arXiv:2303.07882v2 [math.GR] 8 May 2023

利用 Brown-Forman离散莫尔斯理论证明p-子群复形的轨道空间可缩

BENJAMIN STEINBERG

Abstract. 我们利用 Brown-Forman离散莫尔斯理论，给出了一个简单证明，说明有限群的 p-子群复形的轨道空间是可缩的。这个结果最初由 Webb 提出猜想，后由 Symonds 证明。

1. Introduction

有限群 G的非平凡 p-子群的偏序集 $\mathcal{S}_p(G)$的序复形 $|\mathcal{S}_p(G)|$ 由 Brown 在 [2]中引入。此后，Quillen [10], 进一步发展并推广了这一主题，许多其他学者也对其进行了研究，参见 [11, 14]。

G 在 $|\mathcal{S}_p(G)|$ 上有一个自然的作用，它由对子群的共轭作用所诱导，并且是通过单纯映射实现的。Webb 猜想 [14] $|\mathcal{S}_p(G)|/G$是可缩的（他证明了它是 $\mathbb{F}_p$-无圈的）。P. Symonds 证明了这一猜想 [12]。其他证明见 [4, 8, 9]。

这里我们利用 Brown-Forman离散莫尔斯理论 [3, 6]，给出一个简单证明，说明 $|\mathcal{S}_p(G)|/G$ 是可缩的。与 Symonds [12] 和 Bux [4], 的证明类似，我们使用 Robinson p-子群复形 $\mathcal{R}_p(G)$，它与 $|\mathcal{S}_p(G)|$ [13]是 G-同伦等价的。Bux [4] 的证明使用了 Bestvina-Brady [1], 意义下的离散莫尔斯理论；至少在笔者看来，这种方法比 Brown-Forman离散莫尔斯理论更复杂。此外，Bux 的证明基于极小反例，因此具有归纳性质；这似乎会掩盖所需进行的初等坍缩的确切序列。我们为一个单纯集构造了莫尔斯匹配 [5] ，其几何实现为 $\mathcal{R}_p(G)/G$，并且只有一个临界胞腔：对应于 G的 p-西洛子群共轭类的顶点。由于该几何实现是一个有限胞腔复形，这个匹配给出了将该复形通过一系列初等坍缩化为单个顶点的方法。证明中用到的群论仅有

Date: 2023年5月10日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 20D30, 05E18。
Key words and phrases. 子群复形、Webb 猜想、离散 Morse 理论。作者获得了 Simons 基金会合作资助，资助编号为 849561。

西洛定理，以及有限 p-群的每个子群都是次正规的这一事实。

2. Discrete Morse theory

我们在此使用的离散 Morse 理论由 Brown [3] 和 Forman [6]独立创立。我们主要沿用 Brown 的方法，因为他研究的是单纯集合，这也正是我们的研究背景。不过，我们的术语在一定程度上与 Forman 理论中的术语一致，并采用 Morse 匹配 [5]的语言。

设 X 是一个单纯集。X 的莫尔斯匹配（ [3]中的塌缩方案）由以下数据组成：

(1) 将 X的非退化单形（此处称为胞腔）划分为三种类型：临界（称为本质）、可塌缩和冗余。(2) 在冗余胞腔集与可塌缩胞腔集之间建立一个双射 c，使得对于每个冗余 n-胞腔 τ，都有 $c(\tau) \in X_{n+1}$ 以及一个指定指标 $\iota(\tau) \in \{0, \ldots, n+1\}$，使得 $\tau = d_{\iota(\tau)}(c(\tau))$。

莫尔斯匹配所需满足的关键条件是：若 D 是一个有向图，其顶点集由冗余胞腔和可塌缩胞腔组成，边的形式为 $\tau \to c(\tau)$（其中 τ 为冗余胞腔，$\sigma \to d_j(\sigma)$）以及 $j \neq \iota(c^{-1}(\sigma))$（其中 σ 为可塌缩胞腔），那么 D 中不存在无限有向路径。

为了使我们的表述更接近 [3], 的表述，我们称 D 中从冗余胞腔出发、且每条边要么从冗余胞腔指向可塌缩胞腔、要么从可塌缩胞腔指向冗余胞腔的有向路径为交替路径。我们注意到，D 存在无限有向路径，当且仅当它存在无限交替路径。为说明这一点，请注意，任意无限有向路径都必须经过一条从冗余胞腔指向可塌缩胞腔的边。事实上，不存在从冗余胞腔指向冗余胞腔的边。可塌缩胞腔之间的所有边都从维数为 n 的胞腔指向维数为 $n-1$ 的胞腔，因此无限有向路径不可能只包含这种类型的边。特别地，若 D 中存在无限路径，则存在一条从冗余胞腔出发的无限路径，而且该路径必然会无限次经过冗余胞腔。

接下来我们声称，如果 σ 和 τ 是冗余胞腔，且存在一条从 σ 到 τ的有向路径，那么 $\dim \tau \leq \dim \sigma$；当且仅当该路径是交替的，等号成立。对路径中冗余胞腔的数量进行归纳，只需考虑这条从 σ 到 τ的有向路径上没有冗余胞腔的情形。此时，该路径的第一条边将 σ 指向 $c(\sigma)$，其维数高一维。注意，由于 $c(\sigma)$ 是可塌缩的，$c(\sigma) \neq \tau$。从可塌缩胞腔出发的任何边都会指向一个维数更低的胞腔，因此，此路径上在 $c(\sigma)$ 之后经过的所有顶点，其维数都不超过 σ的维数；若经过至少两个可塌缩胞腔（即路径不是交替的），则 $\dim \tau < \dim \sigma$。由此可知，无限有向路径经过的冗余胞腔的维数不会增加，因此最终这些胞腔的维数都相同。于是

如果 D中存在一条无限有向路径，那么就存在一条从冗余胞腔出发的无限有向路径，它会无限多次经过维数相同的冗余胞腔。但根据上述论断，这样的路径必定是交替的。特别地，由此可知，如果对于所有 $n \geq 0$， X 都只有有限多个非退化的 n-胞腔，那么对 D 施加的条件等价于无环性。注意，若 $j \neq \iota(\tau)$，则 $d_j(c(\tau)) \neq \tau$，因为 τ是冗余的；否则就会出现有向环 $\tau \to c(\tau) \to \tau$，从而产生一条无限有向路径。

我们用 X_n^r 表示冗余 n-胞腔的集合，用 X_n^c 表示可塌缩的 n-胞腔集合。下述结果 $[3,$ 命题 $1]$ 是离散 Morse 理论的基本定理（另见 $[5,6]$）。

定理 2.1（Brown/Forman）。设 X 是一个单纯集。给定 X的一个莫尔斯匹配，存在一个商映射 $q\colon |X| \to Y$，其为 CW 复形之间的映射，其中 Y 的 n- 胞腔与 X 的临界 n- 胞腔构成双射（其特征映射是 q 与对应的映射到 $|X|$的特征映射的复合），且 q 为同伦等价。

证明利用关于 D 的假设来组织胞腔的粘接，使得粘接一个可塌缩胞腔时，可以将它与对应的冗余 n-胞腔作为自由面进行一次初等坍缩。

3. The orbit space of the p-subgroup complex

设 G 是一个有限群。Brown 的 $[2]$ p-子群复形 $|\mathcal{S}_p(G)|$ 是偏序集 $\mathcal{S}_p(G)$ 的序复形，其中包含 G 的非平凡 p-子群，且 p 是 $|G|$ 的一个素因子。群 G 通过共轭作用以保序映射的方式作用于 $\mathcal{S}_p(G)$，因此在 $|\mathcal{S}_p(G)|$ 上有单纯作用。我们将考虑 $\mathcal{R}_p(G)$ 的 G-子复形，其单形由满足以下条件的链 $P_0 < \cdots < P_n$ 构成：对于 $0 \leq i \leq n$， $P_i \lhd P_n$。该复形最早由 G.R. Robinson 研究（参见 $[7]$），Th´evanez 和 Webb $[13,$ 定理 $2]$ 证明它与 $|\mathcal{S}_p(G)|$ 是 G-同伦等价的。因此， $|\mathcal{S}_p(G)|/G$ 与 $\mathcal{R}_p(G)/G$ 同伦等价。

我们首先定义单纯集 $R_p(G)$，其 n-单形是所有满足 $P_0 \leq \cdots \leq P_n$ 且对所有 $0 \leq i \leq n$ 都有 $P_i \lhd P_n$ 的 n-元组（$P_0, \ldots, P_n$）。面映射$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$定义为 $d_i(P_0, \ldots, P_n) = (P_0, \ldots, \widehat{P_i}, \ldots, P_n)$（其中 $\widehat{P_i}$ 表示省略 P_i），退化映射定义为 $\sigma_i(P_0, \ldots, P_n) = (P_0, \ldots, P_i, P_i, \ldots, P_n)$。非退化单形是形如（$P_0, \ldots, P_n$）且满足 $P_0 <$的单形。

$\cdots < P_n$ 且 $R_p(G)$ 的几何实现是 $\mathcal{R}_p(G)$。这是与有序单纯复形相关联的标准单纯集。

群 G通过单纯自同构作用于 $R_p(G)$，其作用为$g(P_0, \ldots, P_n) = (gP_0g^{-1}, \ldots, gP_ng^{-1})$。因此，我们可以构造商单纯集 $R_p(G)/G$。由于几何实现保余极限，我们有 $|R_p(G)/G| \cong \mathcal{R}_p(G)/G$。我们用 $[P_0, \ldots, P_n]$ 表示 $(P_0, \ldots, P_n)$ 的轨道，并注意到 $[P_0, \ldots, P_n]$ 是非退化的，当且仅当$P_0 < \cdots < P_n$；因此，非退化单形的任意面都是非退化的。此外，单形的任意两个面在几何实现中都不会被识别

。然而，几何实现未必是一个单纯复形，因为胞腔并非由其顶点唯一确定。

我们的目标是在 $X := R_p(G)/G$ 上定义一个莫尔斯匹配。西洛定理保证只有一个 p-西洛子群的轨道。我们将顶点 $[P]$ 作为唯一的临界胞腔，其中 P 是 G 的一个 p-西洛子群。若 $P_0 \leq \cdots \leq P_n$，令 $N_G(P_0, \ldots, P_n) = \bigcap_{i=0}^{n} N_G(P_i)$。如果 P_n 不是 $N_G(P_0, \ldots, P_n)$ 的 p-西洛子群，我们就称 $[P_0, \ldots, P_n]$ 是冗余的。若 $n \geq 1$，如果 P_n 是 $N_G(P_0, \ldots, P_n)$ 的一个 p-西洛子群，我们就称 $[P_0, \ldots, P_n]$ 是可塌缩的。容易验证，冗余或可塌缩与轨道代表元的选取无关。

显然，临界、冗余和可塌缩胞腔两两不相交，且维数为 $n \geq 1$ 的任意胞腔要么是冗余的，要么是可塌缩的。若 P_0 是一个并非 p-西洛子群的 p-子群，则存在一个 p-西洛子群 P，使得 $P_0 < P$。由于 p-群的任意子群都是次正规的，因此可得 $P_0 < N_P(P_0) \leq N_G(P_0)$，故 $[P_0]$ 是冗余的。要完成莫尔斯匹配的构造，还需定义 c 和 ι，并验证相应的有向图 D 不存在无限交替路径。

若 $[P_0, \ldots, P_n]$ 是冗余的，则根据西洛定理，可以在 $N_G(P_0, \ldots, P_n)$ 中找到一个 p-西洛子群 P，使得 $P_n < P$。令 $c([P_0, \ldots, P_n]) = [P_0, \ldots, P_n, P]$，并令 $\iota([P_0, \ldots, P_n]) = n + 1$。注意，$P_0, \ldots, P_n \lhd P$。

命题 3.1. 映射 c 是冗余胞腔与可塌缩胞腔之间的一个良定义双射。

证明。假设 $[P_0, \ldots, P_n]$ 是冗余的，且 P 是 $N_G(P_0, \ldots, P_n)$ 中包含 P_n 的一个 p-西洛子群。首先注意，若 Q 是 $N_G(P_0, \ldots, P_n)$ 中包含 P_n 的另一个 p-西洛子群，则由西洛定理，存在 $g \in N_G(P_0, \ldots, P_n)$，使得 $gQg^{-1} = P$。于是 $g(P_0, \ldots, P_n, Q) = (P_0, \ldots, P_n, P)$，因此 $[P_0, \ldots, P_n, Q] = [P_0, \ldots, P_n, P]$。现在假设 $h(P_0', \ldots, P_n') = (P_0, \ldots, P_n)$。那么 $N_G(P_0, \ldots, P_n) = hN_G(P_0', \ldots, P_n')h^{-1}$，因此，若 Q 是 $N_G(P_0', \ldots, P_n')$ 中包含 P_n' 的一个 p-西洛子群，则 hQh^{-1} 是 $N_G(P_0, \ldots, P_n)$ 中包含 P_n 的一个 p-西洛子群；由前面的论证可得 $[P_0, \ldots, P_n, P] = [P_0, \ldots, P_n, hQh^{-1}] = [P_0', \ldots, P_n', Q]$。为完成 c 良定义性的证明，我们还需证明 $[P_0, \ldots, P_n, P]$ 可塌缩。但由于 $N_G(P_0, \ldots, P_n, P) \subseteq N_G(P_0, \ldots, P_n)$，且 P 是后一个群的一个 p-西洛子群，我们可以得出 P 是前一个群的 p-西洛子群，因此 $[P_0, \ldots, P_n, P]$ 可塌缩。注意，由于 $\tau = d_{n+1}(c(\tau))$，当 $\tau \in X_n^r$ 时，c 是单射。

剩下要证明的是，每个具有 $n \geq 0$ 的可塌缩（$n+1$）胞腔 $[P_0, \ldots, P_n, P_{n+1}]$ 都属于 c的像。首先我们断言，P_{n+1} 是 $N_G(P_0, \ldots, P_n)$的一个 p-西洛子群。若非如此，则由西洛定理，$N_G(P_0, \ldots, P_n)$存在一个 p-西洛子群 Q，满足 $P_{n+1} < Q$。由于 P_{n+1} 是 Q的次正规子群，必有 $P_{n+1} < N_Q(P_{n+1}) \subseteq Q \cap N_G(P_{n+1}) \subseteq N_G(P_0, \ldots, P_{n+1})$，这与 P_{n+1}是 $N_G(P_0, \ldots, P_{n+1})$的一个 p-西洛子群相矛盾。由此可知，$[P_0, \ldots, P_n]$是冗余的，且 $c([P_0, \ldots, P_n]) = [P_0, \ldots, P_{n+1}]$，证明完毕。□

剩下的只需证明 D 不存在无限交替路径。定义$h([P_0,\dots,P_n]) = \log_p |P_n|$。显然， h 定义良好，且由p-进赋值$\nu_p(|G|) =: t$所界定。注意，若 τ 是冗余胞腔，则根据构造， $h(\tau) < h(c(\tau))$。另一方面，若 σ 是一个（$n+1$）胞腔，则对任意 $0 \le i < n+1$，有$h(d_i(\sigma)) = h(\sigma)$。由于对任意冗余的$n$-胞腔 τ，都有 $\iota(\tau) = n+1$，若 $\sigma = [P_0,\dots,P_{n+1}]$ 可塌缩，则只要 D中存在边 $\sigma \to \sigma'$，就有 $h(\sigma) = h(\sigma')$。因此， D中冗余胞腔之间的交替路径长度不超过$2(t-1)$，故 D 不存在无限交替路径。由定理 2.1，我们的莫尔斯匹配将 $\mathcal{R}_p(G)/G$塌缩到对应于 p-西洛子群共轭类的顶点。至此，我们证明了以下结论。

定理 3.2（Symonds [12]）。若 G 是有限群，则 $|\mathcal{S}_p(G)|/G$ 是可缩的。

References

[1] M. Bestvina 和 N. Brady。群的莫尔斯理论与有限性性质。 *Invent.*，（）：–。 *Math.* 129 3 445 470, 1997

[2] K. S. Brown。群的欧拉示性数： p的分数部分。 *Invent. Math.*，29 1 1（）：–5，1975年。[3] K. S. Brown。重写系统的几何：Anick-Groves-Squier 定理的证明。载于 *Algorithms and classification in combinatorial group theory (Berkeley, CA, 1989)* 23 *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* 137 163 ，{ }卷，页码 –。 Springer，纽约，1992年。[4] K.-U. Bux。子群复形的轨道空间、莫尔斯理论及 Webb 猜想的新证明。载于 *Proceedings of the 1999 Topology and Dynamics Conference (Salt Lake City, UT)* 24, 39 51, 1999 ，{ }卷，页码 –。[5] M. K. Chari。关于离散莫尔斯函数与组合分解。第 217 卷，页码 101–113。2000年。《形式幂级数与代数组合》（维也纳，1997年）。[6] R. Forman。胞腔复形的莫尔斯理论。 *Adv. Math.*，134(1):90–145，1998年。[7] R. Kn
¨
J. London orr 和 G. R. Robinson。关于 Alperin 猜想的一些评述。，（）：–。 *Math. Soc. (2)* 39 1 48 60, 1989

[8] A. Libman。融合系统的 Webb 猜想。 *Israel J. Math.*，167:141–154，2008年。[9] M. Linckelmann。融合系统的轨道空间是可缩的。 *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* 98 1 191 216, 2009

[10] D. Quillen。群的非平凡 p子群偏序集的同伦性质。*Adv. in Math.*，28(2):101–128，1978年。[11] S. D. Smith。 *Subgroup complexes* 179 *Mathematical Surveys and Monographs* ，{ }卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，{ }。2011

[12] P. Symonds。 *Comment.* 子群复形的轨道空间是可缩的。，（）：–。 *Math. Helv.* 73 3 400 405, 1998

[13] J. Th´evenaz 和 P. J. Webb。带群作用的偏序集的同伦等价。 *J. Combin. Theory Ser. A*，56(2):173–181，1991年。[14] P. J. Webb。子群复形。载于 *The Arcata Conference on Representations of Finite Groups (Arcata, Calif., 1986)* 47 *Proc. Sympos. Pure Math.* ，{ }卷，页码 349–365。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛，1987年。

（B. Steinberg） Department of Mathematics, City College of New York, Convent Avenue at 138th Street, New York, New York 10031, USA*Email address*: bsteinberg@ccny.cuny.edu