $\vartheta - \vartheta = 0$。因此，在该处及极点 $x = 0$ 的˜邻域内， $x$ 和 $\vartheta - \vartheta$ 都很小。于是，我们可以对式 (3.23) 中这些项作泰勒展开，得到

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{(P+\beta-1)\log(1+x)} &\sim \mathrm{e}^{(P+\beta-1)\left(x-\frac{x^2}{2}+O(x^3)\right)}, \\ \mathrm{e}^{-(n+\alpha_1+\beta)\log\left[1+\frac{x\tilde{\chi}}{\chi_1+\tilde{\chi}}\right]} &\sim \mathrm{e}^{-(n+\alpha_1+\beta)\left[\frac{\tilde{r}x}{r+\tilde{r}}-\frac{\tilde{r}^2x^2}{2(r+\tilde{r})^2}+\mathrm{i}\frac{r\tilde{r}x(\tilde{\vartheta}-\vartheta)}{(r+\tilde{r})^2}+O(x(\tilde{\vartheta}-\vartheta)^2;x^3)\right]}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

当式 (3.25) 中的最大项 exp ($Px$) 和 exp ($-\frac{\tilde{r}xn}{r+\tilde{r}}$) 相乘后相互抵消时，余项 $R_P$ 达到最小值。这启发我们将最优截断点规定为

$$P = \frac{\tilde{r}n}{r+\tilde{r}} + \tilde{\rho}, \tag{3.26}$$

其中， $0 \le \tilde{\rho} < 1$ 确保 $P$ 取整数值。现在可以验证，我们先前关于 $n - P$较大的假设是自洽的，因为 $n - P \sim rn/(r+\tilde{r}) \gg 0$。将 (3.26) 中 $P$ 的最优值代入积分 (3.23)，并利用展开 (3.25)，可得被积函数的实部和虚部。与 Berry [6], 所用的方法类似，通过直接计算可以验证，该积分的实部相较于虚部是次主导的。于是，虚部的主导阶可简化为

$$\begin{aligned} R_P &\sim \mathrm{i}C_0 \frac{\Gamma(n+\alpha_1+\beta)}{(\chi_1+\tilde{\chi})^{n+\alpha_1+\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \mathrm{e}^{-\frac{r\tilde{r}nx^2}{2(r+\tilde{r})^2}} \sin\left(\frac{r\tilde{r}(\tilde{\vartheta}-\vartheta)n}{(r+\tilde{r})^2}x\right) \mathrm{d}x, \\ &\sim \sqrt{2\pi}\mathrm{i}C_0 \frac{\Gamma(n+\alpha_1+\beta)}{(\chi_1+\tilde{\chi})^{n+\alpha_1+\beta}} \int_0^{\frac{(r\tilde{r})^{1/2}(\tilde{\vartheta}-\vartheta)n^{1/2}}{(r+\tilde{r})}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{3.27}$$

方程（3.27）是本节的主要结果：它给出了围绕高阶斯托克斯线、在宽度为 $O($ $n^{-1/2})$ 的边界层内， $R_P$ 平滑过渡的显式解。因此，我们有

$$R_P \sim 2\pi\mathrm{i}C_0(z) \frac{\Gamma(n+\alpha_1+\beta)}{(\chi_1+\tilde{\chi})^{n+\alpha_1+\beta}} \tag{3.28}$$

根据前文（3.15）中给出的条件，渐近解的后期项中会在高阶斯托克斯线上开启。

将我们的后后期最优截断点（3.26）与超渐近文献中已知的 $1 > 2$ 斯托克斯现象的最优截断点进行比较，也很有意思。在这种现象中，形如 $\mathrm{e}^{-\chi_1/\epsilon}$ 的指数项会引发 $\mathrm{e}^{-\chi_2/\epsilon}$ 指数项的斯托克斯切换。根据 Berry 和 Howls 的研究 [7], , 该值为 $N_2 = r\tilde{r}/(\epsilon[r+\tilde{r}])$。若要计算由新的发散分量（3.28）引发的 B $> 2$ 斯托克斯现象，并在 $N_1 \sim r/\epsilon$ 处对基底展开进行最优截断，那么（3.26）就变为 $P \sim r\tilde{r}/(\epsilon[r+\tilde{r}])$，这与超渐近分析中的已知结果一致。

**3.7. 总结与 $\mathbb{C}_w$ 中渐近分析与 $\mathbb{C}_z$的关系**。我们可以从已经讨论过的两个角度来看待高阶斯托克斯现象。它们是：

(i) *§2*，博雷尔变换。 在 Borel 平面中， $\mathbb{C}_w$，当至少存在两个奇点时便会出现 HOSP，其中一个奇点是具有非平凡黎曼曲面结构的分支点。此时，高阶斯托克斯线（HOSL）是指某个特定奇点从原点看「可见」的条件，因此会引发斯托克斯现象。

(ii) *§3，后后项发散。* §3.4 中讨论了后期项发散 $y_n$ 的低阶分量，即 $O(\Gamma(n+\alpha_1-p)/\chi_1^{n+\alpha_1-p})$。相应的振幅函数发散为 $p\to\infty$；这种现象称为后后项发散。在 §3.6 中对该最优截断展开进行博雷尔重求和，揭示了 HOSP。

博雷尔变换在 $w=\chi_i(z)$ 处的奇点，对应于刻画超渐近级数中晚项发散的奇异量函数。此外，$y_B$ 在这些奇点附近的局部行为，由出现在发散表示 (3.3) 中的常数 $\alpha_i$ 决定。例如，根据 §3.3 中的晚项分析，与 $\chi_1=z^2/2$ 相关的发散具有 $\alpha_1=1/2$；而 (3.28) 中与$\chi_2:=\chi_1+\tilde{\chi}=z-1/2$ 相关的发散具有 $\alpha_2:=\alpha_1+\beta=1$。因此，参数化博雷尔变换 (2.5) 在 $w=\chi_1$ 处有一个分支点，在 $w=\chi_2$ 处有一个极点。

**4. 高阶斯托克斯现象的更多例子。**现在我们考察三个此前研究过的微分方程，它们的渐近解呈现出高阶斯托克斯现象。我们将说明，如何通过应用本文提出的方法来解析这些问题中的这一现象；该方法推导出渐近解的后后项发散。

本节考虑的奇异摄动方程如下：

(i) §4.1 中的皮尔西方程。这是一个线性三阶齐次方程，Howls等人 [17] 此前通过考察解的积分表示并进行超余项分析，对其进行了研究。我们的结果总结于 §4.1，详细内容见附录 B。§4.2 中的一个线性二阶非齐次微分方程。Trinh 和 Chapman [32], 提出了该方程，并考察了渐近解后期项的精确级数表示。（iii）§4.3 中一个带有特征值的线性二阶微分方程，该方程源自地球物理流体动力学。Shelton等人 [28, 29]研究了该方程及其由此产生的特征值发散。

(ii)

前两个例子包含从相交的斯托克斯线发出的新斯托克斯线。在第三个例子中，高阶斯托克斯线与常规斯托克斯线重合，这改变了常规斯托克斯乘子的值。

**4.1. 皮尔西方程。**Pearcey 函数或许是与高阶斯托克斯现象相关、最广为人知的研究对象；Howls等人[17], 主要从积分表示的角度对其进行了讨论

$$I(z)=\int_C \mathrm{e}^{-f(s;z)/\epsilon}\,\mathrm{d}s \quad \text{with} \quad f(s;z)=-\mathrm{i}\left(\frac{1}{4}s^4+\frac{1}{2}s^2+sz\right). \tag{4.1}$$

这里，$\epsilon\to 0$ 和 $C$ 是从 $\infty\exp(-3\pi\mathrm{i}/8)$到 $\infty\exp(\pi\mathrm{i}/8)$的一条积分路径。另外，对（4.1）式进行变换可得线性三阶齐次微分方程

$$\epsilon^3 I'''(z)-\epsilon I'(z)-\mathrm{i}zI(z)=0, \tag{4.2a}$$

对此，我们还指定行为条件

$$I(z)\sim\frac{1}{z^{1/3}}\exp\left(\frac{3(\sqrt{3}+\mathrm{i})z^{4/3}}{8\epsilon}\right) \quad \text{as } |z|\to\infty,\ \arg[z]=3\pi\mathrm{i}/8. \tag{4.2b}$$

对 (4.2a) 进行远场分析可得解 $I(z)\sim\alpha z^{-1/3}\mathrm{e}^{3(\mathrm{i}-\sqrt{3})z^{4/3}/(8\epsilon)}+\beta z^{-1/3}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}z^{4/3}/(4\epsilon)}+\gamma z^{-1/3}\mathrm{e}^{3(\mathrm{i}+\sqrt{3})z^{4/3}/(8\epsilon)}$ 当 $|z|\to\infty$ 时。在由

条件 (4.2b) 指定的方向上，这三个分量中的第三个（出现在行为条件中）比另外两个次要。因此，条件 (4.2b) 要求 $\alpha = 0$、$\beta = 0$ 和 $\gamma = 1$，从而为三阶常微分方程提供三个约束。

第 7.2 节讨论了积分 (4.1) 与常微分方程表述 (4.2) 之间的关系。Takei [31], 考察了 Berk 等人 [5],提出的 BNR 方程，该方程可通过对 (4.2a) 重新缩放得到。一般的 Pearcey 积分 (4.1) 含有第二个参数，在上述表述中假定该参数固定。

借助积分表示 (4.1)，通过最速下降分析 [17]可以更容易地理解高阶斯托克斯现象。有趣的是，我们没有找到关于 Pearcey 函数在其奇异摄动微分方程形式下的高阶斯托克斯现象（与晚项相关）的直接渐近分析。现在，我们将运用前几节中的技巧来进行分析。

对于 (4.2a)，允许存在三种不同的 WKBJ 解，每种解均由一个主导指数项标记，$A_i(z,\ \epsilon)\mathrm{e}^{-S_i\ (z)\ /\epsilon}$ 其中 $i = 1$，2，3，由此得到如下形式的发散展开

(4.3)
$$
\begin{aligned}
I(z) = \mathrm{e}^{-S_1/\epsilon}&\left[A_1^{(0)} + \cdots + \epsilon^n\left(B_1^{(0)}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{(S_2-S_1)^{n+\alpha}} + \tilde{\sigma}_1 C_1 \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(S_3-S_1)^{n+\alpha}}\right) + \cdots\right] \\
+ \mathrm{e}^{-S_2/\epsilon}&\left[A_2^{(0)} + \cdots + \epsilon^n\left(B_{2a}^{(0)}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{(S_3-S_2)^{n+\alpha}} + B_{2b}^{(0)}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{(S_1-S_2)^{n+\alpha}}\right) + \cdots\right] \\
+ \mathrm{e}^{-S_3/\epsilon}&\left[A_3^{(0)} + \cdots + \epsilon^n\left(B_3^{(0)}\frac{\Gamma(n+\alpha)}{(S_2-S_3)^{n+\alpha}} + \tilde{\sigma}_3 C_3 \frac{\Gamma(n+\alpha)}{(S_1-S_3)^{n+\alpha}}\right) + \cdots\right].
\end{aligned}
$$

上文 (4.3) 中的第三项对应于行为条件 (4.2b) 中指定的项。这些组成部分（例如 $A_i$、$B_i$、$C_i$）的推导见附录 B。(4.3) 中的六个阶乘除以幂次项各自在相应的奇异量为正实数时，会在另一个指数项上诱发斯托克斯现象。不过，只有当相应的高阶斯托克斯乘子 $\tilde{\sigma}_1$ 或 $\tilde{\sigma}_3$ 非零时，其中两种发散才会出现。

由此得到的斯托克斯线和高阶斯托克斯线结构如图 4.1 所示。注意，有两个奇点 $z_-$ 和 $z_+$，它们既对应于主阶渐近解 $A_i^{(0)}$ 中的奇点，也对应于奇异量函数的零点：$S_1(z_-) = S_2(z_-) = S_2(z_+) = S_3(z_+) = 0$。总共有四条斯托克斯线分别从 $z_-$ 和 $z_+$ 发出（以粗线表示）。斯托克斯线在实轴上相交两次。这些交点也分别位于相应的高阶斯托克斯线上（以细线表示）；跨过这些线时，相应的乘子 $\tilde{\sigma}$ 会从零变为非零。因此，越过斯托克斯线的交点后，超渐近级数 (4.3) 的后期项中会出现额外的发散，从而产生两条新的斯托克斯线。图中将这些新斯托克斯线标记为 $1 > 3$ 和 $3 > 1$ 。在图中标记为 (∗) 的右上扇区中，由于行为条件 (4.2b)，渐近超渐近级数中只有第三个分量 $\{3\}$存在。以点 $z =$为中心顺时针旋转时，我们首先遇到一条 $2 > 1$ 斯托克斯线，但它不起作用，因为超渐近级数中不存在第二个指数项。接着，我们跨过 $3 > 1$ 斯托克斯线，使分量 $\{1, 3\}$出现；再跨过 $3 > 2$ 斯托克斯线，得到 $\{1, 2, 3\}$；跨过 $2 > 1$后，则得到分量 $\{2, 3\}$。最后，我们跨过 $3 > 2$斯托克斯线，回到原来的扇区，得到 $\{3\}$。

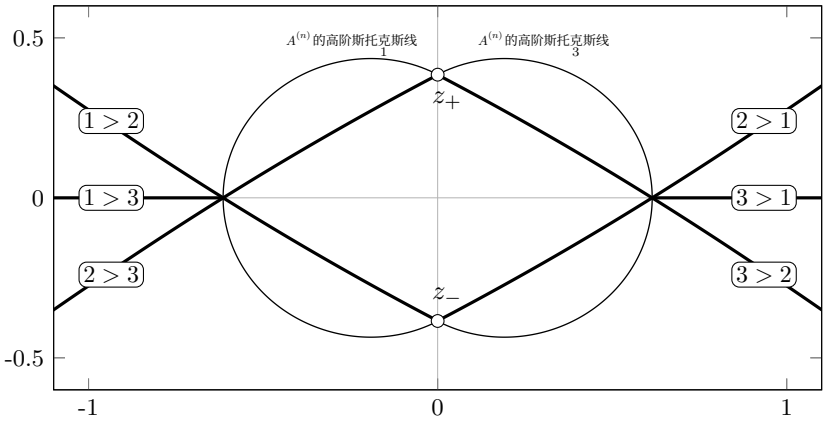



图 4.1: *The Stokes line structure is shown in the z-plane for the Pearcey equation* (4.2a)。 *Higher-order Stokes lines (HOSL) across which the late-terms switch-on a new divergent , , , component are shown by thin lines. Stokes lines across which the regular Stokes phenomenon occurs on an exponentially-small component of the asymptotic expansion are shown as bold , , lines. On account of the HOSP two Stokes lines are born (or truncated) at the the point where regular Stokes lines cross. The notation of $i > j$ corresponds to exponential $^{S_i/\epsilon}$ switching on* e e $^{S_j/\epsilon}$ *in the asymptotic solution 4 3 . We note that this figure is analogous to that presented* ( . ) ( ) 等人。 *in figure 4 a of Howls [17].*

**4.2. 非齐次二阶方程**。我们现在研究以下关于 $A(z)$ 的二阶奇异摄动微分方程,

$$\epsilon^2 A'' + 2\epsilon A' + (1-z)A = \frac{1}{z-a}, \tag{4.4a}$$

$$A(z) \to 0 \quad \text{as} \quad \mathrm{Re}[z] \to \pm\infty,\ \mathrm{Im}[z] = 0. \tag{4.4b}$$

Trinh 和 Chapman [32] 将方程 (4.4a) 视为一个模型问题，这是由于它在 $z = 1$ 处存在转向点，在 $z = a$ 处存在奇点；该模型旨在捕捉非线性重力毛细波中的相交斯托克斯线，这些波沿着受低地形限制的流体传播。事实上，方程 (4.4a) 的渐近解的每一阶都可以精确地写成关于 $(1-z)^{-1}$ 和 $(z-a)^{-1}$ 的幂的多项式，其常数系数由一个递推关系的解确定。有人推测，对递推关系高阶项行为的分析或可揭示高阶斯托克斯现象 [32],的细节，但这仍是一个未解决的挑战。

现在，我们将一般性方法应用于此问题，以检测高阶斯托克斯现象。将方程 (4.4a) 的解展开为 $A(z) = A_0(z) + \epsilon A_1(z) + \cdots$ 时，该渐近展开的前两阶为

$$A_0 = \frac{1}{(1-z)(z-a)} \quad \text{and} \quad A_1 = \frac{2}{(1-z)^2(z-a)^2} - \frac{2}{(1-z)^3(z-a)}. \tag{4.5}$$

在方程 (4.4a) 中的 $O(\epsilon^n)$ 处，我们得到 $A''_{n-2} + 2A'_{n-1} + (1-z)A_n = 0$，这对 $n \geq 2$ 成立。渐近展开的后期项 $A_n$ 将随着 $n \to \infty$ 发散，这是由于 (4.5) 中 $z = 1$ 和 $z = a$ 处的奇点所致。

**后期项发散**。 为了研究 $A_n$ 的发散，我们考虑如下阶乘-幂次渐近形式

$$A_n(z) \sim \sum_{p=0}^{\infty} B_p(z) \frac{\Gamma(n-p+\alpha)}{[\chi(z)]^{n-p+\alpha}} \qquad \text{as } n \to \infty, \tag{4.6}$$

其中 $\alpha$ 是一个常数， $\chi$ 和 $B_p$ 分别是奇异量和振幅函数。将渐近形式 (4.6) 代入 $O(\epsilon^n)$ 方程，在 $\Gamma(n-p+\alpha)/\chi^{n-p+\alpha}$ 的每一阶上可得方程

$$(\chi')^2 - 2\chi' + (1-z) = 0, \tag{4.7a}$$

$$2(1-\chi')B_0' - \chi'' B_0 = 0, \tag{4.7b}$$

$$B_{p-2}'' + 2(1-\chi')B_{p-1}' - \chi'' B_{p-1} = 0, \tag{4.7c}$$

其中 (4.7c) 对 $p \geq 2$成立。求解关于 $\chi$′的二次方程 (4.7a) 以及关于 $B_0$ 的方程 (4.7b)，可得

$$\chi_{\pm}'(z) = 1 \pm z^{1/2} \qquad \text{and} \qquad B_0(z) = \frac{\Lambda_0}{(1-\chi_{\pm}')^{1/2}}, \tag{4.8}$$

其中 ±表示 $\chi$′的两个解中的每一个， $\Lambda_0$ 是一个积分常数。由上文 (4.8) 中的奇异量解可得 $1-\chi_{\pm}' = \mp z^{1/2}$，因此 $B_0$ 的解在 $z=0$处是奇异的。这个位于 $z=0$ 的新奇点将导致 $B_p$ 在 $p \to \infty$时发散，下面将对此进行研究。

**后后项发散**。 为了刻画当 $p \to \infty$ 时 $B_p$ 的发散，我们考虑典型的阶乘比幂次渐近形式 [（参见式 (3.13)）]。将其代入方程 (4.7c)，得到 $\tilde{\chi}_{\pm}'(z) = 2(1-\chi_{\pm}')$，因此在施加条件 $\tilde{\chi}_{\pm}(0) = 0$ 后，有 $\tilde{\chi}_{\pm}(z) = \mp 4z^{3/2}/3$。结合前因子方程的解，我们得到如下形式的后后项发散

$$B_p(z) \sim \frac{\tilde{\Lambda}}{(\chi_{\pm}'-1)^{1/2}} \frac{\Gamma(p+\beta)}{[\mp 4z^{3/2}/3]^{p+\beta}} \qquad \text{as } p \to \infty, \tag{4.9}$$

˜其中 $\Lambda$ 是积分常数。这将引发高阶斯托克斯现象，其中当 $\mp 4z^{3/2}/(3\chi_{\pm})$ 为实数且为正时，具有奇异量 $\chi_{\pm} \mp 4z^{3/2}/3$ 的新后期项分量会开启。

**斯托克斯线结构**。 朴素的斯托克斯线可通过对式 (4.8) 中的解 $\chi_{\pm}'(z) = 1 \pm z^{1/2}$ 积分来确定。由于有两个会导致发散的奇点 $z=a$ 和 $z=1$，因此会有四个初始奇相位。为解决 Trinh 和 Chapman [32] 所发现的斯托克斯线相交问题，这里仅考虑由边界条件 $\chi(a) = 0$ 产生的两个初始奇相位。由此得到

$$\chi_1(z) = z + \frac{2}{3}z^{3/2} - a - \frac{2}{3}a^{3/2} \quad \text{and} \quad \chi_2(z) = z - \frac{2}{3}z^{3/2} - a + \frac{2}{3}a^{3/2}. \tag{4.10}$$

此外，由于在 $z=0$ 处存在奇点，上述两个奇异量对应的展开 (4.6) 中的振幅函数会按照 (4.9) 所述的方式发散。这个新的发散级数会引发 HOSP：一个新的、关于 $A_n$ 的阶乘除以幂形式贡献项，其奇异量为 $\chi + \tilde{\chi}$，并在斯托克斯线 $\mathrm{Im}[\tilde{\chi}/\chi] = 0$ 和 $\mathrm{Re}[\tilde{\chi}/\chi] > 0$ 上发生切换。因此，在 $A_n$ 中切换开启的两个新奇异量为

$$\chi_3(z) = z - \frac{2}{3}z^{3/2} - a - \frac{2}{3}a^{3/2} \quad \text{and} \quad \chi_4(z) = z + \frac{2}{3}z^{3/2} - a + \frac{2}{3}a^{3/2}. \tag{4.11}$$

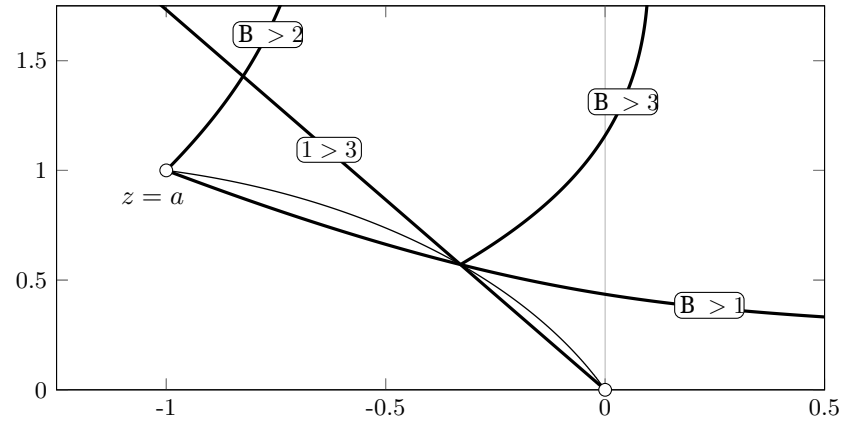



图 4 2 *The Stokes line and HOSL structure is shown for* $z \in \mathbb{C}$ *near the singularity at* $z = a$ : i, *(circle) for* $a = -1 +$ . *The turning point at* $z = 0$ *(circle) generates a* $1 > 3$ *Stokes line as it is a singularity in the* $O$ $^{-\chi_1/\epsilon}$ *expansion. Across the Stokes lines (bold)* (e) , *exponentially-small terms in the asymptotic solution switch on. Across the HOSL (thin line)* , *a new divergent contribution switches on in the late-terms* $A_n$. ,

通过 HOSP 产生的 (4.11) 中的新奇异量，在对应于微分方程 (4.4a) 正则点的位置处等于零。Trinh 和 Chapman [32, 第 418] 页对此作了评论：

> 然而令人好奇的是，这些奇点并未出现在基级数的任何地方，
> 因此似乎与最终的发散无关。

正如我们现在所知，带有奇异量 (4.11) 的 $A_n$ 发散贡献会在穿过高阶斯托克斯线时关闭；因此，它们不会在表观奇点处产生意外的奇异行为。然而，在其他存在这些奇异量的区域中，相应的奇异量仍会导致渐近展开发散。

在图 4.2 中，我们绘出了与 $z = a$ 处奇点相关的斯托克斯线和高阶斯托克斯线。由 (4.10) 产生了两条朴素的斯托克斯线，分别记为 B $> 1$ 和 B $> 2$。图中还显示了通过在 $\tilde{\chi} = \mp 4z^{3/2}/3$ 上应用 Dingle条件、且满足 $1 > 3$ 时得到的艾里斯托克斯线。这导致斯托克斯线在两处相交。第一处位于 $1 > 3$ 与 B $> 2$ 斯托克斯线之间，结果是自洽的。然而，第二处位于 $1 > 3$ 与 B $> 1$ 之间，会导致矛盾。带有 $\chi_3$ 的新发散分量会产生一条新的 B $> 3$ 斯托克斯线，从而解决这一不一致。

**4.3. 赤道开尔文波**。我们关于高阶斯托克斯现象的最后一个例子，涉及对具有微弱纬向切变的行进赤道开尔文波的研究。此处，该系统由一个二阶奇异摄动微分方程支配，

$$\begin{aligned} &\epsilon^2\Big[(Y-c-1)(Y-c+1)^2+(Y-c-1)^2(Y-c+1)\Big]V'' \\ &-2Y\Big[(Y-c-1)(Y-c+1)^2+(Y-c+1)(Y-c-1)^2+\frac{2\epsilon^2(Y-c)^2}{Y}\Big]V' \\ &+\Big[\big[2Y(Y-c-1)+\epsilon^2\big](Y-c+1)^2+(2c-2-\epsilon^2)(Y-c-1)^2\Big]V=0, \end{aligned} \tag{4.12a}$$

其边界条件为

$$V(0) = 1, \tag{4.12b}$$

$$V(Y)\mathrm{e}^{-Y^2/2\epsilon^2} \to 0 \quad \text{as} \quad \mathrm{Re}[Y] \to \pm\infty,\ \mathrm{Im}[Y] = 0. \tag{4.12c}$$

未知函数 $V(Y)$ 表示行波试探形式的振幅，而 $\epsilon$ 是无量纲剪切。波速 $c$ 是一个特征值，其值通过施加边界条件 (4.12b) 得到。衰减条件 (4.12c) 要求实轴远场中仅存在基底展开。关于该模型的更多细节，见 Griffiths [14] 和 Shelton等人 [29]。我们考虑如下形式的解的展开：$V(Y) = V_0 + \epsilon^2 V_1 + \epsilon^4 V_2 + \cdots$。只有将特征值也展开为 $c = c_0 + \epsilon^2 c_1 + \epsilon^4 c_2 + \cdots$，才能在 $\epsilon$ 的每个阶次上满足边界条件。

在首阶，满足边界条件 $V_0(0) = 1$ 后，解为

$$V_0(Y) = (1-Y)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{Y/2} \qquad \text{and} \qquad c_0 = 1. \tag{4.13}$$

$Y = 1$ 处的这个奇点会导致级数展开发散。此外，特征值展开 $c = 1 + \frac{1}{2}\epsilon^2 - \frac{1}{8}\epsilon^4 + \cdots$ 也会发散。[–]

**4.3.1. 后期项发散**。由于方程 (4.12a) 中解 $V$ 与特征值 $c$ 之间存在非线性，$O(\epsilon^{2n})$ 方程将包含可数无穷多个项（当 $n \to \infty$ 时），例如齐次项，如 $V_n$ 和 $V'_{n-1}$，以及非齐次项，如 $c_n$。这些项都会对主导阶发散解产生贡献，

$$V_n(Y) \sim B_0^{(c_n)}(Y)\Gamma(n+\alpha) + B_0(Y)\frac{\Gamma(n+\gamma)}{(1-Y^2)^{n+\gamma}}, \tag{4.14}$$

其中一项与 $c_n$ 的发散有关，另一项则由 $Y = 1$ 处的奇异行为产生。在 (4.14) 中，$\alpha$ 和 $\gamma$ 是常数，而奇相函数 $\chi = 1 - Y^2$ 满足条件 $\chi(1) = 0$。

与§4.2中的例子类似，这里存在一个明显的悖论：在阶乘除以幂的表示（4.14）中，$Y = -1$ 处似乎存在一个奇点，但在展开的早期阶中却没有这个奇点。考虑 $B^{(c_n)}{}_0$ 的低阶分量或可解开这一悖论；这些分量会引发高阶斯托克斯现象，使得（4.14）的第二个分量在到达 $Y = -1$ 之前就被关闭。

**4.3.2. 后后项发散**。在Shelton等人 [29] 对这一问题的研究中，假定了高阶斯托克斯现象的后果，即一条非激活的斯托克斯线以及一个反常的斯托克斯乘子。现在，我们将展示如何通过应用本文提出的方法推导出这些结果。

特征值展开的后期项将以 $c_n \sim \delta\Gamma(n+\alpha)$所示的阶乘除以幂的形式发散，其中 $\delta$ 和 $\alpha$ 为常数。随后，可以通过如下形式的后期项渐近假设，确定由这一特征值发散产生的特解

$$V_n(Y) \sim \sum_{p=0}^{\infty} B_p^{(c_n)}(Y)\Gamma(n-p+\alpha) \qquad \text{as } n \to \infty. \tag{4.15}$$

可确定 $B^{(c_n)}{}_0 \sim 1/Y$ 当 $Y \to 0$时，这会导致如下形式的后后项发散

$$B_p^{(c_n)}(Y) \sim C(Y)\frac{\Gamma(p+\beta)}{[\tilde{\chi}(Y)]^{p+\beta}} \qquad \text{as } p \to \infty. \tag{4.16}$$

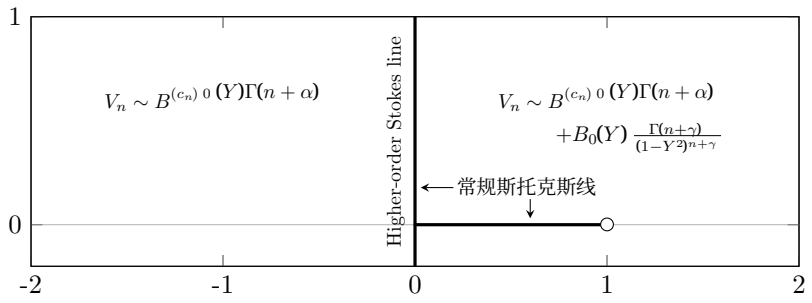



图 4 3 *The Stokes line structure is shown for the Kelvin wave equation* 4 12 *. The regular*: *Stokes line (bold) for* $\chi = 1-Y^2$ *lies along the imaginary axis and part of the real-axis. There* (. a)

*is also a HOSL along the imaginary axis which causes the regular Stokes line on the negative , real axis to be switched off.*

要求 $\tilde{\chi}(0) = 0$，由此可得 $\tilde{\chi}(Y) = -Y^2$。因此，跨越 HOSL $\mathrm{Im}[-Y^2/1] = 0$ 和 $\mathrm{Re}[-Y^2/1] > 0$时， $V_n$ 的一个新阶乘除以幂次项将被激活，其奇异量由 $\chi = 1 - Y^2$ 给出。这与式（4.14）中由 $Y = 1$处的奇点产生的奇异量相同。因此，$\chi = 1 - Y^2$ 中包含位于 $Y = -1$ 的不需要的奇点这一表面上的矛盾便得到了解决，因为跨越 HOSL 时，式（4.14）中的先前表达式会关闭。图 4.3 展示了这一点。

**5. 讨论**。 尽管高阶斯托克斯现象有些晦涩，但它在奇异摄动问题的渐近分析中普遍存在。正如我们所指出的，它伴随着这样一种情形：某个 $\epsilon$-展开的后期项近似（例如$y_n$）包含关于 $n$ 的负幂的另一发散级数。因此，斯托克斯现象会发生（在 $n$ 中），使晚项开启或关闭，进而使斯托克斯线本身开启或关闭。或者，高阶斯托克斯现象的普遍性也可以解释为 Borel 平面具有分支结构的结果。高阶斯托克斯现象常出现于以下情形：（i）斯托克斯线交叉；（ii）晚项中预测出早期阶次中不存在的额外奇点；或（iii）朴素的发散级数无法满足必要的边界条件。

本文所提出的方法是针对线性常微分方程介绍的。不过，它们也适用于更一般的非线性问题和偏微分方程。我们的方法与 Chapman 和 Mortimer [9], Body 等人 [8], 以及 Howls 等人 [17]的方法相似，在某些情况下则更为一般；我们着重分析晚项的 $1/n$ 发散级数及其随后产生的斯托克斯现象。此外，我们证明了高阶斯托克斯现象和第二代斯托克斯现象均由同类发散所致，这种发散要么出现在晚晚项中，要么出现在随后的超渐近级数展开中。因此，任何例如会产生 B $> 2$ 斯托克斯线的高阶斯托克斯现象，都必然伴随着第二代 $1 > 2$斯托克斯线。

非线性带来的主要复杂性之一，是需要通过匹配过程与内解匹配，而这决定了晚期项和晚晚期项发散中的若干组成部分。对于我们的线性例子，可以显式确定内解外层极限的级数展开。对于一般的非线性问题，情况则并非如此；相关的递推关系通常需要通过数值方法求解。在偏微分方程的研究中，从晚期项和晚晚期项渐近假设出发，对奇异量方程和振幅方程进行积分也可能颇具挑战 [9, 8]。Borel 平面中的奇点结构也会更加复杂，预计会涉及额外的黎曼片。

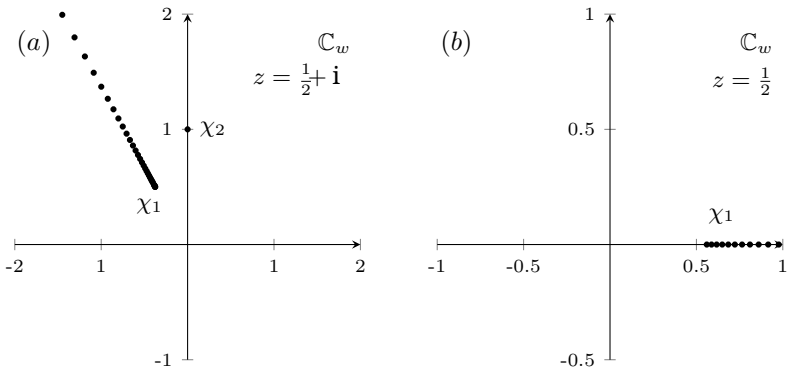



图 5.1： *The Borel plane,* $\mathbb{C}_w$, *is shown for our minimal example* (1.1) *in (a) for* $z = 1/2 + \mathrm{i}$ *and in (b) for* $z = 1/2$. *The singularities (nodes) correspond to* $w = \chi_1$ $z = z^2/2$ *and* ( ) ( ), $w = \chi_3$ $z = z - 1/2$ *and are computed from a Padé approximant with* $N = 250$. *Note the* ( ) ( ) *characteristic coalescing poles that the rational approximation assigns to branch points. The situation a corresponds to the region 'above' the HOSL in figure 3.1 while b corresponds to 'below' the HOSL.*

对于非线性问题，可以通过数值解析延拓技术来探究 Borel 平面中的奇点结构，例如 Pad´e 逼近 [10], ——一种用于对截断幂级数进行解析延拓的方法。对于给定的参数级数，这可以作为一种有用的启发式方法，帮助理解参数化的 Borel 平面奇点结构。该方法涉及计算截断幂级数 $y_B^{2N}(w;\, z) = y_0(z) + y_1(z)w + \cdots + y_{2N}(z)w^{2N}/(2N)!$ 的 $2N+1$ 个微扰项。接着，对于感兴趣的固定 $z \in \mathbb{C}_z$值，我们计算非对角 $[N-1:\ N]$ Pad´e 逼近。也就是说，我们写成 $P_{[N-1:N]}(w;\, z) = P_{N-1}(w;\, z)/Q_N(w;\, z)$，其中 $P_{N-1}$和 $Q_N$ 是关于 $w$ 的多项式，其系数依赖于 $z$，并且选取这些系数使其在给定阶数上与截断幂级数相符。我们在图 5.1 中以模型方程 (1.1) 为例展示了这一点。值得探究的区域是 HOSL 附近，在那里可以看到极点消失在分支割线之后，从而呈现 HOSP。我们绘制了 5.1($a$) 中 HOSL 内部（ $z = 1/2 + \mathrm{i}$）的 Borel 平面，以及 5.1($b$) 中 $z = 1/2$ 对应的外部区域。值得注意的是，在 ($b$) 中，当 $z = 1/2$ 时，Borel 奇点 $w = \chi_2(1/2) = 0$；然而，级数 $y_B$ 在此处收敛，因为奇点 $w = 0$ 位于特定原点上方的高层黎曼面上（参见精确解 (2.5)）。

除了方法论的发展之外，我们的工作还有另一项贡献，即凸显了最简例子 (1.1)。与 Olde Daalhuis [25],给出的例子类似，这类情况提醒我们，即使在表面上看似简单的问题中，发散和超渐近级数的本质也微妙而复杂。近期艾萨克·牛顿研究所的一项计划促成了许多与高阶斯托克斯现象相关、令人振奋且正在进行的研究，例如 Olde Daalhuis [27] 关于渐近展开的斯托克斯乘子平滑化的研究，King [18] 关于重合斯托克斯线与高阶斯托克斯现象的研究，以及 Nemes [22] 关于高阶斯托克斯现象导致的非典型斯托克斯乘子的研究。这是一个令人振奋且前沿的研究领域，还有许多有待探索之处。

**致谢**。我们感谢剑桥的艾萨克·牛顿数学科学研究所举办“适用的复苏渐近：迈向普适理论”项目，在此期间进行了许多富有启发性的讨论。我们特别感谢与 S. J. Chapman（牛津）、G. Nemes（东京都立大学）、A. Olde Daalhuis（爱丁堡）以及许多其他项目参与者的讨论，

该项目。本研究是在通过理论科学访问计划（TSVP）访问冲绳科学技术大学院大学（OIST）期间开展的。我们还要感谢匿名审稿人对稿件内容和结构提出的详细意见。

## 参考文献

[1] I. Aniceto, G. Başar, and R. Schiappa, *A primer on resurgent transseries and their asymptotics* 809 2019 1 135 ,《物理学报告》，（），第 – 页。[2] T. Aoki, *New turning points in the exact WKB analysis for higher-order ordinary differential equations* 1994 ,《奇异扰动的代数分析 I》，（）。[3] T. Aoki, T. Kawai, and Y. Takei, *On the exact WKB analysis for the third order ordinary differential equations with a large parameter* 2 1998 625 640 ,《亚洲数学杂志》，（），第 – 页。[4] ———, *On the exact steepest descent method: A new method for the description of Stokes curves* 42 2001 3691 3713 ,《数学物理杂志》，（），第 – 页。[5] H. L. Berk, W. M. Nevins, and K. V. Roberts, *New Stokes' line in WKB theory*,《数学物理杂志》，23（1982），第988–1002页。[6] M. V. Berry, *Uniform asymptotic smoothing of Stokes discontinuities*,《伦敦皇家学会会刊 A》，422（1989），第7–21页。[7] M. V. Berry and C. J. Howls, *Hyperasymptotics for integrals with saddles*,《伦敦皇家学会会刊 A》，434（1991），第657–675页。[8] G. L. Body, J. R. King, and R. H. Tew, *Exponential asymptotics of a fifth-order partial differential equation* 16 2005 647 681 ,《欧洲应用数学杂志》，（），第 – 页。[9] S. J. Chapman and D. B. Mortimer, *Exponential asymptotics and Stokes lines in a partial differential equation* 461 2005 2385 2421 ,《伦敦皇家学会会刊 A》，（），第 – 页。[10] O. Costin and G. V. Dunne, *Uniformization and constructive analytic continuation of Taylor series* 392 2022 863 906 ,《数学物理通讯》，（），第 – 页。[11] S. Crew and P. H. Trinh, *Resurgent aspects of applied exponential asymptotics*,《应用数学研究》，152（2024），第974–1025页。[12] R. B. Dingle, *Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation*,学术出版社，伦敦，1973年。[13] D. Dorigoni, *An introduction to resurgence, trans-series and alien calculus*,《物理年鉴》，409（2019），第167914页。[14] S. D. Griffiths, *The limiting form of inertial instability in geophysical flows*,流体力学杂志，605（2008），第115–143页。[15] N. Honda, *On the Stokes geometry of the Noumi-Yamada system*,《复微分方程及其变形的代数、解析与几何方面：Painlevé 层级》，2（2007），第45–72页。[16] N. Honda, T. Kawai, and Y. Takei, *Virtual turning points*,第4卷，Springer，2015年。[17] C. J. Howls, P. J. Langman, and A. B. Olde Daalhuis, *On the higher-order Stokes phenomenon* 460 2004 2285 2303 ,《伦敦皇家学会会刊 A》，（），第 – 页。[18] J. King, *Exponential asymptotics the Stokes phenomenon and the higher-order Stokes phenomenon in some linear partial differential equations* ,。艾萨克·牛顿研究所《应用复苏渐近分析：总结》研讨会报告，2022年12月16日。[19] J. R. King and S. J. Chapman, *Asymptotics beyond all orders and Stokes lines in nonlinear differential-difference equations* 12 2001 433 463 ,《欧洲应用数学杂志》，（），第 – 页。[20] C. J. Lustri, R. Pethiyagoda, and S. J. Chapman, *Three-dimensional capillary waves due to a submerged source with small surface tension* 863 2019 670 701 ,流体力学杂志，（），第 – 页。[21] C. Mitschi, D. Sauzin, M. Loday-Richaud, and É. Delabaere, *Divergent series summability and resurgence* 2016 ,, Springer，。[22] G. Nemes, *Dingle's final main rule, Berry's transition, and Howls' conjecture*,《物理学杂志 A：数学与理论》，55（2022），第494001页。[23] A. B. Olde Daalhuis, *Hyperterminants I*,《计算与应用数学杂志》，76（1996），第255–264页。[24] ———, *Hyperterminants II*,《计算与应用数学杂志》，89（1998），第87–95页。[25] ———, *On higher-order Stokes phenomena of an inhomogeneous linear ordinary differential equation* 169 2004 235 246 ,《计算与应用数学杂志》，（），第 – 页。[26] ———, *Hyperasymptotics and hyperterminants: exceptional cases*,《计算与应用数学杂志》，233（2009），第555–563页。[27] ———, *Smoothing for the higher-order Stokes phenomenon*。艾萨克·牛顿研究所《应用复苏渐近分析：总结》研讨会报告，2022年12月16日。

[28] J. Shelton, S. J. Chapman, and P. Trinh, *Exponential asymptotics for a model problem of an equatorially trapped Rossby wave* 84 2024 1482 1503 ,SIAM 应用数学杂志, （），第 – 页。[29] J. Shelton, S. Griffiths, S. J. Chapman, and P. H. Trinh, *On the exponentially-small instability of the equatorial Kelvin wave* 2025 ,准备中, （）。[30] A. Shudo, *A role of virtual turning points and new Stokes curves in Stokes geometry of the quantum Hénon map. Algebraic analysis of differential equations* 2008 ,Springer, 。[31] Y. Takei, *WKB analysis and Stokes geometry of differential equations*,载于《微分方程的解析、代数与几何方面》, Springer, 2017年, 第263–304页。[32] P. H. Trinh and S. J. Chapman, *New gravity–capillary waves at low speeds. Part 2. Nonlinear geometries* 724 2013 392 424 ,流体力学杂志, （），第 – 页。

**附录 A. 在 $z = 0$ 和 $z = 1$附近的内层分析**。 本节旨在确定 §2 中渐近解的后期项 $y_n$ 中出现的未知常数。我们注意到，尽管 (3.9) 中的每个函数 $B_p$ 在 $p \geq 0$时都会有一个积分常数 $\Lambda_p$，但并非所有这些常数都是必需的。我们只需了解 $\tilde{\ } \Lambda_0$ ，以及 $B_p$ 在 $p \to \infty$ 时发散形式中出现的常数 $\Lambda$ （见 (3.14) ）。

**A.1. 在 $z = 0$附近的内层分析**。 我们首先推导 $z = 0$处的内层方程，该处附近展开式 (3.7) 的早期阶发生重排。这是因为原微分方程中存在一个转向点，导致主阶解出现奇点。由方程 (3.7) 可知，当 $z \to 0$ 时， $y_0 \sim z^{-1}$ $\epsilon y_1 \sim \epsilon z^{-3}$ ，因此当 $z \sim \epsilon^{1/2}$时，基底展开的早期阶发生重排。为研究该区域中的解，我们引入内变量 $\hat{z}$ 和内解 $\hat{y}$，定义如下：

$$z = \epsilon^{1/2}\hat{z} \qquad \text{and} \qquad y_{\text{outer}} = \frac{1}{(\epsilon^{1/2}\hat{z})}\hat{y}_{\text{inner}}(\hat{z}). \tag{A.1a,b}$$

内层区域由 $\hat{z} = O(1)$ 定义，而我们在 (A.1b) 中对内解的定义确保了 $\hat{y}_{\text{inner}} = O(1)$ 位于内层区域。请注意，虽然 $z = 1/2 + O(\epsilon)$ 在方程 (3.6a) 中给出了有效的主导平衡，对应于基底展开重排并伴有 $\chi_2$ 指数 $\mathrm{e}^{-(z-1/2)/\epsilon}$，但由于高阶斯托克斯现象，后一项在 $z = 1/2$ 附近并不存在。随后，可将方程 (A.1) 代入外层方程 (3.6a)，推导出主阶内层方程：

$$\frac{1}{\hat{z}}\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{z}} + \left(1 - \frac{1}{\hat{z}^2}\right)\hat{y} = 1. \tag{A.2}$$

由 (3.7) 给出的外展开早期项的内极限为 $\hat{y} \sim 1 + \hat{z}^{-2} + 3\hat{z}^{-4} + \cdots$。我们需要了解方程 (A.2) 的内解，以便与外展开的后期项匹配，并确定未知的积分常数。方程 (A.2) 的精确解为 $\hat{y}(\hat{z}) = \hat{z}\mathrm{e}^{-\hat{z}^2/2}[c_1 - \mathrm{i}\sqrt{\pi}/2\mathrm{erf}(\mathrm{i}\hat{z}/\sqrt{2})]$, ，将其展开为 $\hat{z} \to \infty$ 后，在代数阶上得到

$$\hat{y}(\hat{z}) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)} \frac{1}{\hat{z}^{2n}}. \tag{A.3}$$

通常对于不存在精确解的非线性问题，必须假设采用形式为 (A.3) 的级数展开。其系数通过递推关系数值求得，直到足够大的指标 ($n \approx 100$)；通过与外解匹配，可得到积分常数的近似值。

现在，我们将内解 (A.3) 写成外变量 $z$ 和外解 $y$ 的形式（见方程 (A.1)），并与外发散解进行匹配。内解 (A.3) 的外极限为 $y \sim \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \Gamma(2n) 2^{1-n} z^{-(1+2n)}/\Gamma(n)$。带有振幅函数 (3.11) 的外发散解 (3.9) 的内极限（当 $z \to 0$ 时）为 $y_n \sim \Lambda_0 \Gamma(n+\alpha)(z^2/2)^{-n-\alpha}$。对 $O(\epsilon^n)$ 分量的匹配要求 $\alpha = 1/2$，由此得到常数 $\Lambda_0$ 的表达式。因此，我们得到

$$\alpha = 1/2 \qquad \text{and} \qquad \Lambda_0 = \lim_{n\to\infty} \left( \frac{\Gamma(2n)}{2^{2n-1/2}\Gamma(n)\Gamma(n+1/2)} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{A.4}$$

**˜A.2. 在附近进行内层分析** $z = 1$。常数 $\beta$ 和 $\Lambda$由 (3.13) 中 $B_p$ 在 $p \to \infty$ 时的发散确定，现通过与$z = 1$处的内解匹配来求出。一种方法是考虑一个宽度随 $n \to \infty$ 而缩小的边界层，这是由于后期项重排 $B_0\Gamma(n+\alpha)/\chi^{n+\alpha} \sim B_1\Gamma(n+\alpha-1)/\chi^{n+\alpha-1}$ 所致。然而，我们注意到，幂级数展开，

$$y^{(1)}(z,\epsilon) = \sum_{p=0}^{\infty} \epsilon^p B_p(z), \tag{A.5}$$

在 $\chi = z^2/2$ 超渐近级数方程 (3.6b) 中，对 $\epsilon$ 的每一阶都得到与 (3.10b) 和 (3.10c) 中 $B_p$ 所满足的相同方程。因此，我们可以通过在控制方程 (3.6b) 中考虑 $z = 1$ 处一个宽度随 $\epsilon \to 0$缩小的边界层，来确定 $y^{(1)}$的发散形式中的未知常数。

由于展开式 (A.5) 的前几阶在当 $\Lambda_0(1-z)^{-1} \sim -\epsilon\Lambda_0(1-z)^{-}$ $^{3}$，且 $y^{(1)} \sim \Lambda_0/(1-z)$时会重新排序，我们引入内变量 ˆ$z$ 和内解 ˆ$y$，定义如下：

$$(1-z) = \epsilon^{1/2}\hat{z} \qquad \text{and} \qquad y^{(1)} = \frac{\Lambda_0}{\epsilon^{1/2}\hat{z}}\hat{y}(\hat{z}). \tag{A.6a,b}$$

ˆ$y$ 的主阶内层方程可通过将关系式 (A.6) 代入关于 $y^{(1)}$ 的超渐近级数方程 (3.6b)，并在 $\epsilon \to 0$ 时保留主导项得到。由此可得

$$\frac{1}{\hat{z}}\frac{\mathrm{d}^2\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{z}^2} - \left(1 + \frac{2}{\hat{z}^2}\right)\frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}\hat{z}} + \frac{2}{\hat{z}^3}\hat{y} = 0. \tag{A.7}$$

该方程的精确解为 ˆ$y$(ˆ$z$) = ˆ$z$e$^{\hat{z}^2/2}$[$c_2 - c_1\sqrt{\pi/2}$erf(ˆ$z/\sqrt{2}$)]，；对其在 ˆ$z \to \infty$ 时作展开，并利用匹配条件 $c_1 = 1$，可得代数阶项

$$\hat{y}(\hat{z}) \sim \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p\Gamma(2p)}{2^{p-1}\Gamma(p)}\hat{z}^{-2p}. \tag{A.8}$$

现在，已由 (A.8) 得知 $z = 1$ 附近内解的外极限，我们可以用外变量 $z$ 将其与外解的内极限匹配。晚晚项 (3.13) 的这个内极限为 $B_p \sim \tilde{\Lambda}(-1)^{p+\beta}2^{p+\beta}\Gamma(p+\beta)(1-z)^{-2p-2\beta}$。将其与 (A.8) 中的 $O(\epsilon^p)$ 分量进行比较，并将其写成外变量形式后，可得常数 $\beta$ 和 $\Lambda$：

$$\beta = 1/2 \qquad \text{and} \qquad \tilde{\Lambda} = \frac{\mathrm{i}}{2\pi}. \tag{A.9}$$

**附录 B. 皮尔西方程的细节**。方程 (4.2a) 允许三个形式为 $A_m(z,\ \epsilon)\exp\left(-S_m(z)/\epsilon\right)$ 的 WKBJ 解，其中 $m=1$、2 和 3。将这一渐近形式代入 (4.2a)，得到关于奇异指数 $S'_m$ 和振幅函数 $A_m$ 的下列方程：

$$\left[S'_m(z)\right]^3 - S'_m(z) + \mathrm{i}z = 0, \tag{B.1a}$$

$$\epsilon^2 A'''_m - 3\epsilon S'_m A''_m + \Big(3(S'_m)^2 - 3\epsilon S''_m - 1\Big)A'_m + \Big(3S'_m S''_m - \epsilon S'''_m\Big)A_m = 0. \tag{B.1b}$$

可以看出，振幅函数 $A_m$ 的渐近展开会发散。由此发散所导致的斯托克斯现象将激活其他初始奇相位之一。例如，跨越一条 $1>2$ 斯托克斯线时，我们将有 $A_1\exp\left(-S_1/\epsilon\right) \mapsto A_1\exp\left(-S_1/\epsilon\right) + A_2\exp\left(-S_2/\epsilon\right)$。然而，这条 $1>2$斯托克斯线将与一条 $2>3$ 斯托克斯线相交，因此需要一条新的斯托克斯线来避免矛盾。现在，我们通过确定后后项发散，说明如何推导出这条新斯托克斯线及生成它的高阶斯托克斯线（HOSL）。

在展开方程 (B.1b) 中的 $A_m = A_m^{(0)} + \epsilon A_m^{(1)} + \cdots$ 时，我们发现，在 $\epsilon$ 的每个阶次上都有以下方程：

$$O(1): \qquad \mathcal{D}\big[A_m^{(0)}\big] \equiv \Big[3(S'_m)^2 - 1\Big]A_m^{(0)\prime} + 3S'_m S''_m A_m^{(0)} = 0, \tag{B.2a}$$

$$O(\epsilon): \qquad \mathcal{D}\big[A_m^{(1)}\big] = 3S'_m A_m^{(0)\prime\prime} + 3S''_m A_m^{(0)\prime} + S'''_m A_m^{(0)}, \tag{B.2b}$$

$$O(\epsilon^n): \qquad \mathcal{D}\big[A_m^{(n)}\big] = 3S'_m A_m^{(n-1)\prime\prime} + 3S''_m A_m^{(n-1)\prime} + S'''_m A_m^{(n-1)} - A_m^{(n-2)\prime\prime\prime}, \tag{B.2c}$$

其中，$\mathcal{D}$ 是主阶方程 (B.2a) 中定义的线性算子。主阶解为

$$A_m^{(0)}(z) = \frac{C_m^{(0)}}{(3[S'_m(z)]^2 - 1)^{1/2}}, \tag{B.3}$$

其中，$C_m^{(0)}$是积分常数。通过求解关于 $S'_m$ 的三次方程 (B.1a)，可以确定 (B.3) 的奇异行为，得到三个解

$$S'_1(z) = \frac{12 + p^2(z)}{6p(z)} \quad \text{and} \quad S'_{2,3}(z) = -\frac{(1 + a\mathrm{i}\sqrt{3})p^2(z) + 12(1 - a\mathrm{i}\sqrt{3})}{12p(z)}. \tag{B.4}$$

这里，对于 $S'_2$，$a=1$；对于 $S'_3$，$a=-1$，且 $p(z) = \left[12\mathrm{i}\big(-9z + \sqrt{81z^2+12}\big)\right]^{1/3}$。

注意，当 $(S'_m)^2 = 1/3$ 时，$A_m^{(0)}$ 是奇异的；将其代入 (B.1a) 可得两个奇点，分别为

$$z_+ = \frac{2\sqrt{3}\mathrm{i}}{9} \qquad \text{and} \qquad z_- = -\frac{2\sqrt{3}\mathrm{i}}{9}. \tag{B.5}$$

$A_m^{(0)}$的奇点位于 $m=2$ 和 $m=3$时的 $z_+$ 处，以及 $m=1$ 和$m=2$时的 $z_-$ 处。这些奇点的阶数均为 $1/\underline{4}$。例如，有$A_1^{(0)}(z) \sim 6C_1^{(0)}/(-36\sqrt{3}\mathrm{i}[z-z_-])^{1/4}$。

**B.1. 对奇异量解进行积分**。为了在下一节确定斯托克斯线结构，必须对每个 (B.4) 进行积分以求得 $S_m$。现在，我们通过考察皮尔西方程的博雷尔算子对应的哈密顿系统，明确求出这些结果；这一做法与 Honda等人 [16]所采用的方法颇为相似。

我们考虑与皮尔西方程 (4.2a) 相关联的博雷尔算子 $\mathscr{P}_B$。算子 $\mathscr{P}_B$ 的符号 $\sigma$ 是相空间 $T^*(\mathbb{C}_w \times \mathbb{C}_z)$ 上的复哈密顿量，其中 $\mathbb{C}_z$ 是物理平面，$\mathbb{C}_w$ 是 Borel 平面。它们由下式给出

$$\mathscr{P}_B = \partial_z^3 - \partial_w^2\partial_z - \mathrm{i}z\partial_w^3 \qquad \text{and} \qquad \sigma = \xi^3 - \eta^2\xi - \mathrm{i}z\eta^3, \tag{B.6}$$

其中 $\xi$ 和 $\eta$ 是余切方向上的局部坐标。哈密顿 n
由 $T^*(\mathbb{C}_w \times \mathbb{C}_z)$ 上自然的 K¨ahler 结构所导出的方程，

$$\dot{z}(\tau) = \partial_\xi\sigma, \quad \dot{w}(\tau) = \partial_\eta\sigma, \quad \dot{\xi}(\tau) = -\partial_z\sigma, \quad \dot{\eta}(\tau) = -\partial_w\sigma, \quad \sigma(\tau) = 0, \tag{B.7}$$

可以求解，从而得到解

$$\eta(\tau) = \eta_0, \tag{B.8a}$$

$$\xi(\tau) = \mathrm{i}\eta_0^3\tau + \xi_0, \tag{B.8b}$$

$$z(\tau) = -\eta_0^6\tau^3 + 3\mathrm{i}\xi_0\eta_0^3\tau^2 + (3\xi_0^2 - \eta_0^2)\tau + z_0, \tag{B.8c}$$

$$w(\tau) = \frac{3\mathrm{i}\eta_0^8}{4}\tau^4 + 3\eta_0^5\xi_0\tau^3 + \frac{\mathrm{i}\eta_0^4 - 9\mathrm{i}\eta_0^2\xi_0^2}{2}\tau^2 - (2\eta_0\xi_0 + 3\mathrm{i}\eta_0^2 z_0)\tau + w_0. \tag{B.8d}$$

这里，$\eta_0$、$\xi_0$、$z_0$ 和 $w_0$ 是积分常数。所求解 $S_m$ 等于 (B.8d) 中的 $w(\tau)$，利用 (B.8c) 中的 $z(\tau)$，可将其表示为 $z$ 的函数。(B.8) 中的四个积分常数通过施加以下条件确定

$$\eta(0) = 1, \qquad w(0) = 0, \qquad z(0) = \pm\frac{2\sqrt{3}\mathrm{i}}{9}, \qquad \sigma(0) = 0. \tag{B.9}$$

其中前三个条件给出 $\eta_0 = 1$、$w_0 = 0$ 和 $z_0 = \pm 2\sqrt{3}\mathrm{i}/9$。条件 (B.9) 中最后一个条件给出关系式 $\xi_0^3 - \xi_0 - \mathrm{i}z_0 = 0$。由于已知 $z_0$，该方程有四个解：$\xi_0 = \pm\sqrt{3}/3$ 和 $\xi_0 = \pm 2\sqrt{3}/3$。这四个解中的后两个在主阶外部解 $A_m^{(0)}$ 的奇点处给出 $S_m \neq 0$，其中 $A_m^{(0)}$ 来自 (B.3)。因此，我们只考虑 $\xi_0 = \pm\sqrt{3}/3$；不失一般性，可以取正号，因为所得的 $w$ 表达式只涉及 $\xi_0^2$。定义 $\hat{\tau} = -\mathrm{i}(\tau - \mathrm{i}\xi_0)$ 时，我们将 $\eta_0 = 1$、$w_0 = 0$、$z_0 = \pm 2\sqrt{3}\mathrm{i}/9$ 和 $\xi_0 = \sqrt{3}/3$ 代入方程 (B.8c) 和 (B.8d)，得到

$$z(\hat{\tau}) = \mathrm{i}\hat{\tau}(\hat{\tau}^2 - 1) \qquad \text{and} \qquad w(\hat{\tau}) = \frac{3\mathrm{i}}{4}\left(\hat{\tau}^2 - 1/3\right)^2. \tag{B.10}$$

我们认出，方程组 (B.10) 中的第一个方程与决定 $S'_m$ 在 (B.1a) 中的三次方程相同，因此 $S'_m = \hat{\tau}$。此外，我们可以计算 $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = (\mathrm{d}w/\mathrm{d}\hat{\tau})(\mathrm{d}\hat{\tau}/\mathrm{d}z) = \hat{\tau} = S'_m(z)$，由此验证 $S'_m = w'$。由于我们有 $S'_m = \hat{\tau}$，因此无需反演 $z(\hat{\tau})$ 来求出 $\hat{\tau}(z)$。相反，只需将 $S_m$ 写成先前已确定的函数 $S'_m$ 的形式，即得

$$S_m(z) = \frac{3\mathrm{i}}{4}\left(\left[S'_m(z)\right]^2 - \frac{1}{3}\right)^2. \tag{B.11}$$

方程 (B.11) 是本节的主要结果：奇异量 $S_m$ 的显式解，其形式由方程 (B.4) 中先前确定的函数 $S'_m$ 给出。

我们注意到，推导 (B.11) 的另一种方法是假设 $A_0^{(0)}(z) =$常数 $\times\, S_m^{-1/4}$，将其代入 (B.2a) 后可得二阶非线性常微分方程 $12S_mS''_m - 3(S'_m)^2 + 1 = 0$，而 (B.11) 满足该方程。

**B.2. 后期项发散**。我们考虑如下形式的后期项渐近假设

$$A_m^{(n)}(z) \sim \sum_{p=0}^{\infty} B_m^{(p)}(z) \frac{\Gamma(n+\alpha-p)}{[\chi_m(z)]^{n+\alpha-p}}, \tag{B.12}$$

其中 $\alpha$ 是常数，$\chi_m$ 是奇异量，$B_m^{(p)}$ 是振幅函数。通过分析 $B_m^{(p)}$ 在 $p \to \infty$ 时的更后期项发散，可以检测到高阶斯托克斯现象。将 (B.12) 代入 $O(\epsilon^n)$ 方程 (B.2c)，并在 $\Gamma(n+\alpha-p)/\chi_m^{n+\alpha-p}$ 的每一阶上展开，可得方程

$$\chi'_m\Big((\chi'_m)^2 + 3S'_m\chi'_m + 3(S'_m)^2 - 1\Big) = 0, \tag{B.13a}$$

$$\mathcal{L}\Big[B_m^{(0)}\Big] \equiv \left(3[S'_m + \chi'_m]^2 - 1\right) B_m^{(0)\prime} + 3(S'_m + \chi'_m)(S''_m + \chi''_m)B_m^{(0)} = 0, \tag{B.13b}$$

$$\mathcal{L}\Big[B_m^{(1)}\Big] = 3\left(S'_m + \chi'_m\right) B_m^{(0)\prime\prime} + 3\left(S''_m + \chi''_m\right) B_m^{(0)\prime} + \left(S'''_m + \chi'''_m\right) B_m^{(0)}, \tag{B.13c}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Big[B_m^{(p)}\Big] &= 3\left(S'_m + \chi'_m\right) B_m^{(p-1)\prime\prime} + 3\left(S''_m + \chi''_m\right) B_m^{(p-1)\prime} \\ &\quad + \left(S'''_m + \chi'''_m\right) B_m^{(p-1)} - B_m^{(p-2)\prime\prime\prime},\end{aligned} \tag{B.13d}$$

其中，(B.13d) 对 $p \geq 2$ 成立，而 $\mathcal{L}$ 是 (B.13b) 中定义的微分算子。

我们首先求解方程 (B.13a)，以求得 $\chi_m$。总共可得六个解 $\chi'_m = -3S'_m/2 \pm \sqrt{4 - 3(S'_m)^2}/2$，但其中两个解无法与相应奇点附近的内解匹配。可以验证，这些关于 $\chi'_m$ 的解给出了另一个 $S'_j$ 与 $S'_m$ 之差（例如 $\chi'_1 = S'_2 - S'_1$）。对 $\chi'_m$ 的表达式积分后，得到四个初始奇相位

$$\begin{cases} \chi_1(z) = S_2(z) - S_1(z), & \chi_3(z) = S_2(z) - S_3(z), \\ \chi_{2a}(z) = S_1(z) - S_2(z), & \chi_{2b}(z) = S_3(z) - S_2(z), \end{cases} \tag{B.14}$$

它们满足 $\chi_1(z_-) = 0$、$\chi_3(z_+) = 0$、$\chi_{2a}(z_-) = 0$，以及 $\chi_{2b}(z_+) = 0$。

**B.3. 后后项发散**。现在我们考虑关于后期项振幅函数 $B_m^{(p)}$ 的方程 (B.13)。第一个方程可通过求解得到

$$B_m^{(0)}(z) = \frac{\Lambda_m^{(0)}}{\Big(3(S'_m + \chi'_m)^2 - 1\Big)^{1/2}}, \tag{B.15}$$

其中 $\Lambda_m^{(0)}$ 是一个积分常数。对于 $m = 2$，(B.15) 中的 $B_2^{(0)}$ 在与阶乘除以幂形式（其中 $\chi_2$）预测相同的位置处有奇点。然而，对于 $m = 1$ 和 $m = 3$，(B.15) 在阶乘除以幂形式具有 $\chi_m(z) = 0$ 的位置之外，还在其他位置有奇点。例如，当 $m = 1$ 时，尽管 $\chi_1$ 仅预测在 $z_-$ 处有奇点，振幅函数 (B.15) 在 $z_+$ 处也有奇点。这将产生一个新的发散级数，其形式为 $p \to \infty$；我们现在针对 $m = 1$ 和 $m = 3$ 对其进行研究。

在代入如下形式的后后期项渐近假设时

$$B_m^{(p)}(z) \sim C_m(z)\frac{\Gamma(p+\beta)}{[\tilde{\chi}_m(z)]^{p+\beta}}, \tag{B.16}$$

代入方程 (B.13d)，可得方程 $(\tilde{\chi}'_m)^2+3(S'_m+\chi'_m)\tilde{\chi}'_m+3(S'_m+\chi'_m)^2-1=0$。对于每个 $m$ 的取值，应用边界条件 $\tilde{\chi}_1(z_+)=0$ 或 $\tilde{\chi}_3(z_-)=0$ 后，二次方程只有一个解具有正确的奇异行为。因此，我们得到晚晚项奇性函数

$$\tilde{\chi}_m(z) = \begin{cases} S_3(z)-S_2(z) & \text{if } m=1, \\ S_1(z)-S_2(z) & \text{if } m=3. \end{cases} \tag{B.17}$$

根据 §3.6 中提出的方法，这些将引发高阶斯托克斯现象：新的阶乘除以幂次项 $A_m^{(n)}$（其奇异量为 $\chi_m+\tilde{\chi}_m$）将在由 $\mathrm{Im}[\tilde{\chi}_m/\chi_m]=0$ 和 $\mathrm{Re}[\tilde{\chi}_m/\chi_m]\geq 0$ 给出的高阶斯托克斯线上开启。初始振幅函数 $A_m^{(n)}$ 的后期项主导部分已在 (4.3) 中给出，所得斯托克斯线结构如图 4.1 所示。