arXiv:2303.07947v1 [math.CO] 14 Mar 2023

单纯复形与立方复形的典范球基

Paul C. Kainen *

摘要。本文为由 $\mathbb{Z}_2$ 维子复形构成的 k向量空间构造球基：这些子复形属于 n单形（或 n立方体），且每个 $(k-1)$-面都包含在正偶数个 k 胞腔中；加法定义为相应 k胞腔集合的对称差。基由一族通过算法指定的 $k+1$单形或$k+1$立方体的边界构成。本文研究了这些基的几何性质。

关键词。胞腔树，无 k相等空间，图的稳健循环基与连通和循环基，柏拉图立体骨架的同调，计算拓扑学。
数学主题分类（2010）。57N99，57M15，55N31。

1. 引言

图 G 的循环基是由连通的 2-正则子图构成的极小族，使得 G 的每个偶度子图都是该基的某个子集的模 2 和；“模 2”是指一条边出现在和中，当且仅当它在和中出现奇数次。

图的循环基可以构造出具有特殊性质的形式，例如基本循环基（可由生成树构造） [30], 、最小循环基（边的总数最少） [26], ，以及稳健循环基或连通和循环基（具有类似于壳化中面排序的重排性质） [27, 19]。

我们描述了适用于单形复形和立方复形的类似基，这些基具备上述全部或几乎全部性质，并对其作了适当的推广。

*即将在《结理论及其应用杂志》发表，已于 2022 年 6 月 25 日接受发表

此外，我们的基是典范的：对于 $1 \leq k \leq n-1$， n 维单形 Δ_n 或 n 维立方体 $\mathcal{Q}_n$ 的偶 k 维子复形，其基由整数对 (n, k) 唯一确定（并结合单形的基点选择以及立方体的坐标排序选择），因此可以预先计算并存储，以加速拓扑计算。将典范球作为基元素，可能对持久同调 [8, 11, 17, 39]的各个方面有所帮助。

用球面实现同调类这一一般问题可追溯至 Steenrod [14, 问题 24], 。他曾提出（按照 Eilenberg 的表述）："对于复形 K 上取整数系数的 z在 $H_n(K)$ 中的同调类，成为球面类的必要且充分的代数条件是什么？"Landweber [31]将这一问题拓展到了稳定同调。

利用 $\mathbb{Z}_2$ 系数 [25, p. 7],的简便自然性质，我们的基可将立方体和单形 k-骨架的 k阶同调张成向量空间。本文不讨论交叉多胞体。

单纯形基早已为人所知（但其特殊性质尚不为人所知），而我们的立方体基似乎是新的 [28]。对于 $k = 1$，单纯形基具有稳健性 [27]，而立方体基具有连通和性质 [28]。参见下文第 5 节。

每个基的基数等于相应 n维多胞体的 k-骨架的贝蒂数（第 2 节），因此可由欧拉–庞加莱方程表示。我们的构造给出了另一种表达形式，由此可得二项式恒等式。我们还展示了它们与拓扑组合学、胞腔树以及无-k-相等空间之间的联系（参见第 6 节）。

对于 Δ_n 的 k-骨架，我们的基由 Δ_n 中所有包含某个固定顶点的 $k+1$-面的边界组成，因此该基也取决于一个基点。由于单形的边界是一个球面，这就是一个球基。

在 n-立方体中， k-骨架的球基通过一种递归构造得到，该构造取决于坐标的顺序排列。

例如，关于顺序 (1, 2, 3, 4, 5)， 5-维立方体 $[0,1]^5$ 的二维骨架的一组基 $\mathcal{B} = \{z_1, \ldots, z_{31}\}$ 如下给出：令

$$z_1 := \partial(Q(1,2,3)), \text{ where } Q(1,2,3) := \{(x_1, \ldots, x_5) : x_4 = 0 = x_5\}.$$

在 Q(1, 2, 3) 的 6 个正方形面上，分别沿第四坐标方向构造一个 3-立方体，并将第五坐标固定为零。这六个立方体的边界是球面 z_2、.....、 z_7，而 $\{z_1, \ldots, z_7\}$ 是二维骨架的一个基

。如果现在取 4-维立方体的 24 个正方形面，并沿第五坐标方向重复这一过程，就会得到 24 个新的球面，而由此得到的 31 个球面构成 5-维立方体二维骨架的一个基。前三个坐标的顺序无关紧要。

任意偶子图都是若干圈的边不相交并，因此，对任意图，都可以选取一个循环基，使得任意偶子图都包含其所表示的那些基元素。但对于环面来说，这是不可能的。环面是一个偶二维复形，却没有球面子复形。然而，在我们的基中，环面是若干球面的模 2 和。将五个基元素相加（排除两个“相对侧”的立方体边界），便可在 $\mathcal{Q}_4$ 的二维骨架中得到一个环面子复形；见 [22, 图 6]。

下文第 2 节定义术语并列出所用结果。第 3 节讨论立方体，第 4 节讨论单形。第 5 节将圈基性质推广到 $k > 1$。最后一节讨论枚举中的巧合、二项式恒等式以及几何组合学中的一些主题。

2. 复形、圈空间与同调

我们研究单形复形和立方复形，两者都是多胞体复形 [38, p. 127]。为方便起见，这里定义几个基本术语；其他术语请参见 Ziegler [38] 和 Spanier [36]。我们用 $\mathbb{Z}_2$ 表示 2 元向量空间。对于 d 正整数，$[d] := \{1, \ldots, d\}$；$|A|$ 表示集合 A的基数。

n-单形是 $n+1$ 标准单位向量的凸包

$$\Delta_n := \mathrm{conv}(\{e_1, \ldots, e_{n+1}\})$$

其 k-面是相应的各个子集的凸包

$$\{e_j : j \in J \subseteq [n+1]\}, |J| = k+1.$$

n-立方体是 n 个单位区间的乘积，$\mathcal{Q}_n := [0,1]^n$。它的 k-面是各种形如 $A \times B$的子空间，其中 A 是对应于 $[n]$ 的某个 k元子集的 k-立方体，而 B 是由补集确定的$n-k$-立方体中的一个顶点。

对于 $X := \Delta_n$ 或 $\mathcal{Q}_n$，令 X^k 表示 X 的 k骨架（所有维数为 $\leq k$的面）。如果 X 的子复形 Y中，k 是最大

的面维数，则称其为 Y的维数，并记作 $\dim\, Y := k$。因此 $\dim X^k = k$。如果 $\dim Y = k$，我们称 Y 为 k-复形。注意，对于足够大的 n，每个 k-复形都是 X 的 k骨架的子复形。若 Y是某个 k的 k-复形，则称 Y为复形。

对于 $\ell \geq 0$ 以及包含于 X 中的任意 k-复形 Y，我们用 $C_\ell(Y)$ 表示以 Y 的所有 ℓ-面组成的集合为指标的 $\mathbb{Z}_2$-向量空间，因此 $C_\ell(Y) = 0$ for$\ell > k$。存在一个 $\mathbb{Z}_2$-线性边界算子 $\partial_\ell \colon C_\ell(X) \to C_{\ell-1}(X)$，它将一个 ℓ-胞腔 c 映射为由 c，$\ell \geq 1$ 的 $(\ell-1)$-面构成的形式和，即一个 $(\ell-1)$-链。令 $Z_\ell := Z_\ell(Y) := \ker\, \partial_\ell$， $B_\ell := \mathrm{im}\, \partial_{\ell+1} \subseteq Z_\ell$，且$H_\ell := H_\ell(Y) := Z_\ell / B_\ell$。令 b_ℓ 为 H_ℓ 的 $\mathbb{Z}_2$-维数（贝蒂数）。

若一个 k-复形 Y中，每个 $(k-1)$-面都包含于 Y 中正偶数个 k-面内，则称其为偶的。这些恰好是经 ∂_k 映射为零的 k-链；也就是说， $Z_k(Y)$ 是 Y 的所有偶 k-子复形组成的集合。流形和伪流形 [36, 第 148–150] 页均为偶复形。

对于 X 一个 n-复形和 $k \leq n-1$,

$$H_k(X^k) \cong Z_k(X^k) \cong Z_k(X).$$

因此， $b_k(X^k)$ 是 X 中偶 k-复形的一个基的基数。

复形 Y 的每个 ℓ-面都是一个 ℓ-胞腔，它是一个维数为 ℓ 的闭拓扑球（更具体地说，是一个单形或立方体）。每个（有限）复形都有由其胞腔上的拓扑余诱导的唯一拓扑，并且是一个紧豪斯多夫空间。对于 T 一个拓扑空间，T-复形是与 T 同胚的复形。注意， $X^k = \Delta_n^k$ 或 $\mathcal{Q}_n^k$ 是偶的，当且仅当 $n-k$ 是奇的，因为很容易验证，在 n-单形和 n-立方体中，包含任意 $k-1$-胞腔的 k-胞腔数量为 $n-k+1$。

对于 Y一个 k-复形， $Y^{(j)}$ 表示 Y 中所有 j-胞腔的集合， $j \geq -1$ 中$Y^{(j)} = \emptyset$ 满足 $j > k$; 在维数 $j = -1$ 上有一个唯一的“空”胞腔。 $Y^{(j)}$ 中的元素分别称为 $j = 0$、1、$k-1$ 或 k 的顶点、边、侧面或面。若每个胞腔都是某个面的面，则该复形是纯的。

我们使用 Mayer–Vietoris序列 [25, p. 148], ，它对任意系数域都成立（因此也适用于 $\mathbb{Z}_2$）。对于单纯复形 Y, Y'，存在一个同调长正合序列 [36, p. 187],

$$\cdots \to H_k(Y \cap Y') \to H_k(Y) \oplus H_k(Y') \to H_k(Y \cup Y') \to H_{k-1}(Y \cap Y') \to \cdots. \tag{1}$$

对于 $k \geq 2$，当 $Y \cap Y'$ 可缩时，(1) 中间的各项彼此同构。若 Y 和 Y' 是立方胞腔复形，同样的结论也成立。

3. 立方体偶子复形的球基

设 $k \geq 2$。对于每个 $n \geq k+1$，我们构造一个 $Z_k(\mathcal{Q}_n^k)$ 的基 $\mathcal{B}(n,k)$，然后在一个定理中陈述其性质。

对于 $n = k+1$，我们有 $\mathcal{B}(n,k) = \{\partial\mathcal{Q}_n\}$。对于 $n \geq k+1$,

$$\mathcal{B}(n+1,k) \setminus \mathcal{B}(n,k) := \{\partial(s \times [0,1]) : s \in \mathcal{Q}_n^{(k)}\} \tag{2}$$

正是坐标的线性排序（在第一个 $k+1$ 之后）决定了哪些 $k+1$-立方体边界属于该基。递归生成的球形 k 维子复形集合 $\mathcal{B}(n,k)$ 在 $\mathbb{Z}_2$ 上线性无关。事实上，除第一个之外，每个额外的 $\partial\mathcal{Q}_{k+1}$ 同构副本都包含一个k-面（与该副本所附着的 k-面相对），而这个面不属于任何其他球面，因此，线性组合为零，当且仅当该组合的所有系数也都为零。现在我们证明 $\mathcal{B}(n,k)$ 是一个基。

定理 1. 设 $k \geq 1$。那么对于每个 $n \geq k+1$，(i) $\mathcal{B}(n,k)$ 是 $Z_k(\mathcal{Q}_n^k)$ 的一个基，并且 (ii) $\mathcal{Q}_{n+1}$ 中的每个 k-立方体都是 $\mathcal{B}(n,k)$ 中某个成员的面。

证明。该结果已在 $k = 1$ 中得到证明；现在固定 $k \geq 2$，并对 n 使用归纳法；显然，当 $n = k+1$ 时，(i) 和 (ii) 成立。由归纳假设，对于 $n \geq k+1$, $|\mathcal{B}(n,k)| = b_k(\mathcal{Q}_n^k)$ 且

$$U(\mathcal{B}(n,k)) := \{c : c \in S \text{ and } S \in \mathcal{B}(n,k)\} = \mathcal{Q}_n^{(k)}.$$

于是 (ii) 对 $n+1$ 成立，因为

$$U(\mathcal{B}(n+1,k) = \mathcal{Q}_n^{(k)} \cup \{c : c \in \partial(s \times [0,1]), s \in \mathcal{Q}_n^{(k)}\} = \mathcal{Q}_{n+1}^{(k)}.$$

因此，$\mathcal{Q}_{n+1}^k$ 是 $\mathcal{Q}_n^k$ 与 $\mathcal{B}(n+1,k) \setminus \mathcal{B}(n,k)$ 中的 k-球面的并集，我们称这些球面为附着球面。事实上，对于每一对 (n,k)，由 (i) 可推出 (ii)，但实际上我们需要用 (ii) 来证明 (i)。

对于任意 $\ell \geq 2$，$\ell+1$ 立方体是一个 ℓ 立方体与单位区间的（笛卡尔）积。后方的 ℓ 立方体对应最后一个坐标为 0 的情形，而前方的 ℓ 立方体对应最后一个坐标为 1 的情形。侧立方体 ℓ 是单位区间与原 ℓ 立方体的 $\ell-1$ 子立方体的积。任意排列附着球面 $\binom{n}{k}2^{n-k}$ S_1、S_2、.....、S_t 的顺序；那么 S_i 与 $\mathcal{Q}_n^k$ 和 $\bigcup_{r=1}^{i-1} S_r$ 的并集在其后方的 k 面上相交，且还与侧立方体的一个子集相交

侧立方体。因此，每个球面与 $\mathcal{Q}_n^k$ 及所有先前附着球面的并集的交都是可缩的。

对于每个 i，$1 \le i \le t = \binom{n}{k}2^{n-k}$，应用 Y等于$\mathcal{Q}_n^k \cup \bigcup_{r=1}^{i-1} S_r$ 且 $Y' = S_i$ 时的梅耶–维耶托里同构 (1)，每附加一个球面，便使并集的 k阶同调维数增加 1。因此，$b_k(\mathcal{Q}_{n+1}^k) = b_k(\mathcal{Q}_n^k) + \binom{n}{k}2^{n-k}$，所以对$\mathcal{Q}_n^k$ 使用 (i) 和 (2)，

$$b_k(\mathcal{Q}_{n+1}^k) = |\mathcal{B}(n,k)| + \binom{n}{k}2^{n-k} = |\mathcal{B}(n+1,k)|.$$

因此，对于每个 n，$\mathcal{B}(n,k)$ 是一个极大线性无关集，因而也是一个基。 □

4. 单形偶子复形的球基

对于 $1 \le k \le n-1$，由欧拉–庞加莱公式，$b_k(\Delta_n^k) = m'(n,k)$，其中

$$m'(n,k) := \sum_{j=-1}^{k} (-1)^{k-j}\binom{n+1}{j+1} = \binom{n+1}{k+1} - \binom{n+1}{k} \pm \cdots + (-1)^{k+1}. \tag{3}$$

令 $\mathcal{C}'(n,k)$ 为所有包含于 Δ_n 且包含 Δ_n 的顶点 1 的 $k+1$-单形 Δ' 所构成的族。设 $\mathcal{B}'(n,k) := \{\partial c\colon\ c \in \mathcal{C}'(n,k)\}$。根据定义

$$|\mathcal{B}'(n,k)| = \binom{n}{k+1}. \tag{4}$$

定理 2。设 $1 \le k \le n-1$。则 $\mathcal{B}'(n,k)$ 是 $\mathbb{Z}_k(\Delta_n)$ 的球基。

证明。将 $\binom{n}{k+1} - m'(n,k)$ 写成 $k+3$ 项之和，并使用二项式递推 $k+1$ 次，得到 $(-1)^{k+2} + (-1)^{k+1} = 0$。因此，$\mathcal{B}'(n,k)$ 的基数等于一个基的基数。由于它是线性无关的，它必定是一个基。□

由此可得，$b_k(\Delta_n^k) = \binom{n}{k+1}$；参见 [13, §4.1], [37]。由 $\mathcal{B}'(n,k)$ 的成员生成的单纯复形是一个移位复形 [12],，因此 $b_k(\Delta_n^k)$ 是不含 1 的面数，这与我们的结果一致。若一个纯 k-复形的面可以按如下方式排序，则它是可剥壳的：每个面与此前各面的并集相交于一个纯 $k-1$-复形。可剥壳复形存在球基 [2], 多胞体的边界复形是可剥壳的 [7], ，而可剥壳复形的 k-骨架也是可剥壳的 [4]。基 $\mathcal{B}'(n,k)$ 也出现在拟阵理论中 [2]。

5. 基的一些性质

我们首先指出由两个定理得出的推论。

推论 3. 设 Y 是 $X = \Delta_n$ 或 $\mathcal{Q}_n$ 的纯偶 k 子复形。那么，Y 是相应基 $\mathcal{B}'$（n，k）或 $\mathcal{B}$（n，k）中至多 b_k 个互不相同的 k 维球面的一个族的模 2 和。

循环基的极小性当然适用于我们的两个基，因为它们在 Z_k（X）中都只使用最小规模的元素，其中 X 是 n 单形或 n 立方体。连通图中的任何生成树都唯一确定一个循环基，其中每个圈由图中的一条非树边生成。这种循环基称为基本循环基；要将这一性质解释到 $k > 1$ 上，则需要推广“生成树”的概念。

当 $k = 1$ 时，两个基 $\mathcal{B}'$（n，k）和 $\mathcal{B}$（n，k）具有并非所有循环基 [19] 都具备的递归性质。$k > 1$ 也可能具有某些类似的性质，因为递归中的关键条件——所添加的两个圈交于一条非平凡公共路径——可以推广：两个 k 球面的连通和仍是一个 k 球面。但是，$\mathcal{B}$，$\mathcal{B}'$ 并非万灵药 [18]。

如果图的循环基 $\mathcal{R}$ 满足以下条件，则称其为稳健的：对于图中的每个圈 z，都能找到 $\mathcal{R}$ 中的一个（有限）序列，使得 z 是这些项的模 2 和，且每个加项都与之前各项之和相交于一条非平凡路径 [27]。因此，每个部分和也都是一个圈。

循环基 $\mathcal{B}'(n, 1)$ 是 $Z_1(K_{n+1})$ 的稳健基，见命题 [27, 。将这一概念推广到 1]，我们提出问题：$k > 1(\mathcal{B}',n)$ 是 $k(Z_k)$ 的稳健基吗?

超立方体图 $\mathcal{B}$的循环基 $n(Q_n, 1)$ 具有一种较弱的递归性质，称为连通和 [28, 19]：图中的任意圈都可以通过反复执行稳健基所述的步骤构造出来。第一次迭代从原基构造出一个圈族。在之后的迭代中，使用基以及前几次迭代中构造出的圈，直至经过有限次迭代形成所有圈。将此推广到 $k > 1$，我们提出问题：$\mathcal{B}(n, k)$ 是 $Z_k(\mathcal{Q}_n)$ 的连通和基吗?

如果两个圈的模 2 和具有某种性质，那么当它们相交于一条非平凡路径时，若两个加数都具有该性质，我们就称这种圈的性质为协同性质 [19] 。连通和基中的所有圈都具有的任何协同性质，也必定为图中的所有圈所具有。例如，Q_5 有超过 510 亿个圈（OEIS [35]中的数列 A085408），但其循环基 $\mathcal{B}$（5, 1）中只有 49 个元素，而该基是一个连通和基。

这些基提供了球面基元，可以依次相加，从而构造出任意球面对象。立方复形在应用中似乎更自然，尤其是在图形学中；不过，考虑一个 k 维单纯复形 Y，并设 Δ_n 是一个包含 Y 且至少还包含一个顶点 1 的单形。令 $1 * \sigma$ 表示 1 与 k 在 Y 中的一个单形 σ 的拓扑连接所形成的（k+1）单形。然后我们定义

$$M(Y) := M := \sum_{\sigma \in Y^{(k)}} \partial(1 * \sigma) \tag{5}$$

因此， M 是由 $\mathcal{B}'(n,k)$ 中这些按典范方式给出的成员的模 2 和。

这对于单纯形模型而言，或许比对于立方模型更有优势。

在 [20, 21, 23], 中，我们采用了完全不同的方法来研究柏拉图多胞体的 k-骨架；在几乎所有情况下，我们都能将立方体和单形的偶 k-骨架分解为面不相交的球面（立方体的情况几乎总是如此，而单形的情况则总是如此）。

6. 讨论

固定 $k \geq 1$ 并令 $n \geq k+1$。我们的构造表明

$$s(n,k) := |\mathcal{B}(n,k)| = \sum_{j=k}^{n-1} \binom{j}{k} 2^{j-k}. \tag{6}$$

但是， $m(n,k) := b_k(\mathcal{Q}_n^k)$ 可以通过欧拉–庞加莱公式 [24, p. 146], [25, p. 25], 计算，得到一个看起来相当不同的表达式。

$$m(n,k) = (-1)^{1+k} + \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{n}{j} 2^{n-j}. \tag{7}$$

定理 1 蕴含 $s(n,k) = m(n,k)$。反过来，若通过计算机代数证明 $s(n,k) = m(n,k)$，则可推出定理 1。事实上， m和 s都满足递推关系 $T(n,k) = 2\,T(n-1,k) + T(n-1,k-1)$，其中 $1 \leq k \leq n-1$；这可借助 Mathematica [41], 验证，Mathematica 应用了高斯超几何连续关系恒等式——参见数学函数数字图书馆 [40, 15.5.15]。

由 $s(n,k)$ 给出的数列，其中 $n = k+1, k+2, \ldots$，且 $k = 1$、2、3、... 1、5、17、49、129、321、769、1793、... 1、7、31、111、351、1023、2815、7423、... 1、9、49、209、769、2561、7937、23297、... 构成一个三角数组；参见 OEIS [35, A119258] 和 [34]。

对于 $1 \leq k \leq n-1$，这些数列是与无 k 相等空间$M^{\mathbb{R}}_{n,\ k}$相关的某些（整数）上同调群和同调群的秩 [3, 5, 1]，该空间是 $\mathbb{R}^n$ 中

$$V^{\mathbb{R}}_{n,k} := \{x \in \mathbb{R}^n : \exists J \subseteq [n]\ s.t.\ |J| = k \text{ and } x_j \text{ is constant } \forall j \in J\}.$$

特别是，Bjorner 和 Welker 发现 [5]，对于 $n \geq k$,

$$\mathrm{bw}(n,k) := \mathrm{rank}\Big(H^{k-2}(M^{\mathbb{R}}_{n,k}, \mathbb{Z})\Big) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \binom{i-1}{k-1},\ k \geq 3. \quad (8)$$

计算表明，bw(n, 3) $= s(n, 2)$ 是 [35], 中的数列 A055580，而 bw(n, 4) $= s(n, 3)$ 是 A027608，下一个数列是 A211386。

有若干个不同的公式都能得到这些相同的数列。参见 [15, 16, 34]，其中证明了这些公式在代数上相等。

Green [15, 定理 4.1.2] 表明，对于包含在半立方体 [9, §8.6]中的 CW 复形$C_{n,k}$，$b_{k-1}(C_{n,k})$ 可表示为交错和

$$b_{k-1}(C_{n,k}) = \mathrm{gr}(n,k) := \sum_{i=k}^{n} (-1)^{k+i}\, 2^{n-i} \binom{n}{i} \quad (9)$$

Green 还证明了 [15, 推论 4.1.6]

$$\mathrm{gr}(n,k) = \mathrm{bw}(n,k). \quad (10)$$

高维中的树状结构已经被研究了几十年；例如，Pippert、Beineke [33], Dewdney [10], Bolker [6], Kalai [29], 和 Lyons [32]。Duvall、Klivans 和 Martin [13] 将一个 k维 CW 复形的胞腔生成树定义为面中满足某些条件的一个子集，该子集包含 $n-1$骨架，并且满足关于整数同调的一些条件。

Baryshnikov、Klivans 和 Kosar [1, 定理 1.1] 证明，$\mathcal{Q}^{k+1}_n$的 $k+1$-胞腔生成树 T 中面数为 $b_{k-1}(M^{\mathbb{R}}_{n,\ k-1})$。

此外，他们证明，对于 $\mathbb{R}^n$ 中任意凸多胞体P的 $k+1$-骨架上的生成树 T， T 有 $|T| = b_k(P^k)$ 个面 [1, 命题 5.2]。

设 $\mathcal{C}(n,k)$ 为边界是 $\mathcal{B}(n,k)$ 的 $k+1$-立方体族。我们猜想， $\mathcal{C}(n,k)$ 是 $\mathcal{Q}_n^{k+1}$ 的一个 $(k+1)$-胞腔生成树，并且 $\mathcal{C}'(n,k)$ 是 Δ_n^{k+1} 的一个 $(k+1)$-胞腔生成树。

致谢：感谢斯洛文尼亚的同事（Drago Bokal）和希腊的同事（Stratos Prassidis 和 Sofia Lambropoulou），他们在 2018 年夏季准备本文初稿期间营造了富有启发性的研究环境。也感谢审稿人提出的宝贵意见并指出与拟阵的联系，还感谢 Michael Somos 指出了高斯恒等式的作用。

参考文献

[1] Y. Baryshnikov, C. Klivans, & N. Kosar，关于无 k相等空间的拓扑，arXiv:1708.00032v1 [math.CO]。[2] A. Bj¨orner，拟阵与几何格的同调和可壳性，《拟阵应用》，N. White 编，剑桥大学出版社，剑桥，1992，第7章。[3] A. Bj¨orner, L. Lov´asz, & A. C. C. Yao，线性决策树：体积估计与拓扑界，第170–177页，STOC, 1992。[4] A. Bj¨orner & M. L. Wachs，可壳非纯复形与偏序集 I，《美国数学会汇刊》348 (4) (1996) 1299–1327。[5] A. Bj¨orner & V. Welker，“k-相等”流形及相关分划格的同调，《数学进展》110 (1995) 277–313。[6] E. D. Bolker，单纯几何与运输多胞体，《美国数学会汇刊》217 (1976) 121–142。[7]H. Bruggesser & P. Mani，胞腔与球面的可壳分解，《斯堪的纳维亚数学杂志》29 (2) (1972) 197–205。[8] D. Cohen-Steiner, H., Edelsbrunner, J., Harer，持久图的稳定性，《离散与计算几何》37 (1) (2007) 103–120。

[9] H. S. M. Coxeter，《正则多胞体》，Dover，纽约，1973（原版1963）。[10] A. K. Dewdney，高维树结构，《组合理论杂志（B辑）》17 (1974) 160–169。[11] T. K. Dey, T. Li, & Y. Wang，高效计算最小同调基的算法。载于：拉丁美洲理论计算机科学研讨会，第376–398页（2018）。Springer[12] A. M. Duval，移位单纯复形与代数移位，预印本，美国数学会区域会议，宾厄姆顿大学，2003。[13] A. M. Duval, C. J. Klivans & J. L. Martin，《单纯树与胞腔树》，载于《组合学新趋势》，第713–752页，A. Beveridge, J. Griggs, L. Hogben, G. Musiker, P. Tetali 编，IMA数学及其应用丛书，第159卷。Springer，Cham，2016。[14] S. Eilenberg，关于拓扑学问题，《数学年刊》50(2) (1949) 247–260；发表于1946年12月普林斯顿大学建校二百周年庆典。[15] R. M. Green，源自半立方体的同调表示，《数学进展》222 (1) (2009) 216–239。[16] R. M. Green & J. T. Harper，多胞体上的莫尔斯匹配，《代数与几何拓扑》12 (2012) 2429–2450。[17] M. Guerra, A. De Gregorio, U. Fugacci, G. Petri & F. Vaccarino，通过最小同调基构造同调骨架，arXiv 2004.11606v1，2020年4月24日。[18] R. H. Hammack，图的循环性，《图论杂志》32 (2) (1999) 160–170。[19] R. H. Hammack & P. C. Kainen，图基与图表交换性，《图与组合》34(4) (2018) 523–534。[20] R. H. Hammack & P. C. Kainen，关于柏拉图多胞体的二骨架，《希腊数学会通报》62 (2018) 94–102。

[21]R. H. Hammack & P. C. Kainen, 《超立方体的球分解》, Art Discr. Appl. Math. 3 (2) (2020): #P2.09, 8页。 doi.org/10.26493/2590-9770.1285.fd8[22] R. H. Hammack & P. C. Kainen, 《超立方体亏格的新视角》, 《美国数学月刊》128 (4) (2021) 352–359。[23] R. H. Hammack & P. C. Kainen, 《柏拉图多胞体分解为典范球》, Geombinatorics, XXXI(1) (2021) 5–9。[24] A. Hatcher, 《代数拓扑》, 剑桥大学出版社, 2001。[25]J.-C. Hausmann, 《模二同调与上同调》, Springer, Cham, 2014。[26] J. D. Horton, 《求图的最短圈基的多项式时间算法》, 《SIAM计算杂志》16 (2) (1987) 358–366。[27] P. C. Kainen, 《关于稳健圈基》, 载于《第九届图论（组合学、算法与应用）四年一度国际会议论文集》, Y. Alavi、D. Jones、D.R. Lick、J. Liu 编, 2000年6月, 美国密歇根州卡拉马祖, Elec. Notes in Discr. Math., 11, 爱思唯尔（2002）。[28] P. C. Kainen, 《圈构造与测地圈及其在超立方体中的应用》, Ars Math. Contempor. 9 (2015) 27–43; http://amc-journal.eu/index.php/amc/article/view/450/653。[29] G. Kalai, 《Q-无环单纯复形的枚举》, Israel J. Math. 45 (1983) (4) 337–351。[30] K. Klemm & P. F. Stadler, 《关于基本、非基本和稳健圈基的注记》, Discrete Appl. Math. 157 (2009) 2432–2438。[31] P. S. Landweber, 《稳定同调的Steenrod可表示性》, Proc. American Math. Soc. 18(3) (1967) 523–529。[32] R. Lyons, 《随机复形与 ℓ^2贝蒂数》, J. Topol. Anal. 1 (2009) (2) 153–175。

[33] R. E. Pippert & L. W. Beineke, 《二维树的刻画》, 载于《图论的多面性》, G. Chartrand & S. F. Kapoor, Springer, 数学讲义第110卷, 1969, 第263–270页。[34] M. Shattuck & T. Waldhauser, 《用末平方方法证明若干二项式恒等式》, 《斐波那契季刊》48 (4) (2010) 290–297。[35]N J A Sloane, 《在线整数数列百科全书》, http://oeis.org。[36] E. H. Spanier, 《代数拓扑》, 麦格劳-希尔, 纽约, 1966。[37] Taladris 提问, Zhen Lin 作答, Math Stack Exchange, 2014年7月28日。 https://math.stackexchange.com/questions/880201/simplicial-单纯形骨架的同调[38] G. M. Ziegler, 《多胞体讲义》, Springer, 纽约, 1995。[39] A. J. Zomorodian & G. Carlsson, 《计算持久同调》。《离散与计算几何》 33 (2) (2005) 249–274[40] https://dlmf.nist.gov/, 《数学函数数字图书馆》。[41] Mathematica（版本11.3）, Wolfram Research, Inc., 伊利诺伊州尚佩恩。

Paul C. Kainen, 乔治城大学
kainen@georgetown.edu