arXiv:2303.07926v1 [cs.LO] 14 Mar 2023

通过半环统一团队语义的基础

Timon Barlag[1] , Miika Hannula[2] , Juha Kontinen[2] , Nina Pardal[3] , Jonni Virtema[3]
[1]莱布尼茨汉诺威大学[2]赫尔辛基大学 [3]谢菲尔德大学

barlag@thi.uni-hannover.de, {miika.hannula, juha.kontinen}@helsinki.fi, {n.pardal, j.t.virtema}@sheffield.ac.uk.

摘要

一阶逻辑的半环语义提供了一种方法，用于追踪模型所表示的事实如何被用于推导公式的满足。团队语义是一种研究依赖与独立逻辑的框架，它通过添加描述变量之间依赖关系的原子公式，将一阶逻辑扩展到数据库、量子力学和统计学等不同领域。结合这两者，我们提出一种统一的方法，通过新颖的半环团队语义分析依赖与独立的概念；该语义涵盖了此前提出的所有一阶团队语义变体。特别地，我们研究不同半环之间依赖关系和公式的满足关系的保持。此外，我们还将其与数据溯源、计数和修复等推理任务联系起来。

1 引言

团队语义为研究数据多样性所引出的重要概念（如依赖和独立性）提供了一个逻辑框架。该领域可追溯至依赖逻辑的提出（Väänänen 2007）。过去十年间，团队语义中各种逻辑的表达力和复杂性理论方面得到了积极研究，并与数据库理论（Hannula, Kontinen, and Virtema 2020; Hannula and Kontinen 2016）、验证（Gutsfeld et al. 2022）、实数值计算（Hannula et al. 2020）和量子基础（Albert and Grädel 2022; Abramsky, Puljujärvi, and Väänänen 2021）等领域建立了引人入胜的联系。研究主要聚焦于一阶、命题和模态团队语义中的逻辑，近来还扩展到了多重集（Durand et al. 2018a; Grädel and Wilke 2022）和概率设置（Durand et al. 2018b）。在本研究之前，这些团队语义的改编形式都是彼此孤立地进行研究的。

数据溯源提供了描述数据来源的方法，使我们能够了解查询的见证，或确定某个输出是如何推导出来的。溯源半环由 Green、Karvounarakis 和 Tannen 于 2007 年引入，旨在建立一个通用框架，以统一处理正关系代数的扩展，其中元组带有注释，反映了种类繁多的信息。这类关系的一些启发性示例来自不完整数据库、概率数据库以及包语义。这个半环框架捕捉了一种称为 how-provenance 的数据溯源概念，其中半环运算实质上刻画了每个输出如何由源数据产生。沿着这一框架，Grädel 和 Tannen 于 2017 年为完整的一阶逻辑（FO）发展了半环语义。一阶逻辑的半环语义尤其细化了经典的布尔语义，使公式能够取半环中的值进行求值。例如，这使得我们能够计算证明树的数量，或计算 $\mathfrak{A}$ 和 ϕ 的模型检测博弈中的获胜策略。

在数据库中，依赖关系被用作完整性约束（IC），用于规定数据库需要满足的一组规则。将这些规则视为一阶逻辑句子，有助于对其进行形式化分析；这些句子通常遵循某些句法模式。由于 SQL 等查询语言处理的是元组的多重集（即袋）而非集合，这种方法有时并不适用。近期，Chu 等人 2018 使用半环表述了键和外键等完整性约束，以研究 SQL 查询等价性。在概率论中，条件独立性有着广泛的应用；例如，关于条件独立性的假设可以简化变量联合概率的计算。众所周知，数据库理论和概率论中的依赖概念彼此相关，因为许多（但并非所有）此类概念都可以用信息论度量来改写，例如条件熵和条件互信息（Lee 1987；Yeung 2008）。然而，据我们所知，尚无先前研究使用半环达到同样的目的。

类似于通过计数扩展一阶逻辑，我们为一阶逻辑（一阶逻辑）（Grädel and Tannen 2017）的半环语义加入比较一阶公式的半环取值的能力。借助这一形式体系，我们以一种涵盖既有解释的方式定义依赖和独立性等概念。所提出的形式体系还为研究依赖陈述的满足关系保持和蕴涵在从一个半环转向另一个半环时的保持提供了稳健框架。此前，人们已研究过数据库与

概率论之间的此类保持结果（Geiger and Pearl 1993；Gyssens、Niepert 和 Gucht 2014；Durand 等人 2018a；Kenig 和 Suciu 2022年；Malvestuto 1986；Malvestuto 1992；Wong、Butz 和 Wu 2000）。此外，我们提出了一种统一的团队语义方法，为团队中的元素标注来自任意半环的元素。通过这种方式，只需选取合适的具体半环，即可恢复原始团队语义及其定量变体。转向半环团队语义后，首次能够针对表达力强的团队逻辑开展数据溯源分析及其他推理任务。

2 预备知识

我们固定一个可数无限的变量集合 Var。我们用 $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ 表示一阶结构，并用 $A, B, C, \ldots$ 表示它们的定义域。赋值（ $\mathfrak{A}$的赋值）是一个函数 s ，它将变量集合 Var 的有限子集 $D \subseteq$ 映射到某些值（位于 A中）。我们称 D 为 s的定义域，记作 Dom(s)。对于变量 x 和值 a，我们将定义域为 Dom(s) $\cup \{x\}$、把 x 映射到a 且在其他方面与 s一致的赋值记作 $s[a/x]$。

团队 X 是一个具有共同定义域 D的有限赋值集合 s 。我们称 D 为 X的定义域，记作 Dom(X)。给定一个一阶结构 $\mathfrak{A}$，如果 A 包含每个 $s \in X$的值域，我们就称 X 为$\mathfrak{A}$的团队。从单个赋值转向赋值集合，使我们能够解释变量之间的依赖关系陈述：

条件独立原子是形如 $\vec{y} \perp_{\vec{x}} \vec{z}$ 的表达式，其中 $\vec{x}$、 $\vec{y}$、 $\vec{z}$ 是变量序列（长度不一定相同）。若团队 X 满足 $\vec{y} \perp_{\vec{x}} \vec{z}$，记作 $X \vDash \vec{y} \perp_{\vec{x}} \vec{z}$，则对所有满足 $s(\vec{x}) = s'(\vec{x})$ 的 s、 $s' \in X$，都存在 $s'' \in X$，使得 $s(\vec{x}\vec{y}) = s''(\vec{x}\vec{y})$ 且 $s'(\vec{z}) = s''(\vec{z})$。纯独立原子是形如 $\vec{x} \perp \vec{y}$ 的表达式，定义为 $\vec{x} \perp_{\varnothing} \vec{y}$。若团队 X 满足 $\vec{x} \perp \vec{y}$，则对所有 s、 $s' \in X$，都存在 $s'' \in X$，使得 $s(\vec{x}) = s''(\vec{x})$ 且$s'(\vec{y}) = s''(\vec{y})$。

依赖原子是形如 $=(\vec{x}, \vec{y})$ 的表达式，其中 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 是变量序列。若对于所有 $s, s' \in X$, s，只要 $\vec{x} = s'(\vec{x})$，就有 $s(\vec{y}) = s'(\vec{y})$，则团队 X 满足$=(\vec{x}, \vec{y})$。

包含原子是形如 $\vec{x} \subseteq \vec{y}$ 的表达式，其中 $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 是长度相同的变量序列。若对于所有 $s \in X$，都存在 $s' \in X$ 使得 $s(\vec{x}) = s'(\vec{y})$，则团队 X 满足 $\vec{x} \subseteq \vec{y}$。

在概率团队语义中，$\vec{y} \perp_{\vec{x}} \vec{z}$具有概率论中条件独立性的通常含义。此外，$\vec{x} \subseteq \vec{y}$ 的概率解释指出， $\vec{x}$ 和 $\vec{y}$ 的边缘分布相同。

如果 α 是一个在团队 X 上定义了满足关系的原子，我们就将此定义扩展到一阶结构 $\mathfrak{A}$，规定 X 在 $\mathfrak{A}$下满足 α，记作 $\mathfrak{A} \vDash_X \alpha$，当且仅当 X满足 α。

3 依赖关系的半环视角

本节中，我们将探讨如何使用半环来推广团队和依赖关系。

3.1 半环

我们首先简要回顾本文所需的半环相关概念。

定义 1（半环）。半环是一个元组 $K = (K, +, \cdot, 0, 1)$，其中 $+$和 $\cdot$是定义在 K上的二元运算，$(K, +, 0)$ 是一个以 0 为单位元的交换幺半群，$(K, \cdot, 1)$ 是一个以 1 为单位元的幺半群，$\cdot$对 $+$左右分配，并且对所有 $x \in K$都有 $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$。如果 $(K, \cdot, 1)$ 是一个交换幺半群，则称 K 为交换的。与通常一样，我们常用 ab 代替 $a \cdot b$。

也就是说，半环是无需具备加法逆元的环。我们重点介绍下列半环，它们涵盖了基于集合、多重集和分布的团队语义：

- 布尔半环 $\mathbb{B} = (\mathbb{B}, \vee, \wedge, 0, 1)$ 表示逻辑真值，由含两个元素的布尔代数构成。它是最简单的非环半环。
- 概率半环 $\mathbb{R}_{\geq 0} = (\mathbb{R}_{\geq 0}, +, \cdot, 0, 1)$ 由非负实数构成，并采用标准的加法和乘法。
- 自然数半环 $\mathbb{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ 由自然数组成，并采用通常的运算。

其他例子包括多元多项式半环 $\mathbb{N}[X] = (\mathbb{N}[X], +, \cdot, 0, 1)$，它是由 X 中的不定元生成的自由交换半环；热带半环 $\mathbb{T} = (\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \min, +, \infty, 0)$，它由扩充了无穷大的实数构成，并分别以 min 和 $+$作为加法和乘法；以及卢卡西维奇半环 $\mathbb{L} = ([0, 1], \max, \cdot, 0, 1)$，用于多值逻辑，它为单位区间赋予 max 加法和乘法 $a \cdot b \coloneqq \min(0, a + b - 1)$。

设 $\leq$ 为偏序。若 $a \leq b$和 $a' \leq b'$蕴含 $a * a' \leq b * b'$，则称二元运算符 $*$ 在 $\leq$ 下单调。偏序半环是一个元组 $K = (K, +, \cdot, 0, 1, \leq)$，其中 $(K, +, \cdot, 0, 1)$ 是半环，$(K, \leq)$ 是偏序集合，并且 $+, \cdot$ 在 $\leq$下单调。给定半环 $K = (K, +, \cdot, 0, 1)$，在 K 上定义二元关系 $\leq_K$：当且仅当 $\exists c : a + c = b$时，有 $a \leq_K b$。该关系是一个预序，即它具有自反性和传递性。如果 $\leq_K$ 还是反对称的，那么它就是一个偏序，称为 K的自然序，并称 K 是自然有序的。在这种情况下，赋予自然序的 K 是一个偏序半环。

如果半环 K 满足 $ab = 0$，其中某个 a、 $b \in K$ 满足 $a \neq 0 \neq b$，我们就称 K 含有零因子。另一方面，如果 K 满足： $a + b = 0$蕴含 $a = b = 0$，则称半环 K 为 $+$-正。若一个半环既是 $+$-正，又不含零因子，则称其为正半环。例如，模二整数半环 $\mathbb{Z}_2$ 不是正半环，因为它不是 $+$-正的（尽管它不含零因子）。反过来，含有零因子的半环的一个例子是 $\mathbb{Z}_4$。我们还可以通过考察 K 的特征映射来判断其正性。该特征映射定义为函数$\xi_K : K \to \mathbb{B}$，满足

$$\xi_K(a) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \neq 0, \\ 0 & \text{if } a = 0. \end{cases}$$

命题 2（命题 6，Grädel 和 Tannen 2017）。半环 K 是正半环，当且仅当其特征映射是同态。

特别要注意的是，布尔半环 $\mathbb{B}$、概率半环 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 和自然数半环 $\mathbb{N}$ 都是正的，且具有自然序。

3.2 K-团队

给定一个半环 K，通过用 K 中的元素标记一个团队的每个赋值，即可得到 K-团队的概念。如果 D 是变量集，A 是一个集合，我们将 $\mathrm{As}(D, A)$ 定义为所有赋值 $s : D \to A$ 的集合。

定义 3（K-团队）。 K-团队是一个函数 $\mathbb{X}\colon \mathrm{As}(D, A) \to K$，其中 $K = (K, +, \cdot, 0, 1)$ 是一个（交换）半环，D 是变量集，A 是一个集合。$\mathbb{X}$ 的支撑集定义为 $\mathrm{Sup}(\mathbb{X}) := \{s \mid \mathbb{X}(s) \neq 0\}$。若 K 上有一个序，我们称 $\mathbb{X}$ 是 $\mathbb{Y}$ 的子团队，当且仅当对于每个 $s \in \mathrm{Sup}(\mathbb{X})$，都有 $\mathbb{X}(s) \leq \mathbb{Y}(s)$。

现在，我们可以将团队的概念重新表述为一种 K-团队：为每个可能的赋值标记 1 或 0，具体取决于该赋值是否属于这个团队。对于概率团队，每个赋值都标记一个非负实数；将这些标记的总和缩放为 1 后，便可将其解释为概率。对于多重团队，每个赋值都被赋予一个自然数。图 1 展示了这些概念。

图 1： K-团队 $\mathbb{X}_i\colon \mathrm{As}(D, A) \to K$, $D = \{x, y\}$, $A = \{a, b\}$，分别表示一个团队、一个多重团队和一个概率团队。

$K = \mathbb{B}$

x	y	$\mathbb{X}_1(s)$
a	a	1
a	b	1
b	a	0
b	b	0

$K = \mathbb{N}$

x	y	$\mathbb{X}_2(s)$
a	a	2
a	b	0
b	a	0
b	b	5

$K = \mathbb{R}_{\geq 0}$

x	y	$\mathbb{X}_3(s)$
a	a	1/4
a	b	3/4
b	a	0
b	b	0

3.3 K-团队上的依赖关系：序言

我们的目标是找到一种通用语言，用来表达不同K-团队中的依赖、独立性等概念。回顾预备知识一节，读者可能会注意到，团队语义中的基本依赖概念可以用一阶逻辑的语言形式化。然而，在处理多重集或概率分布时，这种方法就显得力有不逮。例如，两个随机变量之间的独立性涉及计数，这超出了一阶逻辑的能力范围；在半环语境中似乎也是如此（Grädel 等人（2022））。因此，我们将探讨对一阶逻辑进行扩展，以克服这些局限。下面的例子展示了我们将采取的思路。

例4。我们的目标是找到一种共同的逻辑表达式，作为条件独立性的关系解释和概率解释的基础。为此，固定一个关于变量 x、y 和 z 的条件独立原子 $y \perp_x z$。

在关系语境中，将定义域为 $\{x, y, z\}$ 的团队 X 视为三元关系 $R = \{(s(x)\ s(y)\ s(z)) \mid s \in X\}$，我们注意到，当且仅当 R 满足一阶句子时，X 满足 $y \perp_x z$

$$\forall abcde(R(a,b,c) \wedge R(a,d,e) \to R(a,b,e)). \qquad (1)$$

转到概率语境，给定随机变量x 时，两个随机变量 y 和 z 条件独立，当且仅当对于所有取值 a、b、c，

$$P(y = b \mid x = a) \cdot P(z = c \mid x = a) = P(yz = bc \mid x = a). \quad (2)$$

我们的策略是将（2）转化为一个类似于（1）的“逻辑”句子。首先，我们从（2）中消去条件概率，得到方程

$$P(xy = ab) \cdot P(xz = ac) = P(xyz = abc) \cdot P(x = a).$$

接下来，我们用一个三元函数 R 来表示概率分布，该函数将值三元组 (a, b, c)映射为概率$P(xyz = abc)$；并将边缘概率 $P(xy = ab)$改写为概率 $\sum_c R(a, b, c)$之和，得到

$$\sum_c R(a,b,c) \cdot \sum_b R(a,b,c) = R(a,b,c) \cdot \sum_{b,c} R(a,b,c).$$

将乘法解释为合取、将聚合求和解释为存在量化，并加入对三元组的全称量化后，我们得到表达式

$$\forall abc\big((\exists c R(a,b,c) \wedge \exists b R(a,b,c)) = (R(a,b,c) \wedge \exists bc R(a,b,c))\big). \quad (3)$$

这个表达式可以看作一个定义概率独立性的“逻辑”句子。请注意，它包含两个公式之间的等式陈述，因此并不是一个良构的一阶句子。不过，如果我们将等号 $=$ 替换为逻辑等价符号 $\leftrightarrow$，就会得到一个一阶句子；去除其中逻辑冗余后，它可化为

$$\forall abc\big((\exists c R(a,b,c) \wedge \exists b R(a,b,c)) \to (R(a,b,c))\big).$$

通过重命名存在量化变量，并将它们移至无量词部分之前，我们便恰好得到用于定义关系条件独立性的一阶句子 (1)。

根据这个例子可以看出，按照（3）的形式构造的逻辑陈述能够整合依赖概念的多种表达。为了进一步阐明这一想法，下一节将专门讨论一阶逻辑及其在半环语境下扩展出的公式间等号陈述。随后，我们将重新探讨关于 K-团队的依赖关系概念。

4 带公式等式的一阶逻辑

我们首先回顾 (Grädel and Tannen 2017) 中一阶公式的 K-解释。从现在起，我们只考虑交换半环。为了在此语境下正确解释量词，这是必要的。

4.1 一阶解释

固定一个关系词汇表 $\tau = \{R, S, T, \ldots\}$。我们用 ar($R$) 表示关系符号 R 的元数。关系原子（分别为否定关系原子）是形如 $R(\vec{x})$（分别为 $\neg R(\vec{x})$）的表达式，其中 $\vec{x}$ 是一个长度为 ar(R) 的变量序列。等式原子（分别为否定等式原子）是形如 $x = y$ 的表达式，其中 x 和 y 是变量。原子或否定原子称为文字。一阶公式是通过量词 $\exists, \forall$ 和联结词 $\wedge, \vee, \neg$ 以通常方式对原子进行封闭而形成的表达式。我们用 $\phi \to \psi$ 作为 $\neg\phi \vee \psi$的简写，并用 $\phi \leftrightarrow \psi$ 作为 $(\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$ 的简写。FO 公式 θ 的自由变量集合 Fr(θ) 按通常方式定义。我们还用 nnf 表示一阶公式的标准否定范式变换。

设 A 是一个集合。形如 $R(\vec{a})$（分别为 $\neg R(\vec{a})$）的表达式，其中 $\vec{a} \in A^{\mathrm{ar}(R)}$，称为关于 A的事实（分别为否定事实）。关于 A 的文字集合，记作 Lit_A，是由关于 A 的所有事实和否定事实组成的集合。

定义 5（Grädel and Tannen 2017）。固定一个半环 $K = (K, +, \cdot, 0, 1)$。K-解释是一个映射 $\pi\colon \mathrm{Lit}_A \to K$。给定变量赋值 $s\colon \mathrm{Var} \to A$，可将其扩展到一阶公式如下：

$$[\![R(\vec{x})]\!]_{\pi,s} = \pi(R(s(\vec{x}))) \qquad [\![\phi \wedge \psi]\!]_{\pi,s} = [\![\phi]\!]_{\pi,s} \cdot [\![\psi]\!]_{\pi,s}$$
$$[\![\neg R(\vec{x})]\!]_{\pi,s} = \pi(\neg R(s(\vec{x}))) \qquad [\![\phi \vee \psi]\!]_{\pi,s} = [\![\phi]\!]_{\pi,s} + [\![\psi]\!]_{\pi,s}$$
$$[\![\forall x\phi]\!]_{\pi,s} = \prod_{a\in A} [\![\phi]\!]_{\pi,s[a/x]} \qquad [\![\exists x\phi]\!]_{\pi,s} = \sum_{a\in A} [\![\phi]\!]_{\pi,s[a/x]}$$
$$[\![\neg\phi]\!]_{\pi,s} = [\![\mathrm{nnf}(\neg\phi)]\!]_{\pi,s} \qquad [\![x * y]\!]_{\pi,s} = \begin{cases} 1 & \text{if } s(x) * s(y) \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $* \in \{=, \neq\}$。如果 Fr(ϕ) 为空，则 ϕ 称为句子。对于句子 ϕ，我们将 $[\![\phi]\!]_\pi$ 作为$[\![\phi]\!]_{\pi,\, s_\varnothing}$的简写，其中 $s_\varnothing$ 为空赋值。

如果对于所有事实 $R(\vec{a})$，π 恰好将 $R(\vec{a})$ 和 $\neg R(\vec{a})$ 中的一个映射为 0，而将另一个映射为非 0 值，则称 K-解释π 是模型定义的（Grädel and Tannen 2017）。

组合式解释意味着半环同态可以扩展为公式解释。本文将利用这一性质来分析依赖概念的不同解释之间的相互关系。

命题 6（（Grädel and Tannen 2017））。设 h 是从 K_1 到 K_2 的半环同态，并设 π_1 :$\mathrm{Lit}_A \to K_1$ 和 π_2 : $\mathrm{Lit}_A \to K_2$ 是解释，满足 $h \circ \pi_1 = \pi_2$。那么，对于每个一阶句子 ϕ，都有 $h([\![\phi]\!]_{\pi_1}) = [\![\phi]\!]_{\pi_2}$。

设 $\mathfrak{A}$ 是 τ 上的标准一阶结构，且 $\mathbb{B}$ 是布尔半环。将关系事实 $R(\vec{a})$（分别是取反的关系事实 $\neg R(\vec{a})$ 映射为 1（分别为 0）（当且仅当 $\vec{a} \in R^{\mathfrak{A}}$ 成立；否则映射为 0（分别为 1））的解释 π，称为 $\mathfrak{A}$ 的规范真值解释，记作 $\pi_{\mathfrak{A}}$。

命题 7（（Grädel和 Tannen 2017））。设 ϕ 是一个一阶逻辑句子，$\mathfrak{A}$ 是一个结构。那么 $\mathfrak{A} \vDash \phi$ 当且仅当 $[\![\phi]\!]_{\pi_{\mathfrak{A}}} = 1$。

4.2 公式不等式

为了在一般的半环语境中以逻辑方式表达依赖关系，我们在一阶公式上引入等号和不等式。给定 ϕ、$\psi \in$ 一阶逻辑，我们将 K 解释扩展如下：

$$[\![\phi * \psi]\!]_{\pi,s} = \begin{cases} 1 & \text{if } [\![\phi]\!]_{\pi,s} * [\![\psi]\!]_{\pi,s} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中 $* \in \{=, \neq, \leq, \not\leq\}$。对于（取反的）公式不等式，我们假设 $(K, \leq)$ 是一个偏序半环。我们用 $\bot?$ 和 $\not\bot?$ 分别表示形如 $\phi = \bot$ 和 $\phi \neq \bot$ 的公式等式。对于 $C \subseteq \{\bot?, \not\bot?, =, \neq, \leq, \not\leq\}$，我们用 FO($C$) 表示 Grädel 和 Tannen 逻辑的扩展，其中包含 C 中正出现（即处于偶数次否定的作用域内）且不嵌套的公式等式与不等式。对于形如 $\phi * \psi, * \in \{=, \neq, \leq, \not\leq\}$ 的公式，其自由变量集合定义为 Fr($\phi * \psi$) = Fr(ϕ) ∪ Fr(ψ)。

我们通过定义 $\mathrm{nnf}(\neg(\phi = \psi)) := (\mathrm{nnf}(\phi) \neq \mathrm{nnf}(\psi))$ 和 $\mathrm{nnf}(\neg(\phi \leq \psi)) := (\mathrm{nnf}(\phi) \not\leq \mathrm{nnf}(\psi))$，将否定范式扩展到公式等式（不等式）。接着，我们可以将用于带公式等式（不等式）的一阶逻辑的简写$\phi \to \psi$ 和 $\phi \leftrightarrow \psi$ 扩展开来。

命题 8. 设 K 是一个正半环，且 π 是一个模型定义的 K-解释。设 ϕ 是关于一阶逻辑$(=, \neq, \leq, \not\leq)$的公式。那么，$\pi(\phi) = 0$ 当且仅当 $\pi(\neg\phi) \neq 0$。

证明。该证明采用结构归纳法。若 ϕ 是一个原子，则结论由 π 是模型定义的这一假设得出。若 ϕ 的形式为 $\psi_0 \vee \psi_1$，则 $\pi(\phi) = 0$ 当且仅当 $\pi(\psi_0) = 0 = \pi(\psi_1)$，当且仅当 $\pi(\neg\psi_0) \neq 0 \neq \pi(\neg\psi_1)$，当且仅当 $\pi(\neg\phi) \neq 0$。第一个和第三个“当且仅当”由 K的正性得出，第二个则由归纳假设得出。其余情况类似。 □

如果对于所有模型定义的 K-解释 π，都有 $[\![\phi]\!]_\pi = [\![\psi]\!]_\pi$，那么两个句子 ϕ 和 ψ 是 K-等价的，记作 $\phi \equiv_K \psi$。如果两个句子 ϕ 和 ψ 对于所有半环 K都是 K-等价的，则称它们等价，记作 $\phi \equiv \psi$。如果逻辑 $\mathfrak{L}$ 和 $\mathfrak{L}'$在 K 下表达力相同（分别地，表达力相同），记作 $\mathfrak{L} \equiv_K \mathfrak{L}'$（分别地，$\mathfrak{L} \equiv \mathfrak{L}'$），则 $\mathfrak{L}$ 中的每个句子都与 $\mathfrak{L}'$中的某个句子K-等价（分别地，等价）；反过来，$\mathfrak{L}'$ 中的每个句子也都与 $\mathfrak{L}$中的某个句子 K-等价（分别地，等价）。

以下结论可由命题 8 推出。

命题 9. 若 ϕ 和 ψ 是含有公式等式（不等式）的一阶公式，则 $\phi \leq \psi \equiv_{\mathbb{B}} \phi \to \psi$ 和 $\phi = \psi \equiv_{\mathbb{B}} \phi \leftrightarrow \psi$。

Corollary 10. $\mathrm{FO}(=, \neq, \leq, \not\leq) \equiv_{\mathbb{B}} \mathrm{FO}$.

4.3 K-原子公式

现在我们可以开始探讨这样一种思路：将逻辑陈述用作不同半环上的依赖关系定义。为此，我们将考虑一个原子 α，例如依赖原子或独立原子，并通过引用用带有公式等式（不等式）的一阶逻辑定义的 α，来定义它在 K 团队上的解释。

考虑一个不属于 τ 的关系符号 R（元数可以是任意值）。对于一个元组 $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_{\mathrm{ar}(R)})$ 以及一个取自 $1, \ldots,$ ar(R) 的指标元组 $\vec{i} = (i_1, \ldots, i_k)$，我们

定义 $\vec{a}_{\vec{i}} \coloneqq (a_{i_1}, \dots, a_{i_k})$。对于取自 $1, \dots, \mathrm{ar}(R)$ 的指标 $\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_n$，以及变量元组 $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$（使得对每个 $l \le n$，$\vec{u}_l$ 的长度与 $\vec{i}_l$ 相同），我们定义一个简写

$$\theta_{\vec{i}_1,\dots,\vec{i}_n}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \coloneqq \exists \vec{x}\big(R(\vec{x}) \wedge \vec{x}_{\vec{i}_1} = \vec{u}_1 \wedge \cdots \wedge \vec{x}_{\vec{i}_n} = \vec{u}_n\big).$$

这个简写公式表示存在一个 R-事实，使得它在位置序列 $\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_n$ 上的投影分别为 $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$。考虑依赖、独立性和包含原子后，我们现在定义以下句子：

$$\phi^{\vec{i}}_{\text{lit-}S} \coloneqq \forall \vec{x}\big(R(\vec{x}) = \bot \vee \big(R(\vec{x}) \neq \bot \wedge S(\vec{x}_{\vec{i}})\big)$$

$$\phi^{\vec{i},\vec{j}}_{\text{dep}} \coloneqq \forall \vec{u}\vec{v}\vec{w}\Big(\big(\theta_{\vec{i},\vec{j}}(\vec{u}, \vec{v}) \wedge \theta_{\vec{i},\vec{j}}(\vec{u}, \vec{w})\big) = \bot \vee (\vec{v} = \vec{w}) \neq \bot\Big)$$

$$\phi^{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}_{\text{indep}} \coloneqq \forall \vec{u}\vec{v}\vec{w}\Big(\big(\theta_{\vec{i},\vec{j}}(\vec{u}, \vec{v}) \wedge \theta_{\vec{i},\vec{k}}(\vec{u}, \vec{w})\big) = \big(\theta_{\vec{i}}(\vec{u}) \wedge \theta_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})\big)\Big)$$

$$\phi^{\vec{i},\vec{j}}_{\text{inc}} \coloneqq \forall \vec{u}\Big(\theta_{\vec{i}}(\vec{u}) \le \theta_{\vec{j}}(\vec{u})\Big).$$

在上标中，我们可以将每个一元元组 (i) 替换为 i；例如，写作 $\phi^{i}{}_{\text{lit-}S}$，而不是 $\phi^{(i)}{}_{\text{lit-}S}$。如下例所示，上述公式通常可以简化。

例 11. 如果 R 是三元的，那么 $\phi^{1,2,3}_{\text{indep}}$ 的形式为 $\forall uvw((\theta_{1,2}(u, v) \wedge \theta_{1,3}(u, w)) = (\theta_1(u) \wedge \theta_{1,2,3}(u, v, w)))$，其中 $\theta_{1,2}(u, v)$、$\theta_{1,3}(u, w)$、$\theta_1(u, w)$ 和 $\theta_{1,3}(u, w)$ 分别具有以下形式

$$\exists x_1x_2x_3(R(x_1, x_2, x_3) \wedge x_1 = u \wedge x_2 = v),$$
$$\exists x_1x_2x_3(R(x_1, x_2, x_3) \wedge x_1 = u \wedge x_3 = w),$$
$$\exists x_1x_2x_3(R(x_1, x_2, x_3) \wedge x_1 = u),$$
$$\exists x_1x_2x_3(R(x_1, x_2, x_3) \wedge x_1 = u \wedge x_2 = v \wedge x_3 = w).$$

显然，这些句子分别等价于更简单的形式 $\exists x_3 R(u, v, x_3)$、$\exists x_2 R(u, x_2, w)$、$\exists x_2x_3 R(u, x_2, x_3)$ 和 $R(u, v, w)$。随后可以利用这些等价关系，将 $\phi^{1,2,3}_{\text{独立性}}$ 改写得更加简洁。

现在可以看出，ϕ_{dep}、ϕ_{indep} 和 ϕ_{inc} 在 $\mathbb{B}$ 意义下等价于依赖、独立性和包含原子的标准关系定义。下面的命题是命题 9 的推论。证明方法是仿照例4中的推理。

命题12。下面的等价关系成立：

$$\phi^{\vec{i}}_{\text{lit-}S} \equiv_{\mathbb{B}} \forall \vec{x}\big(R(\vec{x}) \to S(\vec{x}_{\vec{i}})\big)$$

$$\phi^{\vec{i},\vec{j}}_{\text{dep}} \equiv_{\mathbb{B}} \forall \vec{u}\vec{v}\vec{w}(\theta_{\vec{i},\vec{j}}(\vec{u}, \vec{v}) \wedge \theta_{\vec{i},\vec{j}}(\vec{u}, \vec{w}) \to \vec{v} = \vec{w})$$

$$\phi^{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}_{\text{indep}} \equiv_{\mathbb{B}} \forall \vec{u}\vec{v}\vec{w}(\theta_{\vec{i},\vec{j}}(\vec{u}, \vec{v}) \wedge \theta_{\vec{i},\vec{k}}(\vec{u}, \vec{w}) \to \theta_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}))$$

$$\phi^{\vec{i},\vec{j}}_{\text{inc}} \equiv_{\mathbb{B}} \forall \vec{u}(\theta_{\vec{i}}(\vec{u}) \to \theta_{\vec{j}}(\vec{u}))$$

在使用逻辑语句形式化了关键依赖概念之后，接下来让我们转向 K-团队。现在，先在变量集 Var 上固定一个全序 $<$。令 $\mathbb{X}\colon \mathrm{As}(D, A) \to K$ 为一个定义域为 $V = \{x_1, \dots, x_k\}$ 的 K-团队，其中 $x_1 < \cdots < x_k$。对于每个赋值 $s\colon A^V \to K$，定义一个元组 $\vec{a}_s \coloneqq (s(x_1) \dots, s(x_k))$。令 R 为一个元数为 k 的关系符号。用 $\pi_{\mathbb{X}} : \mathrm{Lit}_A \to K$ 表示任意满足以下条件的 K-解释：$\pi_{\mathbb{X}}$ 将 $R(\vec{a}_s)$ 映射到 $\mathbb{X}(s)$。对于变量元组 $\vec{x} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_n})$，记 $\vec{i}_{\vec{x}}$ 为整数元组 $(i_1, \dots, i_n)$。现将文字和依赖关系的 K-解释定义如下：

- Literals: $[\![T(\vec{x})]\!]_{\mathbb{X}} \coloneqq [\![\phi^{\vec{i}_{\vec{x}}}_{\text{lit-}T}]\!]_{\pi_{\mathbb{X}}}$.
- Dependence atoms: $[\![{=}(\vec{x}, \vec{y})]\!]_{\mathbb{X}} \coloneqq [\![\phi^{\vec{i}_{\vec{x}},\vec{i}_{\vec{y}}}_{\text{dep}}]\!]_{\pi_{\mathbb{X}}}$.
- Independence atom: $[\![\vec{y} \perp_{\vec{x}} \vec{z}]\!]_{\mathbb{X}} \coloneqq [\![\phi^{\vec{i}_{\vec{x}},\vec{i}_{\vec{y}},\vec{i}_{\vec{z}}}_{\text{indep}}]\!]_{\pi_{\mathbb{X}}}$.
- Inclusion atom: $[\![\vec{x} \subseteq \vec{y}]\!]_{\mathbb{X}} \coloneqq [\![\phi^{\vec{i}_{\vec{x}},\vec{i}_{\vec{y}}}_{\text{inc}}]\!]_{\pi_{\mathbb{X}}}$.

我们称一个 K-团队 $\mathbb{X}$ 满足原子公式 α，记作 $\mathbb{X} \vDash \alpha$，若 $[\![\alpha]\!]_{\mathbb{X}} \neq 0$。

例如，概率半环中的独立性原子对应于概率论中的条件独立性概念；而在布尔半环中，它对应于数据库理论中的嵌入式多值依赖概念。

例 13. 考虑图 1 所示的三个 K-团队中的纯独立原子 $x \perp y$。在 K-团队中，这个独立原子通过句子 $\phi^{\varnothing}_{1,\ 2\ \text{独立}}$ 来解释。与例 11 类似，我们可以将这个句子改写成更简单的形式：

$$\forall uv\Big(\big(\exists y R(u, y) \wedge \exists x R(x, v)\big) = \big(\exists xy R(x, y) \wedge R(u, v)\big)\Big) \quad (4)$$

假设 $x < y$ 根据变量上的全序 $<$。考虑 $\mathbb{B}$-团队 $\mathbb{X}_1$，函数 $\pi_{\mathbb{X}_1}$ 将事实 $R(a, a)$ 和 $R(a, b)$ 映射到 1，并将事实 $R(b, a)$ 和 $R(b, b)$ 映射到 0。于是，$\pi_{\mathbb{X}_1}$ 将 (4) 中的公式等式解释为：对于 $(u, v) \mapsto \{(a, a), (a, b)\}$，有 $(1 \wedge 1) = (1 \wedge 1)$；对于 $(u, v) \mapsto \{(b, a), (b, b)\}$，有 $(0 \wedge 1) = (1 \wedge 0)$。因此 $[\![x \perp y]\!]_{\mathbb{X}_1} = 1$，这意味着 $\mathbb{X}_1 \vDash x \perp y$。另一种得到 $\mathbb{X}_1 \vDash x \perp y$ 的方法是使用命题 7 和 12，并注意到由 $\mathbb{X}_1$ 定义的模型（签名为 $\{R\}$）满足一个与 $\phi^{\varnothing}_{1,2}$ 独立等价的、一阶逻辑句子。通过类似的计算，我们还可以进一步观察到 $\mathbb{X}_3$ 满足 $x \perp y$，而 $\mathbb{X}_2$ 不满足。另一方面，$\mathbb{X}_2$ 是三个满足依赖原子 $=(x, y)$ 的 K-团队中唯一的一个。

回顾一下，$\xi_K : K \to \mathbb{B}$ 是特征映射，它将 K 的非零值映射为 1，将零映射为 0。下面的命题表明，该映射保持所有 FO($=, \not\perp, \le$)-公式的真值。

命题 14. 设 π 是正半环 K 上的一个 K-解释。那么，对于所有 FO($=, \not\perp, \le$)-可定义的 ϕ，$[\![\phi]\!]_{\xi_K \circ \pi} = [\![\phi]\!]_{\pi}$。

证明。证明通过对 ϕ 的结构进行结构归纳法。我们同时证明，当 $\phi \in$ 为一阶逻辑时，该蕴含可以加强为当且仅当。一阶文字的情形直接由 ξ_K 的定义得出，而 $\neg\phi$ 的情形显然成立。

公式等式与不等式的情形由 K 的正性以及归纳假设得出。下文中，ϕ、$\psi \in$ 属于一阶逻辑，xor 表示异或。

$$\begin{aligned}
[\![\phi = \psi]\!]_{\xi_K \circ \pi} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad [\![\phi]\!]_{\xi_K \circ \pi} = 0 \text{ xor } [\![\psi]\!]_{\xi_K \circ \pi} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [\![\phi]\!]_{\pi} = 0 \text{ xor } [\![\psi]\!]_{\pi} = 0 \\
&\Rightarrow \quad [\![\phi = \psi]\!]_{\pi} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\![\phi \le \psi]\!]_{\xi_K \circ \pi} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad [\![\phi]\!]_{\xi_K \circ \pi} \neq 0 \text{ and } [\![\psi]\!]_{\xi_K \circ \pi} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [\![\phi]\!]_{\pi} \neq 0 \text{ and } [\![\psi]\!]_{\pi} = 0 \\
&\Rightarrow \quad [\![\phi \le \psi]\!]_{\pi} = 0
\end{aligned}$$

关于$[\![\phi \neq \bot]\!]_{\xi_K \circ \pi} = 0$ 的情形类似。

$\wedge$、$\vee$、$\exists$和 $\forall$ 的情形可由 K 的正性和归纳假设推出，我们证明 $\vee$:

$$\begin{aligned}
[\![\phi \vee \psi]\!]_{\xi_K \circ \pi} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad [\![\phi]\!]_{\xi_K \circ \pi} = 0 \text{ and } [\![\psi]\!]_{\xi_K \circ \pi} = 0 \\
&\Rightarrow \quad [\![\phi]\!]_{\pi} = 0 \text{ and } [\![\psi]\!]_{\pi} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad [\![\phi \vee \psi]\!]_{\pi} = 0
\end{aligned}$$

上述蕴含关系由归纳假设推出；若 ϕ，则可将其加强为等价关系。$\psi \in$一阶逻辑。 □

现在定义 K-团队的可能性坍缩：$\mathbb{X}$ 是 $\mathbb{B}$-团队 $\xi_K \circ \mathbb{X}$。我们有时会将可能性坍缩与其所定义的团队（即它映射到 1 的赋值集合）视为同一对象。根据前一个命题，任何可由 FO($=, \not\perp, ?, \le$)定义的原子在可能性坍缩下都保持不变。

推论 15。设 $\mathbb{X}$ 是正半环K上的 K-团队，且 α 是可由 FO($=, \not\perp, ?, \le$)定义的原子。若 $\mathbb{X}$ 满足 α，则其可能性坍缩满足 α。若 α 可由 FO($\bot, ?, \neq, \not\le$)定义，则逆向结论也成立。

例如，在例 13 中，我们观察到 $\mathbb{B}$-团队$\mathbb{X}_1$ 满足独立原子 $x \perp y$。由于 $\mathbb{X}_1$ 是 $\mathbb{X}_3$的可能性坍缩，因此仅凭 $\mathbb{X}_3$ 满足同一原子这一事实就可得出这一结论，而该原子又可以用一阶逻辑($=, \not\perp, ?, \le$)定义。我们还注意到，图 1 中的 $\mathbb{N}$-团队 $\mathbb{X}_2$ 满足依赖原子 $=(x, y)$。根据推论 15，这也可以从以下事实得出：$\mathbb{X}_2$ 的可能性坍缩满足同一个可用一阶逻辑($\bot, ?, \neq, \not\le$)定义的原子。

此处我们指出，在含有重复项的数据表（即一阶逻辑团队）中，解释依赖原子 $=(x, y)$ 的另一种方式，是规定 x 唯一确定 y，且将表投影到 x 和 y 后不存在重复项（这将是对 (Chu 等人 2018, 定义 4.1) 中键的半环解释的一种自然扩展）。然而，这种依赖概念无法满足函数依赖的自反规则，而该规则蕴含 $=(x, x)$ 总是成立。

5 团队语义

接下来，我们将探讨如何在半环的框架下统一所有团队语义变体（以及更多内容）。我们首先介绍针对 K-团队的团队语义改编版本，然后考虑复杂公式的 K-解释。

对于团队语义这一概念，需要用到一些有用的概念。变量集 $V \subseteq$上的 $X_{\restriction V}$ X 投影 Dom(X) 定义为集合 $\{s_{\restriction V} \mid s \in X\}$，其中 $s_{\restriction V}$ 是赋值 s 在 V 上的投影，定义方式与通常相同。对于集合 S 和一个变量，我们将 $X[S/x]$ 定义为团队 $\{s[a/x] \mid s \in X, a \in S\}$。对于集合 S 和函数 $F : X \to \mathcal{P}(S) \setminus \{\varnothing\}$，我们将 $X[F/x]$ 定义为团队 $\{s[a/x] \mid s \in X, a \in F(s)\}$。

我们介绍一阶逻辑在否定范式下的标准团队语义。

定义 16（团队语义）。设 X 是词汇表 τ 上一阶结构 $\mathfrak{A}$ 的一个团队。对于 $\phi \in$FO[τ]，我们如下定义 X 在 $\mathfrak{A}$ 下满足 ϕ 的条件，记作 $\mathfrak{A} \vDash_X \phi$（$\vDash_s$ 指一阶逻辑通常的塔斯基语义）：

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A} \vDash_X l && \Leftrightarrow && \mathfrak{A} \vDash_s l \text{ for all } s \in X \text{ (l is a literal)}, \\
&\mathfrak{A} \vDash_X (\psi \wedge \theta) && \Leftrightarrow && \mathfrak{A} \vDash_X \psi \text{ and } \mathfrak{A} \vDash_X \theta, \\
&\mathfrak{A} \vDash_X (\psi \vee \theta) && \Leftrightarrow && \mathfrak{A} \vDash_Y \psi \text{ and } \mathfrak{A} \vDash_Z \theta \text{ for some} \\
& && && Y, Z \subseteq X \text{ such that } Y \cup Z = X, \\
&\mathfrak{A} \vDash_X \forall x \psi && \Leftrightarrow && \mathfrak{A} \vDash_{X[A/x]} \psi, \\
&\mathfrak{A} \vDash_X \exists x \psi && \Leftrightarrow && \mathfrak{A} \vDash_{X[F/x]} \psi \text{ for some function} \\
& && && F : X \to \mathcal{P}(A) \setminus \{\varnothing\}.
\end{aligned}$$

5.1 K-团队语义

从半环的角度重新审视团队语义，我们可以得到如下真值定义。

定义 17（K-团队语义）。设 $\mathbb{X}$ 是词汇表 τ上一阶结构 $\mathfrak{A}$的 K-团队。对于 $\phi \in$一阶逻辑[τ]，我们定义在 $\mathfrak{A}$下 $\mathbb{X}$ 满足 ϕ 的条件，记作 $\mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{X}} \phi$:

$\mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{X}} l \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \vDash_s l$ 对于所有 $s \in$ Sup($\mathbb{X}$)（l 是一个文字），$\mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{X}} (\psi \wedge \theta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{X}} \psi$ 且 $\mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{X}} \theta$，$\mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{X}} (\psi \vee \theta) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{Y}} \psi$ 且对于某个 $\mathbb{Y}$，$\mathbb{Z}$满足 $\forall s : \mathbb{Y}(s) + \mathbb{Z}(s) = \mathbb{X}(s)$，$\mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{X}} \forall x \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{Y}} \psi$，其中 $\mathbb{Y}$ 满足$\forall s$，$a : \mathbb{X}(s) = \mathbb{Y}(s[a/x])\mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{X}} \exists x \psi \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{Y}} \psi$ 对于某个 $\mathbb{Y}$ 满足$\forall s : \mathbb{X}(s) = \sum_a \mathbb{Y}(s[a/x])$。

对于布尔半环，上述定义给出了定义 16 中介绍的标准团队语义。对于自然数半环，我们得到多重团队语义（Grädel 和 Wilke 2022年）；对于概率半环，我们则得到概率团队语义（Hannula 等人 2020）。

将依赖原子扩展到一阶逻辑所得的逻辑称为依赖逻辑。类似地，独立性逻辑和包含逻辑分别是一阶逻辑扩展条件独立原子和包含原子后得到的逻辑。关系原子和依赖原子的解释与第4.3节中的定义相同，不同之处在于，这里的定义形式为 $[\![-]\!]_{\mathfrak{A},\, \mathbb{X}} := [\![-]\!]_{\pi_{\mathfrak{A},\, \mathbb{X}}}$（而非 $[\![-]\!]_{\mathbb{X}} := [\![-]\!]_{\pi_{\mathbb{X}}}$），其中 $\pi_{\mathfrak{A},\, \mathbb{X}}$ 是一个为 $\mathfrak{A}$ 定义解释、同时编码 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathbb{X}$ 的模型。接着，我们规定：当 α 是原子或文字时，若 $[\![\alpha]\!]_{\mathfrak{A},\, \mathbb{X}} \neq 0$，则 $\mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{X}} \alpha$。注意，上述定义中对文字的处理与第4.3节的定义一致。

人们已经注意到，量子力学中的一些开创性“禁戒”定理，例如贝尔定理或科亨-施佩克定理，可以形式化为逻辑蕴涵 $\Sigma \vDash \phi$，其中 $\Sigma \cup \{\phi\}$ 是一组依赖逻辑或独立性逻辑公式（Albert 和 Grädel 2022;

Abramsky、Puljujärvi 和 Väänänen 2021）。在这一特定语境中，考虑关系团队语义还是概率团队语义并无区别。一般而言，两者也彼此关联：对于独立性逻辑，在概率团队语义下满足意味着在关系团队语义下满足；而对于依赖逻辑，反向蕴涵成立（Albert 和 Grädel 2022，定理 3.5；Durand 等人 2018a）。借助 K-团队，现在可以将这些结果表述为以下更一般的形式。

给定一组原子公式 C，我们用 FO(C) 表示带有 C 中原子公式的（一阶逻辑）FO（否定范式）扩展。若对于所有非零 $a \in K$，都存在非零的 b、$c \in K$ 使得 $a = b + c$，则称半环 K 为 $+$-稠密。

定理 18. 设 C 和 D 分别是 FO($=, \not=$? $\leq$)-可定义和 FO($\perp$? $\neq, \not\leq$)-可定义的原子公式。假设 $\phi \in$ FO(C) 且 $\psi \in$ FO(D)。设 $\mathfrak{A}$ 是一个一阶结构，$\mathbb{X}$ 是正半环 K 上的一个 K-团队，X 是 $\mathbb{X}$ 的概率坍缩。那么，$\mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{X}} \phi \Rightarrow \mathfrak{A} \vDash_X \phi$。此外，若 K 是 $+$-稠密的，则 $\mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{X}} \psi \Leftarrow \mathfrak{A} \vDash_X \psi$。

证明. 证明对公式进行结构归纳。推论 15 是原子情形。合取情形显然，而 $\vee$、$\exists$ 和 $\forall$ 的情形彼此相似。下面证明 $\vee$ 的情形。考虑如下内容：

$$\mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{Y}} \theta_1 \text{ and } \mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{Z}} \theta_2 \text{ for } \mathbb{Y}, \mathbb{Z} \text{ s.t. } \forall s : \mathbb{Y}(s) + \mathbb{Z}(s) = \mathbb{X}(s)$$
$$\mathfrak{A} \vDash_Y \theta_1 \text{ and } \mathfrak{A} \vDash_Z \theta_2 \text{ for some } Y, Z \text{ such that } Y \cup Z = X$$

根据定义，第一行等价于 $\mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{X}} \theta_1 \vee \theta_2$，第二行等价于 $\mathfrak{A} \vDash_X \theta_1 \vee \theta_2$。假设第一行成立，根据 $+$-正性，Y 和 Z 分别是 $\mathbb{Y}$ 和 $\mathbb{Z}$ 的支撑集，由此可得第二行。假设第二行成立，根据 $+$-稠密性，Y 和 Z 分别是 $\mathbb{Y}$ 和 $\mathbb{Z}$ 的支撑集，由此可得第一行。 □

5.2 代数 K-团队语义

接下来，我们通过受约束多项式$[\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\,\mathbb{X}}$ 对 K-团队语义进行重新表述。这些多项式可用于溯源分析和各种计数任务。由于使用了恒等式，受约束多项式是对 $(K, +, \cdot, 0, 1)$ 进行适当扩张后得到的项，其中加入了可用于建立项间恒等关系的 χ-函数。我们的方法可将 K-团队语义中的满足问题归约为 K的存在一阶理论。类似的归约也曾用于布尔团队语义和概率团队语义，以分析模型检验和可满足性的复杂性（Hannula 等人 2019；Hannula 等人 2020；Hannula 和 Virtema 2022；Durand、Kontinen 和 Väänänen 2022）

令 $\mathfrak{A}$ 为一个论域为 A的有限模型。令 V为一个有限变量集，并令 $\vec{a} \in A^V$。下文中，$\mathbb{X}(\vec{a})$表示一个取值于 K的变量。注意，固定$\mathbb{X}(\vec{a})$的解释后，对于所有 $\vec{a} \in A^V$，都能确定一个唯一的 K-团队 $\mathbb{X}$。受约束多项式$[\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\,\mathbb{X}}$还包含其他变量$\mathbb{Y}(\vec{b})$和 $\mathbb{Z}(\vec{c})$，它们表示在析取和量词的求值过程中产生的新团队，其中 $\vec{b} \in A^{V_1}$且 $\vec{c} \in A^{V_2}$，对于 V_1，$V_2 \supseteq V$。因此，$[\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\,\mathbb{X}}$定义了一个从 K^n 到 K 的函数（其中 n 是变量的数量$[\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\,\mathbb{X}}$），其在所有自由变量的取值固定后，会在 K 中得到一个值。

定义19。令 $\mathfrak{A}$ 为一个有限模型，V 为一个有限变量集。我们如下定义 K-解释$[\![\cdot]\!]_{\mathfrak{A},\,\mathbb{X}}$。下文中，$\chi$ 是等号的特征函数（相对于 K 中的 0 和 1），而 a 和 $\vec{a}$ 分别遍历 A 和来自 A的元组。注意，来自 $\vec{a} \in A^V$ 的每个元组都会导出一个赋值 $s : V \to A$，使得 $\vec{a} = (s(x_1) \ldots s(x_n)) = (s(x_1), \ldots, s(x_n))$。

$$[\![\phi \vee \psi]\!]_{\mathfrak{A},\mathbb{X}} = [\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\mathbb{Y}} \cdot [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A},\mathbb{Z}} \cdot \prod_{\vec{a}} \chi[\mathbb{Y}(\vec{a}) + \mathbb{Z}(\vec{a}) = \mathbb{X}(\vec{a})]$$
$$[\![\phi \wedge \psi]\!]_{\mathfrak{A},\mathbb{X}} = [\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\mathbb{X}} \cdot [\![\psi]\!]_{\mathfrak{A},\mathbb{X}}$$
$$[\![\forall x \phi]\!]_{\mathfrak{A},\mathbb{X}} = [\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\mathbb{Y}} \cdot \prod_{a, s:\mathrm{Dom}(\mathbb{X}) \to A} \chi[\mathbb{X}(\vec{a}) = \mathbb{Y}(\vec{a}_{s[a/x]})]$$
$$[\![\exists x \phi]\!]_{\mathfrak{A},\mathbb{X}} = [\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\mathbb{Y}} \cdot \prod_{s:\mathrm{Dom}(\mathbb{X}) \to A} \chi[\mathbb{X}(\vec{a}) = \sum_{a} \mathbb{Y}(\vec{a}_{s[a/x]})]$$

对于一阶文字和原子公式，我们采用第4.3节中定义的解释，并作出上一小节讨论的修改。回想一下，依赖关系和关系原子公式的 K-解释是通过将$\pi_{\mathfrak{A},\,\mathbb{X}} : \mathrm{Lit}_A \to K$ 映射 $R(\vec{a})$ 到 $\mathbb{X}(\vec{a})$ 来定义的，其中 R 是一个表示团队 $\mathbb{X}$ 的关系符号（不属于 $\mathfrak{A}$ 的词汇表）。我们进一步假设，除 R 外，$\pi_{\mathfrak{A},\,\mathbb{X}}$ 与 $\mathfrak{A}$ 的规范真值解释 $\pi_{\mathfrak{A}}$ 相同。

设 $T(\vec{x})$ 是一个一阶文字，$\mathfrak{A}$ 是一个结构。那么，$[\![T(\vec{x})]\!]_{\mathfrak{A},\,\mathbb{X}}$ 可以扩展为：

$$\prod_{s:\mathrm{Dom}(\mathbb{X}) \to A} \Big(\chi[\mathbb{X}(\vec{a}_s) = 0] + \chi[\mathbb{X}(\vec{a}_s) \neq 0] \cdot T\big(s(\vec{x})\big) \Big) \quad (5)$$

其中，$\mathbb{X}(\vec{a})$ 和 $T(\vec{a})$ 按照 $\pi_{\mathfrak{A},\,\mathbb{X}}$ 进行解释。现在，通过将形如 $\mathbb{X}(\vec{a})$ 的字符串视为取值于 K 的变量，可以将第4.3节中给出的文字和依赖关系的定义引入代数语义。

很容易证明，定义 17 中的 K-团队语义在以下意义上与代数K-团队语义一致。

命题20。 $\mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{X}} \phi$ 当且仅当 $\mathrm{Ran}([\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\,\mathbb{X}}) \neq \{0\}$，其中 $\mathrm{Ran}([\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\,\mathbb{X}})$ 是函数$[\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\,\mathbb{X}}$ 的值域，且 $\mathbb{X}(\vec{a})$ 的解释按 $\mathbb{X}$ 固定。

注意，任何受约束多项式$[\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\,\mathbb{X}}$ 都可以由 K 上的一阶公式定义，因此，检查 $\mathfrak{A} \vDash_{\mathbb{X}} \phi$可以（在多项式时间内）归约为 K 的带有 $\mathbb{X}(\vec{a})$ 额外常元的一阶存在理论。例如，文字 $T(\vec{x})$ 的满足可以用以下公式 ψ 表示；该公式定义在 $(K, +, \cdot, 0, 1)$ 的扩张上，并带有来自 K 的额外常元：

$$\psi := \bigwedge_{\mathfrak{A} \not\vDash_s T(\vec{x})} \mathbb{X}(\vec{a}_s) = 0.$$

现在，$[\![T(\vec{x})]\!]_{\mathfrak{A},\,\mathbb{X}} \neq 0$ 当且仅当 $(K, +, \cdot, 0, 1, \mathbb{X}(\vec{a}_1) \ldots, \mathbb{X}(\vec{a}_n)) \vDash \psi$。值得注意的是，可以在 K 的存在一阶理论中形式化句子的 K-团队语义，而无需引入来自 K 的额外常量。

6 结论与未来工作

我们在半环语义下定义了一种一阶逻辑的扩展，使其能够比较一阶公式的半环值。我们运用这一形式体系，以涵盖以往解释的方式定义了依赖和独立性等概念，并指出了它在研究不同半环之间依赖陈述的满足关系保持与蕴涵方面的优势。此前，数据库与概率论之间已对这类保持结果进行过研究。我们提出了一种受半环溯源启发的统一方法，通过新颖的半环团队语义分析依赖和独立性概念，该语义涵盖了以往考虑过的所有一阶团队语义变体。我们发现了团队语义文献中满足关系保持结果的一般性解释。最后，我们探讨了若干应用及未来研究方向。

6.1 公理化与逻辑蕴涵

众所周知，依赖和独立性在各种定义它们的语境中，其表现都具有显著的相似性。阿姆斯特朗公理（Armstrong 1974）就是一个例子，它描述了关系数据库中函数依赖的推理规则。在这一语境下，如果数据库中任意两个在属性集 X 上取值相同的元组，在属性集 Y上取值也相同，我们就说 Y函数依赖于 X。阿姆斯特朗公理似乎捕捉到了比这一概念本身更根本、更普遍的规律。例如，在考察香农信息度量时，如果随机变量 Y关于随机变量 X 的条件熵 $H(Y \mid X)$ 为 0，我们就可以说随机变量 Y函数依赖于随机变量 X。类似地，在线性代数中，如果子空间 Y中的每个向量都是子空间 X中向量的线性组合，我们就可以说向量空间 V的子空间 Y函数依赖于 V的子空间 X。在所有这些情形以及许多其他情形中，阿姆斯特朗公理都是可靠且完备的（例如，参见 Galliani 和 Väänänen 2022年）。

关于独立性的概念，两者既有相似之处，也存在差异。相似之处在于，(Geiger, Paz, and Pearl 1991) 在概率论背景下提出的边缘独立公理（此处指纯独立）$X \perp_{\varnothing} Y$ 已知在数据库背景下也是可靠且完备的（Kontinen, Link, and Väänänen 2013）。概率论与数据库理论中的逻辑蕴涵之间的这种对应关系，还适用于所谓的饱和条件独立（在数据库中即多值依赖）$Y \perp_X Z$，其中 $X \cup Y \cup Z$ 必须涵盖联合分布中的所有变量（在数据库中则涵盖关系模式的所有属性）（Wong, Butz, and Wu 2000）；这种对应关系也适用于其与函数依赖的扩展形式（Kenig and Suciu 2022）。然而，对于一般条件独立（在数据库中即嵌入式多值依赖），概率分布与数据库关系中的逻辑蕴涵并不相同（Studený 1992）。

值得注意的是，只要……，数据库理论与概率论之间的这种联系似乎就成立。

存在一个共同的信息论基础，数据库理论与概率论之间的这种联系似乎就成立。事实上，在这两种语境中，边缘独立、饱和条件独立和函数依赖都可以通过信息论度量来解释（Lee 1987；Galliani 和 Väänänen 2022）。另一方面，数据库理论中的嵌入式多值依赖似乎并没有明显的信息论解释。本文提出的半环方法成功统一了来自不同语境的依赖概念；尤其是概率论和数据库理论中的条件独立性。由此，它有望为这些相似之处和差异背后的根本原因带来新的认识。

为了说明这种半环方法可能揭示什么，我们举一个例子，展示独立性的公理性质有时如何取决于底层的代数性质。

例21. 若（交换）半环 a (K =,K, +, ·,0,1)的元素 b满足：对于所有 $c \in K$,$ab = ac$，若 $b = c$，则 K，则称其为可消去的。可以证明，如果每个元素 $a \in K \setminus \{0\}$都是可消去的，那么纯独立性公理对于-团队都是可靠的。如果这一条

表1：混合规则失效

$K = \mathbb{Z}_4$			
x	y	z	$\mathbb{X}(s)$
a_0	b_0	c_0	1
a_0	b_1	c_0	1
a_1	b_0	c_1	1
a_1	b_1	c_1	1
a_2	b_2	c_0	1
a_2	b_3	c_0	1
a_3	b_2	c_1	1
a_3	b_3	c_1	1

件不成立，纯独立性的混合规则（Geiger、Paz 和 Pearl, 1991年）则未必可靠。该规则指出，可以由 $x \perp yz$ 和 $x \perp y$ 推导出 $xy \perp z$。作为反例，模4整数环 $\mathbb{Z}_4$ 包含一个不可消去的元素 $2 \neq 0$。如果按照表1定义一个 $\mathbb{Z}_4$-团队 $\mathbb{X}$，我们会发现 $\mathbb{X}$ 满足 $x \perp y$ 和 $xy \perp z$，但不满足 $x \perp yz$。

6.2 数据溯源与计数证明

引入代数语义的部分动机，来自这样一个事实：$[\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\ \mathbb{X}}$ 可用于来源分析和计数任务。在数据溯源中，信息是从标记（或注释）中提取的。在 K-团队语义下，每个赋值都带有一个标记。通过对某种表达式进行解释，标记可用于追踪给定公式真值的来源。我们的目标是理解，在采用 K-团队语义的一阶结构中，公式如何最终为真。

设 K 是一个交换正半环。如果公式 ϕ 在一个非空的 K-团队中为真，那么我们希望得到一个多项式表达式，其中包含赋予 K-团队中每个赋值的半环值，并能解释 ϕ 为何为真。相反，如果给定公式为假，我们希望该表达式返回 0。

请注意，我们已在第 5.2 节中得到一个多项式表达式，其中注释在代数 K-团队语义的定义中发挥了作用。然而，文字的真值并没有注释。对于一个具体的 K-团队 $\mathbb{X}$，满足公式的不同方式数

ϕ 关于 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathbb{X}$，对应于 $[\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\mathbb{X}}$ 的支撑集基数（即定义域为 $\mathrm{Dom}([\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\mathbb{X}}) \setminus \mathrm{Dom}(\mathbb{X})$ 且表达式返回非零值的赋值数）。此外，还可以设计 $[\![\phi]\!]_{\mathfrak{A},\mathbb{X}}$ 来计数满足 ϕ（在 $\mathfrak{A}$ 上）的 K-团队 $\mathbb{X}$ 的数量（参见 Haak 等人，2019）。

为了追踪数据溯源，我们以与第4.3节类似的方式，为文字定义如下句子：

$$\phi^{\vec{i}}_{\text{prov-}T} := \forall \vec{x}\big(R(\vec{x}) = \bot \vee \big(R(\vec{x}) \wedge T(\vec{x}_{\vec{i}})\big)$$

接着，我们采用与第4.3节中定义的类似解释，为一阶文字和原子公式定义 K-团队数据溯源语义。若 $T(\vec{x})$ 是一阶文字，则 $[\![T(\vec{x})]\!]_{\mathbb{X}}$ 可展开为：

$$\prod_{s:\mathrm{Dom}(\mathbb{X})\to A} \Big(\chi[\mathbb{X}(\vec{a}_s) = 0] + \mathbb{X}(\vec{a}_s) \cdot T\big(s(\vec{x})\big)\Big).$$

对于一般公式，也可按第 5.2 节中的方式进行扩展。

6.3 修复

为了将数据库转换为对其意图建模的领域的准确反映，人们会对可能的数据库实例施加一些属性和条件，以避免不一致性。随后，数据库的一致性概念与一组完整性约束相关联，这些约束表达了数据意图（或需要）表示的一些语义结构。数据库因各种原因而变得不一致，这种情况很常见。当数据库不满足其完整性约束时，一种可行的方法是进行最小限度的更改，以获得满足这些约束的“相似”数据库。这样的数据库称为修复（Arenas、Bertossi 和 Chomicki 1999）。要对其作出恰当定义，必须准确确定“最小更改”的含义。文献中已提出并研究了多种定义，通常以数据库实例之间的距离或偏序来表示。采用哪种概念可能取决于具体应用。

我们使用 K-团队语义来确定给定的K-团队 $\mathbb{X}$ 是否满足一组完整性约束。如果我们有办法衡量 K-团队之间的距离，那么当完整性约束未得到满足时，我们可以要求对 $\mathbb{X}$ 进行修复，使其满足这些约束。也就是说，找到一个 K-团队 $\mathbb{Y}$，使得这些完整性约束在 $\mathbb{Y}$中得到满足，并且 $\mathbb{X}$ 与$\mathbb{Y}$ 在所需的距离度量下差异最小。接下来，我们将范围限定在有序半环上，并假定加法逆元存在（即有序环）。

由于 K-团队语义允许在K-团队中定义依赖关系，我们可以提出一种修复概念，同时考虑依赖或独立性。一种可能的做法是，为 K-团队定义一种非独立性的定量概念：利用赋值的权重，在半环中赋予一个值，以表示距离实现独立性还有多远。考察第4.3节中定义的独立性原子时，如果等式

$$\sum_s \mathbb{X}(s) \cdot \sum_{s(\vec{x}\vec{y})=\vec{a}\vec{b}} \mathbb{X}(s) = \sum_{s(\vec{x})=\vec{a}} \mathbb{X}(s) \cdot \sum_{s(\vec{y})=\vec{b}} \mathbb{X}(s)$$

对每一对 $\vec{a}$、$\vec{b}$都成立。反之，如果 $[\![x \perp y]\!]_{\mathbb{X}} = 0$，那么这些项中至少有一项为假。因此，对于每一对 $\vec{a}$、$\vec{b}$ for 如果等号不成立，我们就衡量它们距离相等还有多远。更准确地说，我们考虑：

$$[\![\vec{x} \not\perp \vec{y}]\!]_{\mathbb{X}} = \sum_{\vec{a},\vec{b}} \Big|\sum_s \mathbb{X}(s) \cdot \sum_{s(\vec{x}\vec{y})=\vec{a}\vec{b}} \mathbb{X}(s) - \sum_{s(\vec{x})=\vec{a}} \mathbb{X}(s) \cdot \sum_{s(\vec{y})=\vec{b}} \mathbb{X}(s)\Big|$$

其中，模 $|a-b|$ 定义为：若 $a-b>0$，则为 $a-b$；否则为 $b-a$，对任意 a、$b \in K$ 均成立。

我们现在介绍一种自然的方法，利用半环中的值来定义 K-团队之间的距离，随后引入一些 K-团队修复的概念。

设 $\mathbb{X}$、$\mathbb{Y}$ 是两个 K-团队。我们将 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$ 的对称差记为 $\mathbb{X}\triangle\mathbb{Y}$，它是一个 K-团队，其权重 $(\mathbb{X}\triangle\mathbb{Y})(s)$ 定义如下：

$$(\mathbb{X} \triangle \mathbb{Y})(s) = |\mathbb{X}(s) - \mathbb{Y}(s)|$$

据此，我们将 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{Y}$ 之间的距离定义为：

$$dist(\mathbb{X}, \mathbb{Y}) = \sum_s (\mathbb{X} \triangle \mathbb{Y})(s)$$

请注意，如果我们已经在 K（或 K^k）中有某种范数或距离，那么可以直接将该范数视为距离。此外，如果 K 中已有距离，我们就无需要求 K 存在加法逆元。

在此背景下自然出现的一些修复概念如下：给定一个 K-团队 $\mathbb{X}$ 和一个公式 ϕ，

- 相对于 ϕ 的 $\mathbb{X}$ 对称差修复，是满足 ϕ 的 K-团队 $\mathbb{Y}$，并且对于所有满足 ϕ 的 K-团队 $\mathbb{X}'$，均有 $dist(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \le dist(\mathbb{X}',\mathbb{Y})$。若 K 是布尔半环，这一概念就成为称为 C-修复的基数修复（Lopatenko 和 Bertossi，2007）。
- 相对于 ϕ 的 $\mathbb{X}$ 子团队修复（分别为超团队修复），是满足 ϕ 的 K-团队 $\mathbb{Y}$，且为 $\mathbb{X}$ 的子团队（分别为超团队），并且对于所有满足 ϕ 的 $\mathbb{X}$ 的子团队（分别为超团队），均有 $dist(\mathbb{X},\mathbb{Y}) \le dist(\mathbb{X}',\mathbb{Y})$。
- 假设 ϕ 具有 $\vec{x} \perp \vec{y}$ 的形式，我们还可以考虑使 $[\![\vec{x} \not\perp \vec{y}]\!]_{\mathbb{X}\triangle\mathbb{Y}}$ 最小化的修复概念。

6.4 复杂性与 K-机器

与我们将团队语义推广到半环的做法类似，也有几种方法将其推广到计算复杂性领域。一种著名的相关计算模型是所谓的 BSS模型（Blum、Shub 和 Smale，1989年）。半环 K 上的 BSS机器可以看作一台图灵机，只不过它使用 K 值寄存器组成的磁带，而非仅包含 0 和 1 的磁带。转移函数允许在单个步骤中对磁带上一个固定区间内的寄存器求值多项式函数。在他们的著作中（Blum等人，1997年），Blum、Cucker、Shub 和 Smale 主要运用这一计算模型，研究实数和复数领域的问题，阐明二者之间以及它们与图灵模型之间的差异。事实上，改变底层半环往往会对复杂性理论产生深远影响。以希尔伯特第十问题为例：判断一个整数系数多元多项式是否有整数解，这一问题不可判定。然而，若要询问是否存在

实数解，则该问题变为可判定问题。此外，是否存在一种通用的判定过程来检验有理数解是否存在，仍是一个开放问题。

未来工作的一个引人入胜的方向，是探究在 BSS复杂度的背景下，我们的形式体系能够证明哪些一般性结果。在布尔情形下，已知大多数团队逻辑刻画了 NP（Durand、Kontinen 和 Vollmer，2016）（因此也刻画了可访问布尔半环的 BSS机器上的 NP）；而 Hannula 等人 2020 则展示了概率独立逻辑与可访问概率半环的一种变体 BSS机器上的 NP 之间存在相应的刻画关系。

致谢

Miika Hannula 获得了欧洲研究理事会项目 101020762 的资助。Juha Kontinen 部分获得芬兰科学院项目 338259 的资助。Nina Pardal 获得了德国研究联合会项目 VI 1045-1/1 的资助。Jonni Virtema 部分获得了德国研究联合会项目 VI 1045-1/1 和芬兰科学院项目 338259 的资助。

参考文献

Abramsky, S.; Puljujärvi, J.; and Väänänen, J. 2021年. 量子物理中的团队语义与独立性概念. arXiv, 2107.10817.

Albert, R., and Grädel, E. 2022年. 通过依赖与独立逻辑统一量子力学中的隐变量问题. 《纯粹与应用逻辑年刊》173(10):103088.

Arenas, M.; Bertossi, L. E.; and Chomicki, J. 1999. 不一致数据库中的一致查询答案。载于 Vianu, V. 和 Papadimitriou, C. H. 编，《第十八届 ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART数据库系统原理研讨会论文集》，1999年5月31日至6月2日，美国宾夕法尼亚州费城，68–79。ACM Press。Armstrong, W. W. 1974. 《数据库关系的依赖结构》。载于《国际信息处理联合会世界计算机大会论文集》，580–583。Blum, L.; Cucker, F.; Shub, M.; and Smale, S. 1997. 《复杂性与实数计算》。柏林、海德堡：施普林格出版社。Blum, L.; Shub, M.; and Smale, S. 1989. 《关于实数上的计算与复杂性理论： np-完全性、递归函数与通用机》。Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 21(1):1–46。Chu, S.; Murphy, B.; Roesch, J.; Cheung, A.; and Suciu, D. 2018. 《决定SQL查询语义等价的公理基础与算法》。Proc. VLDB Endow. 11(11):1482–1495。Durand, A.; Hannula, M.; Kontinen, J.; Meier, A.; and Virtema, J. 2018a. 《通过多团队语义研究近似与依赖》。Ann. Math. Artif. Intell. 83(3-4):297–320。Durand, A.; Hannula, M.; Kontinen, J.; Meier, A.; and Virtema, J. 2018b. 《概率团队语义》。载于《信息与知识系统基础——第十届国际研讨会，FoIKS 2018，布达佩斯，匈牙利，2018年5月14日至18日，论文集》，186–206。Durand, A.; Kontinen, J.; and Väänänen, J. 2022. 《用于团队语义推理任务的模块化基于SAT的技术》。CoRR abs/2204.00576。Durand, A.; Kontinen, J.; and Vollmer, H. 2016. 《依赖逻辑的表达能力与复杂性》。载于《依赖逻辑》。施普林格。5–32。Galliani, P., and Väänänen, J. 2022. 《多样性、依赖与独立性》。Ann. Math. Artif. Intell. 90(2-3):211–233。Geiger, D., and Pearl, J. 1993. 《条件独立性与图模型的逻辑和算法性质》。统计年刊 21(4):2001–2021。Geiger, D.; Paz, A.; and Pearl, J. 1991. 《涉及概率独立性推理的公理与算法》。信息与计算 91(1):128–141。

Grädel, E., and Tannen, V. 2017. 一阶模型检测的半环溯源. CoRR abs/1712.01980.

Grädel, E., and Wilke, R. 2022年. 具有多团队语义的逻辑. ACM Trans. Comput. Log. 23(2):13:1–13:30. Grädel, E.; Helal, H.; Naaf, M.; and Wilke, R. 2022年. 半环语义下一阶逻辑的零一律与几乎必然赋值. In Baier, C., and Fisman, D., eds., LICS '22: 第37届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会, 海法, 以色列, 2022年8月2日至5日, 41:1–41:12. ACM. Green, T. J.; Karvounarakis, G.; and Tannen, V. 2007. 溯源半环. In Libkin, L., ed., 第二十六届ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART数据库系统原理研讨会论文集, 2007年6月11日至13日, 北京, 中国, 31–40. ACM. Gutsfeld, J. O.; Meier, A.; Ohrem, C.; and Virtema, J. 2022年. 时序团队语义再探. In Baier, C., and Fisman, D., eds., LICS '22: 第37届ACM/IEEE计算机科学逻辑年会, 海法, 以色列, 2022年8月2日至5日, 44:1–44:13. ACM.

Gyssens, M.; Niepert, M.; and Gucht, D. V. 2014. 关于半拟阵公理能否从饱和条件独立陈述推导任意条件独立陈述的完备性。《信息处理快报》114(11):628–633。

Haak, A.; Kontinen, J.; Müller, F.; Vollmer, H.; and Yang, F. 2019. 一阶团队逻辑中的团队计数。载于 MFCS, LIPIcs 第 138 卷，19:1–19:15。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik。Hannula, M., and Kontinen, J. 2016. 条件独立性与包含依赖的有限公理化。《信息与计算》249:121–137。

Hannula, M., and Virtema, J. 2022年. 概率团队语义与实数上的存在二阶逻辑中的可处理性边界。《纯粹与应用逻辑年刊》173(10):103108。

Hannula, M.; Hirvonen, Å.; Kontinen, J.; Kulikov, V.; and Virtema, J. 2019. 概率团队语义中的分布恒等式之面. 见 JELIA, 《计算机科学讲义》第11468卷，304–320。施普林格。

Hannula, M.; Kontinen, J.; den Bussche, J. V.; and Virtema, J. 2020. 实数计算与概率独立逻辑的描述复杂性. 见 Hermanns, H.; Zhang, L.; Kobayashi, N.; and Miller, D. 编，《LICS '20：第35届计算机科学逻辑年度研讨会》，萨尔布吕肯，德国，2020年7月8日至11日，550–563。ACM。Hannula, M.; Kontinen, J.; and Virtema, J. 2020. 多团队语义。《逻辑与计算杂志》30(8):1541–1566。Kenig, B., and Suciu, D. 2022年. 重新审视完整性约束：从精确蕴涵到近似蕴涵。《计算机科学逻辑方法》18(1)。Kontinen, J.; Link, S.; and Väänänen, J. A. 2013. 数据库关系中的独立性. 见《逻辑、语言、信息与计算——第20届国际研讨会 WoLLIC 2013》，达姆施塔特，德国，2013年8月20日至23日。论文集，179–193。Lee, T. T. 1987. 关系数据库的信息论分析——第一部分：数据依赖与信息度量。《IEEE软件工程汇刊》13(10):1049–1061。Lopatenko, A., and Bertossi, L. E. 2007. 基于基数和增量修复语义的数据库一致查询回答复杂性. 见 Schwentick, T., and Suciu, D. 编，《数据库理论——ICDT 2007：第11届国际会议》，巴塞罗那，西班牙，2007年1月10日至12日，论文集，《计算机科学讲义》第4353卷，179–193。施普林格。Malvestuto, F. M. 1986. 数据库信息内容的统计处理。《信息系统》11(3):211–223。Malvestuto, F. M. 1992. 用于数据库关系、概率分布和图的二元分解的唯一形式系统。《信息科学》59(1-2):21–52。Studený, M. 1992. 条件独立关系不存在有限完备刻画. 见 Kubík, S., and Vísek, J. 编，《布拉格第11届信息论会议论文集》，377–396。克卢维尔。Väänänen, J. 2007.《依赖逻辑》。剑桥大学出版社。Wong, S. K. M.; Butz, C. J.; and Wu, D. 2000. 概率条件独立性的蕴涵问题。《IEEE系统、人类与控制论汇刊A辑》30(6):785–805。Yeung, R. W. 2008. 信息论与网络编码。