arXiv:2303.07915v1 [math.LO] 14 Mar 2023

某些高度齐次置换群的不变子集中的泛型

M. Drzewiecka、A. Ivanov *和 B. Mokry

2023年3月15日

摘要 设 G 是 S_∞ 的一个闭高度齐次子群，且不涉及循环序。我们证明，来自 G 的一个共轭类的闭包包含一个在其中为共瘦集的共轭类。此外，我们证明，可延拓为该共轭类中元素的有限部分映射族具有余终 amalgamation 性质。对于典型超齐次偏序的自同构，也证明了类似结论。

2020年数学主题分类：03C64；03E15；20B27。

关键词：齐次结构；自同构群；泛自同构。

1 引言

设 M 是一个可数超齐次结构，并设 $\mathcal{C}$ 是 Aut(M) 的一个闭子集，且在 Aut(M) 的共轭作用下不变。

$\mathcal{C}$ 什么时候包含 Aut(M) 的一个在其中余瘦的共轭类?

显然，这样的 $\mathcal{C}$ 必定具有稠密共轭类，即必定具有以下形式。设 $\rho \in$ Aut(M)，并记 $\mathcal{C}_\rho$ 为包含 $\rho \in$ 且

* 应用数学系，西里西亚理工大学，格利维采，波兰

在 Aut(M) 中对共轭作用保持不变的最小闭子集。显然， $\mathcal{C}_\rho = cl(\rho^{\mathsf{Aut}(M)})$, 其中 cl 表示自同构群中的拓扑闭包运算。我们最初提出的问题可以表述如下：集合 $\mathcal{C}_\rho$ 何时包含一个在其中余瘦的共轭类? 对此可以用联合嵌入和弱 amalgamation 性质（WAP）来表述某些一般条件；该性质由 [4]（以另一名称）引入，并在极具影响力的论文 [7]中得到进一步研究。我们将在预备知识部分对此加以介绍。 [4] 中以 Truss 条件之名考察了 WAP 的一种版本。该条件指出，结构的有限部分自同构所构成的偏序集具有一个满足 amalgamation 性质的共尾子族。该条件由 [11] 引入，如今通常称为 CAP。在我们上文提到的、关于具有泛自同构的类$\mathcal{C}_\rho$ 的刻画中, WAP 与 CAP 是否等价? 目前尚无实现 WAP $\not\Rightarrow$ CAP 的例子（反向蕴含总是成立）。在附加限制 $\mathcal{C}_\rho = \text{Aut}(M)$ 下，这个问题似乎已是众所周知的。在本文中，我们聚焦于本引言中提出的两个问题，分别考察高度齐次结构和超齐次偏序的情形。特别是，摘要中陈述的结论将在本文中得到证明。

由于高度齐次结构和超齐次偏序的描述（见第 1.3 节），Aut($\mathbb{Q}, <$) 的情形在我们的研究中变得至关重要。在第 4 节中，我们证明了本文的关键定理: 该群的任意 $\mathcal{C}_\rho$ 都具有性质 CAP（定理 4.5）。由于我们不假设等式 $\mathcal{C}_\rho =$ Aut(M)，这一情形带来了新的组合学挑战。因此，我们着重介绍方法中的一些新意，这些新意源自我们在彩色线性序方面的技巧（见第 2 节）。

1.1 一般预备知识

本文研究可数无标记超齐次结构 M 的自同构群 Aut(M)。我们始终将其视为赋予逐点收敛拓扑的拓扑群。特别地，对于任意有限部分同构 p: $M \to M$，集合 $\mathcal{B}_p = \{\alpha \in \text{Aut}(M) \mid \alpha \text{ extends } p\}$ 是闭开的。令 $\mathcal{P}$ 为 M 的所有有限部分同构组成的集合。那么族 $\{\mathcal{B}_p \mid p \in \mathcal{P}\}$ 是该拓扑的一个基。

集合 $\mathcal{P}$ 按照映射的扩张关系排序，记作 $\subseteq$。据此，我们可以表述 JEP、AP、CAP 和 WAP 的标准定义。在以下定义中，我们始终假设子集 $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ 在 Aut(M) 对 $\mathcal{P}$的自然作用下是不变的（该作用由其在 $M \times M$ 上的作用诱导）。

- 子族 $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ 具有联合嵌入性质：对于任意两个元素 $p_1, p_2 \in \mathcal{P}'$，存在 p_3，来自 $\mathcal{P}'$，以及一个自同构 $\alpha \in$Aut(M)，使得 $p_1 \subseteq p_3$ 且 $\alpha(p_2) \subseteq p_3$。

- 子族 $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ 具有 amalgamation 性质：对于任意 $p_0, p_1, p_2 \in \mathcal{P}'$，若 $p_0 \subseteq p_1$ 且 $p_0 \subseteq p_2$，则存在 $p_3 \in \mathcal{P}'$ 以及一个自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$，固定 $\mathrm{Dom}(p_0) \cup \mathrm{Rng}(p_0)$，使得 $p_1 \subseteq p_3$ 且 $\alpha(p_2) \subseteq p_3$。
- 子族 $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ 具有余终 amalgamation 性质：对于任意 $p_0 \in \mathcal{P}'$，存在一个扩张 $p_0' \in \mathcal{P}'$，使得对于任意 p_1、$p_2 \in \mathcal{P}'$，若 $p_0' \subseteq p_1$ 且 $p_0' \subseteq p_2$，则存在 $p_3 \in \mathcal{P}'$ 以及一个自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$，它固定 $\mathrm{Dom}(p_0') \cup \mathrm{Rng}(p_0')$，使得 $p_1 \subseteq p_3$ 且 $\alpha(p_2) \subseteq p_3$。
- 子族 $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ 具有弱融合性质：对于任意 $p_0 \in \mathcal{P}'$，存在一个扩张 $p_0' \in \mathcal{P}'$，使得对于任意 p_1、$p_2 \in \mathcal{P}'$，若 $p_0' \subseteq p_1$ 且 $p_0' \subseteq p_2$，则存在 $p_3 \in \mathcal{P}'$ 以及一个自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$，它固定 $\mathrm{Dom}(p_0) \cup \mathrm{Rng}(p_0)$，使得 $p_1 \subseteq p_3$ 且 $\alpha(p_2) \subseteq p_3$。

最后，如果对于任意两个元素 $p_1 \in \mathcal{P}$ 和 $p_2 \in \mathcal{P}'$，条件 $p_1 \subseteq p_2$ 蕴含 $p_1 \in \mathcal{P}'$，我们就称子族 $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ 具有遗传性质（即 HP）。

我们将 [4] 的方法应用于有限语言的一致局部有限超齐结构的自同构群。特别是，从现在起，我们对 M作如下假设。每个 $p \in \mathcal{P}$ 都可以视为扩张 $(M, \mathrm{Graph}(p), \mathrm{Graph}(p^{-1}))$，而每个自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$ 都可以视为扩张 (M, α, α^{-1})。令 T_{aut} 为将 M 的语言扩展两个函数符号 $\{\alpha, \beta\}$并由 $Th(M)$、语句 $\forall x(\alpha\beta(x) = \beta\alpha(x) = x)$ 以及所有断言 α 保留 M语言中的关系/函数的全称句所公理化得到的理论。给定 $\rho \in \mathrm{Aut}(M)$，令 T_ρ为在 T_{aut}的基础上加入所有禁止那些 $p \in \mathcal{P}$ 的语句所得的扩张，其中相应结构

$$(\langle \mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p) \rangle, \mathrm{Graph}(p), \mathrm{Graph}(p^{-1}))$$

（连同 M 的关系和函数一起考虑）不能嵌入为 $(M, \mathrm{Graph}(\rho), \mathrm{Graph}(\rho^{-1}))$ 的子结构。

引理 1.1 自同构 $\gamma \in \mathrm{Aut}(M)$ 属于 $\mathcal{C}_\rho$，当且仅当 $(M, \gamma, \gamma^{-1}) \models T_\rho$。

对于有经验的读者来说，这条引理显而易见。现在我们给出一些提示，它们将对论文的主体部分有所帮助。取 $M^{<\omega}$ 的一个枚举，例如 $M^{<\omega} = \{\bar{a}_0, \bar{a}_1, \ldots\}$。定义一个度量 d，使 $\mathrm{Aut}(M)$ 成为度量空间，具体如下：

$$d(\gamma_1, \gamma_2) = \sum \{2^{-n} : \text{ there is } a \in \bar{a}_n \text{ with } \gamma_1^{\pm 1}(a) \neq \gamma_2^{\pm 1}(a)\}.$$

注意，

$$\gamma \in \mathcal{C}_\rho \Leftrightarrow \text{ there is a sequence } \sigma_i \in \mathrm{Aut}(M) \text{ such that } \gamma = \lim_{i \to \infty} \sigma_i \rho \sigma_i^{-1},$$

其中极限是相对于 d 取的。此外，等式 $\gamma = \lim_{i\to\infty} \sigma_i \rho \sigma_i^{-1}$ 显然意味着 $(M, \gamma, \gamma^{-1}) \models T_\rho$。要看后一事实的逆命题，请注意，若有 $(M, \gamma, \gamma^{-1}) \models T_\rho$，我们就能将 γ 在 $\langle \bigcup\{\bar{a}_i$ 上的任意限制：$i \le n\}\rangle$（视为有限结构）映射到 $(M, \mathrm{Graph}(\rho), \mathrm{Graph}(\rho^{-1}))$ 的一个子结构上。利用超齐性，我们将此映射扩展为 M 的一个自同构，记为 σ_i。于是 $\gamma = \lim_{i\to\infty} \sigma_i \rho \sigma_i^{-1}$。

容易看出，T_ρ 可以由关于符号 α 和 β的全称语句公理化。特别地，它满足 [4] 中用于图族的术语 $\mathbf{B}_T$ 里关于 T 的假设。此外，[4] 中针对 $\mathbf{B}_T$ 定义的所有概念（联合嵌入、amalgamation、弱 amalgamation 等）都可以在 T_ρ 的情形下实现。事实上，对于 $\mathcal{P}$的以下子族中的有限部分同构，它们就分别成为如上定义的联合嵌入、amalgamation、弱 amalgamation 等。令

$$\mathcal{P}_\rho = \{p \in \mathcal{P} : p \text{ extends to an automorphism from } \mathcal{C}_\rho\}.$$

根据引理 1.1，可以验证 [4] 中的范畴 $\mathbf{B}^{T_\rho}$ 等价于范畴 $\mathcal{P}_\rho$。

若自同构 γ 在 $\mathrm{Aut}(M)$ 中有一个余瘦共轭类，则称其为泛型 [11] 。我们将此定义推广如下。

定义 1.2 设 $\mathcal{C}$ 是 $\mathrm{Aut}(M)$ 的一个在共轭作用下不变的闭子集。若自同构 $\gamma \in \mathrm{Aut}(M)$的共轭类 $\gamma^{\mathrm{Aut}(M)}$ 在 $\mathcal{C}$中余瘦，则称其在 $\mathcal{C}$ 中是泛型。

还原 [4] 的项后，很容易看出，γ 在 $\mathcal{C}_\rho$ 中是泛型的，当且仅当结构 (M, γ, γ^{-1}) 相对于 [4] 意义下的 $\mathbf{B}^{T_\rho}$ 是泛型的。由此，我们可以如下应用 [4] 中的定理 1.2：

$\mathcal{C}_\rho$ 有泛自同构，当且仅当族 $\mathcal{P}_\rho$ 具有联合嵌入性质和 WAP。

显然，联合嵌入性质自动成立：任意两个 p_1 和 $p_2 \in \mathcal{P}_\rho$ 都可以嵌入 ρ。

在这一表述中，WAP 能否由 CAP 替代，仍是一个开放问题。值得指出的是，在一般的弗雷谢理论背景下，最近才获得了一个展示 WAP 与 CAP 不同的例子，见 [8]。这解释了我们撰写本文的主要动机。下面的主要结果表明，对于 S_∞ 的闭子群，在典型情形下，我们应当预期 WAP 与 CAP 等价。下文将考察闭的高度齐次群，以及超齐次偏序集的自同构群。

备注 1.3 另一方面，众所周知，联合嵌入性质并不蕴含 WAP。例如，[10] 的推论 3.9 指出，对于有限有序图的部分同构类以及有限有序锦标赛的部分同构类，

我们还要指出，众所周知，对于定义闭子群 $\mathcal{C}' \subseteq \mathrm{Aut}(M)$ 的任意不变子族 $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$，联合嵌入性质等价于 $\mathcal{C}'$ 具有稠密共轭类这一性质， [7]。

1.2 S_∞的共轭类

让我们来考察上文介绍过的主题在 S_∞中的情形。 ω 的每个置换 ρ 都自然地定义了一个循环函数

$$f_\rho : (\omega \setminus \{0\}) \cup \{\infty\} \to \omega \cup \{\infty\}$$

它将 ρ 中长度为 n的循环数量赋予相应的值。众所周知（也很容易看出），两个置换共轭，当且仅当它们的循环函数相同。为了描述 S_∞ 中的 $\mathcal{C}_\rho$，我们考虑两种情形。

- 存在一个数 n，使得 ρ 的每个循环长度都不超过 n。在这种情况下，当且仅当对于每个 $\iota \in （\omega \setminus \{0\}） \cup \{\infty\}$， $f_\gamma （\iota） \leq f_\rho （\iota）$ 。
- ρ 中循环的长度没有上界。在这种情况下，当且仅当对于每个 $n \in \omega \setminus \{0\}$， $f_\gamma （n） \leq f_\rho （n）$ 。

这些结论很容易验证（也可以应用引理 1.1）。存在一个数 n，使得 ρ的每个有限循环长度都不超过 n，但同时又有无限循环；这种情形归入后一种情况。

下面的命题解决了上述关于 S_∞的疑问。

命题 1.4 对每个 $\rho \in S_\infty$，族 $\mathcal{P}_\rho$ 都具有 CAP，且集合 $\mathcal{C}_\rho$具有一个泛型置换 γ。此外，

- $f_\rho(n) = f_\gamma(n)$ 对所有 $n \in \omega \setminus \{0\}$都成立;
- 如果 ρ 的有限循环长度无界，那么 γ 没有无限循环;
- 如果 ρ 的有限循环长度有界，但 ρ 有一个无限循环，那么 γ 有且只有一个无限循环；如果 ρ 没有无限循环，那么 γ也没有。

证明。若 ρ 没有无限循环，则可按如下方式定义一个见证 $\mathcal{P}_\rho$ 的 CAP 的共尾子族。令 $\mathcal{P}_\rho^c$ 由属于 $\mathcal{P}_\rho$的 ω 有限子集上的所有置换组成。事实上，由于任意 $p \in \mathcal{P}_\rho$ 都扩张为 ρ的一个共轭，为了得到属于 $\mathcal{P}_\rho^c$且扩张这个 p 的扩张，可以将该共轭限制在ω的某个适当有限子集上。为验证三元组 $p_0 \subseteq p_1$ 和 $p_0 \subseteq p_2$ 的 AP，取相应的 p_3

作为出现在 p_1 和 p_2 中的循环的集合，并将每个循环取其在 p_1 或 p_2中出现次数的最大值。

在 ρ 的有限循环长度有界而 ρ 含有无限循环的情况下，令 $\mathcal{P}_\rho^{c\infty}$ 由所有可表示为不相交并 $p_c \dot\cup p'$ 的部分置换 $p \in \mathcal{P}_\rho$ 组成，其中 p_c 是 ω 的有限子集上的有限置换，且该子集属于 $\mathcal{P}_\rho$；p' 是形如 $\{p'(c_i) = c_{i+1} \,|\, i \leq \ell\}$ 的部分映射，其中 ℓ 和集合 $\{c_0, \ldots, c_\ell\} \subset \omega$ 任意。相应的验证是一个简单的练习。现在，该命题的主要陈述可由 [4] 的定理 1.2 推出（上一节已经提到过）。

设 γ 是 $\mathcal{C}_\rho$ 的一个泛置换。表述中第二句的第一项显而易见。要看出第二项，注意对于任意 $c \in \omega$，所有满足 c 包含在 δ 的某个有限循环中的置换 $\delta \in \mathcal{C}_\rho$ 所构成的集合，在 $\mathcal{C}_\rho$ 中是稠密开集。特别地，在 $\mathcal{C}_\rho$ 中，不含无限循环的所有 $\delta \in \mathcal{C}_\rho$ 构成一个余瘦集。该集合必定包含 γ。

要理解最后一句话，我们采用类似的论证。例如，假设存在一个无限循环 ρ，注意，对于任意 a_1 和 $a_2 \in \omega$，所有满足以下条件的置换 $\delta \in \mathcal{C}_\rho$ 组成的集合在 $\mathcal{C}_\rho$中是稠密开集：a_1 和 a_2 包含在 δ 的一个无限循环中，或者其中一个位于有限循环中。由此可以推导出，$\mathcal{C}_\rho$ 中所有仅有一个无限循环的置换构成的集合在 $\mathcal{C}_\rho$中是余瘦的。

■

1.3 齐次偏序集与高度齐次群

群 S_∞ 在本节介绍的两个研究项目中都作为极端情形出现。在 [12], Schmerl 如下描述可数超齐次偏序集。设 $1 \leq n \leq \omega$，并令 $[n]$ 为自然数集合 $\leq n$。该集合被视为一个反链。它是一个超齐次偏序集。

设 $B_n = [n] \times \mathbb{Q}$。它关于以下序关系是一个超齐次偏序集

$$(a, q) < (b, q') \Leftrightarrow a = b \wedge q < q'.$$

设 $C_n = B_n$，但序关系定义为

$$(a, q) < (b, q') \Leftrightarrow q < q'.$$

[12] 的主要定理指出，任意可数超齐次偏序集都同构于 $[n]$、B_n、C_n、$1 \leq n \leq \omega$，或可数普适超齐次偏序集 D。

设 M 是一个可数超齐次偏序集，且 $\rho \in \in$自同构群(M)。
$\mathcal{C}_\rho$ 是否有泛元? 相应的 $\mathcal{P}_\rho$ 是否满足 CAP?

在上一节中，我们已经证明，当$M = [\omega]$时，答案是肯定的。

另一个项目研究的是以 S_∞ 作为高度齐次群的情况。如果一个作用在 ω 上的置换群 G 满足：对于任意两个大小相同的有限子集 A 和 $B \subset \omega$，都存在 $g \in G$ 将 A 映射到 B，那么它就称为高度齐次。若一个可数结构 M 满足 $Aut(M)$ 是高度齐次的（在与 ω 的一个对应下），则称该结构为高度齐次。$\mathbb{Q}$ 上的有理数序（$\mathbb{Q}, <$）就是此类结构的一个例子。现在我们定义结构（$\mathbb{Q}, B$）、（$\mathbb{Q}, Cr$）和（$\mathbb{Q}, S$），它们也都是高度齐次的。与（$\mathbb{Q}, <$）相关联的线性介于关系 $B(x; y, z)$ 定义如下

$$B(x; y, z) \Leftrightarrow (y < x < z) \vee (z < x < y).$$

循环序是一种绕回的全序，并带有由 $<$ 诱导的自然三元关系。有理数 $\mathbb{Q}$ 上的循环序定义如下

$$Cr(x, y, z) \Leftrightarrow (x < y < z) \vee (z < x < y) \vee (y < z < x).$$

四元分离关系 S 在 $\mathbb{Q}$ 上的定义，是由保持或反转循环序的置换群所诱导的。文献 [1]证明，这些例子与 S_∞ 一起，构成了所有可数的高度齐性结构。值得注意的是，相对于其自然语言，它们都是超齐性的。针对偏序集提出的问题，也可以用于研究高度齐性结构。本文的主要结果在某些情形下给出了肯定的答案。

值得注意的是，自同构群 Aut($\mathbb{Q}, <$) 在本节所讨论的两个主题中都发挥着重要作用。这也解释了为什么本文将它们放在一起讨论。

注 1.5 这些群也一同出现在其他几篇论文中，成为主要的例子来源。例如，参见 [5]。

1.4 有理数集上保序置换群的共轭类

由于自同构群 Aut($\mathbb{Q}, <$) 将在我们的研究中发挥核心作用，本节将介绍有关该群的必要信息。

设 $\gamma \in$ Aut($\mathbb{Q}, <$) 且 $x \in \mathbb{Q}$。那么集合

$$\{q \in \mathbb{Q} \mid (\exists m, n \in \mathbb{Z})(\gamma^n(x) \leq q \leq \gamma^m(x))\}$$

称为包含 x 的 γ 轨道。轨道是单点集或开区间。

奇偶函数 $\wp_\gamma\colon\ \mathbb{Q}\to\{+,-,0,\}$ 的 γ 定义如下:

$$\wp_\gamma(x)=\begin{cases}- & \text{if}\quad \gamma(x)<x\\ 0 & \text{if}\quad \gamma(x)=x\\ + & \text{if}\quad \gamma(x)>x.\end{cases}$$

由于奇偶函数在每个轨道上都是常值，我们可以将这个常值赋给每个轨道，并称之为轨道的奇偶性。

设 $\varepsilon\in\{+,-,0\}$。那么， $\mathcal{O}_\gamma$ 和 $\mathcal{O}_\gamma^\varepsilon$ 分别表示γ 的所有轨道组成的族，以及 γ 中奇偶性为 ε 的所有轨道组成的族。

对于任意非空区间 I、$J\subseteq\mathbb{Q}$，当且仅当 $I=J$，或者对于每个 $a\in I$ 和每个 $b\in J$，都有 $a<b$时，我们记作 $I\preceq J$。如果$I\preceq J\wedge I\neq J$，我们记作 $I\prec J$。关系 $\preceq$ 是所有区间组成的族上的偏序。对于给定的 $\gamma\in$ Aut($\mathbb{Q},<$), 关系 $\preceq_\gamma$，即将 $\preceq$ 相对于$\mathcal{O}_\gamma$进行限制，是 $\mathcal{O}_\gamma$的自然序。

Schreier 和 Ulam 的一项经典结果（见 [3]）指出,

> γ_1,γ_2共轭，当且仅当 $(\mathcal{O}_{\gamma_1},\preceq_{\gamma_1})$ 和 $(\mathcal{O}_{\gamma_2},\preceq_{\gamma_2})$ 存在保持轨道奇偶性的同构。

回忆一下， $\gamma\in$ Aut($\mathbb{Q}$) 是泛型的（即其共轭类在 Aut($\mathbb{Q}$) 中余瘦），当且仅当对每个 $\varepsilon\in\{+,-,0\}$，序关系 $\mathcal{O}_\gamma^\varepsilon$ 无端点，且在 $\mathcal{O}_\gamma$ 中稠密（见 [11]）。

设 p 是 $(\mathbb{Q},<)$ 的有限部分同构。根据超齐性，它可延拓为该结构的某个自同构 γ。对于 p，在任意满足 Dom(p) $\cup$ Rng(p) 的 $a\in$ 上，奇偶函数$\wp_p\colon\ \mathbb{Q}\to\{+,-,0\}$ 显然有定义。我们将其视为一个偏函数。它正是 $\wp_\gamma$ 在 Dom(p) $\cup$Rng(p) 上的限制。

两个元素 a、$b\in\mathbb{Q}$ 满足 p 相关，如果 $a=b$ 或符合以下情形之一:

- $a\le b\le p(a)\vee b\le a\le p(b)\vee p^{-1}(a)\le b\le a\vee p^{-1}(b)\le a\le b$, for $\wp_p(a)=+$ or $\wp_p(b)=+$.
- $a\le b\le p^{-1}(a)\vee b\le a\le p^{-1}(b)\vee p(a)\le b\le a\vee p(b)\le a\le b$, for $\wp_p(a)=-$ or $\wp_p(b)=-$.

令 $\sim_p$ 为由 p-相关性在 $\mathbb{Q}$ 上生成的等价关系。我们将 $\sim_p$ 的等价类称为 p-轨道。$\mathbb{Q}$ 的序在 p-轨道集上诱导出序 $\preceq$。与 Dom(p) $\cup$ Rng(p) 相交的 p-轨道具有定义良好的奇偶性。我们将它们称为带颜色的 p-轨道。当 p 扩展为自同构 γ 时，函数 $\wp_\gamma$ 会诱导出 p-轨道的奇偶性。对于与 Dom(p) $\cup$ Rng(p) 相交的轨道（即带颜色的轨道），这种奇偶性与 $\wp_p$ 一致。

2 彩色序、其同态与 amalgamation

我们需要介绍一些关于彩色线性序的预备材料。本节的结果与论文的主题无关。在我们看来，这些结果本身就很有趣。

2.1 着色为3种颜色和7种颜色的序

本节中，我们考察一个线性序 $(L, \leq)$ 以及一个函数$\kappa : L \to \Delta$，其中 Δ 是一个有限的颜色集。我们考虑$|\Delta| = 3$ 且 $|\Delta| = 7$的若干情形。在前一种情形下，$\Delta = \{+, -, 0\}$。

定义 2.1 设 $(L, \leq, \kappa)$ 是一个着色线性序，其中 $\kappa: L \to \{+, -, 0\}$。设 L_0 是 L 的一个凸子集，且 $\varepsilon \in \{+, -, 0\}$。

- 我们称 L_0 为 ∞_+ 型, $-$, 0，若对每个自然数 n，都存在一个序列 $a_1 < a_2 < \ldots < a_{3(n+1)}$ 属于 L_0，使得

$$\kappa(a_{3i+1}) = +\,,\ \kappa(a_{3i+2}) = -\,,\ \kappa(a_{3i+3}) = 0 \ \ where\ i \leq n.$$

- 我们称 L_0 为 ε 型，若 $\kappa(L_0) = \{\varepsilon\}$，并且此外，在$\varepsilon = 0$ 的情形下，集合 L_0 只包含一个元素。

- 我们称 L_0 为类型 ∞_0，如果 L_0 是无限的且 $\kappa(L_0) = \{0\}$。

- 设 $\varepsilon' \in \{+, -, 0\} \backslash \{\varepsilon\}$。我们称 L_0 为类型 $\infty_{\varepsilon\varepsilon'}$，如果 $\kappa(L_0) = \{\varepsilon, \varepsilon'\}$，并且对每个自然数 n，在 L_0 中存在一个序列 $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2(n+1)}$，使得

$$\kappa(a_{2i+1}) = \varepsilon\,,\ \kappa(a_{2i+2}) = \varepsilon',\ \ where\ i \leq n.$$

注意，类型 $\infty_{\varepsilon\varepsilon'}$ 和 $\infty_{\varepsilon'\varepsilon}$ 相同。为方便起见，我们将在记号中使用有序对 $+-$, $+0$ 和 -0。特别是，定义 2.1 中出现了八种类型。其中七种稍后将用作颜色。

命题 2.2 设 $(L, \leq)$ 是一个无限线性有序集，并设 $\kappa : L \to \{+, -, 0\}$ 是一个将有限集 L 着色为三种颜色 $+, -, 0$ 的函数。假设 L 不是类型 $\infty_{+,-,0}$。那么，有序集 $(L, \leq)$ 可以分解为有限个区间 $L = L_1 \dot\cup L_2 \dot\cup \ldots \dot\cup L_m$，并赋予自然序$L_1 \prec L_2 \prec \ldots \prec L_m$，使得对任意 $i \leq m$，都有 $|\kappa(L)| \leq 2$。

证明。选择最小的 n，使得无法实现类型 $\infty_{+,-,0}$ 定义中的情形。选择一个序列 $a_1 < a_2 < \ldots < a_{3n}$，其中

$$\kappa(a_{3i+1}) = +\,,\ \kappa(a_{3i+2}) = -\,,\ \kappa(a_{3i+3}) = 0 \ \text{ for } i < n.$$

我们假设 $n > 0$。情形 $n = 0$ （其中 $|\kappa(L)| = 3$ ）可以用同样的方法处理。我们不取 a_i-s 的序列，而是固定一个 a_1 ，并应用下面的论证。

令 $[-\infty, a_1]$ 表示 L 中由所有 $x \leq a_1$ 构成的初始区间。我们声称

> 每个区间 $[-\infty, a_1]$、$[a_1, a_2]$、$[a_2, a_3]$、……、$[a_{3n}, +\infty]$ 都可以分解为至多三个 (≤ 2)-着色区间。

令 $i < n$ ，并令 $A = [a_{3i+1}, a_{3i+2}]$。我们不妨假设 $|A| > 2$。取 A 的极大初始子区间，记为 A_1，使得 $- \notin \kappa$（A_1）。令 A_4 为 A 的极大末端子区间，使得 $+ \notin \kappa$（A_4）。分解 $A = A_1 \dot\cup A_2$ 和 $A = A_3 \dot\cup A_4$。令 $A' = A_2 \cap A_3$。

若 $A' = \emptyset$，则 $A = A_1 \dot\cup (A \setminus A_1)$ 是所需的分解。若 $A' \neq \emptyset$，则 $A = A_1 \dot\cup A' \dot\cup A_4$ 并且

> for each $a \in A'$ there are $a' \in A'$ and $a'' \in A'$ such that $a' \leq a \leq a''$ and $\kappa(a') = - \wedge \kappa(a'') = +$.

如果存在 $a \in A'$，使得 $\kappa(a) = 0$，那么将其连同相应的 a' 和 a'' 加入 a_i序列中，就会与 n的选取矛盾。因此我们看到，集合 $\kappa(A_1)$、 $\kappa(A')$和 $\kappa(A_4)$的大小均为 < 3。

$A = [a_{3i+2}, a_{3i+3}]$ 和 $A = [a_{3i}, a_{3i+1}]$ 的情形类似。在$A = [-\infty, a_1]$ 的情形下，我们将 $A = A_1 \dot\cup A_2$ 和 $A = A_3 \dot\cup A_4$ 分解，使得 A_1 是 A 的极大初始子区间，并满足 $+ \notin \kappa(A_1)$；而 A_4 是 A的极大末端子区间，并满足 $0 \notin \kappa(A_4)$（可能出现 $A_1 = \emptyset$的情况）。然后重复上述论证。 $A = [a_{3n}, +\infty]$ 的情形是对偶的。

■

引理 2.3 设 $(L, \leq)$ 是一个无限线性有序集，且 $\kappa : L \to \{\sharp_1, \sharp_2\}$ 是一个将 L 着成两种颜色的函数。假设存在一个自然数 n ，使得集合 L 不存在满足下列条件的序列 $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2(n+1)}$，其中

$$\kappa(a_{2i+1}) = \sharp_1 \,,\ \kappa(a_{2i+2}) = \sharp_2 \,,\ \textit{with } i \leq n.$$

那么，有序集 $(L, \leq)$ 可以分解为有限多个区间 $L = L_1 \dot\cup L_2 \dot\cup \ldots \dot\cup L_m$，其中 $L_1 \prec L_2 \prec \ldots \prec L_m$，使得对任意 $i \leq m$，都有 $|\kappa(L)| = 1$。

证明。我们采用与命题 2.2 的证明相同的策略。取满足表述中条件的最小 n 。不妨设 $n > 0$。于是:

> 每个区间 $[-\infty, a_1], [a_1, a_2], [a_2, a_3], \ldots, [a_{2n}, +\infty]$ 都可以分解为至多两个单色区间。

例如，考虑 $A=[a_{2i+1},a_{2i+2}]$，其中 $i<n$。设 A_1 是满足 $\kappa(A_1)=\sharp_1$ 的最大初始区间。若 $|\kappa(A\setminus A_1)|=2$，则 $A\setminus A_1$ 包含一对 $a'<a''$，满足 $\kappa(a')=\sharp_2$ 且 $\kappa(a'')=\sharp_1$。这与 n 的选取矛盾。其余情形类似。

■

现在我们引入新的颜色及其上的某种偏序。令

$$\chi=\{\{+\},\{-\},\{0\},\infty_0\}\cup\{\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2\in\{+-,+0,-0\}\}.$$

χ 的序对应于关系 $\subseteq$。特别地，当 $\varepsilon\in\{\varepsilon_1,\varepsilon_2\}$ 时，我们记作 $\{\varepsilon\}\subset\infty_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$。我们还记作 $\{0\}\subset\infty_0\subset\infty_{+0}$ 和 $\infty_0\subset\infty_{-0}$。注意，

$$|\chi|=7.$$

设 $(L,\leq,\kappa)$ 是一个 $\{+,-,0\}$-着色线性序。对于将 $L=\bigcup\{L_i\,|\,i\leq n\}$ 分解为有限多个类型为

$$\tau\in\{+,-,0,\infty_0\}\cup\{\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2\in\{+-,+0,-0\}\}$$

我们按如下方式为族 $\{L_i\,|\,i\leq n\}$ 赋予一个 χ-着色 $\hat{}\kappa$：

$$\hat{\kappa}(L_i)=\{\tau\}\text{ if }L_i\text{ is of type }\tau\in\{+,-,0\}$$
$$\hat{\kappa}(L_i)=\tau\quad\text{if }L_i\text{ is of type }\tau\in\{\infty_0\}\cup\{\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,|\,\varepsilon_1\varepsilon_2\in\{+-,+0,-0\}\}.$$

因此，族 $\mathcal{L}=\{L_i\,|\,i\leq n\}$ 成为一个有限的 χ-着色有序集，其序就是 $\prec$。

我们在以下定义中使用 χ的结构。

定义 2.4 设 $(\mathcal{L},<,\hat{}\kappa)$ 是一个有限的 χ 着色线性序。若对于任意 $x,y\in\mathcal{L}$，以下条件均成立，则称 $(\mathcal{L},<,\hat{}\kappa)$ 是典范的：

- 若 $x\neq y$ 且 $\hat{}\kappa(x)\subseteq\hat{}\kappa(y)$，则存在 $u\in\mathcal{L}$ 使得 $x<u<y$ 或 $y<u<x$。
- 若存在 $u\in\mathcal{L}$ 使得 $x<u<y$ 或 $y<u<x$，且对某个 $\varepsilon_1\varepsilon_2\neq\varepsilon_1'\varepsilon_2'$，有 $\hat{}\kappa(x)=\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 且 $\hat{}\kappa(y)=\infty_{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}$，则以下陈述之一成立：
  (a) 存在 $z_1,z_2\in\mathcal{L}$ 使得 $x<z_1<z_2<y$ 或 $y<z_1<z_2<x$，且 $\hat{}\kappa(z_1),\hat{}\kappa(z_2)\in\{\{+\},\{-\},\{0\},\infty_0,\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2},\infty_{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}\}$ 且 $\hat{}\kappa(z_1)\neq\hat{}\kappa(z_2)$；
  (b) 存在 z 使得 $\hat{}\kappa(z)$ 具有如下形式：$\infty_{\varepsilon\varepsilon'}$，其中 $\varepsilon\not\subseteq\hat{}\kappa(x)\wedge\varepsilon'\not\subseteq\hat{}\kappa(y)$，且 $(x<z<y)\vee(y<z<x)$。

下面的定理是本节的最终结果。

定理 2.5 设 $(L, \leq, \kappa)$ 是一个 $\{+, -, 0\}$ 着色线性序。假设 $\mathcal{L}$ 不属于类型 ∞_{+}, $_{-}$, $_{0}$。那么存在一个分解 $L = L_1 \dot\cup L_2 \dot\cup \ldots \dot\cup L_n$，将其分成有限多个区间，使得相应的 χ 着色序 $(\mathcal{L}, \preceq, \hat{}\kappa)$ 是典范的。此外，对于定义典范 χ 着色序的 L 的任意两个有限分解，这些着色序彼此同构。

证明。我们来寻找一个典范分解。任取一个 $\varepsilon_1\varepsilon_2 \in \{+-, +0, -0\}$。设 $L_1^{\varepsilon_1\varepsilon_2}$, $\ldots, L_i^{\varepsilon_1\varepsilon_2}, \ldots$ 是 L 中所有类型为 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 的极大子区间所组成的族。显然，这些区间两两不相交，即任意两个区间 $L_i^{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 和 $L_j^{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 之间都隔着一个颜色不同于 ε_1 和 ε_2 的点。由命题 2.2 可知，这个族是有限的。

考虑集合

$L^{\perp} = L \setminus \bigcup \{L' \mid L' \text{ 与某个 } L_i^{\varepsilon_1\varepsilon_2} \text{ 重合，其中 } \varepsilon_1\varepsilon_2 \in \{+-, +0, -0\}\}$. 是某个

将引理 2.3 应用于 $L^{\perp}$ 的子区间，我们看到 $L^{\perp}$ 可以分解为有限个单色区间的并。

假设 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \neq \{\varepsilon_1', \varepsilon_2'\}$。那么 $L_i^{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cap L_j^{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}$要么是单色的，要么是空集。前一种情况下，为了达到不相交，可以将单色部分只分配给其中一个。此时我们不要求另一个部分是极大的。如果 $L_i^{\varepsilon_1\varepsilon_2}$和 $L_j^{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}$不相邻且 $L_i^{\varepsilon_1\varepsilon_2} \prec L_j^{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}$，那么它们应由一对点隔开，例如 $z_1 < z_2$，其中$\kappa(z_1) \notin \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ 且 $\kappa(z_2) \notin \{\varepsilon_1', \varepsilon_2'\}$。

现在令 $(\mathcal{L}, \prec, \hat{}\kappa)$ 为所有形如 $L_i^{\varepsilon_1\varepsilon_2}$（经过上述修正）的区间以及构成 $L^{\perp}$ 的所有极大单色区间组成的有序集。令 $\hat{}\kappa$为根据定义 2.4 之前给出的过程构造的 χ-着色。显然，它是典范的。

让我们证明典范序的定义是唯一的。假设$L = I_1 \dot\cup I_2 \dot\cup \ldots \dot\cup I_m$ 是 L 的一个分解，给出了一个典范的 χ序。由于对任意 $L_i^{\varepsilon_1\varepsilon_2}$，该分解都是有限的，因此存在 I_j，使得 $L_i^{\varepsilon_1\varepsilon_2} \cap I_j$也属于类型 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$。如果 I_j 不是极大的，那么 I_{j+1}（或 I_{j-1}）属于类型$\infty_{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}$，且满足 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \cap \{\varepsilon_1', \varepsilon_2'\} \neq \emptyset$；也就是说，将 I_j 扩展一个 I_{j+1}（分别为 I_{j-1}）的单色子区间，就能得到一个极大的区间。此外，正如我们已经知道的，I_{j+1}（分别为 I_{j-1}）与某个类型为$\infty_{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}$的 $L_k^{\varepsilon_1'\varepsilon_2'}$相交。这个论证使我们注意到，证明第一部分中定义的 $L^{\perp}$ 与

$$L \setminus \bigcup \{I_j \mid I_j \text{ is of type } \infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \text{ for some } \varepsilon_1\varepsilon_2 \in \{+-, +0, -0\}\}.$$

另一方面，很容易看出，$L^{\perp}$ 的典范分解是唯一的。

■

2.2 彩色序的 CAP

我们研究关于某些特殊同态的彩色序范畴。因此，本节以以下两个定义开篇。

定义 2.6 设 $(L, <, \kappa)$ 和 $(L', <', \kappa')$ 是 $\{+, -, 0\}$-着色线性序。若映射 ϕ : $L \to L'$ 满足对任意 $x_1, x_2, x \in L$，则称其为 κ-同态

$$\kappa(x) = \kappa'(\phi(x)),$$

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \leq' \phi(x_2)$$

并且 ϕ 在所有颜色为 0 的元素组成的集合上是单射。

定义 2.7 设 $(\mathcal{L}, <, \hat{}\kappa)$ 和 $(\mathcal{L}', <', \hat{}\kappa')$ 是 χ-着色线性序。若映射 ϕ : $\mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ 满足对任意 $x_1, x_2, x \in \mathcal{L}$，则称其为 χ-同态

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \leq' \phi(x_2) \ \ and$$

$$\hat{\kappa}(x) \subseteq \hat{\kappa}'(x)).$$

注 2.8 值得注意的是，当定义 2.7 中的 $(\mathcal{L}, <, \hat{}\kappa)$ 是典范的 χ-着色线性序，并且对某些 $x, y \in \mathcal{L}$， $\phi(x) = \phi(y)$ 时，那么 x 和 y 是颜色不同的单色元素，且 $\hat{}\kappa(x) \cup \hat{}\kappa(y) = \hat{}\kappa'(\phi(x))$；或者 x 和 y 是颜色相同的单色元素，并且它们之间存在某个 u，使得 $\hat{}\kappa(x) \cup \hat{}\kappa(u) \cup \hat{}\kappa(y) = \hat{}\kappa'(\phi(x))$，其中 $\hat{}\kappa'(\phi(x))$ 不是单色的。事实上，根据定义 2.4，当 x 和 y 的颜色相容时，它们之间应由一个颜色不相容的元素隔开。另一方面，当 x 和 y 的颜色不相容，且其中一个不是单色时， $\kappa'(\phi(x)) \neq \kappa'(\phi(y))$。

设 $(L, <, \kappa)$ 是一个无限可数的 $\{+, -, 0\}$ 着色线性序，其类型不是 $\infty_{+, -, 0}$。根据定理 2.5，存在一种分解

$$L = L_1 \dot{\cup} L_2 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} L_n$$

将其分成有限多个区间，使得相应的 χ 着色序 $(\mathcal{L}, \preceq, \hat{}\kappa)$ 是典范的。我们固定这个 n。

令 $\mathcal{K}$ 为 $(L, <, \kappa)$ 的年龄，即 $(L, <, \kappa)$ 的所有有限子结构组成的族。我们考虑 $\mathcal{K}$ 以及所有 κ-同态组成的族。在这个范畴中考虑 $\mathcal{K}$ 中各成员的 amalgamation。

定义 2.9 令 $\mathcal{K}^{rch} \subset \mathcal{K}$ 为所有满足以下条件的成员 $(A, <, \kappa) \in \mathcal{K}$ 组成的族：对任意 $L_i \in \mathcal{L}$

- 交集 $A \cap L_i$ 非空；
- 若 L_i 属于类型 $\{+\}$、 $\{-\}$ 或 $\{0\}$，则 $A \cap L_i$ 是单一的；

• 若 L_i 属于类型 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 或 ∞_0，则 $A \cap L_i$ 由一个递增序列组成，其中至少有 n^n 个颜色为 ε_1的有序对 ε_2 （分别地，至少有 n^n 个颜色为 0 的元素组成的序列）。

显然， $\mathcal{K}^{rch}$ 在 κ-同态下是 $\mathcal{K}$ 的共尾子族： $\mathcal{K}$ 中的任意成员都映射到 $\mathcal{K}^{rch}$中的某个成员。本文本节的主要定理指出， $\mathcal{K}^{rch}$ 是 $\mathcal{K}$满足 CAP 的见证。

定理 2.10 子族 $\mathcal{K}^{rch} \subset \mathcal{K}$ 具有 amalgamation 性质。

证明。如果 $\mathcal{L}$ 不含类型为 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 和 ∞_0 的区间，那么 $\mathcal{K}^{rch}$ 只包含一个结构，定理的结论显然成立。以下证明中，我们假设存在类型为 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 或 ∞_0的区间。

我们先从一个简单的观察开始讨论一般情形（与注 2.8 类似）： $\mathcal{L}$ 的典范性保证了 $\mathcal{K}^{rch}$ 中成员之间的 κ-同态是单射。

现在我们需要以下断言。

断言。设 $(A, <, \kappa)$ 和 $(B, <, \kappa)$ 是来自 $\mathcal{K}^{rch}$的 $\{+, -, 0\}$-着色线性序。那么任意 κ-同态 ϕ: $A \to B$ 都保持典范分解 $\mathcal{L}$的区间 L_i 。

设 L_i 属于类型 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$。根据鸽巢原理， $A \cap L_i$ 中至少有 n 对颜色为 $\varepsilon_1\varepsilon_2$ 的点，在某个类型为 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$的 L_k 下映射到同一个 $B \cap L_k$。由于 $\mathcal{L}$ 是有限的，而且任意两个类型为 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 的 $A \cap L_i$ 和 $A \cap L_j$ 在 A 中都被一个颜色不属于 $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ 的元素隔开，因此 $L_i = L_k$，并且整个 $A \cap L_i$ 都映射到 $B \cap L_i$。对类型为 ∞_0 的区间 L_i，同样的论证也成立。

如果 L_i 属于类型 $\{+\}$、 $\{-\}$ 或 $\{0\}$，那么 $A \cap L_i$ 是单点集，且 $\mathcal{L}$ 中 L_i 的邻点颜色彼此不相容。这就保证了该断言成立。

我们来验证 amalgamation 性质。设 $(A, <, \kappa)$、$(B, <, \kappa)$ 和 $(C, <, \kappa)$ 是来自 $\mathcal{K}^{rch}$ 的 $\{+, -, 0\}$-着色线性序，且 ϕ_1: $A \to B$ 和 ϕ_2 : $A \to C$ 是 κ-同态。由上面的断言可知，只需验证形如 $A \cap L_i$、 $B \cap L_i$ 和 $C \cap L_i$ 的子结构的 amalgamation 性质，其中 L_i 属于类型 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 或 ∞_0。后一种情形显然成立。为考察前一种情形，我们应用不交 amalgamation：设

$$D \cap L_i = (B \cap L_i) \cup_{\phi_1(A \cap L_i) = \phi_2(A \cap L_i)} (C \cap L_i).$$

为了得到 $D \cap L_i$ 的线性序，我们采用以下规则。设 $a' \in A$ 是 $a \in A$ 关于 A 的序的后继。设 B 中的区间（a， a'）为序列 $a < b_1 < \ldots < b_s < a'$，并设 C 中的区间（a， a'）为 $a < c_1 < \ldots < c_t < a'$。那么，我们将 D 中的（a， a'）表示为

$$a < b_1 < \ldots < b_s < c_1 < \ldots < c_t < a'.$$

由于 $\kappa(a) \neq \kappa(a')$，数 s 和 t 都是偶数。因此 $\kappa(a) = \kappa(b_s) = \kappa(c_t)$，并且 $\kappa(a') = \kappa(b_1) = \kappa(c_1)$。由此可见，$D \cap L_i$ 与 $A \cap L_i$ 属于相同类型，即 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2\circ}$

■

3 自同构群 Aut($\mathbb{Q}, <$) 与类 $\mathcal{C}_\rho$

本节研究 Aut($\mathbb{Q}, <$) 的一些闭不变子集。我们用 $\mathcal{P}$ 表示 $(\mathbb{Q}, <)$ 的所有有限部分同构构成的集合。当 $\rho \in$Aut($\mathbb{Q}, <$) 时，令 $\mathcal{C}_\rho$ 为 $\rho^{\mathrm{Aut}(\mathbb{Q},<)}$ 的拓扑闭包，并且

$$\mathcal{P}_\rho = \{p \in \mathcal{P}: \ p \text{ 可扩张为来自 } \mathcal{C}_\rho\} \text{ 的一个自同构。}$$

3.1 一般情形

给定 $\gamma \in$ Aut($\mathbb{Q}, <$)，其轨道有序集 $(\mathcal{O}_\gamma, \prec_\gamma)$ 由奇偶函数 $\wp_\gamma$ 着 $\{+, -, 0\}$ 种颜色。假设该序不是 $\infty_{+,\ -,\ 0}$ 类型，则可应用定理 2.5，由此得到一个典范的 χ 着色序 $(\mathcal{L}_\gamma \prec_\gamma, \hat{}\wp_\gamma)$。

设 p 是 $(\mathbb{Q}, <)$ 的一个部分自同构，$\sim_p$ 是部分轨道等价关系。若 $A \subseteq \mathbb{Q}$ 且 $p = \gamma \restriction A$，则奇偶函数 $\wp_\gamma: \mathbb{Q} \to \{+, -, 0\}$ 定义了一个 $\{+, -, 0\}$ 着色有序集 $(A/\sim_p, \prec_p, \wp_p)$。

定理 3.1 设 $\rho, \gamma \in$ Aut($\mathbb{Q}, \leq$)。以下条件等价。

1. $\gamma \in \mathcal{C}_\rho$；2. 对任意有限的 $A \subseteq \mathbb{Q}$，存在一个 $\wp$-同态 $\phi: (A/\sim_p, \prec_p, \wp_p) \to (\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho, \wp_\rho)$，其中 $p = \gamma \restriction A$；3. $\mathcal{O}_\rho$ 的类型为 $\infty_{+,-,0}$，或者 $\mathcal{O}_\gamma$ 和 $\mathcal{O}_\rho$ 均不属于类型 $\infty_{+,-,0}$，且存在一个 χ-同态，将与 $(\mathcal{O}_\gamma, \prec_\gamma, \wp_\gamma)$ 对应的典范分解 $(\mathcal{L}_\gamma, \prec_\gamma, \hat{}\wp_\gamma)$ 映射到与 $(\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho, \wp_\rho)$ 对应的典范分解 $(\mathcal{L}_\rho, \prec_\rho, \hat{}\wp_\rho)$。

证明。蕴含关系 $1 \to 2$ 很容易证明。事实上，对任意有限的 $A \subset \mathbb{Q}$，都存在一个自同构 σ，使得 $\sigma^{-1}\rho\sigma$ 在 A 上与 γ 重合。令 $p = \gamma \restriction A$ 和 $(A \cup p(A))/\sim_p = \{C_1, \ldots, C_k\}$，其中 $C_1 \prec \ldots \prec C_k$。于是，自同构 σ 将每个 C_i 映射到 $\mathcal{O}_\rho$ 的某个轨道，从而保持奇偶性。

为证明 $2 \to 1$，我们取有限集的递增序列 A_i，使得 $\mathbb{Q} = \bigcup A_i$。令 $p_i = \gamma \restriction A_i$。只需证明，对于每个 i，都存在一个自同构 σ_i，使得 $p_i = \sigma_i^{-1}\rho\sigma_i \restriction A_i$。

令 $(A_i \cup p_i(A_i))/\sim_{p_i} = \{C_1, \ldots, C_k, \ldots, C_s\}$，其中 $C_1 \prec \ldots \prec C_s$ 是相应的 p_i-轨道。应用定理的第二个条件，我们得到一个 $\wp$-同态 ϕ，它从 $(A_i \cup p_i(A_i))/\sim_{p_i}$ 映到 $\mathcal{O}_\rho$。为了构造 σ_i，我们对每个 $k \leq s$，定义从 $(C_k, <, p_i \restriction C_k)$ 到 ρ-轨道 $(\phi(C_k), <, \rho \restriction \phi(C_k))$ 的等变嵌入。其构造方式将确保所有这些嵌入合在一起构成一个有限部分同构，将 $(A_i \cup p_i(A_i), <, p_i)$ 映到 $(\mathbb{Q}, <, \rho)$。根据 $(\mathbb{Q}, <)$ 的超齐性，它可扩张为一个自同构。这个自同构就是我们的 σ_i。

如果 C_k 的奇偶性为 0，那么对于某些 $q \in \mathbb{Q}$、$C_k = \{q\}$ 和 p_i，$q = q$。因此，轨道 $\phi(C_k)$ 只包含一个元素，而 ϕ 定义了所需的嵌入。值得注意的是，根据定义 2.6，对于另一个奇偶性为 0 的 C_ℓ，轨道 $\phi(C_k)$ 和 $\phi(C_\ell)$ 是不同的。因此，相应的嵌入在奇偶性为 0 的 p_i- 轨道上定义了一个部分等变同构。

考虑 C_k 的奇偶性为 $+$ 的情形。在这种情况下，C_k 有一个自然的分解，分解为部分 p_i-轨道。我们可以选取这些轨道的代表元，记作 $a_1 < a_2 < \ldots < a_t$。此外，我们假设这些 a_j 是相应轨道的极小代表元（轨道大小例如为 l_j）。利用关于 $j \leq t$ 的归纳法，可以构造一个同构嵌入，将

$$\{a_1, p_i(a_1), \ldots p_i^{l_1}(a_1), a_2, p_i(a_2), \ldots, a_j, p_i(a_j), \ldots, p_i^{l_j}(a_j)\}$$

嵌入轨道 $\phi(C_k)$ 中（其奇偶性也为 $+$，即为无限），使得 p_i 的作用与 ρ 的作用一致。最后，在第 t 步之后，我们得到一个同构嵌入，将 $(C_k, <, p_i \restriction C_k)$ 嵌入 $(\phi(C_k), <, \rho \restriction \phi(C_k))$。

可能出现 $\phi(C_k) = \phi(C_{k+1})$ 的情况。因此，在将 $(C_k, <, p_i \restriction C_k)$ 嵌入 $(\phi(C_k), <, \rho \restriction \phi(C_k))$ 后，我们从 C_{k+1} 中高于与 C_k 对应的元素的最小元素的像开始，对 $(C_{k+1}, <, p_i \restriction C_{k+1})$ 重复这一过程。C_k 的奇偶性为 $-$ 时，情况类似。

我们来证明 $3 \to 2$。假设 γ 和 ρ 都不是 $\infty_{+,\ -,\ 0}$ 类型，并且存在一个 χ-同态，记作 ψ，从典范分解 $(\mathcal{L}_\gamma, \prec, \hat{}\wp_\gamma)$ 到典范分解 $(\mathcal{L}_\rho, \prec, \hat{}\wp_\rho)$。令 $\mathbb{Q}$ 的一个有限子集为 A，并令 $\mathcal{L}_\gamma$ 的一个元素为 L。请记住，L 是 γ 的一组轨道。定义 $A_L = A \cap (\bigcup\{O \mid O \in L\})$。为了定义一个从 $(A_L/\sim_\gamma)$ 到 $\psi(L)$ 的 $\prec$-序的 $\wp$-$\hat{}$同态，我们根据 L 的 χ-颜色分几种情况讨论。

若 $\hat{}\wp_\gamma(L) \in \{\{+\}, \{-\}\}$，则根据定义 2.7，$\chi$-同态 $\hat{}\psi$ 将 L 映射到一个轨道区间，其中包含奇偶性为 $\hat{}\wp_\gamma(L)$ 的轨道。因此，$(A_L/\sim_\gamma)$ 的元素可以映射到 ρ 中具有相应奇偶性的无限轨道。

如果 $\hat{}\wp_\gamma(L) \in \{\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \mid \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+, -, 0\}\}$，那么根据定义 2.7 $\hat{}$，χ-同态 ψ 将 L 映射到一个相同类型的轨道区间。因此，可以为任意 $C \in (A_L/\sim_\gamma)$ 指定 ρ 中一个奇偶性相同的轨道。

ˆ由于 $\psi(L)$ 由无限多个轨道组成，因此可以通过一个保持 $\prec$ 的单射来实现。

如果 ˆ$\wp_\gamma(L) \in \{\{0\}, \infty_0\}$，那么 $(A_L/\sim_\gamma)$ 的元素可以 ˆ 单射地映射到 ρ 中奇偶性为 0 且属于 $\psi(L)$ 的轨道集合。

我们将上述论证应用于任意 $L \in \mathcal{L}_\gamma$。由此得到所需的 $\wp$-同态。

当 ρ 属于类型 $\infty_{+,\ -,\ 0}$ 时，情形甚至更简单。令 A 为 $\mathbb{Q}$ 的有限子集。那么 $(A/\sim_\gamma)$ 的元素可以单射地映射到 ρ 的轨道集合中，并保持奇偶性。这是因为 ρ 有无穷多个类型为 $+$、$-$、0 的轨道三元组。

现在证明 $1 \wedge 2 \to 3$。假设 ρ 不属于类型 ∞_+、$-$、0。下面说明，假设 γ 属于类型 ∞_+、$-$、0 会导致矛盾。事实上，令 k 为 $\mathcal{L}_\rho$ 的大小，即 $\mathcal{O}_\rho$ 的典范分解中的区间数。选取一个有限的 $A \subset \mathbb{Q}$，使得 $(A \cup \gamma(A))/\sim_\gamma$ 有一个大小为 k^k 的、由奇偶性为 $+$、$-$、0 的带颜色轨道构成的递增序列。由于 $\gamma \in \mathcal{C}_\rho$，存在一个自同构 σ 使得 $\gamma \restriction A = \sigma^{-1}\rho\sigma \restriction A$。这意味着 $(\sigma(A) \cup \rho\sigma(A))/\sim_\rho$ 有一个大小为 k^k 的递增序列，其由奇偶性为 $+$、$-$、0 的 ρ 的带颜色轨道构成。现在可以看出，$(\mathcal{O}_\rho, \prec, \wp_\rho)$ 的典范分解中存在一个区间，其中包含奇偶性为 $+$、$-$、0 的 k 个轨道三元组。由于 χ 没有能实现这种情形的颜色，因此产生矛盾。

现在假设 γ 不是 $\infty_{+,\ -,\ 0}$ 类型，令 $k = \max(|\mathcal{L}_\gamma|, |\mathcal{L}_\rho|)$。取有限的 $A \subset \mathbb{Q}$，使得对于每个 $L \in \mathcal{L}_\gamma$

- 集合 $A \cap (\bigcup\{O \mid O \in L\})$ 非空，
- 若 L 属于 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 或 ∞_0 类型，则 $(A \cup \gamma(A))/\sim_\gamma$ 具有一个大小为 k^k 的递增序列，其中包含奇偶性为 ε_1的带颜色轨道对；ε_2（相应地，具有一个大小为 k^k 的奇偶性为 0 的轨道序列）。

找到一个自同构 σ，使得 $\gamma \restriction A = \sigma^{-1}\rho\sigma \restriction A$。因此，$\sigma$ 将 $(A \cup \gamma(A))/\sim_\gamma$ 映射到 $(\sigma(A) \cup \rho\sigma(A))/\sim_\rho$。此外，根据鸽巢原理，对于每个类型为 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 或 ∞_0 的 $L \in \mathcal{L}_\gamma$，映射 σ 会在 $(\mathcal{O}_\rho, \prec, \wp_\rho)$ 的典范分解的某个区间内，找到一个由大小为 k、奇偶性为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 的轨道对组成的递增序列（分别地，找到一个由大小为 k、奇偶性为 0 的轨道组成的序列）。显然，后者必定属于类型 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$（分别地，类型 ∞_0）。如果 L 属于类型 $\{\varepsilon\}$，那么 σ 会将一个奇偶性为 ε 的带颜色轨道映射到 $(\mathcal{O}_\rho, \prec, \wp_\rho)$ 的典范分解的一个区间，而该区间具有相容的类型。应用定义 2.4，我们将论证总结如下：当我们在 $(\mathcal{O}_\rho, \prec, \wp_\rho)$ 的典范分解中找到一个区间，该区间对应于一个由大小为 k、奇偶性为 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 的带颜色轨道对组成的递增序列（分别地，对应于一个由大小为 k、奇偶性为 0 的轨道组成的序列）时，可以将其整理成从典范分解 $(\mathcal{L}_\gamma, \prec, \hat{}\wp_\gamma)$ 到典范分解 $(\mathcal{L}_\rho, \prec, \hat{}\wp_\rho)$ 的一个 χ-同态。

■

3.2 当 ρ 是泛型时的情形

当 ρ 在 $\mathcal{C}_\rho$ 中是泛型的时，定理 3.1 的条件 2 可以更简单地表述。为此，我们需要了解这类自同构 ρ 的一些基本性质。由定理 3.1 可知，如果 $(\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho, \wp_\rho)$ 属于类型 $\infty_{+,\ -,\ 0}$，那么 $\mathcal{C}_\rho = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$。特别地，$\rho$ 是 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ 的一个泛型自同构。众所周知，在这种情况下，$(\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho)$ 是一个稠密序，并且对于每种奇偶性 ε，具有该奇偶性的轨道在其中稠密，见 [11]。

我们来考虑其余情形。设 $\rho \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$，但 $(\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho, \wp_\rho)$ 不属于类型 $\infty_{+,\ -,\ 0}$。根据定理 2.5，存在一个分解

$$\mathcal{O}_\rho = L_1 \dot\cup L_2 \dot\cup \ldots \dot\cup L_n$$

为有限多个区间，使得相应的 χ-彩色序 $(\mathcal{L}_\rho, \preceq, \hat{}\wp_\rho)$ 是典范的。我们固定这个 n。

设 $\mathcal{K}_\rho^{rch}$ 为所有满足以下性质的 $\{+, -, 0\}$-彩色线性序 $(A, <, \kappa)$ 所成的族。

存在一个 κ-同态，例如 ϕ，从 $(A, <, \kappa)$ 到 $(\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho \wp_\rho)$，使得对于任意 $L_i \in \mathcal{L}_\rho$

- 交集 $\phi(A) \cap L_i$ 非空；
- 若 L_i 属于类型 $\{+\}$ 或 $\{-\}$，则 $\phi(A) \cap L_i$ 是单一的；
- 若 L_i 属于类型 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 或 ∞_0，则它由一个至少含有 n^n 个颜色为 ε_1的有序对的递增序列组成，ε_2（相应地，由一个至少含有 n^n 个颜色为 0 的元素的序列组成）。

下面的命题澄清了这一情况。

命题 3.2 设 $\rho \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$，但 $(\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho, \wp_\rho)$ 不属于类型 $\infty_{+,-,0}$。若 γ是 $\mathcal{C}_\rho$ 的一个泛元，则与典范 χ-着色序相对应的 $(\mathcal{O}_\gamma, \prec_\gamma, \wp_\gamma)$ 的分解定义了一个与 $(\mathcal{L}_\rho, \prec, \hat{}\wp_\rho)$ $\wp$同构的序。

此外，若 L 是 γ 上述分解的一个区间，且 L属于类型 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 或 ∞_0，则 L 是稠密序，并且对每个 $\varepsilon \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$，颜色为 ε 的轨道在 L中稠密。

证明。在证明中，我们使用命题表述之前给出的记号（例如，n 和 $\mathcal{K}_\rho^{rch}$）。令 $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}_\rho$ 为所有满足以下条件的 $\alpha \in \mathcal{C}_\rho$的集合

- 对应于典范 χ 着色序的 $(\mathcal{O}_\alpha, \prec_\alpha, \wp_\alpha)$ 的一个分解，定义了与 $(\mathcal{L}_\rho, \prec, \hat{}\wp_\rho)$ $\wp$ 同构的序；

- 如果 L 是前一项分解的一个区间，且 L 属于类型 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 或 ∞_0，那么 L 是稠密序，并且对于每个 $\varepsilon \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$，颜色为 ε 的轨道在 L 中稠密。

为了证明该命题，我们只需证明子集 $\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{C}_\rho$ 中是余瘦的。要证明后者，只需注意，对于任意有限的 $A \subseteq \mathbb{Q}$，以下集合（记作 $\mathcal{D}_A$）在 $\mathcal{C}_\rho$ 中是稠密开集。

令 $\mathcal{D}_A$ 由所有满足以下条件的 $\alpha \in \mathcal{C}_\rho$ 组成：存在有限的 $A' \subset \mathbb{Q}$ 和 $p' \in \mathcal{P}_\rho$，使得 $A \subset A'$、$p' = \alpha \restriction A'$，并且

- 将每个 $a' \in A'$ 映射为包含 a' 的部分 p'-轨道的颜色后，$\wp_{p'}$-着色序 A' 就成为 $\mathcal{K}_\rho^{rch}$ 的一个元素。
- 每当来自 A 的元素 $a_1 < a_2$ 属于 A' 中一个由 $\wp_{p'}$-颜色 ε_1 和 ε_2 的配对组成、大小至少为 n^n 的序列（分别属于一个至少包含 n^n 个颜色为 0 的元素的序列）时，在 a_1 和 a_2 之间就存在一个来自 A' 的 $\wp_{p'}$-颜色 ε_1 和 ε_2 的配对（分别存在 c 个颜色为 0 的元素）。

容易看出，$\mathcal{D}_A$ 是开集。为了证明 $\mathcal{D}_A$ 在 $\mathcal{C}_\rho$ 中稠密，注意到任意 $h \in \mathcal{P}_\rho$ 都嵌入到 ρ的某个共轭中。特别地，若有满足$A \subseteq$Dom(h)的 h，我们就能找到合适的 A'，使得 h 延拓为 $\rho' \restriction A'$，其中ρ' 是 ρ的一个共轭。另一方面，重复定理 3.1 最后一部分的论证，容易看出，若有定义 $\mathcal{D}_A$ 第二种情形中的 $a_1 < a_2$，则 a_1 和 a_2 的 ρ'-轨道必属于$(\mathcal{O}_{\rho'}, \prec_{\rho'})$的某个典范分解中的一个 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$型（分别为 ∞_0型）区间。因此，ρ' 可以替换为另一个共轭（若有必要），使得 a_1 和 a_2 的轨道之间出现新的轨道。

■

现在我们给出定理 3.1 的一个版本，适用于其中含有泛型 ρ 的 $\mathcal{C}_\rho$。

命题 3.3 设 $\rho \in$ Aut($\mathbb{Q}, <$) 且 ρ 在 $\mathcal{C}_\rho$ 中是泛型。那么对于任意 $\alpha \in$ Aut($\mathbb{Q}$, $<$)，有 $\alpha \in \mathcal{C}_\rho$ 当且仅当存在一个从 $(\mathcal{O}_\alpha, \prec_\alpha, \wp_\alpha)$ 到 $(\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho, \wp_\rho)$ 的 $\wp$-同态。

证明。充分性由定理 3.1 得出。事实上，该定理的条件 2 可由命题表述中所述的 $\wp$-同态的存在性推出。

为证明必要性，取 $\alpha \in \mathcal{C}_\rho$，并将 $\mathcal{O}_\alpha$ 表示为一个递增的可数有限集族 $\mathcal{O}_n \subseteq \mathcal{O}_\alpha$, $n \in \omega$ 的并，使得 $\hat{}\mathcal{O}_\alpha = \bigcup\{\mathcal{O}_n \mid n \in \omega\}$。如果 $\mathcal{O}_\alpha$ 是有限的，那么我们考虑由 $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_\alpha$ 组成的族。

假设 $(\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho, \wp_\rho)$ 的类型为 $\infty_{+,-,0}$。那么 ρ 是 Aut($\mathbb{Q}, <$) 的一个泛型自同构，即 $(\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho)$ 是一个稠密序，使得对于每个

奇偶性为 ε 的轨道在其中稠密，见 [11]。在这种情况下，简单的归纳论证给出一族 $\wp$- 同态 $\phi_i : \mathcal{O}_i \to \mathcal{O}_\rho$, $i \in \omega$，其中每个 ϕ_{i+1} 都扩张了 ϕ_i。于是 $\bigcup \phi_i$ 得证。

考虑 $(\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho, \wp_\rho)$ 不属于类型 $\infty_{=,-,0}$ 的情形。根据定理 3.1，存在一个 χ-同态

$$\hat{\psi} : (\mathcal{L}_\alpha, \prec, \hat{\wp}_\alpha) \to (\mathcal{L}_\rho, \prec, \hat{\wp}_\rho).$$

$\hat{}$ 为了定义一个 $\wp$-同态 $\phi_{i+1} : \mathcal{O}_{i+1} \to \mathcal{O}_\rho$，对于每个 $L \in \mathcal{L}_\alpha\hat{}$，我们来定义 ϕ_{i+1} 在 $L \cap \mathcal{O}_{i+1}$上的取值。假设 ϕ_i 已经定义。

如果 L 属于类型 $\{+\}$，$\{-\}$ 或 $\{0\}$，我们将每个 ϕ_i 定义为把每个 $L \cap \hat{\mathcal{O}_i}$ 映射到 $\hat{\psi}(L)$ 中的同一个元素。

如果 L属于类型 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 或 ∞_0，那么步骤 $i+1$如下。令 $L \cap \hat{\mathcal{O}_{i+1}} = \{C_1, \ldots, C_k\}$，并令 $L \cap \hat{\mathcal{O}_i} = \{C_{i_1}, \ldots, C_{i_l}\}$。根据命题 3.2，对于任意 $s \leq l$，区间 $(\phi_i(C_{i_s}), \phi_i(C_{i_{s+1}}))$ 在 $\mathcal{O}_\rho$ 中也属于类型 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$（分别为 ∞_0）。因此，可以很容易地将 ϕ_i 扩张定义为区间 $(C_{i_s}, C_{i_{s+1}})$ 上的部分单射 $\hat{}$。用这种方法，我们在 $L \cap \mathcal{O}_{i+1}$上构造 ψ_{i+1}。现在取 $\bigcup \phi_i$ 作为所需的 $\wp$-同态 ϕ。

■

4 $\mathcal{P}_\rho$ 的 CAP

本节沿用第 3 节的记号。提醒读者，$\mathcal{P}$ 表示 $(\mathbb{Q}, <)$ 的所有有限部分同构组成的集合。当$\rho \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ 时，我们用 $\mathcal{C}_\rho$ 表示 $\rho^{\mathsf{Aut}(\mathbb{Q},<)}$ 的拓扑闭包，并且

$$\mathcal{P}_\rho = \{p \in \mathcal{P} : p \text{ extends to an automorphism from } \mathcal{C}_\rho\}.$$

本节的主要结果是第 4.3 节中的定理 4.5。该定理指出，子空间 $\mathcal{C}_\rho$ 有一个泛自同构。证明基于一些关于以下族的预备结果。令 $\mathcal{P}^+$ 为所有满足 $(\mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p))/\sim_p$ 由奇偶性为 $+$ 的带颜色轨道组成的 $p \in \mathcal{P}$ 的族。族 $\mathcal{P}^-$ 以类似方式定义。

4.1 $\mathcal{P}^+$ 的 CAP

设 $p \in \mathcal{P}$和 $a, a' \in \mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p)$。如果以下性质之一成立，我们就称 (a, a') 是 p 中的坏对（分别地，在 $\mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p)$ 中）：

- $a < a'$ 和 a, a' 表示带颜色的 p-轨道（它们可以重合），且它们以及其间所有带颜色的 p-轨道具有奇偶性 $+$，而值 $p(a)$ 和 $p^{-1}(a')$ 未定义；

- $a < a'$ 和 a, a' 表示带颜色的 p-轨道（它们可以重合），且它们以及其间所有带颜色的 p-轨道具有奇偶性 $-$，而值 $p(a')$ 和 $p^{-1}(a)$ 未定义。

令 $\mathcal{P}^+_{gd}$（分别地，$\mathcal{P}^-_{gd}$）为 $\mathcal{P}^+$（分别地，$\mathcal{P}^-$）的子集，其中包含所有具有单个带颜色的 p-轨道且不含坏对的 p。以下命题是本小节的主要结果。

命题 4.1 族 $\mathcal{P}^+_{gd}$（分别地，$\mathcal{P}^-_{gd}$）是 $\mathcal{P}^+$（分别地，$\mathcal{P}^-$）的共尾子族，并且具有 amalgamation 性质。

证明。我们只考虑 $\mathcal{P}^+$ 的情形。为证明其余终性，令 $p \in \mathcal{P}^+$，并将 $\mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p) = A_1 \dot\cup \ldots \dot\cup A_\ell$ 分解为带颜色的轨道（奇偶性为 $+$）。令 $a'_i = \min A_i$ 和 $a''_i = \max A_i$, $i \le \ell$。找出 $a_1, \ldots, a_\ell$，使得 $a''_i < a_i < a'_{i+1}$, $i < \ell$，并将 p 扩张为一个映射，使其将每个 a''_i 映到 a_i，并将每个 a_i 映到 a'_{i+1}, $i < \ell$。所得扩张属于 $\mathcal{P}^+$，且由单个轨道组成。因此，从现在起我们可以假设 p 由单个带颜色的轨道组成。

接下来只需消除坏对。假设 $a < a'$ 是一个坏对，并且 $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$ 是来自 $\mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p)$ 的一个序列，使得所有 $p^{-1}(c_i)$ 都属于 $\mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p)$，并且

$$p^{-1}(c_1) < a \le c_1\,,\ p^{-1}(c_2) \le c_1 < c_2\ \ldots\,,\ p^{-1}(c_k) \le c_{k-1} < c_k\,,\ c_{k-1} \le a' \le c_k.$$

由于 $p^{-1}(a')$ 未定义，因此 $a' \neq c_k$。选取一个由新元素组成的序列 $b_k < b_{k-1} < \ldots < b_1$，使得 p 可扩张为一个部分同构，并满足 $p(b_1) = a'$, $b_k < a$ 和 $b_i = p^{-1}(b_{i-1})$。这可以通过归纳法完成。例如，我们定义 b_1 为 $\mathbb{Q}$ 中的一个元素，使得对于任意 $c \in \mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p)$，只有在存在 $c' \in \mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p)$ 且满足 $c' \le c$ 和 $a' < p(c')$ 时，不等式 $b_1 < c$ 才成立。特别地，$b_1 < c_{k-1}$。在归纳的下一步中，所选的 b_1 将扮演 a' 的角色，依此类推。这样扩张 p 之后，坏对的数量便会减少。现在显然，p 可以扩张为 $(\mathbb{Q}, <)$ 的一个有限部分同构，且该同构属于 $\mathcal{P}^+_{gd}$。

让我们证明 $\mathcal{P}^+_{gd}$ 的 AP。我们将采用 [9] 中的一些方法，并用一个新技巧加以扩充。假设我们有真扩张 $p_0 \subset p_1$ 和 $p_0 \subset p_2$，其中 p_0、p_1、$p_2 \in \mathcal{P}^+_{gd}$。令 $A_i = \mathrm{Dom}(p_i) \cup \mathrm{Rng}(p_i)$, $i \le 2$。不妨假设 $A_0 = A_1 \cap A_2$。

我们先从最简单的情形开始：对于每个 $i \in \{1, 2\}$，A_i 中的每个部分 p_i-轨道都包含在 A_0 中，或者与 A_0 的交集为空。在这种情形下，$p_1 \cup p_2$ 是 $A_1 \cup A_2$ 上的部分同构。为了使它属于 $\mathcal{P}^+_{gd}$，我们采用上文用于余终性的过程。

考虑这种情况：A_0 中存在部分 p_0-轨道，它们可以适当地扩张为 A_1 中的 p_1-轨道（分别为 A_2中的 p_2-轨道）。根据 $|A_1 \setminus A_0| + |A_2 \setminus A_0|$使用归纳法。显然：

- 存在 $a \in A_0$，使得 $a(p_0)$ 未定义，但 $a(p_1)$ 或 $a(p_2)$ 之一有定义；或者

- 存在 $a \in A_0$，使得 $p_0^{-1}(a)$未定义，但 $p_1^{-1}(a)$或$p_2^{-1}(a)$之一有定义。

我们考虑第一种情况，第二种情况类似。于是，$p_1(a)$和$p_2(a)$都不属于 A_0，否则它们会与 a 在 A_0中构成坏对。

假设 $p_1(a)$和 $p_2(a)$都有定义，且 $p_1(a) \leq p_2(a)$（$p_1(a) \geq p_2(a)$的情形是对称的）。那么，对于任意满足 $c_1, c_2 \in A_0$的区间（c_1, c_2），

$$c_1 \leq p_1(a) \leq c_2 \Leftrightarrow c_1 \leq p_2(a) \leq c_2.$$

事实上，例如，若 $p_1(a) \leq c_2 < p_2(a)$，则存在 $c' \in A_0$，使得$p(c') = c_2$（在 A_0中，$a < c_2$ 这一对不是坏对）。由于 $p_1(a) \leq c_2$，我们有 $a \leq c'$，并且 $p_2(a) \leq p_2(c') = c_2$，矛盾。

现在我们按如下方式进行一些部分 amalgamation。令 p_0' 为通过赋值 $a \to p_1(a)$ 对 p_0 作出的扩张。注意，p_0' 没有坏对。令 p_2' 由 p_2 得到：将其（图中的）对 $a \to p_2(a)$ 替换为 $a \to p_1(a)$；若 $p_2(a)$ 被 p_2 映到某个 $d \in A_2$，则将 $p_2(a) \to d$ 替换为 $p_1(a) \to d$。这样做时，我们也应类似地修正 A_2 中与 $(a, p_2(a))$ 相交的其他 p_2-轨道：当 $c \in (a, p_2(a)) \cap A_2$ 表示这样的轨道时，我们只需在该轨道中将它替换为某个 $c' \in (a, p_1(a))$。因此，p_2' 在 p_0 上与 p_2 同构。若 $A_i' = \mathrm{Dom}(p_i') \cup \mathrm{Rng}(p_i')$，$i \in \{0, 2\}$，那么

$$|A_1 \setminus A_0'| + |A_2' \setminus A_0'| < |A_1 \setminus A_0| + |A_2 \setminus A_0|,$$

也就是说，我们已经朝着完全 amalgamation 迈出了一步。

当 $p_1(a)$ 有定义而 $p_2(a)$ 无定义时，可以归约到前一种情形。令 $q \in \mathbb{Q} \setminus A_2$ 选为（对于 z 的）一个实现，使其满足

$$\forall x \in A_2 (x < a \leq p_2(x) \to p_2(x) < z)$$

它小于来自 A_2 的该公式的所有实现。我们通过赋值 $a \to q$ 扩展 p_2。显然，所得的 p_2' 不含坏对，因此可以应用前一种情形的论证。

■

根据定理 3.1，对于任意仅有正轨道的 ρ，类 $\mathcal{C}_\rho$ 由所有也仅有正轨道的自同构 α 组成。我们将其称为 $\mathcal{C}^+$。根据命题 4.1（上文）和 [4] 的定理 1.2，这个类有一个泛型自同构。有趣的是，在共轭意义下，它就是标准平移：$st(x) = x + 1$。事实上，如果 $\gamma \in \mathcal{C}^+$ 且至少有两个轨道，那么取它们的两个代表元，例如 a_1 和 a_2。容易证明，$\mathcal{C}^+$ 中满足 a_1 和 a_2 属于同一轨道的所有自同构构成 $\mathcal{C}^+$ 中的一个稠密开集。因此，γ 不可能是 $\mathcal{C}^+$ 中的泛型自同构。

4.2 粘合轨道

令 $\mathcal{P}_{gd}$ 为所有满足以下性质的部分同构 $p \in \mathcal{P}$ 的集合:

- 不存在颜色为 p 的（Dom(p) ∪ Rng(p)）/ $\sim_p$奇偶性的坏对;
- 若颜色为 p 的轨道 O 和 O' 在（Dom(p) ∪Rng(p)）/ $\sim_p$ 的自然序中相邻，且其奇偶性为 $\pm$，则它们的奇偶性不同。

我们将 $\mathcal{P}_{gd}$ 的成员称为良好同构。

注4.2 假设 $p \in \mathcal{P}_{gd}$ 且 $A =$ Dom(p) ∪Rng(p)。那么，从 $(A/\sim_p, \prec_p, \wp_p)$ 到任意 $\wp$- 着色线性序的任何 $\wp$- 同态都是单射。事实上，根据定义 2.6，若 ϕ 是这样的同态，且 $\phi(Q) = \phi(Q')$，那么 Q 和 Q' 的奇偶性相同，且不等于 0。这些轨道应由一个颜色不同的轨道隔开，但这是不可能的。

引理 4.3 族 $\mathcal{P}_{gd}$ 在 $\mathcal{P}$ 中共尾。此外，假设 $\gamma \in$Aut($\mathbb{Q}, <$)。那么族 $\mathcal{P}_{gd} \cap \mathcal{P}_\gamma$ 在 $\mathcal{P}_\gamma$ 中共尾。

我们将通过以下过程推导出这个引理。

粘合轨道:

设 $p \in \mathcal{P}$。考虑 (Dom(p) ∪Rng(p))/ $\sim_p$，将其视为由 $(\mathbb{Q}, <)$ 诱导的线性序集。假设 $O_i, O_{i+1}, \ldots, O_j$ 是颜色相同（$+$ 或 $-$）的极大区间。它们的元素属于由 O_{i-1} 的最后一个元素和 O_{j+1} 的第一个元素确定的 $\mathbb{Q}$ 的开区间。在此区间内应用命题 4.1，我们得到 p 的一个扩张，其中 $O_i, O_{i+1}, \ldots, O_j$ 成为同一个没有坏对的轨道的子集。对每个奇偶性相同的极大区间重复这一过程，最终我们得到 $\mathcal{P}_{gd}$ 的一个元素。

引理 4.3 的证明。引理的第一句话直接由粘合轨道推出。若 $p \in \mathcal{P}_\gamma$，则应用此过程，我们得到 $p_1 \in \mathcal{P}_{gd}$，它扩展了 p。注意，有序集 ((Dom(p_1) ∪ Rng(p_1))/ $\sim_{p_1}, \prec_{p_1}, \wp_{p_1}$) 可通过一个 $\wp$-同态嵌入到 ((Dom(p) ∪ Rng(p))/ $\sim_p, \prec_p, \wp_p$) 中。若 γ' 是 γ 的一个共轭，并且扩展了 p，那么 γ' 存在一个与 p_1同类型的有限限制。由 $(\mathbb{Q}, <)$ 的超齐性，部分同构p_1 可以扩展为 γ的一个共轭。 □

4.3 $\mathcal{P}_\rho$ 的 CAP

令 $\rho \in$Aut($\mathbb{Q}, <$)。考虑 $(\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho, \wp_\rho)$，其中 $\wp_\rho$是相应的奇偶函数。分两种情况。若 $(\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho, \wp_\rho)$ 属于类型 $\infty_{+,\ -,\ 0}$，则

根据定理 3.1， $\mathcal{C}_\rho = \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$。特别地，我们有 $\mathcal{P}_\rho = \mathcal{P}$。众所周知，$\mathcal{P}$ 满足 CAP（见 [9]中的定理 1.1），也就是说， $\mathcal{C}_\rho$ 有一个泛自同构（其描述也是众所周知的， [11]）。注意，根据引理 4.3，族 $\mathcal{P}_{gd}$ 在 $\mathcal{P}$中是共尾的。根据 [9] $\mathcal{P}_{gd}$ 中定理 1.1 的证明， $\mathcal{P}$ 的一个子族包含了 [9] $\mathcal{P}_{gd}$。因此， $\mathcal{P}_{gd}$ 也具有 AP。

现在假设 $\mathcal{O}_\rho$ 不是类型为 $\infty_{+,\ -,\ 0}$。应用定理 2.5，我们得到一个 χ-着色序 $(\mathcal{L}_\rho \prec_\rho, \hat{}\wp_\rho)$，它对应于将 $(\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho, \wp_\rho)$ 分解为有限多个区间的典范分解:

$$\mathcal{L}_\rho = (L_1 \ < \ L_2 \ < \ldots < \ L_n) \ \text{ where } \ \mathcal{O}_\rho = L_1 \dot\cup L_2 \dot\cup \ldots \dot\cup L_n.$$

令 $\mathcal{K}_\rho$ 为 $(\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho, \wp_\rho)$ 的年龄。与上文一样，我们考虑 $\mathcal{K}_\rho$ 以及所有 $\wp$-同态构成的族。注意，当 p 是来自 $\mathcal{P}_\rho$ 的部分自同态，且$\sim_p$ 是相应的部分轨道等价关系时，有限结构 $(\mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p))/\sim_p, \prec_p, \wp_p)$ 属于$\mathcal{K}_\rho$，即它可通过一个 $\wp$-同态映射到 $(\mathcal{O}_\rho, \prec_\rho, \wp_\rho)$。有了这样的同态，我们便得到一个由 $\mathcal{L}_\rho$的典范分解所诱导的 $(\mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p))/\sim_p$ 的分解。

令 $\mathcal{K}_\rho^{rch}$为按照定义 2.9 并相对于上述分解所定义的 $\mathcal{K}_\rho$ 的子族。

定义 4.4 设 p 为从 $\mathcal{P}_\rho$ 到$\sim_p$ 的部分自同构，且 $\sim_p$ 为相应的部分轨道等价关系。若有限结构 $(\mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p))/\sim_p, \prec_p, \wp_p)$ 属于 $\mathcal{K}_\rho^{rch}$，则称 p 是丰富的。

令 $\mathcal{P}_\rho^{rch}$为从 $\mathcal{P}_\rho$出发的所有丰富同构组成的族。

下述定理表明，所有既良好又丰富的部分同构所构成的族见证了 CAP。

定理 4.5 设 $\rho \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$。则子空间 $\mathcal{C}_\rho$ 具有一个泛型自同构。此外，如果 $\mathcal{O}_\rho$ 不是 $\infty_{+\text{类型},\ -0}$，那么族 $\mathcal{P}_\rho^{rch} \cap \mathcal{P}_{gd}$是 $\mathcal{P}_\rho$ 的一个共尾子族；而且，它具有 amalgamation 性质。

证明。正如上文已经指出的，只需考虑 $\mathcal{O}_\rho$ 不是 ∞_+、$_-$、0 类型的情形。为了证明 $\mathcal{P}_\rho^{rch} \cap \mathcal{P}_{gd}$ 共尾，任取 $p \in \mathcal{P}_\rho$。令 A 为 $\mathbb{Q}$ 的一个有限子集，使得 $(A/\sim_{p_1}, \prec_{p_1}, \wp_\rho \restriction A)$ 属于 $\mathcal{K}_\rho^{rch}$，其中 $p_1 = \rho \restriction A$。利用 $\mathcal{P}_\rho$ 的联合嵌入性质，我们可以假设，对于某个 A， p 扩张了 p_1。这诱导出一个 $\wp$-同态，记作 ϕ_1，从 $(A/\sim_{p_1}, \prec_{p_1}, \wp_\rho \restriction A)$ 到 $(\mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p))/\sim_p, \prec_p, \wp_p)$。我们对 p 应用轨道粘合过程。若 p_2 是该过程的结果，则存在一个显然的 $\wp$-同态，记作 ϕ_2，从 $(\mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p))/\sim_p, \prec_p, \wp_p)$ 到 $(\mathrm{Dom}(p_2) \cup \mathrm{Rng}(p_2))/\sim_{p_2}, \prec_{p_2}, \wp_{p_2})$ 的满射。正如引理 4.3 的证明中那样，我们有 $p_2 \in \mathcal{P}_\rho$。因此， $\phi_2 \circ \phi_1$ 是一个 $\wp$-同态，从 $(A/\sim_{p_1}, \prec_{p_1} \wp_\rho \restriction A)$ 到 $(\mathrm{Dom}(p_2) \cup \mathrm{Rng}(p_2))/\sim_{p_2}, \prec_{p_2}, \wp_{p_2})$。现在验证定义

2.9 对后一个序进行验证，可以看出，唯一可能不满足的条件是最后一个条件，且仅当 L_i 属于 $\infty_{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ 类型时才会如此。$((\mathrm{Dom}(p_2) \cup \mathrm{Rng}(p_2)) / \sim_{p_2}) \cap L_i$ 可能以 ε_2 开头，或以 ε_1 结尾。我们可以在对 p 和 p_1 应用联合嵌入性质时解决这一情况。在此阶段，我们可以通过加入新的部分轨道，稍微扩张该 amalgamation 的结果。

我们来证明 $\mathcal{P}_\rho^{rch} \cap \mathcal{P}_{gd}$ 的 amalgamation 性质。取 $\mathcal{P}_\rho^{rch} \cap \mathcal{P}_{gd}$ 中元素的一对扩张 $p_0 \subseteq p_1$ 和 $p_0 \subseteq p_2$。它们在 $((\mathrm{Dom}(p_i) \cup \mathrm{Rng}(p_i))/ \sim_{p_i} \prec_{p_i}, \wp_{p_i})$、$i \leq 2$ 之间诱导出自然的 $\wp$-同态，记作 ϕ_1 和 ϕ_2。根据注4.2，它们是单射；根据定理 2.10 的证明中的论断，它们保持典范分解 $(\mathcal{L}_\rho, \preceq, \hat{} \wp_\rho)$ 的区间L_i。应用定理 2.10，我们得到一个 $\{+, -, 0\}$-着色线性序 $(L, <, \kappa) \in \mathcal{K}_\rho^{rch}$，以及将 $((\mathrm{Dom}(p_i) \cup \mathrm{Rng}(p_i))/ \sim_{p_i}, \prec_{p_i}, \wp_{p_i})$ 嵌入其中的嵌入 ψ_i ($1 \leq i \leq 2$)，从而给出相应的 amalgamation。注意，这个 amalgamation 是不交的：定理 2.10 的证明中明确指出了这一点。此外，我们可以假设

$$L = \psi_1((\mathrm{Dom}(p_1) \cup \mathrm{Rng}(p_1))/ \sim_{p_1}) \cup \psi_2((\mathrm{Dom}(p_2) \cup \mathrm{Rng}(p_2))/ \sim_{p_2}).$$

让我们构造一个部分同构 $p_3 \in \mathcal{P}_\rho^{rch} \cap \mathcal{P}_{gd}$，使得 p_3 是 p_1 和 p_2 在 p_0 上的一个 amalgamation，并且 $((\mathrm{Dom}(p_3) \cup \mathrm{Rng}(p_3))/ \sim_{p_3}, \prec_{p_3}, \wp_{p_3}) = (L, <, \kappa)$。

令 $L_i \in \mathcal{L}_\rho$。定义 $A_i = \bigcup((\mathrm{Dom}(p_0) \cup \mathrm{Rng}(p_0))/ \sim_{p_0}) \cap L_i)$，即相应部分轨道的并集。我们固定有理数 q_i，使得

$$A_1 < q_1 < A_2 < q_2 < A_3 < \ldots < q_{n-1} < A_n.$$

利用 $(\mathbb{Q}, <)$ 的超齐性，我们可以将集合

$$\bigcup((\mathrm{Dom}(p_1) \cup \mathrm{Rng}(p_1))/ \sim_{p_1}) \cap L_i) \cup ((\mathrm{Dom}(p_2) \cup \mathrm{Rng}(p_2))/ \sim_{p_2}) \cap L_i)$$

压入 (q_{i-1}, q_i)（分别为 $(-\infty, q_1)$ 或 (q_{n-1}, ∞)）中，并以 A_i 为基准。若 $|\mathcal{L}_\rho| = 1$，则无需这样做。

设 $\iota \in L \cap L_i$。我们先讨论 ι 同时由 ψ_1 和 ψ_2 表示的情形。于是存在 $O \in (\mathrm{Dom}(p_0) \cup \mathrm{Rng}(p_0))/ \sim_{p_0}$，使得$\psi_1 \circ \phi_1(O) = \iota = \psi_2 \circ \phi_2(O)$。当 O 的奇偶性为 0 时，情形显然：令 p_3 固定 O 的元素。当 O 的奇偶性为 $+$ 或 $-$ 时，我们如下应用命题 4.1。设 O_1 和 O_2 是 O 的扩张，它们分别是 p_1 和 p_2 的带颜色的轨道。根据命题 4.1 $p_1 \restriction O_1$ 和 $p_2 \restriction O_2$ 可以在 $p_0 \restriction O$ 上 amalgamation 成某个部分同构，记作 p'；它定义在单个轨道 O_3 上。这个 p' 将是 p_3 在与 ι 对应的带颜色轨道上的限制。我们还可以将 O_3 挤入任意包含 O 的开区间。因此，对于所有同时由 ψ_1 和 ψ_2 表示的 $\iota \in L$，我们可以用类似的方式安排 amalgamation。

请注意，对于所有为单个元素的 L_i （即具有 χ-颜色 $\{+\}$、$\{-\}$、$\{0\}$ 的情形），这个过程会在 p_0 上 amalgamation p_1 和 p_2 的 L_i-部分。谨此提醒读者，这些部分非空。

假设 ι由 ψ_1 表示，但不由 ψ_2表示。那么， p_3 在轨道 $\psi_1^{-1}(\iota)$ 上的作用定义为 p_1 在该集合上的作用。反之，我们以类似方式定义 p_3 在 $\psi_2^{-1}(\iota)$ 上的作用。我们将这些轨道置于 $(\mathbb{Q}, <)$ 的区间中；这些区间是在上一段所述的 amalgama- tion 之后自然产生的，也就是说，位于分别对应于同时由 ψ_1 和 ψ_2表示的元素 $\iota \in L$ 的轨道之间。这样，我们便按照 $(L, <)$ 的序，将此时定义的 p_3 的新轨道置入其中。由于 $(L, < \kappa) \in \mathcal{K}_\rho^{rch}$，我们很容易看出 $p_3 \in \mathcal{P}_\rho^{rch} \cap \mathcal{P}_{gd}$。

现在，我们的定理的主要结论由 $[4]$ 的定理 1.2（见上文第 1.1 节）推出。

■

5 偏序 B_n 与介于关系

本节将展示如何把定理 4.5 应用于其他高度齐次结构以及第 1.3 节讨论的超齐性序。在第 5.1 节中，我们考虑有限 n 的 B_n 情形，并在定理 5.2 中总结这一结果。在第 5.2 节中，我们将这一分析应用于高度齐次结构 $(\mathbb{Q}, B)$。在第 5.3 节中，我们讨论其余情形。

5.1 B_n 的序

令 $n \in \omega$。考虑 $B_n = [n] \times \mathbb{Q}$，它是关于该序的超齐性偏序集

$$(a, q) < (b, q') \Leftrightarrow a = b \wedge q < q'.$$

任意 $\rho \in$Aut(B_n) 都会在 S_n 上诱导一个置换。这是 ρ 在 $[n]$ 上的投影。我们用 σ_ρ 表示它。令 ι_ρ 为 σ_ρ 的序。

令 $\bar{a}$ 为 σ_ρ 在 $[n]$ 上的一个轨道（其元素为 a_i），并令 $|\bar{a}|$ 为其大小。假设 σ_ρ 将 a_i 映到 a_{i+1} （并将 $a_{|\bar{a}|}$ 映到 a_1）。那么 $\rho^{|\bar{a}|}$ 是每个副本 $(a_i, \mathbb{Q})$ 的自同构。此外， ρ 是从 $((a_i, \mathbb{Q}), <)$ 到 $((a_{i+1}, \mathbb{Q}), <)$ 的同构，并保持 $\rho^{|\bar{a}|}$ 的图。令 $(\mathcal{O}_{\rho^{|\bar{a}|}}, \prec_{\rho^{|\bar{a}|}})$ 为 $\rho^{|\bar{a}|}$ 在 $((a_1, \mathbb{Q}), <)$ 上的轨道序。于是， ρ^i 定义了从 $(\mathcal{O}_{\rho^{|\bar{a}|}}, \prec_{\rho^{|\bar{a}|}}, \wp_{\rho^{|\bar{a}|}})$ 到 $((a_i, \mathbb{Q}), <)$ 对应轨道序的同构。

为了分析 $\mathcal{P}_\rho$，我们从结构 （$(a_1, \mathbb{Q}), <$）入手，考察$\mathcal{P}_{\rho^{|\bar{a}|}}$。第3节和第4节的方法在此情形下同样适用。具体而言

可以考虑$\mathcal{P}_{gd} \cap \mathcal{P}_{\rho^{|\bar{a}|}}$；当 $\rho^{|\bar{a}|}$ 不属于类型$\infty_+, -, 0$时，可以在（a_1, $\mathbb{Q}$）上对（$\mathcal{O}_{\rho^{|\bar{a}|}}$, $\prec_{\rho^{|\bar{a}|}}$, $\wp_{\rho^{|\bar{a}|}}$）作典范分解，并定义族 $\mathcal{P}^{rch}_{\rho^{|\bar{a}|}}$。现在我们来说明如何在 $\mathcal{P}_\rho$中考虑这些族。

我们称 $p \in \mathcal{P}_\rho$ 是对称的，如果对于 σ_ρ 的每个轨道 $\bar{a}$，映射 p^i,$i \leq |\bar{a}|$ 定义了一个从 ((Dom(p) $\cup$ Rng(p)) $\cap$ (a_1, $\mathbb{Q}$) $<$) 到 ((Dom(p) $\cup$ Rng(p)) $\cap$ (a_i, $\mathbb{Q}$) $<$) 的同构，并且保持这些有序集上的 $p^{|\bar{a}|}$ 部分作用。注意，这个条件意味着

Rng(p)$\cap$(a_1, $\mathbb{Q}$) $\subseteq$ Dom(p)$\cap$(a_1, $\mathbb{Q}$) 和 Dom(p)$\cap$($a_{|\bar{a}|}$, $\mathbb{Q}$) $\subseteq$ Rng(p)$\cap$($a_{|\bar{a}|}$, $\mathbb{Q}$)。

此外，

$$\mathsf{Dom}(p) \cap (a_i, \mathbb{Q}) = \mathsf{Rng}(p) \cap (a_i, \mathbb{Q}) \text{ , for } 1 < i < |\bar{a}|.$$

当 σ_ρ 是平凡的时，任意 $p \in \mathcal{P}_\rho$ 都是对称的。我们用 $\mathcal{P}^{sym}_\rho$ 表示 $\mathcal{P}_\rho$ 中所有对称部分同构构成的子族。

引理 5.1 设 $\rho \in$Aut(B_n)，且 σ_ρ非平凡。那么，族 $\mathcal{P}^{sym}_\rho$在 $\mathcal{P}_\rho$中共尾。

证明。设 $p \in \mathcal{P}_\rho$。为简单起见，我们考虑整个 $[n]$是 σ_ρ 在 $\sigma_\rho(i) = i+1$下的轨道的情形。因此，我们将 p 视为部分同构的集合：

$$((\mathsf{Dom}(p) \cup \mathsf{Rng}(p)) \cap (a_i, \mathbb{Q}) \to ((\mathsf{Dom}(p) \cup \mathsf{Rng}(p)) \cap (a_{i+1}, \mathbb{Q}) \text{ , } i < \iota_\rho,$$

并将每个 ((Dom(p) $\cup$ Rng(p)) $\cap$ (a_i, $\mathbb{Q}$) 视为由 p^{ι_ρ} 定义的部分同构的支集。

Dom(p) $\cap$ (a_1, $\mathbb{Q}$) 和 Rng(p) $\cap$ (a_2, $\mathbb{Q}$) 中的元素给出了 (a_1, $\mathbb{Q}$) 和 (a_2, $\mathbb{Q}$) 的两种分解，分别记作 $q_1 < q_2 < \ldots < q_s$ 和 $p(q_1) < p(q_2) < .. < p(q_s)$。如果存在 $q \in$ Rng(p) $\cap$ (a_1, $\mathbb{Q}$)，使得 undefined$p(q)$，则找出包含该 q 的 (q_i, q_{i+1})（或 q_1 或 q_s 的半直线）。然后选取某个 $q' \in$ ($p(q_i)$ $p(q_{i+1})$)，通过定义 $p(q) = q'$ 来扩张 p。如果 q是某个 q_j 的 p^{ι_ρ}-像，那么根据此定义， $p(q)$ 就成为 $p(q_j)$ 的 p^{ι_ρ}-像；也就是说，此扩张保持 p^{ι_ρ}。这样便减少了 (a_1, $\mathbb{Q}$) 中 p 未定义的点数。如果存在没有 p-原像的 Dom(p) $\cap$(a_2, $\mathbb{Q}$)，则用同样的方法找出一个原像。

在过程的第二阶段，我们对 Dom(p) $\cap$ (a_2, $\mathbb{Q}$) 的新版本以及 Rng(p) $\cap$ (a_3, $\mathbb{Q}$) 重复这一构造（并对 Rng(p) $\cap$ (a_1, $\mathbb{Q}$) 作适当修正），依此类推，直到 $i = \iota_\rho - 1$。最后一个阶段结束后，我们得到 p 的一个扩张，它是一个对称部分同构。

当 $[n]$ 由多个轨道组成时，我们应将上述构造应用于 $[n]$ 的每个轨道

■

给定 $p \in \mathcal{P}_\rho^{sym}$，我们为每个 σ_ρ-轨道 $\bar{a}$ 关联上 $p^{|\bar{a}|}$ 在 $(\mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p)) \cap (a_1, \mathbb{Q})$ 上的作用。这些数据连同定义中的同构 p^i，决定了 p。值得注意的是，

$$\mathrm{Rng}(p) \cap (a_1, \mathbb{Q}) = \mathrm{Rng}(p^{|\bar{a}|}) \cap (a_1, \mathbb{Q}).$$

如果对每个 σ_ρ-轨道 $\bar{a}$，我们还要求在 $(a_1, \mathbb{Q})$ 中考虑的 $p^{|\bar{a}|}$ 属于 $\mathcal{P}_{gd}$（分别属于 $\mathcal{P}^{rch}_{\rho^{|\bar{a}|}}$），那么说这样的 p 属于 $\mathcal{P}_{gd} \cap \mathcal{P}_\rho$（或属于 $\mathcal{P}^{rch}_\rho$）是合理的。

定理 5.2 设 $\rho \in \mathrm{Aut}(B_n)$。那么 $\mathcal{C}_\rho$ 含有一个泛自同构。此外，族 $\mathcal{P}_\rho^{sym}$ 含有一个具有 amalgamation 性质的 $\mathcal{P}_\rho$ 的共尾子族。

证明。对于 σ_ρ 的每个轨道 $\bar{a}$，考虑相对于 $(a_1, \mathbb{Q})$ 上作用的 $\mathcal{P}_{\rho^{|\bar{a}|}}$。根据定理 4.5，这个族有一个具有 amalgamation 性质的共尾子族。记作 $\mathcal{P}^{cap}_{\rho^{|\bar{a}|}}$。用 $\mathcal{P}^{cap}_\rho$ 表示所有这样的 $p \in \mathcal{P}^{sym}_\rho$ 组成的族：对于每个 σ_ρ-轨道 $\bar{a}$，$p^{|\bar{a}|}$ 在 $(\mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p)) \cap (a_1, \mathbb{Q})$ 上的作用属于 $\mathcal{P}^{cap}_{\rho^{|\bar{a}|}}$。

断言 1。族 $\mathcal{P}^{cap}_\rho$ 在 $\mathcal{P}^{sym}_\rho$ 中共尾。
任取 $p \in \mathcal{P}^{sym}_\rho$ 和任意一个 σ_ρ-轨道 $\bar{a}$。将 $p^{|\bar{a}|}$ 在 $(\mathrm{Dom}(p) \cup \mathrm{Rng}(p)) \cap (a_1, \mathbb{Q})$ 上的作用扩张为某个定义在 $(a_1, \mathbb{Q})$ 上的 $\mathfrak{p}_{\bar{a}} \in \mathcal{P}^{cap}_{\rho^{|\bar{a}|}}$。因此，接着将每个 $p^i, 0 < i < |\bar{a}|$ 扩张为同构，例如记作 $\hat{}p^i$，从 $\mathrm{Dom}(\mathfrak{p}_{\bar{a}}) \cup \mathrm{Rng}(\mathfrak{p}_{\bar{a}})$ 映入 $(a_i, \mathbb{Q})$。最后，将由 p 定义的映射扩张

$$p^{|\bar{a}|-1}(\mathrm{Dom}(p) \cap (a_1, \mathbb{Q})) \to \mathrm{Rng}(p) \cap (a_1, \mathbb{Q})$$

为映射

$$\hat{p}^{|\bar{a}|-1}(\mathrm{Dom}(\mathfrak{p}_{\bar{a}})) \cap (a_{|\bar{a}|}, \mathbb{Q}) \to \mathrm{Rng}(\mathfrak{p}_{\bar{a}})$$

该映射将每个满足 $v \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{p}_{\bar{a}})$ 的 $\hat{}p^{|\bar{a}|-1}(v)$ 映到 $\mathfrak{p}_{\bar{a}}(v)$。容易看出，$\hat{}p$ 是某个 $\mathcal{P}^{cap}_\rho$ 中元素的 $\bar{a}$-限制。对 σ_ρ 的每个轨道应用这一构造，即可得到实现该断言所述结论的扩张。

断言 2. 族 $\mathcal{P}^{cap}_\rho$ 具有 amalgamation 性质。

在证明此断言之前，我们先考虑如下情形：p_0、$p_1 \in \mathcal{P}^{cap}_\rho$ 和 $p_0 \subseteq p_1$。那么显然，对于如上所述的 $\bar{a}$

$$(\mathrm{Dom}(p_0) \cup \mathrm{Rng}(p_0)) \cap (a_1, \mathbb{Q}) \subseteq (\mathrm{Dom}(p_1) \cup \mathrm{Rng}(p_1)) \cap (a_1, \mathbb{Q}).$$

此外，由于 p_0^i 和 p_1^i、$0 < i < |\bar{a}|$ 诱导出一一映射，它们在 $(\mathrm{Dom}(p_0) \cup \mathrm{Rng}(p_0)) \cap (a_1, \mathbb{Q})$ 上相同，特别是，

$$p_1^i((\mathrm{Dom}(p_0) \cup \mathrm{Rng}(p_0)) \cap (a_1, \mathbb{Q})) = (\mathrm{Dom}(p_0) \cup \mathrm{Rng}(p_0)) \cap (a_i, \mathbb{Q}).$$

为了证明断言 2，我们考虑一个三元组 $p_1 \supseteq p_0 \subseteq p_2$。那么，对于上述的 $\bar{a}$，我们有一个定义在 $(\mathrm{Dom}(p_i) \cup \mathrm{Rng}(p_i))$ 上的 $p_i^{|\bar{a}|} \in \mathcal{P}^{cap}_{\rho^{|\bar{a}|}}$ 三元组 $\cap$

$(a_1, \mathbb{Q})$，$i < 3$。根据 $\mathcal{P}^{cap}_{\rho|\bar{a}|}$ 的 amalgamation 性质，我们有某个 $\mathfrak{p}_{\bar{a}}$将这些映射 amalgamating。应用断言 1 的构造，我们得到一个部分同构 $\hat{} p \in \mathcal{P}^{cap}_{\rho}$，其中 $\mathfrak{p}_{\bar{a}}$ 是 $\hat{} p^{|\bar{a}|}$ 的 $(a_1, \mathbb{Q})$-部分。

■

5.2 介于关系

设 ρ 是介于关系 $(\mathbb{Q}, B)$ 的一个自同构。若我们将 $\mathbb{Q}$ 与 $\pm\infty$ 一起考虑，则有两种情况： $\rho(+\infty) = +\infty$ 或 $\rho(+\infty) = -\infty$。在第一种情况下，ρ 仅属于 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$，且 $\mathcal{C}_\rho \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$。第二种情况是新的。为了证明此情况下 $\mathcal{P}_\rho$ 满足 CAP，我们需要进行一些额外分析。

从现在起，每个自同构 $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ 也被视为 $\mathbb{Q}$ 的反向序的自同构。我们将其记为 $\leq^r$。这样，γ 的每个部分轨道都可以视为 $\leq^r$ 的一个轨道。显然，此时它具有相反的奇偶性。值得注意的是，如果 ρ 是 $(\mathbb{Q}, B)$ 的一个自同构，那么 ρ^2 属于 $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$，并且也可以视为 $\leq^r$ 的一个自同构。

当 $\rho \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, B) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$ 时，不动点的数量至多为 1。若不动点存在，我们将其记为 q_ρ。若不存在，则定义如下实数。令

$$A^r_\rho = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < \rho(q)\} \text{ and } A_\rho = \{q \in \mathbb{Q} \mid \rho(q) < q\}.$$

容易验证 $A^r_\rho < A_\rho$，也就是说，我们得到一个戴德金分割。当 q_ρ 存在时，我们也考虑有序对 (A^r_ρ, A_ρ)。在这种情况下，$\mathbb{Q} = A^r_\rho \cup \{q_\rho\} \cup A_\rho$。

值得注意的是，$\rho(A^r_\rho) = A_\rho$ 且 $\rho(A_\rho) = A^r_\rho$。特别地，ρ^2保留了 A_ρ和 A^r_ρ。此外，ρ是从 $(A_\rho, <)$ 到 $(A^r_\rho, <^r)$ 的同构，并保留了 ρ^2 的图。将 $(A_\rho, <)$ 与 $(1, \mathbb{Q})$ 以及 $(A^r_\rho, <^r)$ 与 $(2, \mathbb{Q})$ 对应起来，我们将 ρ 视为超齐性序 B_2 的一个自同构，其中 $\iota_\rho = 2$。由定理 5.2 可得以下陈述。

推论 5.3 设 $\rho \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, B) \setminus \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$。那么，族 $\mathcal{P}_\rho$ 包含一个具有 amalgamation 性质的共尾子族。特别地，$\mathcal{C}_\rho$ 包含一个泛自同构。

5.3 B_ω, C_n, D 与 $(\mathbb{Q}, C)$ 的约化结构

我们不加证明地陈述以下定理（记号取自第 1.3 节）。

定理5.4 设 M 是一个可数超齐次结构，它同构于偏序集 B_ω，或某个带有 $n \in \omega$ 的 C_n。那么，对于任意 $\rho \in \mathrm{Aut}(M)$，类 $\mathcal{C}_\rho$ 都有一个泛元。此外，相应的 $\mathcal{P}_\rho$ 满足 CAP。

这个定理的证明略微繁琐，但不需要超出论文中已经使用过的思路或方法。例如，将 B_ω 看作任意 $\rho \in \mathrm{Aut}(B_\omega)$ 的 $\omega \times \mathbb{Q}$，就能找到一个置换 σ_ρ，其定义在 ω 上，与第 5.1 节中的情形完全相同。进一步的分析取决于第 1.2 节中与 σ_ρ 对应的各个情形。在每种情形下，都可以用定理 5.2 的方法找到 $\mathcal{P}_\rho$ 的一个共尾 CAP 子族。

另一方面，任意自同构 $\rho \in \mathrm{Aut}(C_n)$（满足 $n \in \omega$）都有一个自然的 $\mathbb{Q}$-投影，记为 $\gamma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}, <)$。注意，对于每个奇偶性为 0 的轨道 $q \in \mathcal{O}_\gamma$，自同构 ρ 确定了 $[n]$ 在该层不可比点集合上的一个置换。相应的循环函数，记为 f，可以视为一种新的颜色 0_f。为了确定 $\mathcal{C}_\rho$，我们首先需要知道 γ 是否属于类型 $\infty_{+,\ -,\ 0}$。若是如此，还需辨明哪些循环函数的有限序列 $(f_{q_1}, \ldots f_{q_k})$ 能够由满足 $\wp_\gamma(q_i) = 0$ 的 $q_i \in \mathcal{O}_\gamma$ 实现。若 γ 不属于类型 $\infty_{+,\ -,\ 0}$，则必须将定理 2.5 应用于 $(\mathcal{O}_\gamma, \prec_\gamma, \wp_\gamma)$，以确定相应的典范分解。将该定理应用于 ∞_0-部分（可能需要多次）后，我们便得到它们的典范分解。随后，可以自然而然地运用第3节和第4节的论证。

其余情形需要更深入的分析，这需要另行撰写一篇或多篇论文。事实上，在 C_ω 的情形下，我们必须考察具有无限多个颜色的着色线性序。Kuske 和 Truss 在 [9]中开启了对 D 的有限部分同构的研究。这里所用的技术比在$(\mathbb{Q}, <)$情形下深奥得多。该论文的主要结果表明，$\mathcal{P}$ 满足 CAP。我们认为，对于任何满足 $\rho \in \mathrm{Aut}(D)$的 $\mathcal{P}_\rho$，都可以证明这一点。我们还认为，同样的结论也适用于循环序$(\mathbb{Q}, C)$以及相应的分离关系。这些对象看起来尤其有趣。似乎要得到这一结果，必须对圆的同胚进行分类（见 [6]中的第11章）。

参考文献

[1] P. J. Cameron，《置换群在无序集合上的传递性》，《数学杂志》148（1976年），127–139。[2] D.M. Evans（1994），$\aleph_0$-范畴结构的例子。载于：R. Kaye、H.D. Macpherson（编），《一阶结构的自同构》（第33–71页），牛津大学出版社，1996年。[3] W.C. Holland，《格序置换群》，载于《格序群》，A.M. Glass 和 W.C. Holland 编（Kluwer Academic Publishers，多德雷赫特，1989年），23–40。

[4] A. Ivanov, 《ω-范畴结构的一般扩张与广义量词的语义》, 《符号逻辑期刊》64（1999年）, 第775–789页。[5] I. Kaplan 和 P. Simon, 《有限拓扑秩的自同构群》, 《美国数学会汇刊》372（2019年）, 2011–2043。[6] A. Katok 和 B. Hasselblatt, 《动力系统现代理论导论》, 剑桥大学出版社, 1995年。[7] A. S. Kechris 和 Ch. Rosendal, 《齐性结构中的湍流 amalgamation 与泛型自同构》, 《伦敦数学会会刊》（第3辑）94（2007年）, 302–350。[8] A. Krawczyk、A. Kruckman、W. Kubi´s 和 A. Panagiotopoulos, 《弱 amalgamation 类的例子》, 《数学逻辑季刊》68(2), 2022年, 178–188。[9] D. Kuske、J. K. Truss, 《通用偏序的泛型自同构》, 《美国数学会会刊》129（2000年）, 1939–1948。[10] A. Kwiatkowska 和 M. Malicki, 《有序结构与大共轭类》, 《代数杂志》557（2020年）, 67–96。[11] J. K. Truss, 《齐性结构的泛型自同构》, 《伦敦数学会会刊》（第3辑）65（1992年）, 121–141。[12] J. Schmerl, 《可数齐性偏序集》, 《普遍代数》9（1979年）, 317–321。